

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

CH. LEPETIT

Décompositions d'un intervalle réel et des ensembles de Cantor

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 49, série *Mathématiques*, n° 8 (1972), exp. n° 4, p. 1-25

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1972__49_8_A4_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Introduction

Cet article a pour point de départ l'approche ensembliste des décompositions des lois de probabilité uniformes sur des convexes bornés de \mathbb{R}^n . Les facteurs d'une loi uniforme sur un intervalle réel ont été caractérisés par T. Lewis ([1]) au moyen de la répartition des zéros de sa fonction caractéristique. L'analogie que présentent les décompositions ainsi obtenues avec les "décompositions en somme directe" ([2], [3]) de l'ensemble \mathbb{N} des entiers positifs ou nuls, conduit à étudier les "décompositions" d'un intervalle réel, et plus généralement d'un convexe de \mathbb{R}^n , au sens de la définition suivante :

Définition

E étant un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , nous dirons que E est décomposable et que le couple (A, B) de parties de \mathbb{R}^n constitue une décomposition en somme directe de E si :

• $E = A + B$, où $A + B = \{a + b ; a \in A, b \in B\}$;

• la représentation de tout élément de E comme somme d'un élément de A et d'un élément de B est unique.

Nous noterons alors $A \oplus B = E$.

Remarquons, que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $a_0 \in \mathbb{R}^n$

$$A \oplus B = E \iff (A - a_0) \oplus (B - x_0 + a_0) = (E - x_0) ;$$

on peut donc supposer sans perte de généralité (ce que nous ferons dans la suite) que 0 appartient à l'un des deux ensembles (soit A) et est situé en

un point quelconque de E

D'autre part :

$$\cdot A \oplus B = E \iff \lambda A \oplus \lambda B = \lambda E, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\cdot A \oplus B = E \text{ et } A \oplus B' = E \iff B = B'$$

Dans le premier paragraphe, nous étudions les décompositions d'un intervalle réel, décompositions à rapprocher du théorème de Lewis [1]. Leur connaissance permet en outre (paragraphe 2) de vérifier sous une hypothèse particulière, la conjecture ensembliste :

(1) "un convexe C de \mathbb{R}^n n'est décomposable que s'il est le "produit" de deux convexes",

analogue de la conjecture probabiliste, de Gérard Letac (pour un cas particulier, voir [4]) :

(2) "La mesure uniforme sur un convexe fermé borné C de \mathbb{R}^n n'est factorisable pour la convolution que si C est le "produit" de deux convexes."

Notons ici que les décompositions d'une loi uniforme sur un cube de \mathbb{R}^n étant bien connues [voir [1] pour $n = 1$ et [3] pour $n > 1$] le problème des décompositions d'une loi uniforme sur un convexe borné de \mathbb{R}^n serait complètement résolu si la conjecture (2) était établie.

Plus précisément, on aurait :

Si $\alpha * \beta = \mu_C$, où μ_C est la mesure uniforme sur un convexe C s'écrivant $C = C_1 \times \dots \times C_p \times [0, 1]^m$,

où les C_j sont des convexes "indécomposables", alors :

$$\alpha = \mu_{C_1} \otimes \dots \otimes \mu_{C_k} \times 1_1 \otimes \dots \otimes 1_m$$

$$\beta = \mu_{C_{k+1}} \otimes \dots \otimes \mu_{C_p} \otimes 1'_1 \otimes \dots \otimes 1'_m$$

où $(1_j, 1'_j)$ sont pour tout $j = 1, \dots, m$ des facteurs de la mesure uniforme sur $[0, 1]$: $1_j * 1'_j = \mu_{[0,1]}$.

Dans le paragraphe 3, nous étudions les décompositions des ensembles de Cantor ; les résultats obtenus sont à rapprocher de ceux donnés par Roland Berthuet (voir [6]) à propos de la factorisation en produit de convolution de la variable aléatoire ayant pour répartition la fonction de Lebesgue sur ces ensembles et décrite dans [5] p. 14.

Nous noterons

- \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs ou nuls
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- (m) l'intervalle d'entiers $\{1, \dots, m\}$, si $m \in \mathbb{N}^*$
- $(m) = (m+1) = \mathbb{N}^*$ si $m = +\infty$

§ 1 - Décomposition d'un intervalle réel

$(r_t)_{t \in (N)}$ avec $N \leq +\infty$ étant une suite finie d'entiers $r_t \geq 2$,

tout élément x de $[0, 1)$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{t \in (N+1)} \frac{\alpha_t}{q_t}$

où

$$\alpha_t \in \{0, \dots, r_t - 1\} \text{ et } q_t = r_1 \dots r_t \text{ pour tout } t \in (N),$$

$$\alpha_{N+1} \in [0, 1) \text{ et } q_{N+1} = q_N \text{ si } N \text{ est fini,}$$

la suite $(\alpha_t)_{t \in (N+1)}$ n'ayant pas tous ses termes égaux à $r_t - 1$ à partir d'un certain rang si $N = +\infty$.

Ainsi si $(J_1 \text{ et } J_2)$ est une partition de $(N+1)$, les ensembles

$$A = \left\{ \sum_{t \in (N+1)} \frac{\alpha_t}{q_t} ; \alpha_t = 0 \text{ si } t \in J_1 \right\}$$

$$B = \left\{ \sum_{t \in (N+1)} \frac{\alpha_t}{q_t} ; \alpha_t = 0 \text{ si } t \in J_2 \right\}$$

sont solutions de $A \oplus B = [0, 1)$

On peut supposer, sans perte de généralité, que J_1 (resp. J_2) est l'ensemble des entiers pairs (impairs).

Alors si la suite (r_t) est infinie, les deux ensembles sont totalement discontinus ; si la suite (r_t) est finie, l'un des ensembles est fini, l'autre est une réunion finie d'intervalles de même longueur.

Nous savons montrer que, dans ce dernier cas, ce sont les seules solutions.

Remarquons d'abord que :

Proposition

Si B contient un intervalle de longueur $\epsilon > 0$, alors $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap A = \emptyset$ pour tout $a \in A$.

Par conséquent deux cas se présentent :

1. les deux ensembles sont totalement discontinus ;
2. l'un des deux est un ensemble dénombrable de points isolés (fini si E est borné).

Preuve de la proposition

Soient b tel que $(b-\epsilon, b+\epsilon) \subset B$; a_1 et $a_2 \in A$ $a_1 \neq a_2$.
D'après l'unicité, $(b-\epsilon+a_1, b+\epsilon+a_1) \cap (b-\epsilon+a_2, b+\epsilon+a_2) = \emptyset$;
et ceci implique

$$|a_1 - a_2| \geq \epsilon .$$

Dans le deuxième cas, nous avons :

Théorème 1

1- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un intervalle réel I borné soit décomposable est que I soit semi-fermé.

2- Si (K, A) est solution de $K \oplus A = [0, 1)$ (resp. $(0, 1]$) alors

$$\cdot A = \frac{A'}{m}$$

$$\cdot K = \left[0, \frac{1}{m}\right) + \frac{B'}{m} \quad (\text{resp. } (0, \frac{1}{m}] + \frac{B'}{m})$$

où m est un entier et A' et B' deux ensembles d'entiers tels que

$$A' \oplus B' = \{0, \dots, m-1\} \quad \text{et} \quad 1 \in A' .$$

3- Si (K, A) est solution de $K \oplus A = [0, +\infty)$ (resp. $(0, +\infty)$) alors

$$\cdot A = aA'$$

$$\cdot K = [0, a) + aB' \quad [\text{resp } (0, a) + aB']$$

où a est un réel positif et A' et B' deux ensembles d'entiers tels que $A' \oplus B' = \mathbb{N}$ et $1 \in A' .$

Remarque

Les solutions de $A' \oplus B' = \{0, \dots, m-1\}$ [resp $A' \oplus B' = \mathbb{N}$] sont connues ([2]), et nous retrouvons ainsi les décompositions données au début de ce paragraphe

Preuve

Nous nous bornerons à traiter le cas où I est ouvert en 0, la démonstration lorsque I est fermé en 0 étant analogue et ne présentant aucune difficulté.

On note $(a_i)_{i \in \{0, \dots, n-1\}}$ avec $n \leq +\infty$, la suite croissante des éléments de A et pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$ on pose $A_j = \bigcup_{i=0}^{j-1} \{a_i\}$

Nous allons montrer par récurrence sur i que a_i est un multiple de a_1 , tout en construisant K .

Proposition 1

L'intervalle $(0, a_j]$ est contenu dans $K + A_j$, pour tout j en particulier $(0, a_1]$ est contenu dans K

Preuve

0 appartenant à A par hypothèse, K est contenu dans I et $\inf K \geq 0$.

Or $\inf(K + a_i) = \inf K + a_i$, par suite $a_i \leq \inf(K + a_i)$

$\forall i \geq j$ et $\forall x \in (0, a_j)$ nous avons $x < \inf(K + a_i)$, donc $x \notin K + a_i$ et par conséquent $x \in K + a_j$. Ainsi $(0, a_j) \subset K + A_j$.

En particulier $(0, a_1) \subset K$ et donc $\inf K = 0$

Nous avons alors $a_j < \inf(K + a_i) \forall i > j$ et comme $a_j \notin K + a_j$

a_j appartient donc à $K + A_j$

Notons $T = (0, a_1]$

\mathcal{A} = algèbre de Boole des réunions finies d'intervalles de I
semi-fermés à droite

$D = \{H / H = T + a_1 P \text{ où } P \subset \mathbb{N} \text{ est fini}\}$

$D_0 = \{H / H \in D \text{ et } H \subset K\}$

- P_3 Si $y_j(H) = a_j$, alors $y_{j+1}(H) \geq y_j(H) + a_1$.
- P_4 $(y_j(H), \min(\inf R_j(H), y_j(H) + a_1)] \cap (M_j(K) \setminus (K \setminus H))$
est contenu dans K .
- P_5 Si $y_j(H) < a_j$, alors $(y_j(H), \min(\inf R_j(H), y_j(H) + a_1, a_j)]$
est contenu dans K
et $a_j > y_j(H) + a_1$.
- P_6 Si n est fini et si $y_n(H) < 1$,
alors $(y_n(H), \min(\inf R_n(H), y_n(H) - a_1)]$ est contenu dans K .
- P_7 Si $A_j = a_1 A'_j$, avec $A'_j \subset \mathbb{N}$, alors $y_j(H)$ est multiple entier de
 a_1 et $\inf R_j(H) \geq y_j(H) + a_1$.

N.B.- ces propriétés simples sont toutefois essentielles dans la preuve du théorème 1.

Preuves

- P_1 se déduit immédiatement des définitions de $y_j(H)$, $R_j(H)$, $M_j(H)$ appartenant à \mathcal{A} .
- P_2 Supposons $y_j(H) > a_j$, alors $(a_j, \min(y_j(H), a_j + a_1)]$ serait non vide et contenu dans $T + a_j$ et $M_j(H)$; or ceci est impossible car d'après R_2 , $M_j(H) \cap (K + a_j) = \emptyset$. Donc $y_j(H) \leq a_j$.
- P_3 $M_{j+1}(H) = M_j(H) \cup (H + a_j)$,
 $M_{j+1}(H)$ contient donc $M_j(H) \cup (T + a_j)$.
Si $a_j = y_j(H)$, alors $T + a_j = (y_j(H), y_j(H) + a_1]$.
Par suite $M_{j+1}(H)$ contient $(0, y_j(H) + a_1]$ et donc
 $\inf(I \setminus M_{j+1}(H)) \geq y_j(H) + a_1$.

Définition 1

Pour tout $j \in (n)$, M_j est l'application de D_0 dans $\mathcal{A} \cap I$ définie par

$$H \rightarrow M_j(H) = H + A_j \quad .$$

Les applications M_j ont les propriétés suivantes :

$$R_1 \quad K \cap M_j(H) = H$$

$$R_2 \quad M_j(H) \cap (L + a_i) = \emptyset \quad \forall L \subset K \text{ et } \forall i \geq j \quad .$$

Preuves

H et L étant contenus dans K et la famille $\{K + a_i\}$ étant une partition : $(H + a_k) \cap (L + a_i) = \emptyset \quad \forall i, \forall k \quad i \neq k$

en particulier

$$\cdot K \cap (H + a_k) = \emptyset \quad \forall k, 1 \leq k \leq j-1, \text{ d'où } R_1 \quad .$$

$$\cdot (L + a_i) \cap (H + a_k) = \emptyset \text{ si } i \geq j \text{ et } 0 \leq k \leq j-1, \text{ d'où } R_2 \quad .$$

Définition 2

Pour tout $j \in (n)$ y_j est l'application de D_0 dans $I \setminus \{(0, a_1)\}$ définie par

$$H \rightarrow \inf (I \setminus M_j(H)) \text{ si } M_j(H) \text{ est contenu strictement dans } I$$

$$H \rightarrow 1 \quad \text{si } M_j(H) = I \text{ (ce qui n'est possible que si } I = (0, 1])$$

Propriétés des y_j

$$P_1 \quad \text{Soit } R_j(H) = M_j(H) \setminus (0, y_j(H)] \text{ ; alors } \inf R_j(H) > y_j(H) \quad .$$

$$P_2 \quad y_j(H) \leq a_j \text{ et donc } y_1(H) = a_1 \quad .$$

P_4 $(y_j(H), \min(\inf R_j(H), y_j(H) + a_1)]$ est non vide.

Soit y un élément de cet intervalle :

$y \notin M_j(H)$ car $y_j(H) < y \leq \inf R_j(H)$;

$y \notin M_j(K \setminus H) \setminus (K \setminus H)$, sinon il existerait $i \geq 1$ tel que

$y - a_i \in K \setminus H$ or $y - a_i \leq y_j(H) + a_1 - a_1$, donc

$y - a_i \leq y_j(H)$ et alors $y - a_i \in M_j(H)$.

D'après R_1 $y - a_i$ appartiendrait ainsi à H , ce qui est en contradiction avec $y - a_i \in K \setminus H$.

D'où $(y_j(H), \min(\inf R_j(H), y_j(H) + a_1)] \cap (M_j(K) \setminus (K \setminus H)) = \emptyset$.

P_5 Si $a_j > y_j(H)$, $J_1 = (y_j(H), \min(y_j(H) + a_1, \inf R_j(H), a_j)]$ est non vide.

Soit y un élément de cet intervalle.

D'après P_4 $y \notin M_j(K) \setminus (K \setminus H)$.

D'autre part $y \leq a_j$ et donc $y \in M_j(K)$ d'après la proposition 1.

D'où $y \in K \setminus H$, ce qui implique $J_1 \subset K$.

Supposons maintenant que nous ayons $a_j \leq y_j(H) + a_1$; et soit $y \in J_1$.

Nous avons alors :

$$a_j \leq y_j(H) + a_1 < y + a_1 \leq a_j + a_1,$$

et donc $y + a_1 \in T + a_j$ avec $j > 1$, puisque $a_j > y_j(H)$.

Cette appartenance est impossible car y appartenant à K , $y + a_1$ appartient à $T + a_1$, or $(T + a_j) \cap (T + a_1) = \emptyset$.

P_6 Si $y_n(H) < 1$, alors $J_2 = (y_n(H), \min(\inf R_n(H), y_n(H) + a_1, 1)]$ est non vide et contenu dans $I = M_n(K)$.

D'après P_4 , J_2 est alors contenu dans $K \setminus H$ et par suite

$y_n(H) + a_1 < 1$. En effet $y_n(H) + a_1 = \inf(J_2 + a_1)$ et

$J_2 + a_1 \subset K + a_1 \subset I$.

Ainsi $(y_n(H), \min(\inf R_n(H), y_n(H) + a_1)]$ est contenu dans K .

P_7 Si $A_j = a_1 A'_j$ avec $A'_j \subset \mathbb{N}$, alors $M_j(H) \in D$ et donc $y_j(H)$ et $\inf R_j(H)$ sont des multiples entiers de a_1 ; comme $\inf R_j(H) > y_j(H)$, nous avons $\inf R_j(H) \geq y_j(H) + a_1$.

Définition 3

f_j est l'application de D_0 dans \mathcal{A} définie par

$$H \rightarrow H \cup (T + y_j(H)) .$$

Propriétés des f_j

S_1 Si $A_j = a_1 A'_j$, avec $A'_j \subset \mathbb{N}$, alors $f_j(H) \in D$;

S_2 Si $A_j = a_1 A'_j$ avec $A'_j \subset \mathbb{N}$ et si $f_j(H) \in K$

alors $y_j(f_j(H)) \geq y_j(H) + a_1$.

Preuve

S_1 immédiate d'après la définition .

S_2 D'après S_1 , $f_j(H) \in D_0$.

$$M_j(f_j(H)) = M_j(H) \cup (T + y_j(H) + A_j) ;$$

$M_j(f_j(H))$ contient donc $(0, \dots, y_j(H) + a_1]$.

D'où $y_j(f_j(H)) \geq y_j(H) + a_1$.

Lemme 1

Si $H \in D_0$ et si $A_j = a_1 A'_j$ avec $A'_j \subset \mathbb{N}$.

Alors :

- ou bien $a_j = y_j (H)$
- ou bien $f_j (H) \in D_0$.

Preuve

D'après P_2 ,

- ou bien $a_j = y_j (H)$
- ou bien $a_j > y_j (H)$.

Si $a_j > y_j (H)$, d'après P_5 et P_7 ,

$$\min (\inf R_j (H), y_j (H) + a_1, a_j) = y_j (H) + a_1$$

et $(y_j (H), y_j (H) + a_1] \subset K$, c'est-à-dire $f_j (H) \subset K$;

et ainsi d'après S_1 , $f_j (H) \in D_0$.

Réciproquement, si $f_j (H) \in D_0$, alors $a_j > y_j (H)$ car $a_j = y_j (H)$ implique $f_j (H) \notin K$.

Lemme 2

Si $H \in D_0$, si n est fini, si $A_n = a_1 A'_n$ avec $A'_n \subset \mathbb{N}$ et si $y_n (H) \neq 1$. Alors $f_n (H) \in D_0$.

Preuve

C'est une conséquence immédiate de P_6 et P_7 car

$$\min (\inf R_n (H), y_n (H) + a_1) = y_n (H) + a_1 .$$

Dans l'énoncé suivant, nous convenons

$$f_j^0 (H) = H \text{ et } f_j^1 (H) = f_j (f_j^{1-1} (H)) \text{ lorsque } f_j^{1-1} (H) \in D_0 .$$

Proposition 2

1- Posant $K_0 = T$, alors la suite $(l_j, K_j)_{j \in (n-1)}$ formée de couples d'entiers positifs ou nuls et d'éléments de D_0 , et définie par récurrence au moyen des relations suivantes :

$$l_j = \sup \{1 / f_j^1(K_{j-1}) \in K\}, \quad K_j = f_j^{l_j}(K_{j-1}),$$

existe, c'est-à-dire $l_j < +\infty$, pour $j \in (n-1)$.

De plus $a_j = y_j(K_j)$.

2- Si n fini, soit $l_n = \sup \{1 / f_n^1(K_n) \in K\}$

$$\text{et } K_n = f_n^{l_n}(K_{n-1}).$$

Alors, si I est borné, $l_n < +\infty$ et $y_n(K_n) = 1$

si I est non borné, $l_n = +\infty$.

Corollaire

- $A = a_1 A'$ où $A' \subset \mathbb{N}$ et $1 \in A'$

- si I est borné, $I = (0, 1]$

- $K = (0, a_1] + a_1 B'$ où $B' \subset \mathbb{N}$

Preuve

1- Elle s'établit par récurrence sur j .

D'après la proposition 1, $K_0 = T$ est contenu dans K et $l_1 = 0$.

Supposons que pour tout $i < j-1 \leq m-2$, l_i soit fini et

$$y_i(K_i) = a_i.$$

Alors $A_{j-1} = a_1 A'_{j-1}$ où $A'_{j-1} \subset \mathbb{N}$.

La suite $f_j^1(K_{j-1})$ d'éléments de K ne peut être infinie car la suite associée $u_{1,j} = y_j(f_j^1(K_{j-1}))$ est strictement croissante (d'après le résultat S_2 $u_{1+1,j} \geq u_{1,j} + a_1$) et bornée (d'après P_2 $u_{1,j} \leq a_j$). Donc $1_j < +\infty$. Alors, d'après le lemme 1, $y_j(K_j) = a_j$.

Lorsque n est fini, un raisonnement analogue au précédent montre que, $u_{1,n}$ étant bornée par 1 si I est borné, 1_n ne peut être infini. D'après le lemme 2, alors $y_n(K_n) = 1$. Si I est non borné, alors $y_n(f_n^1(K_{n-1})) < 1$ pour tout 1 et par conséquent, d'après le lemme 2, la suite $f_n^1(K_{n-1})$ d'éléments de K est infinie.

Le corollaire est immédiat en remarquant que

- si n fini et I borné,

$$y_n(K_n) = 1 \implies I = (0, 1] \text{ et } K_n + A = I$$

- si n fini, et I non borné,

$$\lim_{1 \rightarrow +\infty} f_n^1(K_{n-1}) + A = I,$$

$$\text{car } f_n^1(K_{n-1}) + A \supset (0, y_n(f_n^1(K_{n-1}))) \text{ et } \lim_{1 \rightarrow +\infty} y_n(f_n^1(K_{n-1})) = +\infty$$

- si n infini (et donc I non borné),

$$\text{pour tout } j, f_j^1(K_{j-1}) + A_j \supset (0, y_j(K_j)]$$

$$\text{et comme } \lim_{j \rightarrow +\infty} y_j(K_j) = +\infty,$$

$$\text{on a } \lim_{j \rightarrow +\infty} f_j^1(K_{j-1}) + \lim_{j \rightarrow +\infty} A_j = I.$$

Enfin, il suffit pour obtenir le théorème d'utiliser les propriétés de la loi \oplus :

$$K = T \oplus a_1 B' , A = a_1 B' , K \oplus A = I \longleftrightarrow T + a_1 (A' \oplus B') = I$$

- Si $I = (0, 1]$, $a_1 (\sup A' \oplus B' + 1) = 1$,

ce qui implique a_1 est l'inverse d'un entier : $a_1 = \frac{1}{m}$;

alors comme $(0, 1] = (0, \frac{1}{m}] \oplus \frac{1}{m} \{0, \dots, m-1\}$, on obtient

$$A' \oplus B' = \{0, \dots, m-1\}.$$

- Si $I = (0, +\infty)$, quel que soit a_1 : $(0, +\infty) = T \oplus a_1 \mathbb{N}$.

D'où $\mathbb{N} = A' \oplus B'$.

§ 2 - Décomposition d'un convexe lorsque $\dim A = 1$

Soit $\Delta = \text{aff } A$, enveloppe affine de A

et $H =$ un sous espace supplémentaire de Δ .

Δ étant de dimension 1 il existe \vec{v} tel que $\Delta = \{\lambda \vec{v} ; \lambda \in \mathbb{R}\}$

Soit $\overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}$ tel que $A = \overset{\circ}{A} \vec{v}$.

On peut choisir \vec{v} tel que $\Delta^+ = \{\lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ et C soient contenues dans le même demi espace déterminé par H . Alors $\inf \overset{\circ}{A} = 0$.

Sous l'hypothèse ; "A est un ensemble dénombrable de points isolés", nous avons :

Théorème 2

- 1- Une condition nécessaire et suffisante pour que C borné soit décomposable est que

$$C = (C_1 \times [0, 1) \vec{v}) \cup (C_2 \times (0, 1] \vec{v})$$

où

- 1 est un réel
- C_1 et C_2 sont deux convexes constituant une partition de la projection D de \bar{C} sur H parallèlement à Δ .

- 2- (K, A) solution de $K \oplus A = C$ vérifie alors

$$- A = \frac{1}{m} A' \vec{v}$$

$$- K = (C_1 \times [0, \frac{1}{m}) \vec{v}) \cup (C_2 \times (0, \frac{1}{m}] \vec{v}) + \frac{1}{m} B' \vec{v}$$

où

- m est un entier
- A' et B' deux ensembles d'entiers vérifiant $A' \oplus B' = \{0, \dots, m-1\}$ et $1 \in A'$.

Théorème 2'

- 1- Une condition nécessaire et suffisante pour que C non borné soit décomposable est que

$$C = (C_1 \times [0, \infty) \vec{v}) \cup (C_2 \times (0, \infty) \vec{v})$$

où C_1 et C_2 sont deux convexes constituant une partition de D .

- 2- Si $(K \oplus A) = C$ alors

$$- A = a A' \vec{v}$$

$$- K = (C_1 \times [0, a) \vec{v}) \cup (C_2 \times (0, a] \vec{v}) + a B' \vec{v}$$

où

- a est un réel
- A' et B' deux ensembles d'entiers tels que $A' \oplus B' = \mathbb{N}$ et $1 \in A'$.

Remarque

C, convexe de dimension n, n'est décomposable que si \bar{C} est le produit d'un convexe de dimension n-1 par un intervalle.

Preuve du théorème 2

Soit $\Delta_x = x + \Delta$; $C = \bigcup_{x \in D} (C \cap \Delta_x)$.

C étant convexe, $C \cap \Delta_x = x + I_x \vec{v}$, où I_x est intervalle réel.

D'autre part $(K \oplus A) \cap \Delta_x = x \oplus ((K - x) \cap \Delta) \oplus A$.

Soit en posant $(K - x) \cap \Delta = K_x \vec{v}$:

$$\forall x \in D, I_x = K_x \oplus \overset{\circ}{A}.$$

D'après le théorème 1, si C est borné :

$$\begin{aligned} - I_x \text{ est semi fermé, soit : } I_x &= [a_x, a_x + l_x) \text{ si } a_x \in C \\ &= (a_x, a_x + l_x] \text{ si } a_x \notin C \end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{A} = \frac{l_x}{m_x} A'_x \text{ avec } l \in A'_x \text{ et } m_x \text{ entier}$$

$\overset{\circ}{A}$ étant indépendant de x, $\frac{l_x}{m_x} = \inf \overset{\circ}{A} \setminus 0$ est indépendant

de x (soit $l_x = a m_x$) ainsi que A'_x (soit $A'_x = A'$).

C étant convexe :

l'application f de D dans \mathbb{R} $x \rightarrow a_x$ est convexe,

l'application g de D dans \mathbb{R} $x \rightarrow a_x + l_x$ est concave ;

et ces deux applications sont continues. Leur différence

$(g - f)(x) = l_x$ est aussi continue, c'est-à-dire, puisque $l_x = a_{m_x}$

où $m_x \in \mathbb{N}$ et a constante, que l_x est constante. Ainsi $m_x = m \forall x \in D$

L'application $g : x \rightarrow f(x) + l$, où $l = am$ est alors convexe et donc affine. Ainsi a_x est constante et 0 appartenant à $D \cap \bar{C}$, $a_x = 0 \forall x \in D$.

$$\begin{aligned} \text{Par conséquent } C \cap \Delta_x &= x + [0, 1) \vec{v} && \text{si } x \in C \\ &= x + (0, 1] \vec{v} && \text{si } x \notin C \end{aligned}$$

$$\text{et } K \cap \Delta_x = x + [0, \frac{1}{m}) \vec{v} + \frac{1}{m} B' \quad \text{si } x \in C$$

$$K \cap \Delta_x = x + (0, \frac{1}{m}] \vec{v} + \frac{1}{m} B' \quad \text{si } x \in C$$

$$\text{où } A' \oplus B' = \{0, \dots, m-1\}.$$

D'où le théorème 2 en posant $C_1 = C \cap H$ et $C_2 + l \vec{v} = C \cap (H + l \vec{v})$.

Le théorème 2' s'établit de la même manière à partir du théorème 1-(3).

§ 3 - Décomposition des ensembles de Cantor .

Soit $E_r = \left\{ \frac{1-r}{r} \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j r^j ; \alpha_j = 0 \text{ ou } 1 \right\}$ où $0 < r < 1/2$.

Pour tout $J \subset \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $\mathcal{P}(J)$ l'ensemble des parties de J .

Soit φ l'application de $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ dans E_r :

$$\theta \subset \mathbb{N}^* \rightarrow \varphi(\theta) = \frac{1-r}{r} \sum_{j \in \theta} r^j .$$

Si J_1 et J_2 sont deux sous-ensembles disjoints de \mathbb{N}^* :

$$\varphi(\mathcal{P}(J_1)) \oplus \varphi(\mathcal{P}(J_2)) = \varphi(\mathcal{P}(J_1 \cup J_2)) .$$

Ainsi, pour tout r , $0 < r < 1/2$, si J_1 et J_2 constituent une partition de \mathbb{N}^* :

$$\varphi(\mathcal{P}(J_1)) \oplus \varphi(\mathcal{P}(J_2)) = E_r .$$

Réciproquement,

Théorème 3

Lorsque $r < 1/3$, si $A \oplus B = E_r$, alors :

$$A = \left\{ \frac{1-r}{r} \sum_{j \in J_1} \alpha_j r^j ; \alpha_j = 0 \text{ ou } 1 \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{1-r}{r} \sum_{j \in J_2} \alpha_j r^j ; \alpha_j = 0 \text{ ou } 1 \right\}$$

où J_1 et J_2 constituent une partition de \mathbb{N}^* .

Nous donnons d'abord quelques notations et propriétés valables pour tout r , $0 < r < 1/2$.

- Pour tout entier $p \geq 1$, il existe $\Delta_p = \varphi(\mathcal{P}(1, \dots, p))$ tel que

$$E_r = \Delta_p \oplus r^p E_r.$$

Il suffit pour établir cette propriété, de prendre $J_1 = \{1, \dots, p\}$

$J_2 = \{p+1, \dots, +\infty\}$ et de remarquer que $\mathcal{P}(p+1, \dots, +\infty) = p + \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$

et $\varphi(p + \theta) = r^p \varphi(\theta) \quad \forall \theta \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.

- On note

- pour tout $J \subset \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \subset \mathbb{N}^*$, $\theta \otimes \mathcal{P}(J) = \{\theta \cup \theta' ; \theta' \in \mathcal{P}(J)\}$

- pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in \mathcal{P}(1, \dots, p)$

$$- D_{p,\theta} = \varphi(\theta \otimes \mathcal{P}(p+1, \dots, +\infty))$$

$$- S_p = D_{p,\emptyset}$$

$$- O_p = D_{p,\{p\}}$$

$$- U_{p,\theta} = [\varphi(\theta), \varphi(\theta \cup \{p+1, \dots, +\infty\})]$$

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta' \in \mathcal{P}(1, \dots, k-1)$,

$$- V_{k,\theta'} = (\varphi(\theta' \cup \{k+1, \dots, +\infty\}), \varphi(\theta' \cup k))$$

Propriétés

$$P_1 \quad S_p = r^p E_r$$

$$P_2 \quad S_p = \bigcup_{k \geq p+1} O_k \quad \text{et par conséquent} \quad E_r = \bigcup_{p \geq 1} O_p$$

$$P_3 \quad E_r = \bigcup_{\theta \in \mathcal{P}(1, \dots, p)} D_{p,\theta}$$

$$P_4 \quad \{\inf U_{p,\theta} ; \theta \in \mathcal{P}(1, \dots, p)\} = \{0\} \cup \{\sup V_{k,\theta'} ; k \leq p ; \theta' \in \mathcal{P}(1, \dots, k-1)\}$$

$$\{\inf V_{k,\theta'} ; k \leq p ; \theta' \in \mathcal{P}(1, \dots, k-1)\} = \{\sup U_{p,\theta} ; \theta \in \mathcal{P}(1, \dots, p)\} \setminus \{1\}$$

$$P_5 \quad V_{k,\theta'} \cap E_r = \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}^* , \quad \forall \theta' \in \mathcal{P}(1, \dots, k-1)$$

$$P_6 \quad \text{La longueur de } U_{p,\theta} \text{ est indépendante de } \theta : u_p = r^p$$

$$\text{La longueur de } V_{k,\theta'} \text{ est indépendante de } \theta' : v_k = (1-2r) r^{k-1}$$

P_7 Lorsque $r \leq 1/3$,

$$(\varphi(\theta) + s_p + s_p) \cap E_r \subset \varphi(\theta) + s_p$$

$$(\varphi(\theta) + s_p - s_p) \cap E_r \subset \varphi(\theta) + s_p .$$

Preuve

Il suffit de remarquer :

$$P_2 \quad \mathcal{P}(p+1, \dots, +\infty) = \bigcup_{k \geq p+1} k \otimes \mathcal{P}(k+1, \dots, +\infty)$$

$$P_3 \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) = \bigcup_{\theta \in \mathcal{P}(1, \dots, p)} (\theta \otimes \mathcal{P}(p+1, \dots, +\infty))$$

$$\text{ou encore } D_{p,\theta} = \varphi(\theta) + s_p \text{ et } E_r = \Delta_p \oplus s_p$$

$$P_4 \quad \mathcal{P}(1, \dots, p) = \emptyset \cup \left(\bigcup_{k \leq p} k \otimes \mathcal{P}(1, \dots, k-1) \right)$$

$$\{p+1, \dots, +\infty\} \otimes \mathcal{P}(1, \dots, p) = \mathbb{N}^* \cup \left(\bigcup_{k \leq p} (k+1, \dots, +\infty) \otimes \mathcal{P}(1, \dots, k-1) \right)$$

P_5 conséquence de P_3 et P_4

P_6 immédiat

P_7 si $r \leq 1/3$, $u_p \leq v_p = \sup_{k \leq p} v_k$

alors

$$(\varphi(\theta) + s_p + s_p) \setminus (\varphi(\theta) + s_p) \subset V_{k, \theta'} ,$$

$$\text{où } \theta' \cup \{k+1, \dots, +\infty\} = \theta \cup \{p+1, \dots, \infty\}$$

$$(\varphi(\theta) + s_p - s_p) \setminus (\varphi(\theta) + s_p) \subset V_{k, \theta'} , \text{ où } \theta' \cup k = \theta .$$

Preuve du théorème 3

Le lemme suivant en est le coeur .

Lemme

Si $A \oplus B = E_r$ avec $\varphi(1) \in A$ et $(A, B) \neq (E_r, \{0\})$, alors

$$- A = \Delta_p \oplus r^p A'$$

$$- B = r^p B'$$

où $p \in \mathbb{N}^*$ et $A' \oplus B' = E_r$, avec $\varphi(1) \in B'$.

Preuve du lemme

1- Quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(k)$ appartient soit à A soit à B.

Sinon il existerait $a \in A$ et $b \in B$, $a < \varphi(k)$ et $b < \varphi(k)$,

or $\varphi(k) = \sup V_{k, \emptyset}$ et comme $V_{k, \emptyset} \cap E_r = \emptyset$, on aurait

$a \leq \gamma(\{k+1, \dots, \infty\})$ ainsi que b . Par conséquent $a + b$ serait

inférieur ou égal à $2 \varphi(\{k+1, \dots, \infty\})$ et même strictement

inférieur car $A \cap B = \{0\}$ implique $a \neq b$.

Mais l'inégalité $a + b < 2 \varphi(\{k+1, \dots, +\infty\}) = 2 r^k$ est impossi-

ble car si $r \leq 1/3$ $\varphi(k) = \frac{1-r}{r} r^k$ est supérieur ou égal à $2 r^k$.

2- Si $\varphi(k) \in A$, alors $0_k \cap B = \emptyset$.

Il suffit de montrer que $(\varphi(k) + 0_k) \cap E_r = \emptyset$.

$$\varphi(k) + 0_k \subset [2 \varphi(k), 2 \varphi(k) + r^k] ;$$

or $2 \varphi(k) > \varphi(k) + r^k$ car $\varphi(k) = \frac{1-r}{r} r^k > r^k$

et $2 \varphi(k) + r^k < \varphi(k) + r^k + V_{k-1}$, car $\varphi(k) = \frac{1-r}{r} r^k < (1-2r) r^{k-2}$
 i.e. $0 < r^2 - 3r + 1$.

Ainsi $\varphi(k) + 0_k \subset V_{k-1, \emptyset}$.

3- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi(k) \in A \quad \forall k \leq p$ et $\varphi(p+1) \notin A$
 (et donc $\in B$).

Alors quel que soit $\theta \in \mathcal{P}(1, \dots, p)$,

$$(A \oplus B) \cap D_{p, \theta} = A \cap D_{p, \theta} \oplus B.$$

Il résulte de la propriété précédente et de la propriété P_2 que
 $B \subset S_p$ (remarquons que ceci implique $p < +\infty$ si $B \neq \{0\}$).

Soit $x \in (A \oplus B) \cap D_{p, \theta}$;

$$x = a + b = \varphi(\theta) + s_p, \text{ où } s_p \in S_p.$$

Par suite $a = \varphi(\theta) + s_p - b$ et appartient donc à $\varphi(\theta) + S_p - S_p$.

Il résulte alors de la propriété P_7 que $a \in D_{p, \theta}$.

$$\text{Ainsi } x \in A \cap D_{p, \theta} + B.$$

Soit $x \in A \cap D_{p, \theta} + B$;

$$\text{alors } x \in A + B \text{ et } x \in D_{p, \theta} + B, \text{ c'est-à-dire } \varphi(\theta) + S_p + S_p.$$

D'après P_7 x appartient donc à $D_{p, \theta}$.

Ainsi $(A + B) \cap D_{p, \theta} = A \cap D_{p, \theta} + B$. Il est immédiat que ces sommes
 sont directes.

4- $A = \varphi(\mathcal{P}(1, \dots, p)) \oplus r^p A'$, $B = r^p B'$ avec $A' \oplus B' = E_r$.

$$\text{Soit } A_{p, \theta} \subset S_p \text{ défini par } A \cap D_{p, \theta} = \varphi(\theta) + A_{p, \theta}.$$

$$\text{D'après la relation } E_r = \bigcup_{\theta \in \mathcal{P}(1, \dots, p)} D_{p, \theta},$$

$$A \oplus B = E_r \iff (A \oplus B) \cap D_{p,\theta} = D_{p,\theta} \quad \forall \theta \in \mathcal{P}(1, \dots, p) .$$

Soit encore $A_{p,\theta} \oplus B = S_p \quad \forall \theta .$

Par conséquent $A_{p,\theta}$ est indépendant de θ ; soit $A_{p,\theta} = A_p$. De plus $A_p \subset S_p$ ainsi que B ; soit $A_p = r^p A'$ et $B = r^p B'$, où $A' \oplus B' = E_r$ en utilisant $S_p = r^p E_r$.

Or $A = \bigcup_{\theta \in \mathcal{P}(1, \dots, p)} (D_{p,\theta} \cap A) .$

Donc $A = \bigcup_{\theta \in \mathcal{P}(1, \dots, p)} \varphi(\theta) + r^p A' .$

Ainsi $A = \varphi(\mathcal{P}(1, \dots, p)) \oplus r^p A'$,

ce qui achève la preuve du lemme.

Partant d'une solution (A^1, B^1) de $A \oplus B = E_r$, le lemme permet d'affirmer l'existence d'une suite finie ou infinie d'entiers

$(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et de couples $(A^i, B^i)_{i \in \mathbb{N}+1}$ vérifiant :

$$- A^{2i+1} = \Delta_{p_{2i+1}} \oplus r^{p_{2i+1}} A^{2i+2}, \quad B^{2i+1} = r^{p_{2i+1}} B^{2i+2}$$

$$- A^{2i} = r^{p_{2i}} A^{2i+1}, \quad B^{2i} = \Delta_{p_{2i}} \oplus r^{p_{2i}} B^{2i+1} .$$

Soit en posant $q_0 = 1$, $q_{i+1} = q_i + p_{i+1}$,

$$A^1 = \bigoplus_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ \text{impair}}} \varphi(\mathcal{P}(q_{i-1}, \dots, q_i - 1))$$

$$B^1 = \bigoplus_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ \text{i pair}}} \varphi(\mathcal{P}(q_{i-1}, \dots, q_i - 1)) .$$

D'où $A = \varphi(\mathcal{J}(J_1))$, $B = \varphi(\mathcal{J}(J_2))$

$$\text{avec } J_1 = \bigcup_{\substack{i \in (N) \\ \text{impair}}} \{q_{i-1}, \dots, q_i^{-1}\}$$

$$J_2 = \bigcup_{\substack{i \in (N) \\ \text{i pair}}} \{q_{i-1}, \dots, q_i^{-1}\}$$

REFERENCES

- [1] LEWIS T. (1967) The factorisation of the rectangular distribution
J. Appl. Prob. 4, 529-542

- [2] DE BRUIJN N.G. On number systems
[Nieuw Arch. Wisk (3) 4 (1956) 15-17.]

- [3] Thèse de 3ème cycle de l'auteur "Sur certains problèmes de factorisation de lois de probabilité)

- [4] LETAC G. Problèmes de probabilité P.U.F., 1970
(Problème n° 73)

- [5] KAHANE J.P. et SALEM R.- Ensembles parfaits et séries trigonométriques (Hermann - Paris 1963)

- [6] BERTHUET R. Factorisation des distributions de Cantor
(à paraître dans les Annales de l'Université de Clermont, 1972)