ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

GUY FOURS

Lois β sur les cônes homogènes

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 51, série *Mathématiques*, n° 9 (1974), p. 22-30

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1974__51_9_22_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LOIS β SUR LES CONES HOMOGENES

Guy FORT

Généralités

Un cône ouvert V de E_n , espace vectoriel réel de dimension n , est dit homogène si

- V ne contient pas de droites
- il existe un groupe G de transformations linéaires conservant V
(i.e. $g(V) = V$) agissant de façon transitive sur V : c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in V \quad \exists g \in G : x = g(y)$$

Il est alors possible de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1

Si V est un cône homogène, il existe un groupe $G(V)$ de transformations linéaires conservant V tel que

- $G(V)$ agisse de façon simplement transitive sur V
- $$\forall x, y \in V \quad \exists ! g \in G(V) : x = g(y)$$
- tous les éléments de $G(V)$ soient simultanément réductibles à la forme triangulaire supérieure.

Nous transférons alors la structure de groupe de $G(V)$ sur V en choisissant un point e dans V et si g_x est défini par l'égalité $g_x(e) = x$, en posant $xy = g_x(y)$.

La loi de composition ainsi définie est une loi de groupe d'unité e vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) $x (y + z) = xy + xz$ $(x, y, z \in V)$;
- 2) $x (\lambda y) = \lambda xy$ $(x, y \in V, \lambda \in R)$
- 3) les translations à gauche sont simultanément réductibles à la forme triangulaire

Il est possible de donner une autre définition d'un cône homogène : un cône ouvert est dit homogène s'il est muni d'une loi de groupe satisfaisant aux propriétés 1, 2 et 3 ci-dessus.

Exemples

- 1) R^n muni de la multiplication composantes à composantes
- 2) Le cône M^+ des matrices carrées symétriques définies positives. Si on désigne le produit usuel sur l'ensemble des matrices, pour tout X de M^+ il existe une matrice T_X triangulaire supérieure telle que $T_X \circ {}^t T_X = X$. On posera alors $X Y = T_X \circ T_Y \circ {}^t T_Y \circ {}^t T_X = T_X \circ Y \circ {}^t T_X$

Théorème 2

Si V est un cône homogène de E_n , il existe une décomposition

$$E_n = E_{n_\ell} \oplus E_{n-n_\ell-1} \oplus R e_\ell \text{ de } E_n \text{ tel que}$$

$$V = \{ t + y + z e_\ell : z y = F(t, t) \in V' \}$$

où :

- V' est un cône homogène de $E_{n-n_\ell-1}$
- $F(t, u)$ est une fonction bilinéaire symétrique de E_{n_ℓ} dans $E_{n-n_\ell-1}$, à valeurs dans $\bar{V}'$ pour $t = u$.

En appliquant ℓ fois ce théorème (jusqu'à trouver un cône homogène de dimension 1 qui ne peut être que $R^+ e_1$ on exhibe un système libre $(e_j, \dots, e_\ell)$ qu'on complètera de façon canonique pour obtenir une base de E_n .

Structure euclidienne

Nous munissons E_n d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour lequel le système $e_1 \dots e_\ell$ soit orthonormé et nous conviendrons de choisir comme unité du

groupe $e = \sum_{i=1}^{\ell} e_i$ (de sorte que e soit élément du cône dual V^*)

Fonctions puissances

Les morphismes du groupe V dans R^+ multiplicatif sont engendrés par ℓ morphismes soit :

$$\chi = \prod_{i=1}^{\ell} \rho_i$$

Pour tout x dans V il existe un $\tilde{x}$ unique dans l'hyperplan engendré par les e_i et tel que la transformation $g : \tilde{x} \rightarrow x$ ait 1 comme unique valeur propre. On a alors

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{\ell} \chi_i(x) e_i$$

Si $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_\ell)$ on notera $x^\rho = \chi(x)$

Mesures fondamentales sur un cône homogène

Nous noterons

dx la restriction de la mesure de Lebesgue à V

$d\mu(x)$ la mesure de Haar à gauche

$dv(x)$ la mesure de Haar à droite

Comme la fonction modulaire est un morphisme il existe α tel que

$$dv(x) = x^\alpha d\mu(x)$$

De plus $d\mu(x)$ est absolument continue par rapport à dx et sa densité est une fonction puissance x^d

Densités Γ

La fonction $\Gamma(\rho)$:

$$\Gamma(\rho) = \int_V \exp(-\langle e, x \rangle) x^\rho d\mu(x)$$

est définie sur un ensemble $\rho_i > \frac{m_i}{2}$ (m_i entiers) et vaut

$$\Gamma(\rho) = \frac{\pi^{\frac{n-l}{2}}}{\prod_{i=1}^l \Gamma(\rho - \frac{m_i}{2})}$$

Soit a dans V^* et $\rho_i > \frac{m_i}{2}$. Posons

$$\Gamma_a(\rho) = \int_V \exp(-\langle a, x \rangle) x^\rho d\mu(x)$$

Le groupe $G(V)^*$ agit de façon simplement transitive sur V^* . Il existe donc un g dans $G(V)$ tel que $a = g^* e$ ou

$$\langle a, x \rangle = \langle e, gx \rangle$$

Posons $a' = g(e)$. Il vient

$$\begin{aligned} \Gamma_a(\rho) &= \int_V \exp(-\langle e, a'x \rangle) x^\rho d\mu(x) \\ &= \int_V \exp(-\langle e, y \rangle) a'^{-\rho} y^\rho d\mu(y) \\ &= a'^{-\rho} \Gamma(\rho) \end{aligned}$$

On montre alors que $a'^{-\rho} = a^{-s(\rho)}$ ou $s(\rho) = (\rho_l, \rho_{l-1}, \dots, \rho_1)$

Définition

Une variable aléatoire à valeurs dans V a une répartition $\Gamma_a(\rho)$ si elle a pour densité par rapport à $d\mu(x)$

$$\frac{a^{s(\rho)}}{\Gamma(\rho)} \exp(-\langle a, x \rangle) x^\rho$$

Exemples

- dans R^{+n} un produit tensoriel de densité Γ
- dans M^+ les densités de Wishart

Propriétés

Le changement de variables précédent montre immédiatement que X a une répartition $\Gamma_a(\rho)$ si et seulement si $X_1 = a' X$ a une répartition $\Gamma(\rho)$ et donc que si X et Y sont deux variables aléatoires de répartition $\Gamma_a(\rho)$ et $\Gamma_a(\rho')$, la répartition de $Y^{-1} X$ est indépendante de a.

Ordre défini par un cone homogène

La relation $x < y \iff y - x \in V$ est une relation d'ordre vérifiant la propriété

$$\forall x, y, z \in V, x < y \iff z x < z y$$

puisque $y - x \in V$ est équivalent à $z(y - x) = zy - zx \in V$.

Nous noterons $\int_a^b$ l'intégrale sur l'intervalle $]a, b[$

Nous définirons alors une fonction B par

$$B(\rho, \rho') = \frac{\Gamma(\rho) \Gamma(\rho')}{\Gamma(\rho + \rho')}$$

Il est facile de montrer que

$$B(\rho, \rho') = \int_0^e x^\rho (e - x)^{\rho'+d} d\mu(x)$$

Théorème 3

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de répartition $\Gamma_a(\rho)$ et $\Gamma_a(\rho')$ alors

$Y^{-1} X$ et $(X + Y)^{-1} X$ ont pour densités (par rapport à $d\mu(x)$)

$$\frac{1}{B(\rho, \rho')} x^\rho (e + x)^{-\rho-\rho'+\alpha} \quad x \in V$$

(répartition B de 2ème espèce)

$$\frac{1}{B(\rho, \rho')} x^\rho (e - x)^{\rho'+d} \quad 0 < x < e$$

(répartition de 1ère espèce)

Il suffit de montrer le théorème pour $a = e$.

Preuve : la transformation $y \rightarrow y^{-1}$ transforme la mesure $d\mu(y)$ invariante par les produits à gauche en une mesure invariante par les produits à droite donc en une mesure $Cd\mu(y)$. La répartition de Y^{-1} est donc

$$\begin{aligned} & \frac{C}{\Gamma(\rho')} \exp(-\langle e, y^{-1} \rangle) y^{-\rho'} d\mu(y) \\ &= \frac{C}{\Gamma(\rho')} \exp(-\langle e, y^{-1} \rangle) y^{-\rho'+\alpha} d\mu(y) \end{aligned}$$

$Y^{-1} X$ admet comme densité par rapport à $d\mu(x)$

$$g(x) = \frac{C}{\Gamma(\rho) \Gamma(\rho')} \int_V \exp(-\langle e, y^{-1} x^{-1} \rangle) y^{-\rho'+\alpha} x^{-\rho'+\alpha} \exp(-\langle e, y^{-1} \rangle) y^{-\rho} d\mu(y)$$

Nous effectuons les changements de variables

$$y^{-1} = u \quad v = u(x^{-1} + e)$$

D'où

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{C^2 x^{-\rho'+\alpha}}{\Gamma(\rho) \Gamma(\rho')} \int_V \exp(-\langle e, u(x^{-1} + e) \rangle) u^{\rho+\rho'-\alpha} d\mu(u) \\ &= \frac{C^2 x^{-\rho'+\alpha}}{\Gamma(\rho) \Gamma(\rho')} \int_V \exp(-\langle e, v \rangle) v^{\rho+\rho'-\alpha} (x^{-1}+e)^{-\rho-\rho'+\alpha} d\mu(v) \\ &= \frac{C^2 x^{-\rho'+\alpha} (x^{-1}+e)^{-\rho-\rho'+\alpha}}{\Gamma(\rho) \Gamma(\rho')} \int_V \exp(-\langle e, v \rangle) v^{\rho+\rho'} d\mu(v) \\ &= \frac{C^2 \Gamma(\rho + \rho')}{\Gamma(\rho) \Gamma(\rho')} x^{-\rho'+\alpha} (x^{-1} + e)^{-\rho-\rho'+\alpha} \\ &= \frac{C^2}{B(\rho, \rho')} x^\rho (e + x)^{-\rho-\rho'+\alpha} \end{aligned}$$

De même $X^{-1} Y$ a la répartition

$$\begin{aligned} & \frac{C^2}{B(\rho, \rho')} x^{\rho'} (e+x)^{-\rho-\rho'+\alpha} d\mu(x) \quad (x \in V) \\ &= \frac{C^2}{B(\rho, \rho')} x^{\rho'+d} (e+x)^{-\rho-\rho'+\alpha} dx \quad (x \in V) \end{aligned}$$

La variable $[(X + Y)^{-1} X]^{-1} = X^{-1} (X + Y) = e + X^{-1} Y$ a donc la répartition

$$\frac{C^2}{B(\rho, \rho')} (x-e)^{\rho'+d} x^{-\rho-\rho'+\alpha} dx \quad (x > e)$$

$$= \frac{C^2}{B(\rho, \rho')} (x - e)^{\rho'+d} x^{-\rho-\rho'-d} d v (x) \quad (x > e)$$

et $(X + Y)^{-1} X$ a la répartition

$$\frac{C}{B(\rho, \rho')} (x^{-1} - e)^{\rho'+\alpha} x^{\rho+\rho'+d} d\mu (x) \quad (0 < x < e)$$

$$= \frac{C}{B(\rho, \rho')} (e-x)^{\rho'+d} x^\rho d\mu (x)$$

L'expression intégrale de $B(\rho, \rho')$ montre alors que $C = 1$.

Ce résultat se généralise de la façon suivante.

Théorème 4

Si $X_1 \dots X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de répartition $\Gamma_a(\rho^{(i)})$ le système de variables aléatoires $S_n^{-1} X_1, S_n^{-1} X_2, \dots, S_n^{-1} X_n$ ($S_n = \sum_{i=1}^n X_i$) a la répartition de Dirichlet généralisée de densité

$$\frac{\Gamma(\sum_{i=1}^n \rho^{(i)})}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\rho^{(i)})} \prod_{i=1}^n x_i^{\rho^{(i)} + d} \otimes dx_i$$

sur la variété $\sum_{i=1}^n x_i = e$

Démontrons maintenant une propriété des répartitions B.

Théorème 5

Si $X_1 \dots X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de répartition $B(a_i, b_i)$ avec $a_i = a_{i+1} + b_{i+1}$ $X_1 X_2 \dots X_n$ a pour répartition $B(a_n, \sum_{i=1}^n b_i)$.

Il suffit de démontrer le théorème pour $n = 2$. La variable aléatoire X_1, X_2 a pour densité par rapport à $d\mu(x)$

$$h(x) = \frac{1}{B(a_1, b_1)B(a_2, b_2)} \int_e^{x^{-1}} (xy)^{a_1} (e-xy)^{b_1+d} y^{-a_2} (e-y^{-1})^{b_2+d} d\mu(y)$$

$$= \frac{x^{a_1}}{B(a_1, b_1) B(a_2, b_2)} \int_e^{x^{-1}} (e-xy)^{b_1+d} (e-y^{-1})^{b_2+d} y^{a_1-a_2+d} dy$$

Effectuons les changements de variables

$$u = y - e \quad v = (e-x)^{-1} xu$$

$$h(x) = \frac{x^{a_1}}{B(a_1, b_1) B(a_2, b_2)} \int_0^{x^{-1}-e} (e-x-xu)^{b_1+d} u^{b_2+d} du$$

$$= \frac{x^{a_1}}{B(a_1, b_1) B(a_2, b_2)} \int_0^{x^{-1}-e} (e-x-xu)^{b_1+d} u^{b_2} d\mu(u)$$

$$= \frac{x^{a_1-b_2} (e-x)^{b_2}}{B(a_1, b_1) B(a_2, b_2)} \int_0^e (e-x)^{b_1+d} (e-v)^{b_1+d} v^{b_2} d\mu(v)$$

$$= \frac{B(b_2, b_1)}{B(a_1, b_1) B(a_2, b_2)} x^{a_1-b_2} (e-x)^{b_1+b_2+d}$$

$$= \frac{1}{B(a_2, b_1+b_2)} x^{a_2} (e-x)^{b_1+b_2+d}$$

BIBLIOGRAPHIE

La structure des cones homogènes est explicitée dans VINDBERG [5] et l'étude analytique dans GINDIKIN [3]. L'importance des répartitions [1] a été mis en évidence par ARTZNER [1], qui vient d'obtenir également le théorème 3. [2] Ce même théorème avait auparavant été établi pour les densités de WISHART par MITRA [4].

- [1] ARTZNER Ph.
Sur les formes quadratiques positives aléatoires et les variables du χ^2 généralisé
Thèse Sciences Strasbourg 1972

- [2] ARTZNER Ph.
Lois gamma et beta sur un cone convexe homogène. Applications en Analyse multivariée. C.R. Acad. Sc. Paris, n° 4 (1974)

- [3] GINDIKIN S.G.
Analysis in homogenous domains
Russian Math. Surveys 19 (1964)

- [4] MITRA S.K.
A density free approach to the matrix variate beta distribution
Sankhya A 32 (1970) p. 81-88

- [5] VINDBERG E.B.
Theory of convex homogenous cones
Trans. Moscow math. Society 12 (1963)