

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

LABIB HADDAD

**Sur quelques points de topologie générale. Théorie
des nasses et des tramails**

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 44, série *Mathématiques*, n° 7 (1970), p. 3-80

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1970__44_7_3_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES POINTS
DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE
THÉORIE DES NASSES ET DES TRAMAILS

Labib HADDAD

(127, av. Philippe-Auguste, 75 - Paris 11^e)

(Manuscrit reçu le 29 mai 1969)

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION	7
AVERTISSEMENT	9
0. – Préliminaires	11
0.1. Sur les graphes	11
0.2. L'espace des ultrafiltres	16
0.3. Sur les fermés d'un espace $\mathcal{T}(E) \times F$	17
0.4. Sur les espaces semi-uniformes	21
1. – Sur la notion de nasse.	23
1.1. Définition et propriétés des nasses	23
1.2. Le treillis des nasses	24
1.3. Ouverts et fermés pour une nasse	25
1.4. Nasses et prétopologies	26
1.5. Nasses et mérotopologies	28
1.6. Nasse d'une topologie	29
1.7. Les applications p et m	30
1.8. Nasses et proximités	31
1.9. Nasses et ordres topogènes	33
2. – Caractérisations à l'aide des nasses.	35
2.1. Généralités	35
2.2. Caractérisations de diverses espèces de topologies	37
2.3. Sur la paracompacité	48
2.4. Dislocation	52
2.5. Caractérisations d'applications	55
3. – Sur la notion de tramail	57
3.1. Définitions et exemples	57
3.2. Tramail d'une structure semi-uniforme	57
3.3. Tramails et structures syntopogènes	58
3.4. Tramails et espaces uniformes	59
3.5. Sur la notion de Λ -famille	61
3.6. Sur le compactifié de Stone-Čech	65

	Pages
4.– Topologies sur l'ensemble des topologies sur un ensemble donné	67
4.1. Définition des trois topologies	67
4.2. Propriétés de ces trois topologies	68
4.3. Ensembles d'applications continues	72
BIBLIOGRAPHIE	75
Index des notations	77
Index terminologique	79

INTRODUCTION

Ce travail est né essentiellement de la lecture de trois articles : Choquet [7], Samuel [20], Inagaki et Sugawara [16].

Dans le premier, intitulé “Convergences”, l’accent est mis, dans l’étude d’une topologie, sur l’application R qui, à tout point, fait correspondre l’ensemble des ultrafiltres qui convergent vers ce point.

M. Samuel, dans son étude des compactifications des espaces uniformes, introduit et utilise une topologie canonique sur l’ensemble $\Upsilon(E)$ des ultrafiltres sur un ensemble donné E , qui fait de $\Upsilon(E)$ un espace compact.

Les auteurs du troisième se servent implicitement de la relation binaire suivante, entre ultrafiltres sur un espace topologique : “tout ouvert appartenant à l’ultrafiltre α appartient à l’ultrafiltre β ”. C’est une relation de préordre.

Le graphe T de ce préordre est une partie “fermée et mi-ouverte” du carré cartésien de l’espace des ultrafiltres. Il était naturel de le comparer au “prolongement par continuité” de l’application R de M. Choquet à l’espace $\Upsilon(E)$. Il se trouve que le graphe de cette “extension continue” est identique à T . Nous l’avons baptisé *nasse* de la topologie.

On connaît la caractérisation particulièrement élégante des espaces compacts à l’aide des ultrafiltres. Il nous paraissait dommage qu’il n’y en ait pas de semblables pour d’autres espèces de topologies et les nasses nous semblaient un outil adéquat. La séparation ne posait pas de problème. Ayant obtenu pour la normalité une caractérisation très simple, nous fûmes encouragé par ce premier succès. D’autres essais suivirent (régularité, semi-régularité, etc.) et bientôt est apparue une sorte de “table de Mendéléiev” des topologies dont nous avons comblé quelques unes des cases blanches. La caractérisation des applications continues, ouvertes, fermées ou propres faisait des nasses une espèce de “sténographie” commode pour la description des notions topologiques.

Les généralisations dans diverses directions allaient de soi, pour ainsi dire. Une nasse de topologie est idempotente et mi-ouverte. On supprime l’idempotence et on retombe en substance sur les prétopologies de M. Choquet. On retranche encore la condition mi-ouverte et on retrouve les ordres topogènes de Császár [9]. On ajoute la condition de symétrie et on obtient une représentation utile des proximités.

L’objet de ce travail est de développer le langage des nasses et celui des tramails qui en est dérivé.

Un grand nombre de ces résultats (sauf ceux du dernier chapitre) ont été résumés dans trois notes aux Comptes Rendus [13], [14] et [15]. Chaque chapitre est précédé d’une courte introduction qui donne une idée de son contenu. Le dernier est consacré à l’étude de trois topologies naturelles sur l’ensemble des topologies sur un ensemble donné ; on y voit que la plupart des propriétés topologiques habituelles (compacité, séparation, régularité, normalité, etc.) ainsi que leurs négations ne sont pas *stables* (en un certain sens précis).

Les références bibliographiques ne prétendent nullement fixer des points de priorité ni remonter aux sources. Elles ne sont là que pour la commodité du lecteur et renvoient, chaque fois qu'il est possible, à des traités de préférence aux articles. On a cru bon également d'ajouter, tout au long du texte, de nombreux rappels pour en faciliter la lecture.

Pour finir, nous aimerions faire ressortir les deux points suivants :

L'ostracisme qui frappait les espaces topologiques non séparés semble toucher à sa fin (grâce à l'influence de la Géométrie Algébrique sans doute).

On connaît les différences entre les structures algébriques et les structures topologiques (notamment en ce qui concerne les morphismes bijectifs). Il devrait être clair à présent que les structures topologiques font partie (abstraitement du moins) des structures d'*ordre* et de la théorie des *graphes*.

Je remercie Monsieur le Professeur Gustave Choquet qui s'est intéressé à mes recherches.

Je tiens à remercier également Monsieur le Professeur Pierre Samuel qui a lu ce manuscrit et m'a encouragé à le faire publier.

AVERTISSEMENT

D'une manière générale, notations et terminologie sont celles de Bourbaki. Cependant, on désignera quelquefois par $\text{Adh}X$ et $\text{Int}X$ l'adhérence et l'intérieur de X respectivement. Pour la composition des graphes et des fonctions on omettra le signe \circ ; on écrira ainsi GH et fg au lieu de $G \circ H$ et $f \circ g$.

On dira qu'un graphe G (resp. une fonction f) est idempotent(e) lorsque $\overset{2}{G} = G$ (resp. $\overset{2}{f} = f$). Dans un espace topologique, $\mathfrak{V}(x)$ désignera le filtre des voisinages du point x .

Sur le modèle bourbakiste de "quasi compact", on utilisera le mot *quasi* pour indiquer qu'il s'agit d'espaces non nécessairement séparés. Une seule exception : là où Bourbaki réserve l'expression "extrêmement discontinu" aux espaces séparés, on n'a pas cru utile de l'alourdir en lui incorporant le mot quasi.

Les renvois dans le texte sont généralement précédés d'un couple d'entiers $m.n$ où m désigne le chapitre et n le paragraphe.

CHAPITRE 0 PRÉLIMINAIRES

On groupe dans ce chapitre des résultats qu'on utilisera par la suite et dont certains peuvent avoir un intérêt propre. Un premier paragraphe traite des graphes, d'abord sur les ensembles puis sur les espaces topologiques ; on y développe en particulier un certain nombre de propriétés des limites inférieure ou supérieure d'une famille de graphes suivant un filtre. Le second paragraphe a pour objet l'espace des ultrafiltres sur un ensemble ; on y définit notamment l'extension d'un graphe aux ultrafiltres. Dans le troisième on étudie les parties fermées du produit d'un espace d'ultrafiltres par un espace topologique. On rassemble dans le quatrième des propriétés des structures semi-uniformes dont on se servira au chapitre 3.

1. SUR LES GRAPHES

Soient E, F des ensembles, G une partie de $E \times F$, A une partie de E et B une partie de F ; nous nous servirons constamment par la suite de la remarque suivante :

$$(A \times B) \cap G = \emptyset \text{ équivaut à } G(A) \cap B = \emptyset \text{ équivaut à } A \cap \bar{G}(B) = \emptyset.$$

LEMME 1.— Soient E, F des ensembles et G une partie de $E \times F$. Alors pour toute partie X de E on a :

$$\bar{G}(CG(X)) \subset CX.$$

$$\text{En effet : } x \in \bar{G}(CG(X)) \iff G(x) \cap CG(X) \neq \emptyset \iff G(x) \not\subset G(X) \implies x \notin X \iff x \in CX. \quad \text{cqfd}$$

COROLLAIRE.— Soit G le graphe d'une relation binaire réflexive sur l'ensemble E . Alors pour toute partie X de E

$$G(X) = X \text{ équivaut à } \bar{G}(CX) = CX.$$

En effet : si $G(X) = X$ alors $CX \subset \bar{G}(CX) = \bar{G}(CG(X)) \subset CX$ donc $\bar{G}(CX) = CX$. Réciproquement, on applique ce qui précède à $H = \bar{G}^1$ et $Y = CX$. cqfd

LEMME 2.— Soit G une partie de $E \times E$.

a) Si G est le graphe d'un préordre sur E alors pour toute partie X de E on a :

$$\bar{G}(CG(X)) = CG(X).$$

b) Si pour tout $x \in E$ on a :

$$\overline{G}^{-1}(CG(x)) = CG(x)$$

alors G est le graphe d'un préordre sur E .

En effet :

a) $CG(X) \subset \overline{G}^{-1}(CG(X)) = \overline{G}^{-1}(CG^2(X)) \subset CG(X)$ en utilisant le lemme 1 ; d'où l'égalité.

b) $x \in G(y) \iff x \notin \overline{G}^{-1}(CG(y)) \iff (z \notin G(y) \implies x \notin \overline{G}^{-1}(z)) \iff (z \in G(x) \implies z \in G(y)) \iff G(x) \subset G(y)$. Ainsi, puisque $G(x) \subset G(x)$, on a $x \in G(x)$; et $\overline{G}^2(y) \subset G(y)$. D'où le résultat. *cqfd*

LEMME 3.— Soient G une partie de $E \times E$ et D la diagonale de $E \times E$. Les énoncés suivants sont équivalents :

a) pour toute partie finie X de E on a

$$G(X) = X \quad \text{ou} \quad \overline{G}^{-1}(X) = X ;$$

b) on a 1/ $G = D$ ou bien il existe $a \in E$ et A non vide $\subset E$ tels que 2/ $G = D \cup (\{a\} \times A)$ ou 3/ $G = D \cup (A \times \{a\})$;

c) pour toute partie X de E on a

$$G(X) = X \quad \text{ou} \quad \overline{G}^{-1}(X) = X.$$

En effet :

a) \implies b). Si $G \neq D$, il existe x et z tels que $z \in G(x)$ et $z \neq x$; alors pour tout $y \neq x$ soit $t \in G(y)$ et considérons $X = \{x, t\}$; on a $y \in \overline{G}^{-1}(X)$ et $z \in G(X)$; puisque $G(X) = X$ ou $\overline{G}^{-1}(X) = X$ on a $t = y$ ou $t = z$; deux cas se présentent alors : 2/ pour tout $y \neq x$ on a $G(y) = \{y\}$, d'où en posant $a = x$ et $A = G(x)$ on a bien $G = D \cup (\{a\} \times A)$; ou bien 3/ il existe un $y \neq x$ pour lequel $G(y) \neq \{y\}$; soit alors $A = \{y \mid G(y) \neq \{y\}\}$; si $y \neq x$, $t \in G(y)$ et $t \neq y$ on a nécessairement $t = z$; de plus comme il existe $y \in A$ et $y \neq x$, pour tout $t \in G(x)$ si $t \neq x$ on a $t = z$; en posant $a = z$ on a bien $G = D \cup (A \times \{a\})$.

b) \implies c). 1/ Si $G = D$ alors $G(X) = \overline{G}^{-1}(X) = X$. 2/ Si $G = D \cup (\{a\} \times A)$ alors $a \notin X$ implique $G(X) = X$, et $a \in X$ implique $\overline{G}^{-1}(X) = X$. 3/ De même si $G = D \cup (A \times \{a\})$ alors $a \in X$ implique $G(X) = X$, et $a \notin X$ implique $\overline{G}^{-1}(X) = X$.

L'implication c) \implies a) est immédiate.

cqfd

LEMME 4.— Soient E, F des espaces topologiques et G une partie de $E \times F$.

a) Si E est quasi compact et si G est fermé, pour toute partie fermée de X la partie $G(X)$ est fermée dans F .

b) Si E est régulier et F séparé et si pour toutes parties fermées X de E et Y de F les parties $G(X)$ et $\overline{G}^{-1}(Y)$ sont fermées dans F et E respectivement, alors G est fermé dans $E \times F$.

En effet :

a) Soit $y \in \overline{G(X)}$ alors pour tout $V \in \mathcal{V}(y)$ on a $V \cap G(X) \neq \emptyset$ donc $\overline{G}^{-1}(V) \cap X \neq \emptyset$; comme X est un fermé dans un espace quasi compact, X est un quasi compact ; il existe donc $x \in X$ qui adhère à tous les éléments de la base de filtre $\{\overline{G}^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V}(y)\}$; donc pour tout $U \in \mathcal{V}(x)$ on a $U \cap \overline{G}^{-1}(V) \neq \emptyset$ soit $(U \times V) \cap G \neq \emptyset$; donc (x, y) adhère à G et comme G est fermé, on a $(x, y) \in G$ donc $y \in G(x) \subset G(X)$. Ainsi $\overline{G(X)} = G(X)$ est bien fermé.

b) Soit $(x, y) \in \bar{G}$ alors pour tous $U \in \mathcal{V}(x)$ et $V \in \mathcal{V}(y)$ on a $(U \times V) \cap G \neq \emptyset$ soit $G(U) \cap V \neq \emptyset$ donc pour tout $U \in \mathcal{V}(x)$ on a $y \in \overline{G(U)}$; E étant régulier, le filtre $\mathcal{V}(x)$ possède une base formée de parties fermées U pour lesquelles $G(U)$ est donc fermé par hypothèse ; donc pour tout $U \in \mathcal{V}(x)$ on a $y \in G(U)$ soit $U \cap \overline{G(y)} \neq \emptyset$ donc $x \in \overline{G(y)}$; or F étant séparé, la partie $\{y\}$ est fermée et donc $\overline{G(y)}$ est fermé ; donc $x \in \overline{G(y)}$, soit $(x, y) \in G$. G est donc bien fermé. cqfd

REMARQUES. —

1/ On peut préférer à la démonstration directe de a) la démonstration qui s'appuierait sur le corollaire 5 de Bourbaki [4] I, 10, 2, p. 120 et la proposition 1 *ibid.* I, 10, 1, p. 113, en remarquant que $G(X)$ est la projection sur F du fermé $(X \times F) \cap G$. Voir aussi Bourbaki [3] I, 10, exerc. 3 a), p. 109.

2/ On peut affaiblir les conditions de l'énoncé b) et supposer que E est quasi régulier et F accessible (voir, pour les définitions, 2.2, VII et III).

COROLLAIRE 1.— Soient E, F des espaces compacts et G une partie de $E \times F$. Pour que G soit fermée il faut et il suffit que pour toutes parties fermées X de E et Y de F, les parties $G(X)$ et $\overline{G(Y)}$ soient fermées dans F et E respectivement.

COROLLAIRE 2.— Soient E, F, G des espaces compacts, H une partie fermée de $E \times F$ et K une partie fermée de $F \times G$. Alors KH est une partie fermée de $E \times G$.

DEFINITION 1.— Soient E, F des espaces topologiques et G une partie de $E \times F$. On dit que G est *mi-ouverte* lorsque pour toute partie ouverte Y de F, $\overline{G(Y)}$ est une partie ouverte de E. (Voir Choquet [7] p. 71).

On dira que G est *bi-ouverte* lorsque G et \overline{G} sont mi-ouvertes.

REMARQUE.— Pour qu'une application $f : E \longrightarrow F$ soit continue il faut et il suffit que son graphe soit mi-ouvert.

LEMME 5.— Soient E, F des espaces topologiques et G une partie de $E \times F$.

a) Si G est mi-ouverte, alors pour toute partie X de E on a

$$G(\bar{X}) \subset \overline{G(X)}.$$

b) Réciproquement si pour toute partie X de E on a

$$G(\bar{X}) \subset \overline{G(X)}$$

alors G est mi-ouverte.

En effet :

a) Si $y \notin \overline{G(X)}$ alors il existe un voisinage ouvert V de y tel que $V \cap G(X) = \emptyset$, donc $\overline{G(V)} \cap X = \emptyset$, or $\overline{G(V)}$ est ouvert, donc $\overline{G(V)} \cap \bar{X} = \emptyset$, donc $V \cap G(\bar{X}) = \emptyset$ donc $y \notin G(\bar{X})$.

b) Soit Y une partie ouverte de F, alors $\bar{C} Y$ est fermé ; comme $G(\bar{C} \overline{G(Y)}) \subset \bar{C} Y$ (voir lemme 1) on a $\text{Adh } G(\bar{C} \overline{G(Y)}) \subset \bar{C} Y$; ainsi $G(\text{Adh } \bar{C} \overline{G(Y)}) \subset \text{Adh } G(\bar{C} \overline{G(Y)}) \subset \bar{C} Y$ ou encore $Y \subset \bar{C} G(\text{Adh } \bar{C} \overline{G(Y)})$ donc $\overline{G(Y)} \subset \overline{G(\bar{C} G(\text{Adh } \bar{C} \overline{G(Y)}) \cap \bar{C} \text{Adh } \bar{C} \overline{G(Y)})} = \text{Int } \overline{G(Y)}$; et $\overline{G(Y)}$ est bien ouvert. cqfd

COROLLAIRE.— Soient E un espace quasi compact, F un espace topologique et G une partie fermée de $E \times F$. Pour que G soit mi-ouverte il faut et il suffit que pour toute partie X de E on ait

$$G(\overline{X}) = \overline{G(X)}.$$

LEMME 6.— Soient E, F des espaces topologiques, G une partie de $E \times F$ et X une partie de E .

a) Si X est quasi compacte alors

$$\overline{G(X)} \subset \overline{G(X)}.$$

b) Si X est ouverte alors

$$\overline{G(X)} \subset \overline{G(X)}.$$

En effet :

a) $y \notin \overline{G(X)} \iff \forall x \in X (x, y) \notin \overline{G} \iff \forall x \in X \exists U(x) \in \mathcal{V}(x) \exists V(y) \in \mathcal{V}(y) (U(x) \times V(y)) \cap G = \emptyset$; soit alors $y \notin \overline{G(X)}$, comme X est quasi compacte il existe une famille finie $\{U(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ qui recouvre X ; ainsi $V = \bigcap_{1 \leq i \leq n} V(x_i) \in \mathcal{V}(y)$, $X \subset U = \bigcup_{1 \leq i \leq n} U(x_i)$ et $(U \times V) \cap G = \emptyset$, donc $V \cap G(X) = \emptyset$, donc $y \notin \overline{G(X)}$.

b) $y \in \overline{G(X)} \iff \exists x \in X (x, y) \in \overline{G} \iff \exists x \in X \forall U \in \mathcal{V}(x) \forall V \in \mathcal{V}(y) (U \times V) \cap G \neq \emptyset \iff \forall V \in \mathcal{V}(y) V \cap G(X) \neq \emptyset \iff y \in \overline{G(X)}$. cqfd

DEFINITION 2.— On dira qu'un espace topologique E est *concentré* lorsque toute intersection d'une famille non vide de parties fermées non vides de E est non vide. On dira qu'une partie X d'un espace topologique est *concentrée* lorsque le sous-espace X est concentré.

Il est clair que pour qu'un espace topologique E soit concentré il faut et il suffit qu'il soit vide ou qu'il existe un point de E vers lequel convergent tous les ultrafiltres sur E . Tout espace concentré est évidemment quasi compact.

LEMME 7.— Soient E, F des espaces topologiques, Λ un ensemble ordonné, $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille croissante de parties fermées de $E \times F$ et X une partie de E . Si X est quasi compacte et Λ filtrant à gauche, ou bien si X est concentrée, alors

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda(X) = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \right) (X).$$

En effet : D'une manière générale le second membre est contenu dans le premier. Réciproquement, soit $y \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda(X)$; posons $X_\lambda = \overline{G_\lambda}^{-1}(y)$, alors $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille croissante de parties fermées de E et $X_\lambda \cap X \neq \emptyset$; donc dans les deux cas on a $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right) \cap X \neq \emptyset$; soit donc x un élément de cet ensemble, alors $y \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda(x) = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \right) (x) \subset \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \right) (X)$. cqfd

La définition suivante est due à Choquet [7].

DEFINITION 3.— Soient E un espace topologique, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E , \mathfrak{c} un filtre sur I et $\mathfrak{g}(\mathfrak{c})$ la grille associée au filtre \mathfrak{c} (voir Choquet [8] ou encore plus loin 0.2, rappels, h). On pose

$$\inf_{\mathfrak{c}} A_i = \bigcap_{J \in \mathfrak{g}(\mathfrak{c})} \text{Adh} \bigcup_{i \in J} A_i \quad \text{et} \quad \sup_{\mathfrak{c}} A_i = \bigcap_{J \in \mathfrak{c}} \text{Adh} \bigcup_{i \in J} A_i.$$

Ce sont des parties fermées de E que l'on appelle respectivement la *limite inférieure* et la *limite supérieure* de la famille $(A_i)_{i \in I}$ suivant le filtre \mathfrak{c} (voir Choquet [7] p. 60-61). On dira que la famille $(A_i)_{i \in I}$ possède une *limite* suivant le filtre \mathfrak{c} lorsque sa limite inférieure et sa limite supérieure suivant \mathfrak{c} sont égales et on posera dans ce cas

$$\lim_{\mathfrak{c}} A_i = \inf_{\mathfrak{c}} A_i = \sup_{\mathfrak{c}} A_i ;$$

(voir Choquet [7] p. 87).

COROLLAIRE.— Soient E, F des espaces topologiques, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $E \times F$, \mathfrak{c} un filtre sur I et X une partie de E .

a) Si X est quasi compacte alors

$$\sup_{\mathfrak{c}} (A_i(X)) \subset \left(\sup_{\mathfrak{c}} A_i \right) (X).$$

b) Si X est ouverte alors

$$\left(\inf_{\mathfrak{c}} A_i \right) (X) \subset \inf_{\mathfrak{c}} (A_i(X)) \quad \text{et} \quad \left(\sup_{\mathfrak{c}} A_i \right) (X) \subset \sup_{\mathfrak{c}} (A_i(X)).$$

c) Si X est concentrée alors

$$\inf_{\mathfrak{c}} (A_i(X)) \subset \left(\inf_{\mathfrak{c}} A_i \right) (X).$$

En effet : Pour toute partie J de I on pose

$$G_J = \bigcup_{i \in J} A_i,$$

alors on a

$$G_J(X) = \bigcup_{i \in J} A_i(X) \quad , \quad \inf_{\mathfrak{c}} A_i = \bigcap_{J \in \mathfrak{g}(\mathfrak{c})} \overline{G_J} \quad , \quad \sup_{\mathfrak{c}} A_i = \bigcap_{J \in \mathfrak{c}} \overline{G_J} \quad ,$$

$$\inf_{\mathfrak{c}} (A_i(X)) = \bigcap_{J \in \mathfrak{g}(\mathfrak{c})} \overline{G_J(X)} \quad \text{et} \quad \sup_{\mathfrak{c}} (A_i(X)) = \bigcap_{J \in \mathfrak{c}} \overline{G_J(X)}$$

(où $\mathfrak{g}(\mathfrak{c})$ est la grille associée au filtre \mathfrak{c}).

Les résultats suivent alors des deux lemmes précédents.

cqfd

REMARQUES.—

1/ Le lemme 6 est un cas particulier du corollaire, celui où la famille $(A_i)_{i \in I}$ est réduite à un seul élément G .

2/ Le lemme 6 et le corollaire précédent ne peuvent être améliorés, dans le sens suivant :

a) Soient E un espace topologique et X une partie *non quasi compacte* de E ; alors il existe un espace topologique F et une partie G de $E \times F$ tels que

$$\overline{G(X)} \not\subset \overline{G(X)}.$$

En effet : Il existe sur X un filtre sans points adhérents dans X , soit \mathfrak{F} l'ensemble des fermés (dans X) de ce filtre et soit u un terme n'appartenant pas à \mathfrak{F} . On pose $F = \mathfrak{F} \cup \{u\}$. Pour tout $A \in \mathfrak{F}$ on pose $s(A) = \{B \mid B \in \mathfrak{F} \text{ et } B \subset A\} \cup \{u\}$; soit \mathfrak{O}_1 le filtre sur F engendré par l'ensemble des $s(A)$. Alors $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_1 \cup \mathcal{P}(\mathfrak{F})$ est l'ensemble des ouverts d'une topologie dont on munit F . En posant $G = \bigcup_{A \in \mathfrak{F}} A \times \{A\}$ on vérifie que

$$\overline{G(X)} = F \not\subset \overline{G(X)} \subset \mathfrak{F}.$$

cqfd

b) Soient E un espace topologique et X une partie *non ouverte* de E . En prenant pour F un espace à un seul élément et en posant $G = (\overline{X}) \times F$ on voit que

$$\overline{G(X)} = F \not\subset \overline{G(X)} = \emptyset.$$

c) Soient E un espace topologique et X une partie *non concentrée* de E . Alors il existe une famille $(X_i)_{i \in I}$ de fermés de E telle que $X_i \cap X \neq \emptyset$ et $\left(\bigcap_{i \in I} X_i \right) \cap X = \emptyset$. On prend pour F un espace à un seul élément et on pose $A_i = X_i \times F$ et $\mathfrak{c} = \{I\}$. On voit alors que

$$\inf_{\mathfrak{c}} (A_i(X)) = F \not\subset \left(\inf_{\mathfrak{c}} A_i \right) (X) = \emptyset.$$

LEMME 8.— Soient E, F, G, H des espaces topologiques, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $E \times F$, $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $G \times H$, $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $E \times H$, X une partie ouverte de $F \times G$, \mathfrak{c} un filtre sur I , $A = \inf_{\mathfrak{c}} A_i$, $B = \inf_{\mathfrak{c}} B_i$ et $C = \inf_{\mathfrak{c}} C_i$.

Si pour tout $i \in I$ on a $B_i \times A_i \subset C_i$ alors on a aussi $B \times A \subset C$.

En effet : Soit $(x, t) \in B \times A$; il existe y, z tels que $(x, y) \in A$, $(y, z) \in X$ et $(z, t) \in B$; donc pour tous $U \in \mathfrak{V}(x)$, $V \in \mathfrak{V}(y)$, $W \in \mathfrak{V}(z)$ et $T \in \mathfrak{V}(t)$ il existe $J \in \mathfrak{c}$ tel que pour tout $i \in J$ on ait $(U \times V) \cap A_i \neq \emptyset$ et $(W \times T) \cap B_i \neq \emptyset$. Comme X est ouvert et que $(y, z) \in X$ on peut choisir V et W tels que $V \times W \subset X$, de sorte que pour tout $i \in J$ on a $(B_i \times A_i) \cap (U \times T) \neq \emptyset$ donc $C_i \cap (U \times T) \neq \emptyset$ donc $(x, t) \in C$. cqfd

REMARQUE.— On ne peut améliorer le résultat précédent, dans le sens suivant :

Soit X une partie non ouverte de $F \times G$; il existe alors sur $\hat{C} X$ un filtre \mathfrak{c} qui converge vers un point $(u, v) \in X$. Si l'on pose $I = \hat{C} X$, $E = F$, $H = G$, $A_i = \{(pr_{Ft}, pr_{Ft})\}$, $B_i = \{(pr_{Gt}, pr_{Gt})\}$ et $C_i = \emptyset$, on a bien pour tout $i \in I$ $B_i \times A_i \subset C_i$ cependant que $(u, v) \in B \times A \not\subset C = \emptyset$.

2. L'ESPACE DES ULTRAFILTRES

NOTATIONS.— Etant donné un ensemble E , pour tout ensemble \mathfrak{X} de parties de E on désignera par $\mathfrak{T} < \mathfrak{X} >$ l'ensemble des ultrafiltres sur E qui contiennent \mathfrak{X} . Pour toute partie X de E , au lieu de $\mathfrak{T} < \{X\} >$ on écrira $\mathfrak{T}(X)$ et pour tout élément x de E , au lieu de $\mathfrak{T}(\{x\})$ on écrira \tilde{x} . Ainsi $\mathfrak{T}(E)$ est l'ensemble des ultrafiltres sur E et \tilde{x} est l'ultrafiltre principal engendré par $\{x\}$ sur E . L'application $x \longrightarrow \tilde{x}$ est une injection canonique de E dans $\mathfrak{T}(E)$. On désignera par \tilde{X} l'image de la partie X de E par cette injection (il y a là un léger abus de notation). Ainsi \tilde{E} est l'ensemble des ultrafiltres principaux sur E . On désignera en outre par Δ la diagonale de $\mathfrak{T}(E) \times \mathfrak{T}(E)$ et par δ la diagonale de $\tilde{E} \times \tilde{E}$ de sorte que $\delta = \{(\tilde{x}, \tilde{x}) \mid x \in E\}$.

S'il y a lieu, et pour éviter les confusions, on fera figurer l'ensemble de départ E en indice à epsilon et aux delta ; on écrira ainsi, par exemple, $\mathfrak{T}_E(X)$ et $\mathfrak{T}_F(X)$ pour représenter respectivement l'ensemble des ultrafiltres sur E et sur F auxquels X appartient ; δ_E et δ_F représenterons respectivement les diagonales de $\tilde{E} \times \tilde{E}$ et de $\tilde{F} \times \tilde{F}$, etc.

RAPPELS.— On sait que (voir Samuel [20] ou Bourbaki [4], I, 9, exerc. 27, p. 170) l'ensemble des $\mathfrak{T}(X)$ où X parcourt $\mathfrak{Q}(E)$ est une base d'ouverts pour une topologie (canonique) sur $\mathfrak{T}(E)$. Lorsqu'on parlera de l'espace $\mathfrak{T}(E)$ des ultrafiltres sur E on supposera toujours, sauf mention expresse du contraire, $\mathfrak{T}(E)$ muni de cette topologie. (Cet espace s'identifie au spectre (voir [6]) de l'anneau $\mathfrak{Q}(E)$).

Rappelons brièvement les résultats connus suivants :

a) L'espace $\mathfrak{T}(E)$ est stonien, c'est-à-dire compact et extrêmement discontinu (voir, pour la définition, 2.2, XIII).

b) L'ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathfrak{T}(E)$ est l'ensemble $\{\mathfrak{T}(X) \mid X \in \mathfrak{Q}(E)\}$. Ainsi $\mathfrak{T}(X)$ est toujours une partie compacte et ouverte de $\mathfrak{T}(E)$.

c) L'adhérence d'une partie \mathfrak{A} de $\mathfrak{T}(E)$ est égale à l'ensemble de tous les ultrafiltres sur E plus fins que l'intersection des ultrafiltres appartenant à \mathfrak{A} ; autrement dit

$$\text{Adh } \mathfrak{A} = \mathfrak{T} < \bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \mathfrak{a} >$$

d) En particulier $\tilde{X} = \mathfrak{T}(X)$. De plus \tilde{E} est l'ensemble des points isolés de $\mathfrak{T}(E)$; c'est un ouvert partout dense dans $\mathfrak{T}(E)$.

e) Pour toute partie \mathfrak{X} de $\mathfrak{Q}(E)$ l'ensemble $\mathfrak{T} < \mathfrak{X} >$ est une partie fermée de $\mathfrak{T}(E)$ égale à $\bigcap_{X \in \mathfrak{X}} \mathfrak{T}(X)$. Si \mathfrak{X} engendre un filtre \mathfrak{a} alors $\mathfrak{T} < \mathfrak{X} > = \mathfrak{T} < \mathfrak{a} >$, sinon alors $\mathfrak{T} < \mathfrak{X} > = \emptyset$.

f) Pour tout filtre \mathfrak{a} sur E l'ensemble $\{\Upsilon(A) \mid A \in \mathfrak{a}\}$ est un système fondamental de voisinages (ouverts et compacts) de $\Upsilon < \mathfrak{a} >$.

g) L'application $\mathfrak{a} \longrightarrow \Upsilon < \mathfrak{a} >$ est une bijection canonique entre l'ensemble $\Phi(E)$ des filtres sur E et l'ensemble $\mathfrak{K}(\Upsilon(E))$ des fermés (autrement dit, des compacts) non vides de $\Upsilon(E)$; l'application réciproque étant celle qui fait correspondre au fermé non vide $\tilde{\mathfrak{A}}$ le filtre $\bigcap_{\mathfrak{a} \in \tilde{\mathfrak{A}}} \mathfrak{a}$. On dira que $\Upsilon < \mathfrak{a} >$ repré-

sente le filtre \mathfrak{a} . Pour qu'une famille $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ de filtres sur E possède une borne supérieure il faut et il suffit que $\bigcap_{i \in I} \Upsilon < \mathfrak{a}_i >$ soit non vide; dans ce cas, ce dernier ensemble représente le filtre borne supérieure de la famille; par contre le filtre borne inférieure (ou intersection) de la famille est représenté par $\text{Adh} \bigcup_{i \in I} \Upsilon < \mathfrak{a}_i >$.

h) Soit $\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ la grille associée au filtre \mathfrak{a} . On a $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}) = \bigcup_{\mathfrak{b} \in \Upsilon < \mathfrak{a} >} \mathfrak{b}$; $\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ est l'ensemble des parties de E qui rencontrent tous les éléments de \mathfrak{a} . De plus, pour tout ultrafiltre \mathfrak{b} sur E, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ équivaut à $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$.

i) $\Upsilon(A \cap B) = \Upsilon(A) \cap \Upsilon(B)$, $\Upsilon(A \cup B) = \Upsilon(A) \cup \Upsilon(B)$, $\Upsilon(\hat{C}A) = \hat{C}\Upsilon(A)$.

DEFINITION 4.— Soient E, F des ensembles et G une partie de $E \times F$. On désignera par \hat{G} l'adhérence dans l'espace produit $\Upsilon(E) \times \Upsilon(F)$ de la partie $\tilde{G} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid (x, y) \in G\}$ de $\tilde{E} \times \tilde{F}$. On dira que \hat{G} est l'extension de G aux ultrafiltres.

Pour toute partie \mathfrak{X} de $\mathfrak{K}(E)$, $G(\mathfrak{X})$ désignera évidemment l'ensemble des $G(X)$ où X parcourt \mathfrak{X} . Voici deux lemmes dont la démonstration est facile.

LEMME 9.— Soient E, F des ensembles, G une partie de $E \times F$, \mathfrak{a} et \mathfrak{b} des ultrafiltres sur E et F respectivement. Les énoncés suivants sont équivalents :

- a) $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \hat{G}$;
- b) le filtre produit $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ possède une trace sur G;
- c) $G(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b}$.

LEMME 10.— Soient E, F, G des ensembles, H une partie de $E \times F$ et K une partie de $F \times G$. Alors

- a) $\widehat{\widehat{H}} = \widehat{H}^{-1}$;
- b) $\widehat{\widehat{KH}} = \widehat{K} \widehat{H}$.

(Il faut se souvenir que \widehat{H} et \widehat{K} sont fermés donc que $\widehat{K} \widehat{H}$ est fermé en vertu du corollaire 2 du lemme 4).

3. SUR LES FERMES D'UN ESPACE $\Upsilon(E) \times F$

Nous rappelons le résultat connu suivant :

LEMME 11.— Soient E un espace compact, F un espace topologique, G une partie fermée de $E \times F$ et \mathfrak{B} une base de filtre sur E formée de parties fermées. Alors

$$G\left(\bigcap_{X \in \mathfrak{B}} X\right) = \bigcap_{X \in \mathfrak{B}} G(X).$$

(C'est l'exercice 3b) de Bourbaki [3], I, 10, p. 109; voir aussi Bourbaki [4], I, 10, exerc. 11, p. 172).

COROLLAIRE.— Soient E un ensemble, F un espace topologique, G et H des parties fermées de l'espace $\Upsilon(E) \times F$, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $\Upsilon(E) \times F$, \mathfrak{a} un filtre sur E et \mathfrak{c} un filtre sur F.

a) On a

$$G(\Upsilon < \mathfrak{a} >) = \bigcap_{X \in \mathfrak{a}} G(\Upsilon(X)).$$

b) Pour que l'on ait $G \subset H$ il faut et il suffit que pour toute partie X de E on ait

$$G(\mathcal{T}(X)) \subset H(\mathcal{T}(X)).$$

c) Pour que l'on ait $G \subset \inf_{\mathfrak{c}} A_i$ il faut et il suffit que pour toute partie X de E on ait

$$G(\mathcal{T}(X)) \subset \inf_{\mathfrak{c}} A_i(\mathcal{T}(X)).$$

En effet :

a) Il suffit de remarquer que l'ensemble des $\mathcal{T}(X)$ où X parcourt \mathfrak{a} est une base de filtre sur $\mathcal{T}(E)$ formée de parties fermées (voir 0.2, rappels, f)), que $\mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle = \bigcap_{X \in \mathfrak{a}} \mathcal{T}(X)$ (voir *ibid.* e)) et d'appliquer le lemme précédent.

b) La condition est évidemment nécessaire ; elle est suffisante en vertu de a).

c) $\mathcal{T}(X)$ est un ouvert de $\mathcal{T}(E)$ donc (voir b) du corollaire des lemmes 6 et 7) on a

$$\left(\inf_{\mathfrak{c}} A_i \right) (\mathcal{T}(X)) \subset \inf_{\mathfrak{c}} (A_i(\mathcal{T}(X))) ;$$

la condition est donc nécessaire en vertu de b). Réciproquement, si elle est satisfaite, on a pour toute partie X de E

$$G(\mathcal{T}(X)) \subset \inf_{\mathfrak{c}} (A_i(\mathcal{T}(X))) = \bigcap_{J \in \mathfrak{g}(\mathfrak{c})} \text{Adh} \bigcup_{i \in J} A_i(\mathcal{T}(X)) ;$$

or $\mathcal{T}(X)$ est ouvert et compact dans $\mathcal{T}(E)$ (voir 0.2, rappels, b)) donc d'après le lemme 6 on a

$$\text{Adh} \bigcup_{i \in J} A_i(\mathcal{T}(X)) = \left(\text{Adh} \bigcup_{i \in J} A_i \right) (\mathcal{T}(X)).$$

Donc pour tout $J \in \mathfrak{g}(\mathfrak{c})$ on a

$$G(\mathcal{T}(X)) \subset \left(\text{Adh} \bigcup_{i \in J} A_i \right) (\mathcal{T}(X)),$$

donc en vertu de b)

$$G \subset \text{Adh} \bigcup_{i \in J} A_i ,$$

donc

$$G \subset \bigcap_{J \in \mathfrak{g}(\mathfrak{c})} \text{Adh} \bigcup_{i \in J} A_i = \inf_{\mathfrak{c}} A_i \quad \text{cqfd}$$

LEMME 12.— Soient E un ensemble, F un espace topologique et G une partie fermée de l'espace $\mathcal{T}(E) \times F$.

a) Si G est mi-ouverte, alors

$$G = \text{Adh} ((\tilde{E} \times F) \cap G).$$

b) Si F est compact et si $G = \text{Adh} ((\tilde{E} \times F) \cap G)$ alors G est mi-ouverte.

En effet :

a) Comme G est fermée par hypothèse, il suffit de montrer que $G \subset \text{Adh} ((\tilde{E} \times F) \cap G)$. Soit $(\mathfrak{a}, y) \in G$; pour tout voisinage ouvert V de y , $\overline{G}^{\downarrow}(V)$ est ouvert donc pour tout $A \in \mathfrak{a}$ $\mathcal{T}(A) \cap \overline{G}^{\downarrow}(V)$ est un ouvert non vide de $\mathcal{T}(E)$; il existe donc (voir 0.2, rappels, d)) $x \in E$ tel que $\tilde{x} \in \mathcal{T}(A) \cap \overline{G}^{\downarrow}(V)$, donc il existe aussi $y' \in V$ tel que $(\tilde{x}, y') \in G$; ainsi $(\mathcal{T}(A) \times V) \cap ((\tilde{E} \times F) \cap G) \neq \emptyset$ donc (voir 0.2, rappels, f))

$$(\mathfrak{a}, y) \in \text{Adh} ((\tilde{E} \times F) \cap G).$$

b) Soit V un ouvert de F . Si $\mathfrak{a} \in \overline{G}^{-1}(V)$ il existe un ouvert U de F tel que $\mathfrak{a} \in \overline{G}^{-1}(U)$ et $\overline{U} \subset V$, car F est régulier. Ainsi $U \cap G(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$, or (voir a) du corollaire du lemme 11) $G(\mathfrak{a}) = \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} G(\mathcal{T}(A))$, donc pour tout $A \in \mathfrak{a}$ on a $U \cap G(\mathcal{T}(A)) \neq \emptyset$ donc $(\mathcal{T}(A) \times U) \cap G \neq \emptyset$ donc $(\tilde{A} \times U) \cap G \neq \emptyset$, soit $\overline{G}^{-1}(U) \cap \tilde{A} \neq \emptyset$; si l'on pose $\tilde{X} = \overline{G}^{-1}(U) \cap \tilde{E}$, on a pour tout $A \in \mathfrak{a}$ $\tilde{X} \cap \tilde{A} \neq \emptyset$ donc $X \in \mathfrak{a}$. Mais $\overline{G}^{-1}(\overline{U})$ est fermé (voir a) du lemme 4) donc $\mathfrak{a} \in \mathcal{T}(X) = \text{Adh}(\overline{G}^{-1}(U) \cap \tilde{E}) \subset \text{Adh} \overline{G}^{-1}(U) \subset \overline{G}^{-1}(\overline{U}) \subset \overline{G}^{-1}(V)$ (voir 0.2, rappels, d), $\tilde{X} = \mathcal{T}(X)$; donc $\overline{G}^{-1}(V)$ est un voisinage de \mathfrak{a} ; ainsi $\overline{G}^{-1}(V)$ est ouvert. cqfd

COROLLAIRE.— Soient E, F des ensembles et G une partie fermée de l'espace $\mathcal{T}(E) \times \mathcal{T}(F)$. Pour que G soit bi-ouverte il faut et il suffit que

$$G = \text{Adh}((\tilde{E} \times \tilde{F}) \cap G).$$

En effet : La condition est suffisante en vertu du b) du lemme précédent. Réciproquement, posons $A = \tilde{E} \times \mathcal{T}(F)$ et $B = \mathcal{T}(E) \times \tilde{F}$; alors $A \cap B = \tilde{E} \times \tilde{F}$; si G est bi-ouverte on a, en vertu du a) du lemme précédent, $\overline{A \cap B} = \overline{B \cap A} = G$; or $\overline{A \cap B \cap G} \supset A \cap \overline{B \cap G}$ (voir Bourbaki [4], I, 1, 6, proposition 5, p. 24) car A est ouvert, donc $\overline{A \cap B \cap G} \supset A \cap G$, donc $\overline{A \cap B \cap G} \supset \overline{A \cap G} = G$. cqfd

LEMME 13.— Soient E, F des ensembles, G une partie de $E \times F$ et \hat{G} son extension aux ultrafiltres.

a) \hat{G} est bi-ouverte.

b) Pour toute partie X de E on a

$$\hat{G}(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{T}(G(X)).$$

c) Pour tout filtre \mathfrak{a} sur E on a

$$\hat{G}(\mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \mathcal{T} \langle G(\mathfrak{a}) \rangle.$$

En effet :

a) découle du lemme 12 ou de son corollaire.

b) $\hat{G}(\mathcal{T}(X)) = \hat{G}(\tilde{X})$ (voir 0.2, rappels, d); $\hat{G}(\tilde{X}) = \text{Adh} \hat{G}(\tilde{X})$ puisque \hat{G} est mi-ouverte en particulier (voir corollaire du lemme 5); or $\hat{G}(\tilde{X}) = \overline{G}(\tilde{X})$ et $\overline{G}(\tilde{X}) = \mathcal{T}(G(X))$; d'où le résultat.

c) $\hat{G}(\mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \bigcap_{X \in \mathfrak{a}} \hat{G}(\mathcal{T}(X))$ (voir a) du corollaire du lemme 11), or en vertu de b) on a

$$\hat{G}(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{T}(G(X))$$

donc $\hat{G}(\mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \bigcap_{X \in \mathfrak{a}} \mathcal{T}(G(X))$; le résultat découle alors du 0.2, rappels, e). cqfd

REMARQUES.—

a) Soient E un ensemble, K un espace compact et $f : E \longrightarrow K$ une application de E dans K . Désignons par G l'adhérence dans l'espace $\mathcal{T}(E) \times K$ du graphe $\{(\tilde{x}, f(x)) \mid x \in E\}$. Alors G est le graphe d'une application $g : \mathcal{T}(E) \longrightarrow K$ (K est séparé!) continue (le graphe G est mi-ouvert en vertu du b) du lemme 12 et voir la remarque qui suit la définition 1). Pour tout $\mathfrak{a} \in \mathcal{T}(E)$ on a $g(\mathfrak{a}) = \lim_{\mathfrak{a}} f(x)$ (qui est aussi la limite de f suivant l'ultrafiltre \mathfrak{a}). L'application g est l'unique "extension continue" de f à $\mathcal{T}(E)$; c'est-à-dire explicitement que si g' est une application continue de $\mathcal{T}(E)$ dans K telle que $g'(\tilde{x}) = f(x)$ pour tout $x \in E$, alors $g' = g$.

b) Soient E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application de E dans F ; soit \hat{f} l'extension du graphe de f aux ultrafiltres. Alors \hat{f} est le graphe de l'unique "extension continue" de f aux ultrafiltres; pour tout ultrafiltre \mathfrak{a} sur E , $f(\mathfrak{a})$ est l'ultrafiltre sur F "image" de \mathfrak{a} par f (c'est-à-dire l'ultrafiltre engendré par $f(\mathfrak{a})$ sur F).

LEMME 14.— Soient E un ensemble, F un espace topologique, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $\mathcal{T}(E) \times F$ et \mathfrak{c} un filtre sur I .

a) Pour toute partie X de E on a

$$\left(\inf_{\mathfrak{c}} A_i \right) (\mathcal{T}(X)) \subset \inf_{\mathfrak{c}} A_i(\mathcal{T}(X)) \subset \sup_{\mathfrak{c}} A_i(\mathcal{T}(X)) = \left(\sup_{\mathfrak{c}} A_i \right) (\mathcal{T}(X)).$$

b) Pour que la famille $(A_i)_{i \in I}$ possède une limite suivant le filtre \mathfrak{c} il faut et il suffit que pour toute partie X de E la famille $(A_i(\mathcal{T}(X)))_{i \in I}$ possède une limite suivant le filtre \mathfrak{c} . Et s'il en est ainsi on a

$$\left(\lim_{\mathfrak{c}} A_i \right) (\mathcal{T}(X)) = \lim_{\mathfrak{c}} A_i(\mathcal{T}(X)).$$

En effet :

a) il suffit de se rappeler que $\mathcal{T}(X)$ est ouvert et compact (voir 0.2, rappels, b)) et d'appliquer le corollaire des lemmes 6 et 7.

b) La condition est nécessaire puisque si $\lim_{\mathfrak{c}} A_i$ existe elle est égale à $\inf_{\mathfrak{c}} A_i$ et $\sup_{\mathfrak{c}} A_i$ par définition, donc le résultat découle de a). Réciproquement, posons $A = \sup_{\mathfrak{c}} A_i$. Si $\lim_{\mathfrak{c}} A_i(\mathcal{T}(X))$ existe pour toute partie X de E , on a

$$\inf_{\mathfrak{c}} (A_i(\mathcal{T}(X))) = \lim_{\mathfrak{c}} (A_i(\mathcal{T}(X))) = \sup_{\mathfrak{c}} (A_i(\mathcal{T}(X))) = A(\mathcal{T}(X))$$

(la dernière égalité en vertu de a)). Or A est une partie fermée de $\mathcal{T}(E) \times F$, donc (voir le c) du corollaire du lemme 11) on a $A \subset \inf_{\mathfrak{c}} A_i$, donc la famille $(A_i)_{i \in I}$ possède bien une limite suivant le filtre \mathfrak{c} . *cqfd*

LEMME 15.— Soient E un ensemble, F et G des espaces compacts, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $\mathcal{T}(E) \times F$, A une partie fermée et mi-ouverte de $F \times G$ et \mathfrak{c} un filtre sur I .

a) On a

$$A \left(\inf_{\mathfrak{c}} A_i \right) \subset \inf_{\mathfrak{c}} (A A_i) \quad \text{et} \quad A \left(\sup_{\mathfrak{c}} A_i \right) = \sup_{\mathfrak{c}} A A_i.$$

b) Si la famille $(A_i)_{i \in I}$ possède une limite suivant le filtre \mathfrak{c} , alors la famille $(A A_i)_{i \in I}$ possède également une limite suivant \mathfrak{c} et l'on a

$$A \left(\lim_{\mathfrak{c}} A_i \right) = \lim_{\mathfrak{c}} A A_i.$$

En effet :

a) On remarque d'abord que $\inf_{\mathfrak{c}} A_i$, $\sup_{\mathfrak{c}} A_i$ et A étant fermés, il en est de même de $A \left(\inf_{\mathfrak{c}} A_i \right)$ et de $A \left(\sup_{\mathfrak{c}} A_i \right)$ (d'après le corollaire 2 du lemme 4). D'autre part, pour toute partie X de E , on a

$$\left(A \left(\inf_{\mathfrak{c}} A_i \right) \right) (\mathcal{T}(X)) = A \left(\left(\inf_{\mathfrak{c}} A_i \right) (\mathcal{T}(X)) \right) \subset A \left(\inf_{\mathfrak{c}} (A_i(\mathcal{T}(X))) \right)$$

(d'après le b) du corollaire des lemmes 6 et 7) et

$$A \left(\inf_{\mathfrak{c}} (A_i(\mathcal{T}(X))) \right) \subset \bigcap_{J \in \mathfrak{g}(\mathfrak{c})} A \left(\text{Adh} \bigcup_{i \in J} A_i(\mathcal{T}(X)) \right) \subset \bigcap_{J \in \mathfrak{g}(\mathfrak{c})} \text{Adh} \bigcup_{i \in J} (A A_i) (\mathcal{T}(X))$$

(car A est mi-ouverte, voir a) du lemme 5). Ainsi on a

$$\left(A \left(\inf_{\mathfrak{c}} A_i \right) \right) (\mathcal{T}(X)) \subset \inf_{\mathfrak{c}} (A A_i) (\mathcal{T}(X)),$$

donc (d'après le c) du corollaire du lemme 11) on a bien

$$A \left(\inf_{\mathfrak{c}} A_i \right) \subset \inf_{\mathfrak{c}} (A A_i).$$

De même, on voit que pour toute partie X de E on a

$$A\left(\sup_{\mathfrak{C}} A_i\right) (\Upsilon(X)) = \sup_{\mathfrak{C}} (AA_i) (\Upsilon(X)) ,$$

donc (d'après le b) du corollaire du lemme 11) on a bien

$$A\left(\sup_{\mathfrak{C}} A_i\right) = \sup_{\mathfrak{C}} (AA_i).$$

b) découle immédiatement de a).

cqfd

4. SUR LES ESPACES SEMI-UNIFORMES

Si, dans la définition d'une structure uniforme (Bourbaki [4], II, 1, 1, définition 1, p. 189), on supprime l'axiome de symétrie (U_{II}) on obtient la définition d'une structure *semi-uniforme*. Pour cette dernière structure, on conservera les définitions des mots entourages, système fondamental d'entourages, topologie déduite et des notions de finesse et de compatibilité.

[La notion de structure semi-uniforme introduite par Nachbin [18] a été retrouvée et étudiée par D. Tamari sous le nom de "quasi-ordoform structure" (voir Császár [9] qui l'emprunte à Tamari et préfère le nom de structure quasi-uniforme qu'il donne à un système fondamental d'entourages plutôt qu'à l'ensemble des entourages)].

Nous préférons harmoniser ainsi la terminologie, si nous gardons le nom donné par Nachbin, avec celle de Bourbaki. *Cependant nous désignerons par la même lettre une structure semi-uniforme (ou uniforme) et l'ensemble de ses entourages.*

Soit E un ensemble muni d'une structure semi-uniforme \mathfrak{U} . L'ensemble \mathfrak{U} des $\overset{-1}{V}$ où V parcourt \mathfrak{U} est l'ensemble des entourages d'une structure semi-uniforme sur E. La topologie \mathfrak{C}_+ déduite de \mathfrak{U} est celle où le filtre $\mathfrak{V}(x)$ des voisinages de x est égal à l'ensemble des parties $V(x)$ de E où V parcourt \mathfrak{U} . La topologie \mathfrak{C}_- déduite de $\overset{-1}{\mathfrak{U}}$ n'est pas nécessairement égale à \mathfrak{C}_+ .

LEMME 16.— *Soit E un ensemble muni d'une structure semi-uniforme \mathfrak{U} . Soient $G = \bigcap_{V \in \mathfrak{U}} V$, \mathfrak{C}_+ la topologie déduite de \mathfrak{U} et \mathfrak{C}_- la topologie déduite de $\overset{-1}{\mathfrak{U}}$.*

- a) *Tout entourage $V \in \mathfrak{U}$ est un voisinage de G pour la topologie produit $\mathfrak{C}_- \times \mathfrak{C}_+$.*
- b) *\mathfrak{U} admet un système fondamental d'entourages fermés pour la topologie produit $\mathfrak{C}_+ \times \mathfrak{C}_-$.*
- c) *G est le graphe d'un préordre sur E et G est fermé pour la topologie produit $\mathfrak{C}_+ \times \mathfrak{C}_-$.*

En effet :

a) Soit $V \in \mathfrak{U}$; il existe $W \in \mathfrak{U}$ tel que $\overset{3}{W} \subset V$. Soit $(x, y) \in \overset{-1}{G}$; $\overset{-1}{W}(x)$ est un voisinage de x pour la topologie \mathfrak{C}_- et $W(y)$ est un voisinage de y pour la topologie \mathfrak{C}_+ et $W(x) \times W(y) \subset W \subset V$.

b) Soit $V \in \mathfrak{U}$ et $W \in \overset{-1}{\mathfrak{U}}$ tel que $\overset{3}{W} \subset V$. Soit \bar{W} l'adhérence de W pour la topologie produit $\mathfrak{C}_+ \times \mathfrak{C}_-$. Si $(x, y) \in \bar{W}$ alors $(W(x) \times \overset{-1}{W}(y)) \cap W \neq \emptyset$ donc $(x, y) \in \overset{3}{W} \subset V$; donc $\bar{W} \subset V$.

c) Immédiat.

cqfd

LEMME 17.— *Etant donnés un espace compact K et une partie fermée de $K \times K$ graphe d'un préordre sur K, il existe sur K une structure semi-uniforme \mathfrak{U} et une seule telle que*

- a) *les topologies déduites de \mathfrak{U} et de $\overset{-1}{\mathfrak{U}}$ soient moins fines que celle de K, et b) $G = \bigcap_{V \in \mathfrak{U}} V$.*

Les entourages de cette structure sont les voisinages de G dans $K \times K$. Si G est symétrique ($G^{-1} = G$) cette structure est uniforme.

En effet : Soit \mathcal{U} une structure semi-uniforme sur K satisfaisant aux conditions a) et b). D'après le lemme précédent, tout entouragement de \mathcal{U} est un voisinage de G pour la topologie de $K \times K$. Montrons, réciproquement, que tout voisinage de G dans $K \times K$ est un entouragement de \mathcal{U} . Soit V un voisinage ouvert de G dans $K \times K$; si $V \notin \mathcal{U}$ alors l'ensemble des $U \cap \overset{2}{C}V$ où U parcourt \mathcal{U} est un filtre sur $\overset{2}{C}V$ ayant une base composée de fermés (d'après le lemme précédent) ; comme $\overset{2}{C}V$ est compact, ce filtre possède un point adhérent $(x, y) \in \overset{2}{C}V$; de plus $(x, y) \in G$ (à cause de la condition b)) ce qui est impossible.

Reste à montrer que l'ensemble \mathcal{U} des voisinages de G dans $K \times K$ est bien l'ensemble des entouragements d'une structure semi-uniforme sur K satisfaisant aux conditions a) et b). Or la condition a) est clairement satisfaite et la condition b) l'est aussi car K est séparé. Il nous suffit donc de montrer que pour tout voisinage ouvert $V \in \mathcal{U}$ il existe un $W \in \mathcal{U}$ tel que $\overset{2}{W} \subset V$; or s'il n'en était pas ainsi, l'ensemble des $\overset{2}{W} \cap \overset{2}{C}V$ où W parcourt \mathcal{U} engendrerait un filtre sur $\overset{2}{C}V$ ayant donc un point adhérent $(x, y) \in \overset{2}{C}V$; donc $(x, y) \notin G$; or K est régulier, il existe donc des voisinages fermés A et B respectivement de x et de y dans K tels que $(A \times B) \cap G = \emptyset$ et comme G est le graphe d'un préordre (par hypothèse) $G(A) \cap \overset{-1}{G}(B) = \emptyset$. Ainsi les ensembles $G(A)$ et $\overset{-1}{G}(B)$ sont des fermés (voir, par exemple, corollaire 1 du lemme 4) disjoints de K , il existe donc (K est normal) des ouverts disjoints L et M tels que $G(A) \subset L$ et $\overset{-1}{G}(B) \subset M$. L'ensemble $(A \times \overset{-1}{C}L) \cup ((\overset{-1}{C}M) \times B)$ est un fermé de $K \times K$ et son complémentaire (faire une figure !)

$$W = (A \times L) \cup (M \times B) \cup ((\overset{-1}{C}A) \times \overset{-1}{C}B)$$

est un voisinage (ouvert) de G dans $K \times K$; donc $W \in \mathcal{U}$; or $(A \times B) \cap \overset{2}{W} = \emptyset$ (car $W(A) = L$ et $\overset{-1}{W}(B) = M$ sont disjoints) donc (x, y) n'adhère pas à $\overset{2}{W}$, ce qui est impossible. *cqfd*

REMARQUE.— Ces deux derniers lemmes sont des généralisations de résultats classiques (voir Bourbaki [4], II, 1, 2, corollaire 2 de la proposition 2, p. 194 et II, 4, 1, théorème 1, p. 225).

CHAPITRE 1

SUR LA NOTION DE NASSE

Une nasse sur un ensemble est un graphe fermé et réflexif sur l'espace des ultrafiltres de cet ensemble. Dans ce chapitre, on introduit et on étudie cette notion. Cela permet de représenter de manière uniforme les prétopologies (une généralisation des topologies due à M. Choquet), les mérotopologies (une autre généralisation des topologies, "duale" de la précédente), les topologies, les proximités et les ordres topogènes sur un ensemble. On développe les propriétés de ces représentations ; ainsi, en particulier, toute topologie est représentée par le graphe "fermé et mi-ouvert" d'un préordre (la "nasse" de la topologie) sur un espace d'ultrafiltres.

1. DEFINITION ET PROPRIETES DES NASSES

DEFINITION 1.— On appelle *nasse* sur un ensemble E toute partie fermée de l'espace $\mathfrak{T}(E) \times \mathfrak{T}(E)$ contenant sa diagonale Δ .

REMARQUE.— Nous modifions ainsi la terminologie de nos notes [13] et [14] ; le mot "cotte" est ainsi remplacé par le mot *nasse*, de sorte que "nasse" devient *nasse mi-ouverte* et "résille" devient *nasse bi-ouverte*.

CARACTERISATIONS.—

1/ Pour qu'une partie G de $\mathfrak{T}(E) \times \mathfrak{T}(E)$ contenant Δ soit une *nasse* :

a) il faut et il suffit que pour tout fermé \mathcal{A} de $\mathfrak{T}(E)$, $G(\mathcal{A})$ et $\bar{G}(\mathcal{A})$ soient fermés (voir 0.1, corollaire 1 du lemme 4) ;

b) il faut que pour tout filtre \mathfrak{a} sur E on ait

$$G(\mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} G(\mathfrak{T}(A)) \quad \text{et} \quad \bar{G}(\mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} \bar{G}(\mathfrak{T}(A))$$

(voir 0.3, a) du corollaire du lemme 11) ;

c) il faut et il suffit que pour tout filtre \mathfrak{a} sur E on ait

$$G(\mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} \text{Adh } G(\mathfrak{T}(A)) \quad \text{et} \quad \bar{G}(\mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} \text{Adh } \bar{G}(\mathfrak{T}(A))$$

(par application de a) et b) et de 0.2, rappels, b)).

[Cela corrige une erreur de notre note [13] p. 2702, lignes 28 - 30].

2/ Pour qu'une nasse G sur E soit *mi-ouverte* :

a) il faut et il suffit que pour toute partie \mathcal{A} de $\mathcal{T}(E)$ on ait

$$\text{Adh } G(\mathcal{A}) = G(\text{Adh } \mathcal{A})$$

(voir 0.1, corollaire du lemme 5) ;

b) il faut et il suffit que l'on ait

$$G = \text{Adh}(G \delta)$$

(où δ est la diagonale de $\tilde{E} \times \tilde{E}$, voir 0.2, notations ; on remarque que $G \delta = (\tilde{E} \times \mathcal{T}(E)) \cap G$ et on utilise 0.3, lemme 12).

3/ Pour qu'une nasse G sur E soit *bi-ouverte* il faut et il suffit que l'on ait

$$G = \text{Adh}(\delta G \delta)$$

(car $\delta G \delta = (\tilde{E} \times \tilde{E}) \cap G$ et voir 0.3, corollaire du lemme 12).

REMARQUE.— Toutes ces caractérisations peuvent se faire sans appel à la topologie de $\mathcal{T}(E)$. Ainsi, par exemple, la condition

$$\text{Adh } G(\mathcal{A}) = G(\text{Adh } \mathcal{A})$$

s'énonce aussi : "l'ensemble des ultrafiltres plus fins que l'intersection des images par G des ultrafiltres appartenant à \mathcal{A} est égal à l'ensemble des images par G des ultrafiltres plus fins que l'intersection des ultrafiltres appartenant à \mathcal{A} " ; (voir 0.2, rappels, c)). Mais, comme on le voit, l'usage de la topologie de $\mathcal{T}(E)$ permet de raccourcir considérablement les énoncés.

2. LE TREILLIS DES NASSES

DEFINITION 2.— Soit E un ensemble ordonné ; on dit qu'une application f de E dans lui-même est une *fermeture* lorsque a) f est croissante, b) f est idempotente ($f = f \circ f$, autrement dit $f(f(x)) = f(x)$ pour tout $x \in E$) et c) pour tout $x \in E$, $x \leq f(x)$, (voir Bourbaki [2], III, 1, exerc. 13, p. 103).

NOTATIONS.— Soit E un ensemble ; on désignera par $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des nasses sur E , par $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des nasses mi-ouvertes sur E (abréviation de "prétopologies" ; on verra pourquoi au 1.4) et par $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des nasses bi-ouvertes sur E .

On vérifie facilement les faits suivants :

1/ Sur l'ensemble $\mathcal{N}(E)$, la relation " $A \supset B$ ", qu'on lira " A est moins fine que B ", est une relation d'ordre. Pour cette relation d'ordre $\mathcal{N}(E)$ est réticulé achevé (on dit aussi treillis complet) distributif ; (voir, pour les définitions, Bourbaki, *ibid.* exerc. 11, p. 102 et 16, p. 104). Si $(G_i)_{i \in I}$ est une famille non vide de nasses sur E , ses bornes inférieure et supérieure sont données par

$$\inf_i G_i = \text{Adh} \left(\bigcup_{i \in I} G_i \right) \quad \text{et} \quad \sup_i G_i = \bigcap_{i \in I} G_i.$$

2/ La borne inférieure d'une famille quelconque de nasses mi-ouvertes (resp. bi-ouvertes) est une nasse mi-ouverte (resp. bi-ouverte). Par contre, la borne supérieure de deux nasses bi-ouvertes n'est pas nécessairement bi-ouverte (ni même mi-ouverte).

3/ Etant donnée une nasse G sur E , on désigne par $p(G)$ (resp. $b(G)$) la borne inférieure de toutes les nasses mi-ouvertes (resp. bi-ouvertes) plus fines que G . On a

$$p(G) = \text{Adh}(G \delta) \quad \text{et} \quad b(G) = \text{Adh}(\delta G \delta).$$

4/ p et b sont des *fermetures* sur $\mathfrak{A}(E)$ (en particulier $p(G) \subset G$!) et l'on a $b p = p b = b$.

5/ Ainsi $\mathfrak{R}(E)$ et $\mathfrak{B}(E)$ sont également réticulés achevés pour l'ordre induit, et l'on a

$$p \left(\sup_i G_i \right) = p \left(\sup_i p(G_i) \right) = \sup_i \mathfrak{R} p(G_i) \quad \text{et} \quad p \left(\inf_i G_i \right) = \inf_i p(G_i) ;$$

$$b \left(\sup_i G_i \right) = b \left(\sup_i b(G_i) \right) = \sup_i \mathfrak{B} b(G_i) \quad \text{et} \quad b \left(\inf_i G_i \right) = \inf_i b(G_i) .$$

De sorte que $\mathfrak{R}(E)$ et $\mathfrak{B}(E)$ sont également distributifs.

6/ Soient G, H des nasses (resp. nasses mi-ouvertes, bi-ouvertes) sur E alors GH est une nasse (resp. nasse mi-ouverte, bi-ouverte) sur E (voir 0.1, corollaire 2 du lemme 4) et l'on a

$$p(GH) \supset p(G) p(H) \quad \text{et} \quad b(GH) \supset b(G) b(H) ,$$

(sans égalités nécessairement, comme le montre l'exemple suivant : E ensemble infini, $x \neq y$ des éléments de E , \mathfrak{a} ultrafiltre non principal sur E , $G = \Delta \cup \{(\mathfrak{a}, \tilde{y})\}$ et $H = \Delta \cup \{(\tilde{x}, \mathfrak{a})\}$).

3. OUVERTS ET FERMES POUR UNE NASSE

DEFINITION 3.— Soient E un ensemble, G une nasse sur E et X une partie de E .

a) On dira que X est *ouverte* pour G lorsque $G(\Upsilon(X)) = \Upsilon(X)$.

b) On dira que X est *fermée* pour G lorsque $\bar{G}(\Upsilon(X)) = \Upsilon(X)$.

c) On dira que X est *faiblement fermée* pour G lorsque $\delta \bar{G}(\Upsilon(X)) = \tilde{X}$.

On désigne par ω_G l'ensemble des ouverts, par φ_G l'ensemble des fermés et par ψ_G l'ensemble des faiblement fermés pour G .

PROPRIETES.— On vérifie facilement les points suivants :

1/ Chacun des ensembles ω_G, φ_G et ψ_G est stable pour les réunions finies et les intersections finies ; en particulier \emptyset et E appartiennent à ω_G, φ_G et ψ_G . En outre, ψ_G est stable pour les intersections quelconques ; c'est donc l'ensemble des fermés pour une topologie sur E ; (voir plus loin 1.7 pour une application).

2/ $\varphi_G \subset \psi_G$.

3/ $X \in \omega_G$ équivaut à $X \in \varphi_{G^{-1}}$ équivaut à $\bar{C}X \in \varphi_G$, (voir 0.1, corollaire du lemme 1).

4/ Si $G \subset H$ alors $\omega_H \subset \omega_G$ et $\varphi_H \subset \varphi_G$ et $\psi_H \subset \psi_G$.

5/ $\omega_{GH} = \omega_{G \cup H} = \omega_G \cap \omega_H$.

Plus généralement, on a le résultat suivant.

LEMME 1.— Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de nasses sur un ensemble E , soit ω_i l'ensemble des ouverts pour G_i et soit \mathfrak{c} un filtre sur I . Alors, on a

$$\sup_{\mathfrak{c}} \omega_i \subset \omega_{\inf_{\mathfrak{c}} G_i} \quad \text{et} \quad \inf_{\mathfrak{c}} \omega_i = \omega_{\sup_{\mathfrak{c}} G_i} ,$$

(les limites inférieure et supérieure des ω_i étant prises dans l'espace discret $\mathfrak{A}(E)$).

En effet : On a $\sup_{\mathfrak{c}} \omega_i = \bigcap_{J \in \mathfrak{c}} \bigcup_{i \in J} \omega_i = \bigcup_{J \in \mathfrak{g}(\mathfrak{c})} \bigcap_{i \in J} \omega_i$; si donc X appartient à cette limite supérieure il existe $J \in \mathfrak{g}(\mathfrak{c})$ tel que pour tout $i \in J$ $X \in \omega_i$ donc $G_i(\mathfrak{T}(X)) = \mathfrak{T}(X)$, donc (d'après 0.3, a) du lemme 14) $(\inf_{\mathfrak{c}} G_i)(\mathfrak{T}(X)) = \mathfrak{T}(X)$ donc $X \in \omega_{\inf_{\mathfrak{c}} G_i}$. D'autre part $\inf_{\mathfrak{c}} \omega_i = \bigcap_{J \in \mathfrak{g}(\mathfrak{c})} \bigcup_{i \in J} \omega_i = \bigcup_{J \in \mathfrak{c}} \bigcap_{i \in J} \omega_i$; ainsi pour que X appartienne à cette limite inférieure il faut et il suffit (1) "qu'il existe $J \in \mathfrak{c}$ tel que pour tout $i \in J$ on ait $G_i(\mathfrak{T}(X)) = \mathfrak{T}(X)$ ". Or (d'après 0.3, a) du lemme 14) pour que $(\sup_{\mathfrak{c}} G_i)(\mathfrak{T}(X)) = \mathfrak{T}(X)$ il faut et il suffit que (2) " $\sup_{\mathfrak{c}} (G_i(\mathfrak{T}(X))) = \mathfrak{T}(X)$ ". Or la condition (1) entraîne manifestement la condition (2). Réciproquement, si la condition (2) est satisfaite alors $\left\{ \text{Adh} \bigcup_{i \in J} G_i(\mathfrak{T}(X)) \mid J \in \mathfrak{c} \right\}$ est une base de filtre formée de fermés et dont l'adhérence dans $\mathfrak{T}(E)$ est égale à $\mathfrak{T}(X)$; comme $\bar{C} \mathfrak{T}(X) = \mathfrak{T}(C X)$ est un compact de $\mathfrak{T}(E)$ (voir 0.2, rappels) il existe $J \in \mathfrak{c}$ tel que $\text{Adh} \bigcup_{i \in J} G_i(\mathfrak{T}(X)) = \mathfrak{T}(X)$; donc (2) implique (1). *cqfd*

4. NASSES ET PRETOPOLOGIES

RAPPELS.— Une *prétopologie* sur un ensemble E peut être définie par la donnée d'un graphe $R \subset \tilde{E} \times \mathfrak{T}(E)$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

a) $\delta \subset R$ et

b) pour tout $x \in E$, $R(\tilde{x})$ est un fermé de $\mathfrak{T}(E)$. (Voir Choquet [7], p. 83). La relation $(\tilde{x}, \mathfrak{a}) \in R$ se lisant "l'ultrafiltre \mathfrak{a} pseudo-converge vers le point x ", $R(\tilde{x})$ représente le filtre des pseudo-voisines de x .

Si $X \longrightarrow \bar{X}$ est l'opération de pré-adhérence associée à la prétopologie, alors $\bar{X} = \{x \mid \exists \mathfrak{a} \in \mathfrak{T}(X) (\tilde{x}, \mathfrak{a}) \in R\}$; (autrement dit, \bar{X} est l'ensemble des points de E vers lesquels pseudo-convergent les ultrafiltres auxquels X appartient ; voir Choquet *ibid.*, p. 84-85) ; soit aussi $\bar{\bar{X}} = \bar{R}^1(\mathfrak{T}(X))$.

NASSE D'UNE PRETOPOLOGIE.— Soit E un ensemble muni d'une prétopologie définie par le graphe $R \subset \tilde{E} \times \mathfrak{T}(E)$. L'adhérence dans $\mathfrak{T}(E) \times \mathfrak{T}(E)$ du graphe R est une nasse mi-ouverte (voir 1.1, 2/, b)) que l'on appellera la *nasse de la prétopologie*.

Réciproquement, si P est une nasse mi-ouverte sur E , le graphe $R = P \delta \subset \tilde{E} \times \mathfrak{T}(E)$ définit une prétopologie dont la nasse est précisément P ; $((\text{Adh } R)(\tilde{x}) = R(\tilde{x}))$ d'après 0.1, lemme 6).

On obtient ainsi une bijection canonique entre l'ensemble des prétopologies sur E et l'ensemble $\mathfrak{R}_r(E)$ des nasses mi-ouvertes sur E .

Pour tout filtre \mathfrak{a} sur E on posera $\varphi(\mathfrak{a}) = \{\bar{A} \mid A \in \mathfrak{a}\}$.

PROPOSITION 1.— *Soit E un ensemble muni d'une prétopologie de nasse P . Alors*

a) P est le graphe par rapport à $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de la relation " $\varphi(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}$ " sur $\mathfrak{T}(E)$;

b) pour toute partie X de E on a

$$\bar{P}(\mathfrak{T}(X)) = \mathfrak{T}(\bar{X}) ;$$

c) pour tout filtre \mathfrak{a} sur E on a

$$\bar{P}(\mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \mathfrak{T} \langle \varphi(\mathfrak{a}) \rangle .$$

En effet : Soit $R \subset \tilde{E} \times \mathcal{T}(E)$ le graphe qui définit la prétopologie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \varphi(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a} &\iff \forall A \in \mathfrak{a} \forall B \in \mathfrak{b} A \cap \bar{B} \neq \emptyset \iff \forall A \in \mathfrak{a} \forall B \in \mathfrak{b} \exists c \in \mathcal{T}(B) \exists x \in A (\tilde{x}, c) \in R \\ &\iff \forall A \in \mathfrak{a} \forall B \in \mathfrak{b} R(\tilde{A}) \cap \mathcal{T}(B) \neq \emptyset \iff \forall A \in \mathfrak{a} \forall B \in \mathfrak{b} (\mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(B)) \cap R \neq \emptyset \iff \\ &(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \text{Adh } R \iff (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in P. \end{aligned}$$

b) S'il existe $\mathfrak{b} \in \mathcal{T}(X)$ tel que $\varphi(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}$, alors bien entendu $\bar{X} \in \mathfrak{a}$. Réciproquement supposons que \bar{X} appartienne à un ultrafiltre \mathfrak{a} , alors $\mathfrak{c} = \{Y \mid \bar{C} Y \notin \mathfrak{a}\}$ est un filtre sur E et pour tout $Y \in \mathfrak{c}$ on a $X \cap Y \neq \emptyset$ (car si $X \cap Y = \emptyset$ alors $X \subset \bar{C} Y$ donc $\bar{X} \subset \bar{C} Y \in \mathfrak{a}$), il existe donc un ultrafiltre \mathfrak{b} plus fin que \mathfrak{c} et auquel X appartient ; alors $\varphi(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}$ (car si $Y \in \mathfrak{b}$ on a $\bar{C} Y \notin \mathfrak{c}$ donc $\bar{C} Y \in \mathfrak{a}$ soit $\bar{Y} \in \mathfrak{a}$). D'où les équivalences suivantes $\mathfrak{a} \in \bar{P}(\mathcal{T}(X)) \iff \exists \mathfrak{b} \in \mathcal{T}(X) (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in P \iff \exists \mathfrak{b} \in \mathcal{T}(X) \varphi(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a} \iff \bar{X} \in \mathfrak{a} \iff \mathfrak{a} \in \mathcal{T}(\bar{X})$.

$$\text{c) } \bar{P}(\mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} \bar{P}(\mathcal{T}(A)) \text{ (d'après 1/ b) du § 1), ainsi, d'après b),}$$

$$\bar{P}(\mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} \mathcal{T}(\bar{A}) = \mathcal{T} \langle \varphi(\mathfrak{a}) \rangle$$

(d'après 0.2, rappels, e)).

cqfd

Réciproquement, si P est une nasse mi-ouverte sur E , alors pour toute partie X de E $\bar{P}(\mathcal{T}(X))$ est une partie à la fois ouverte et fermée de $\mathcal{T}(E)$ donc (d'après 0.2, rappels, b)) elle est de la forme $\mathcal{T}(\bar{X})$; on vérifie alors facilement que l'opération $X \longrightarrow \bar{X}$ est une opération de pré-adhérence qui définit une prétopologie sur E dont la nasse est précisément P . Cela permet de définir d'une autre manière encore la bijection dont il est question plus haut entre prétopologies et nasses mi-ouvertes.

REMARQUES.—

1/ L'application $p : \mathcal{T}(E) \longrightarrow \mathcal{R}(E)$ (voir 1.2 le 3/ et 4/) permet ainsi d'associer à toute nasse G sur E une prétopologie sur E de nasse $p(G) \subset G$. On a $p(G) \delta = G \delta$ (autrement dit la prétopologie associée à G est définie par le graphe $(\tilde{E} \times \mathcal{T}(E)) \cap G$).

2/ Considérons l'espace $\mathcal{K}(\mathcal{T}(E))$ des fermés non vides de $\mathcal{T}(E)$ (voir Choquet [7] p. 87 et *passim*, ou dans notre texte plus loin, 4.1, rappels), [cet espace s'identifie à "l'espace des filtres sur E " $\Phi(E)$, voir 0.2, rappels, g)]. Une prétopologie sur E définie par le graphe $R \subset \tilde{E} \times \mathcal{T}(E)$ peut ainsi être conçue comme une application de E dans $\mathcal{K}(\mathcal{T}(E))$, $x \longrightarrow R(x)$; la nasse P de cette prétopologie peut alors être conçue comme l'extension continue de cette application (voir 0.3, remarques, a)) à $\mathcal{T}(E)$. Explicitement, pour tout ultrafiltre \mathfrak{a} sur E on a

$$P(\mathfrak{a}) = \lim_{\mathfrak{a}} R(\tilde{x}) = \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} \text{Adh} \bigcup_{x \in A} R(\tilde{x}).$$

$$\begin{aligned} \text{En effet : } \mathfrak{b} \in P(\mathfrak{a}) &\iff \forall A \in \mathfrak{a} \forall B \in \mathfrak{b} (\mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(B)) \cap R \neq \emptyset \iff \forall A \in \mathfrak{a} \forall B \in \mathfrak{b} \\ R(\tilde{A}) \cap \mathcal{T}(B) \neq \emptyset &\iff \forall A \in \mathfrak{a} \mathfrak{b} \in \text{Adh } R(\tilde{A}) \iff \mathfrak{b} \in \lim_{\mathfrak{a}} R(\tilde{x}). \end{aligned} \quad \text{cqfd}$$

Cela peut également s'établir à l'aide de 0.3, lemme 15.

3/ Toute topologie étant une prétopologie on peut lui associer une nasse mi-ouverte. On verra plus loin (1.6) que ce qui caractérise les nasses de topologies parmi les nasses mi-ouvertes c'est qu'elles sont *idempotentes*.

5. NASSES ET MEROTOPOLOGIES

DEFINITION 4.— On appellera *mérotopologie* sur un ensemble E la structure définie par la donnée d'un ensemble ω de parties de E, appelées les *ouverts* de la mérotopologie, stable pour les réunions finies et les intersections finies (en particulier \emptyset et E appartiennent à ω). Toute partie de E dont le complémentaire est ouvert est appelé *fermé* pour la mérotopologie. On désignera par φ l'ensemble des fermés. ($\varphi = \{X \mid \bar{X} \in \omega\}$).

On désignera une mérotopologie par l'ensemble de ses ouverts.

NASSE D'UNE MEROTOPOLOGIE.— Soient E un ensemble, X une partie de E, \mathfrak{X} une partie de $\mathfrak{P}(E)$ et \mathfrak{a} un filtre sur E ; on désignera par [X] l'ensemble des parties de E qui contiennent X ; ainsi $[\emptyset] = \mathfrak{P}(E)$ et si $X \neq \emptyset$ alors [X] est le filtre des surensembles de X dans E ; on posera $\mathfrak{X}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{a}$; en particulier, si ω est une mérotopologie dont l'ensemble des fermés est φ , $\varphi(\mathfrak{a})$ désigne donc l'ensemble des fermés appartenant à \mathfrak{a} (le risque de confusion avec la notation de 1.4 n'est pas grave comme on le verra au 1.6 suivant) ; cependant, au lieu de $\mathfrak{X}([X])$ on écrira seulement $\mathfrak{X}(X)$.

LEMME 2.— Soient E un ensemble et \mathfrak{X} un ensemble de parties de E. Le graphe G par rapport à $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de la relation " $\mathfrak{X}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b}$ " sur $\mathfrak{T}(E)$ est une nasse idempotente ($\hat{G} = G$) sur E.

En effet : Puisque $\mathfrak{X}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$, on a bien $\Delta \subset G$. D'autre part, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \text{Adh } G \iff \forall A \in \mathfrak{a} \forall B \in \mathfrak{b} (\mathfrak{T}(A) \times \mathfrak{T}(B)) \cap G \neq \emptyset \iff \forall A \in \mathfrak{a} \forall B \in \mathfrak{b} \exists \mathfrak{a}' \in \mathfrak{T}(A) \exists \mathfrak{b}' \in \mathfrak{T}(B) \mathfrak{X}(\mathfrak{a}') \subset \mathfrak{b}' \iff \forall A \in \mathfrak{X}(\mathfrak{a}) \forall B \in \mathfrak{b} A \cap B \neq \emptyset \iff \mathfrak{X}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b} \iff (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in G$, donc G est bien fermé ; c'est donc une nasse. De plus $\mathfrak{X}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{X}(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{c}$ entraînent $\mathfrak{X}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{c}$ donc $\hat{G} = G$. *cqfd*

Soit à présent ω une mérotopologie sur un ensemble E ; le graphe M par rapport à $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de la relation " $\omega(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b}$ " sur $\mathfrak{T}(E)$ est donc une nasse idempotente que l'on appellera la *nasse de la mérotopologie*.

PROPOSITION 2.— Soient ω une mérotopologie sur E, φ l'ensemble de ses fermés et M sa nasse.

a) La nasse de la mérotopologie φ est égale à \bar{M}^{-1} .

b) Pour toute partie X de E on a

$$M(\mathfrak{T}(X)) = \mathfrak{T} \langle \omega(X) \rangle .$$

c) Pour tout filtre \mathfrak{a} sur E on a

$$M(\mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \mathfrak{T} \langle \omega(\mathfrak{a}) \rangle .$$

En effet :

a) Pour tous ultrafiltres \mathfrak{a} et \mathfrak{b} on a $\omega(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b} \iff \varphi(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}$, d'où le résultat.

b) S'il existe $\mathfrak{b} \in \mathfrak{T}(X)$ tel que $\omega(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}$ alors bien entendu $\omega(X) \subset \mathfrak{a}$. Réciproquement si $\omega(X) \subset \mathfrak{a}$ contenu dans un ultrafiltre \mathfrak{a} alors pour tout Y appartenant à la base de filtre $\varphi(\mathfrak{a})$ on a $X \cap Y \neq \emptyset$ (car si $X \cap Y = \emptyset$ on a $X \subset \bar{Y} \in \omega(X)$ donc $\bar{Y} \in \mathfrak{a}$), il existe donc un ultrafiltre \mathfrak{b} plus fin que $\varphi(\mathfrak{a})$ et auquel X appartient, soit $\mathfrak{b} \in \mathfrak{T}(X)$ et $\omega(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}$ (à cause du a)). D'où les équivalences suivantes

$$\mathfrak{a} \in M(\mathfrak{T}(X)) \iff \exists \mathfrak{b} \in \mathfrak{T}(X) (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) \in M \iff \exists \mathfrak{b} \in \mathfrak{T}(X) \omega(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a} \iff \omega(X) \subset \mathfrak{a} \iff \mathfrak{a} \in \mathfrak{T} \langle \omega(X) \rangle .$$

c) Découle facilement du b), et du 1/ b) de 1.1 (voir 0.2, rappels, g)). *cqfd*

PROPOSITION 3.— Soient ω une mérotopologie sur E, φ l'ensemble des ses fermés et M sa nasse.

a) On a $\omega_M = \omega$ et $\varphi_M = \varphi$.

b) M est la nasse la moins fine parmi toutes les nasses G pour lesquelles $\omega \subset \omega_G$.

En effet :

a) $X \in \omega \iff X \in \omega(X) \iff \mathfrak{T} \langle \omega(X) \rangle = \mathfrak{T}(X) \iff M(\mathfrak{T}(X)) = \mathfrak{T}(X)$ (d'après le b) de la proposition précédente) $\iff X \in \omega_M$. D'autre part $\varphi_M = \omega_{\overline{M}} = \varphi$.

b) Si $G \subset M$ alors (d'après le 1.3, propriétés, 4/) $\omega = \omega_M \subset \omega_G$. Réciproquement, si $\omega \subset \omega_G$ alors pour tout ultrafiltre \mathfrak{a} sur E on a

$$G(\mathfrak{a}) = \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} G(\mathfrak{T}(A)) \subset \bigcap_{A \in \omega(\mathfrak{a})} G(\mathfrak{T}(A)) = \bigcap_{A \in \omega(\mathfrak{a})} \mathfrak{T}(A) = \mathfrak{T} \langle \omega(\mathfrak{a}) \rangle = M(\mathfrak{a}),$$

donc $G \subset M$.

cqfd

On désignera par $\mathfrak{N}(E)$ l'ensemble des nasses de mérotopologies sur E . On a une bijection canonique entre l'ensemble des mérotopologies sur E et $\mathfrak{N}(E)$; les nasses appartenant à $\mathfrak{N}(E)$ sont toutes idempotentes, mais la réciproque n'est pas vraie (comme on le verra plus loin 2.2, XXII, contre-exemple). A toute nasse G sur E on associe la nasse $m(G)$ de la mérotopologie ω_G ; on obtient ainsi une application $m : \mathfrak{N}(E) \longrightarrow \mathfrak{N}(E)$ croissante ; de plus $\overline{m} = m$ et $G \subset m(G)$ (d'après la proposition précédente). Ainsi m est une fermeture (voir 1.2, définition 2) sur l'ensemble ordonné $(\mathfrak{N}(E), \subset)$! et l'image de $\mathfrak{N}(E)$ par m est $\mathfrak{N}(E)$.

6. NASSE D'UNE TOPOLOGIE

Une topologie est à la fois une prétopologie et une mérotopologie de sorte qu'il lui est attaché deux nasses ; mais ces deux nasses sont égales car, en effet, pour tout filtre \mathfrak{a} l'ensemble des adhérences des éléments de \mathfrak{a} est égal à l'ensemble des fermés appartenant à \mathfrak{a} ($\varphi(\mathfrak{a}) = \varphi(\mathfrak{a})$! voir les deux définitions de $\varphi(\mathfrak{a})$ aux 1.4 et 5) ; on appellera cette nasse la *nasse de la topologie* (ou de l'espace topologique correspondant) ; elle satisfait donc à toutes les propriétés des nasses de prétopologies et des nasses de mérotopologies.

En particulier la nasse d'une topologie est mi-ouverte et idempotente, *c'est donc le graphe d'un préordre fermé et mi-ouvert sur un espace d'ultrafiltre*.

Réciproquement, si T est une nasse mi-ouverte et idempotente sur E alors l'opération de pré-adhérence qui lui est associée $X \longrightarrow \overline{X}$ (où $\mathfrak{T}(\overline{X}) = \overline{\mathfrak{T}(X)}$) est idempotente ($\overline{\overline{X}} = \overline{X}$) c'est donc une opération d'adhérence et T est ainsi la nasse d'une topologie (voir, par exemple, Bourbaki [4], I, 1, exerc. 9, p.144).

On désignera par $\mathfrak{T}(E)$ l'ensemble des nasses de topologies sur E . On a ainsi une bijection canonique entre l'ensemble des topologies sur E et $\mathfrak{T}(E)$ ensemble des nasses mi-ouvertes et idempotentes sur E . On a

$$\mathfrak{T}(E) = \mathfrak{R}_T(E) \cap \mathfrak{N}(E).$$

Lorsque E est fini, l'espace des ultrafiltres $\mathfrak{T}(E) = \overline{E}$ s'identifie à l'ensemble E lui-même de sorte que il y a correspondance bijective entre les topologies sur E et les préordres sur E . (Ce résultat a été souvent retrouvé et utilisé ; voir par exemple [11], [21]).

REMARQUES.— Les faits suivants découlent immédiatement des résultats précédents de ce chapitre. Soient E un espace topologique de nasse T et \mathfrak{a} un filtre sur E :

a) dire que \mathfrak{a} converge vers x équivaut à dire que $\mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle \subset T(\tilde{x})$; dire que x est adhérent à \mathfrak{a} équivaut à dire que $\mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle \cap T(\tilde{x}) \neq \emptyset$; en particulier si \mathfrak{a} est un *ultrafiltre*, dire que \mathfrak{a} converge vers x équivaut à dire que $\mathfrak{a} \in T(\tilde{x})$.

b) $T(\overline{E})$ est l'ensemble des ultrafiltres qui convergent sur E ; donc $\mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle \cap T(\overline{E}) \neq \emptyset$ équivaut à dire que \mathfrak{a} possède un point adhérent.

c) $T(\mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle)$ est l'ensemble des ultrafiltres qui contiennent tous les ouverts appartenant à \mathfrak{a} ; c'est un ensemble fermé de l'espace $\mathfrak{T}(E)$ qui représente donc le filtre engendré par les ouverts de \mathfrak{a} .

d) $\bar{T}(\mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle)$ est l'ensemble des ultrafiltres qui contiennent tous les fermés appartenant à \mathfrak{a} ; c'est un ensemble fermé de l'espace $\mathcal{T}(E)$ qui représente donc le filtre engendré par les adhérences des éléments de \mathfrak{a} . En particulier $\bar{T}(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{T}(\bar{X})$ représente le filtre $[\bar{X}]$ (si $X \neq \emptyset$).

e) Ainsi $\mathcal{T}(\tilde{x}) = \mathcal{T} \langle \mathcal{V}(x) \rangle$ représente le filtre $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x ; $\bar{T}(\tilde{x}) = \mathcal{T}(\{\bar{x}\})$ représente le filtre $[\bar{x}]$; $\bar{T}(\tilde{x}) = \bar{T}(\mathcal{T} \langle \mathcal{V}(x) \rangle)$ représente le filtre engendré par les voisinages fermés de x .

Mentionnons pour finir le résultat suivant.

PROPOSITION 4.— Soient E un espace topologique de nasse \mathcal{T} , \mathfrak{a} un filtre sur E et $\mathfrak{a}^\circ = \{\mathring{A} \mid A \in \mathfrak{a}\}$. Alors on a

$$\mathcal{T} \langle \mathfrak{a}^\circ \rangle = C \bar{T}(C \mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle).$$

$$\begin{aligned} \text{En effet : } \mathfrak{b} \in \mathcal{T} \langle \mathfrak{a}^\circ \rangle &\iff \mathfrak{a}^\circ \subset \mathfrak{b} \iff \forall A \in \mathfrak{a} \ \mathring{A} \in \mathfrak{b} \iff \forall A \in \mathfrak{a} \ \overline{CA} \notin \mathfrak{b} \iff \\ \forall A \in \mathfrak{a} \ \mathfrak{b} \notin \mathcal{T}(\overline{CA}) &\iff \forall A \in \mathfrak{a} \ \mathfrak{b} \notin \bar{T}(\mathcal{T}(CA)) \iff \mathfrak{b} \in \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} C \bar{T}(C \mathcal{T}(A)). \end{aligned}$$

$$\text{Or } \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} C \bar{T}(C \mathcal{T}(A)) = C \bigcup_{A \in \mathfrak{a}} \bar{T}(C \mathcal{T}(A)) = C \bar{T}\left(\bigcup_{A \in \mathfrak{a}} C \mathcal{T}(A)\right) = C \bar{T}\left(C \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} \mathcal{T}(A)\right) = C \bar{T}(C \mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle).$$

cqfd

7. LES APPLICATIONS p ET m

PROPOSITION 5.— Soit G une nasse sur un ensemble E .

a) Si G est mi-ouverte, alors $\varphi_G = \psi_G$.

b) On a $\varphi_{p(G)} = \psi_{p(G)} = \psi_G$.

En effet :

a) On sait déjà que $\varphi_G \subset \psi_G$ (voir 1.3, propriétés, 2/). Réciproquement, pour toute partie X de E , $\bar{G}(\mathcal{T}(X))$ est de la forme $\mathcal{T}(\bar{X})$ car G est mi-ouverte (voir 1.4) ; si donc $X \in \psi_G$ on a $\delta \bar{G}(\mathcal{T}(X)) = \tilde{X}$ donc $\tilde{X} = \bar{X}$ soit $\bar{X} = X$, donc $\bar{G}(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{T}(X)$ autrement dit $X \in \varphi_G$.

b) Comme la nasse $p(G)$ est mi-ouverte on a $\varphi_{p(G)} = \psi_{p(G)}$ d'après ce qui précède. Mais $p(G) \delta = G \delta$ (voir 1.4, remarques, 1/) donc $\psi_{p(G)} = \psi_G$. *cqfd*

PROPOSITION 6.— Soit G une nasse sur un ensemble E .

a) Si G est mi-ouverte, alors $m(G) \in \mathfrak{G}(E)$.

b) Si G est idempotente, alors $p(G) \in \mathfrak{G}(E)$.

En effet :

a) Si G est mi-ouverte on a $\varphi_G = \psi_G$, d'après ce qui précède ; donc ω_G est l'ensemble des ouverts d'une topologie sur E (voir 1.3, propriétés, 1/) d'où le résultat.

b) Si G est idempotente, alors $p(G) p(G) \subset p(\overset{2}{G}) = p(G)$ (voir 1.2, 6/) donc $p(G)$ est idempotente ; comme par ailleurs $p(G)$ est mi-ouverte on obtient le résultat. *cqfd*

D'où, en particulier, si $G \in \mathfrak{N}(E)$ alors $p(G) \in \mathfrak{G}(E)$. Ainsi en partant d'une nasse G quelconque sur E on peut construire deux nasses de topologies sur E , à savoir $m p(G)$ et $p m(G)$. La finesse respective de ces topologies fait l'objet de la proposition suivante.

PROPOSITION 7.— Soit G une nasse sur un ensemble E . Alors $m p(G) \subset p m(G)$.

En effet : L'ensemble des fermés de la topologie définie par $m p(G)$ est $\varphi_{m p(G)} = \varphi_{p(G)} = \psi_{p(G)} = \psi_G$. La topologie définie par $p m(G)$ a pour ensemble des fermés $\varphi_{p m(G)} = \psi_{m(G)}$. Or $G \subset m(G)$ (voir 1.5) donc $\psi_{m(G)} \subset \psi_G$ (voir 1.3, propriétés, 4/), d'où le résultat. cqfd

On donnera plus loin (2.2, XXII, contre-exemple) un exemple où il n'y a pas égalité entre $m p(G)$ et $p m(G)$.

8. NASSES ET PROXIMITES

Soit $R \subset \mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(E)$; on dit aussi que R est (le graphe d') une relation binaire sur l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E . Suivant un usage courant, on écrit quelquefois " $A R B$ " au lieu de $(A, B) \in R$, et "non $A R B$ " au lieu de $(A, B) \notin R$. On désignera par R^* le graphe par rapport à (A, B) de la relation "non $A R \bar{C} B$ "; autrement dit, $A R^* B$ équivaut à non $A R \bar{C} B$.

LEMME 3.— Soit R une relation binaire sur $\mathfrak{P}(E)$ telle que $A \cap B \neq \emptyset$ implique $A R B$. Alors le graphe G par rapport à (a, b) de la relation suivante "pour tous $A \in a$ et $B \in b$ on a $A R B$ " sur $\mathfrak{T}(E)$ est une nasse sur E . Si de plus R est symétrique alors G est symétrique aussi ($\bar{G} = G$).

En effet : Si $a \in \mathfrak{T}(E)$, pour tous $A \in a$ et $B \in a$ on a $A \cap B \neq \emptyset$ donc $A R B$, ainsi $(a, a) \in G$; donc $\Delta \subset G$. D'autre part $(a, b) \in \text{Adh } G \iff \forall A \in a \forall b \in B \exists a' \in \mathfrak{T}(A) \exists b' \in \mathfrak{T}(B) (a', b') \in G \implies \forall A \in a \forall B \in b A R B \iff (a, b) \in G$; donc G est fermé ; c'est bien une nasse. Si R est symétrique, alors $A R B \iff B R A$ donc G est bien symétrique. cqfd

RAPPELS.— On appelle *proximité* (ou relation de proximité) sur un ensemble E toute relation binaire R entre les parties de E qui satisfait aux axiomes suivants :

- a) R est symétrique ($A R B$ équivaut à $B R A$) ;
- b) $A \cap B \neq \emptyset$ implique $A R B$;
- c) pour tout $A \subset E$ on a non $\emptyset R A$;
- d) $A R B$ et $B \subset C$ impliquent $A R C$;
- e) $A R B \cup C$ implique $A R B$ ou $A R C$;
- f) si non $A R B$ alors il existe une partie X de E telle que non $A R \bar{C} X$ et non $X R B$.

(En vertu de b) on a alors $A \subset X$ et $B \subset \bar{C} X$).

Cette notion est due à Efremovič (que nous n'avons pu consulter en russe) que cite Cszásár [9], p. 66. Notre système d'axiomes (a à f) est équivalent au système d'axiomes (D_1 à D_5) de ce dernier, comme on peut le vérifier.

La relation $A R B$ se lit "A est proche de B" et la relation non $A R B$ se lit "A est éloigné de B". De sorte que $R(A)$ est l'ensemble des parties de E proches de A .

A toute proximité sur un ensemble E on associe une topologie sur E dont les ouverts sont les parties A de E pour lesquelles "pour tout $x \in A$, $\{x\}$ est éloigné de $\bar{C} A$ ". On dit qu'une topologie (ou que l'espace topologique correspondant) est *proximisable* lorsqu'il existe une proximité dont elle est la topologie associée. On sait (et on l'établira plus loin 3.5, théorème 3, d'une manière nouvelle) que les topologies proximisables sont précisément les topologies uniformisables.

LEMME 4.— Dans la topologie associée à une proximité sur E , l'ensemble $\mathfrak{V}(x)$ des voisinages de x n'est autre que l'ensemble des parties X de E telles que $\{x\}$ soit éloigné de $\bar{C} X$.

En effet : Si $X \in \mathcal{V}(x)$ il existe un ouvert A tel que $x \in A \subset X$ donc $\{x\}$ est éloigné de $\bar{C}X \subset \bar{C}A$ (axiome d). Réciproquement, si $\{x\}$ est éloigné de $\bar{C}X$, soit A la réunion des $\{y\}$ qui sont éloignés de $\bar{C}X$; alors $x \in A \subset X$ (axiome b). De plus A est ouvert, car si $y \in A$ alors $\{y\}$ est éloigné de $\bar{C}X$ donc il existe une partie Y de E telle que Y soit éloignée de $\bar{C}X$ et $\{y\}$ soit éloignée de $\bar{C}Y$, (axiome f) donc $Y \subset A$ (axiomes a et d) donc $\{y\}$ est éloignée de $\bar{C}A \subset \bar{C}Y$ (axiome d). cqfd

Si R est une proximité sur E alors on a

$$1/ R(\emptyset) = \emptyset ;$$

2/ pour toute partie A non vide de E , $R(A)$ est une grille qui contient la grille $g([A])$ (des parties B qui rencontrent A) et le filtre associé à $R(A)$ n'est autre que $R^*(A) = \{B \mid \text{non } A R C B\}$ (voir 0.2, rappels, h), par exemple) ;

$$3/ R(A \cup B) = R(A) \cup R(B) \text{ (axiomes a, d et e).}$$

(Si l'on ajoute que R est symétrique et que $R^* \subset R^* R^*$, on obtient un système d'axiomes équivalent au système (a à f), comme on peut le vérifier).

A présent, si \mathfrak{a} est un filtre sur E , on peut poser $R \langle \mathfrak{a} \rangle = \{B \mid \forall A \in \mathfrak{a} A R B\} = \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} R(A)$ et on remarque que $R \langle \mathfrak{a} \rangle$ est alors une grille (car $A \cup B \in R \langle \mathfrak{a} \rangle$ équivaut à $\mathfrak{a} \subset R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$ qui équivaut à $\mathfrak{a} \subset R(A)$ ou $\mathfrak{a} \subset R(B)$ qui équivaut à $A \in R \langle \mathfrak{a} \rangle$ ou $B \in R \langle \mathfrak{a} \rangle$). Le filtre associé à cette grille n'est autre que $R^*(\mathfrak{a}) = \bigcup_{A \in \mathfrak{a}} R^*(A)$.

NASSE D'UNE PROXIMITÉ.— Soit E un ensemble muni d'une proximité ("un espace de proximité") ; le graphe S par rapport à $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de la relation suivante sur $\mathcal{T}(E)$ "tout élément de \mathfrak{a} est proche de tout élément de \mathfrak{b} " est une nasse symétrique sur E (voir lemme 3) que l'on appellera la *nasse de la proximité* (ou de l'espace de proximité).

PROPOSITION 8.— Soient R une proximité sur l'ensemble E et S sa nasse.

a) S est idempotente.

b) Pour toutes parties A et B de E , $A R B$ équivaut à $(\mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(B)) \cap S \neq \emptyset$.

c) Pour toute partie X de E on a

$$R(X) = \bigcup_{\mathfrak{a} \in S(\mathcal{T}(X))} \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad S(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{T} \langle R^*(X) \rangle.$$

d) Pour tout filtre \mathfrak{a} sur E on a

$$R \langle \mathfrak{a} \rangle = \bigcup_{\mathfrak{b} \in S(\mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle)} \mathfrak{b} \quad \text{et} \quad S(\mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \mathcal{T} \langle R^*(\mathfrak{a}) \rangle.$$

En effet :

a) Soit $\mathfrak{b} \in S(\mathfrak{a})$ et $\mathfrak{c} \in S(\mathfrak{b})$ alors pour tous $A \in \mathfrak{a}$, $B \in \mathfrak{b}$ et $C \in \mathfrak{c}$, A est proche de B et B est proche de C , donc A est proche de C (car sinon il existerait, d'après l'axiome f, X tel que A soit éloigné de $\bar{C}X$ et X éloigné de C ; or X ou $\bar{C}X$ appartient à l'ultrafiltre \mathfrak{b}) ; ainsi $\mathfrak{c} \in S(\mathfrak{a})$, donc $\mathfrak{c} \in S^2(\mathfrak{a})$.

b) S'il existe $\mathfrak{a} \in \mathcal{T}(A)$ et $\mathfrak{b} \in \mathcal{T}(B)$ tels que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in S$ il est clair que $A R B$. Réciproquement si $A R B$ alors il existe un ultrafiltre \mathfrak{a} tel que $A \in \mathfrak{a} \subset R(B)$ (car $R(B)$ est une grille à laquelle A appartient ; voir 0.2, rappels, h) ; ainsi $R \langle \mathfrak{a} \rangle$ est une grille à laquelle B appartient, donc il existe un ultrafiltre \mathfrak{b} tel que $B \in \mathfrak{b} \subset R \langle \mathfrak{a} \rangle$; donc $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in (\mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(B)) \cap S$.

$$c) Y \in R(X) \iff (\mathcal{T}(X) \times \mathcal{T}(Y)) \cap S \neq \emptyset \iff \mathcal{T}(Y) \cap S(\mathcal{T}(X)) \neq \emptyset \iff Y \in \bigcup_{\mathfrak{a} \in S(\mathcal{T}(X))} \mathfrak{a}.$$

D'autre part (voir 0.2, rappels, h) pour tout ultrafiltre \mathfrak{a} on a $\mathfrak{a} \subset R(X)$ équivaut à $R^*(X) \subset \mathfrak{a}$ d'où le résultat.

d) Pour tout filtre \mathfrak{a} sur E on a $R^*(\mathfrak{a}) = \bigcup_{A \in \mathfrak{a}} R^*(A)$ d'où $\Upsilon \langle R^*(\mathfrak{a}) \rangle = \bigcap_{A \in \mathfrak{a}} S(\Upsilon(A)) = S(\Upsilon \langle \mathfrak{a} \rangle)$ (voir 0.2, rappels, g), et 1.1, caractérisations, 1/ b)). Comme, par ailleurs, $R \langle \mathfrak{a} \rangle$ est la grille associée au filtre $R^*(\mathfrak{a})$ on a bien $R \langle \mathfrak{a} \rangle = \bigcup_{\mathfrak{b} \in S(\Upsilon \langle \mathfrak{a} \rangle)} \mathfrak{b}$. cqfd

(Pour une démonstration de b) qui n'utiliserait pas les grilles explicitement voir plus loin au 1.9 la démonstration de la proposition 10).

Réciproquement, soit S une nasse symétrique et idempotente sur E , alors la relation binaire suivante entre parties de E

$$(\Upsilon(A) \times \Upsilon(B)) \cap S \neq \emptyset$$

est une proximité sur E , car elle satisfait manifestement les axiomes (a à e) ; quant à l'axiome f il est également satisfait (voici pourquoi : si $(\Upsilon(A) \times \Upsilon(B)) \cap S = \emptyset$ alors, puisque $\overset{2}{S} = S$ et $\overset{-1}{S} = S$, on a $S(\Upsilon(A)) \cap S(\Upsilon(B)) = \emptyset$; ce sont donc deux fermés disjoints de $\Upsilon(E)$ qui est normal, donc (voir 0.2, rappels, f) et g)) il existe une partie X tel que $S(\Upsilon(A)) \subset \Upsilon(X)$ et $S(\Upsilon(B)) \subset \Upsilon(X)$, donc $(\Upsilon(A) \times \Upsilon(X)) \cap S = \emptyset$ et $(\Upsilon(X) \times \Upsilon(B)) \cap S = \emptyset$. La nasse de cette proximité n'est autre que S ; en effet, si S' est la nasse de cette proximité on a (d'après le b) de la proposition 8), $(\Upsilon(A) \times \Upsilon(B)) \cap S = \emptyset$ équivaut à $(\Upsilon(A) \times \Upsilon(B)) \cap S' = \emptyset$; de plus, S et S' sont fermés dans $\Upsilon(E) \times \Upsilon(E)$ et les $\Upsilon(A) \times \Upsilon(B)$ forment une base d'ouvert de cet espace ; donc $S' = S$.

On obtient ainsi une bijection canonique entre l'ensemble des proximités sur un ensemble E et l'ensemble des nasses symétriques et idempotentes sur E (autrement dit, l'ensemble des graphes fermés de relations d'équivalences sur $\Upsilon(E)$).

(On verra plus loin (2.2, XXII, contre-exemple) qu'il existe des nasses de proximités qui ne sont pas nasses de mérotologies).

PROPOSITION 9.— Soient R une proximité sur E de nasse S et T la nasse de la topologie associée à R . Alors $T = p(S)$.

En effet : D'après le lemme 4, on a $\mathcal{V}(x) = R^*({x})$ et d'après le c) de la proposition 8, on a $\Upsilon \langle R^*({x}) \rangle = S(\tilde{x})$. Puisque $T(\tilde{x}) = \Upsilon \langle \mathcal{V}(x) \rangle$ (voir 1.6, remarques, e)) on a $T(\tilde{x}) = S(\tilde{x})$, donc $T\delta = S\delta$, donc (1.2, 3/) $T = p(S)$. cqfd

9. NASSES ET ORDRES TOPOGENES

RAPPELS.— D'après Cszásár [9], p. 25, on appelle *ordre topogène* sur un ensemble E tout graphe $R \subset \mathfrak{R}(E) \times \mathfrak{R}(E)$ qui satisfait aux axiomes suivants :

- a) $\emptyset R \emptyset$ et $E R E$;
- b) $A R B$ implique $A \subset B$;
- c) $A \subset A' R B' \subset B$ implique $A R B$;
- d) $A R B$ et $A' R B'$ impliquent $A \cap A' R B \cap B'$ et $A \cup A' R B \cup B'$.

On définit R_c par " $A R_c B \iff C B R C A$ " ; on vérifie que R_c est également un ordre topogène qu'on appelle le complémentaire de R (voir Cszásár *ibid* p. 22 et 26).

On vérifie facilement que le système d'axiomes (a à d) équivaut au système d'axiomes suivant :

- 1/ $R(\emptyset) = \mathfrak{R}(E)$;
- 2/ pour toute partie A non vide de E , $R(A)$ est un filtre moins fin que $[A]$ (filtre des surensembles de A) ;
- 3/ $R(A \cup B) = R(A) \cap R(B)$.

De sorte que pour tout filtre \mathfrak{a} sur E , $R(\mathfrak{a}) = \bigcup_{A \in \mathfrak{a}} R(A)$ est un filtre sur E (car si $A \in R(A')$ et $B \in R(B')$ on a $A \cap B \in R(A' \cap B')$). Remarquons aussi que $A \cap B \neq \emptyset$ implique $A R^* B$ (car $A \cap B \neq \emptyset$ implique $A \not\subset C B$ donc, d'après l'axiome \mathfrak{b} , non $A R C B$).

NASSE D'UN ORDRE TOPOGENE.— Soit R un ordre topogène sur E ; le graphe G par rapport à $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de la relation suivante sur $\mathcal{T}(E)$ “pour tous $A \in \mathfrak{a}$ et $B \in \mathfrak{b}$ on a $A R^* B$ ” est une nasse sur E (voir 1.8, lemme 3) que l'on appellera la *nasse de l'ordre topogène* R .

PROPOSITION 10.— Soient R un ordre topogène sur l'ensemble E et G sa nasse.

a) Pour toutes parties A et B de E , $A R^* B$ équivaut à $(\mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(B)) \cap G \neq \emptyset$; et $A R B$ équivaut à $G(\mathcal{T}(A)) \subset \mathcal{T}(B)$.

b) Pour toute partie X de E on a

$$G(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{T}\langle R(X) \rangle \quad \text{et} \quad R^*(X) = \bigcup_{\mathfrak{a} \in G(\mathcal{T}(X))} \mathfrak{a}.$$

c) Pour tout filtre \mathfrak{a} sur E on a

$$G(\mathcal{T}\langle \mathfrak{a} \rangle) = \mathcal{T}\langle R(\mathfrak{a}) \rangle \quad \text{et} \quad R^*\langle \mathfrak{a} \rangle = \bigcup_{\mathfrak{b} \in G(\mathcal{T}\langle \mathfrak{a} \rangle)} \mathfrak{b}.$$

En effet :

a) S'il existe $\mathfrak{a} \in \mathcal{T}(A)$ et $\mathfrak{b} \in \mathcal{T}(B)$ tels que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in G$ il est clair que $A R^* B$. Réciproquement soit $A R^* B$, alors le filtre $R(A)$ induit un filtre sur B (car si $X \cap B = \emptyset$ alors $B \subset C X$ alors $C X \in R^*(A)$ donc $X \notin R(A)$) il existe donc un ultrafiltre \mathfrak{b} plus fin que $R(A)$ et auquel B appartient, soit $R(A) \subset \mathfrak{b} \in \mathcal{T}(B)$; donc $\mathfrak{b} \subset R^*(A)$ (car $X \notin R^*(A) \iff A R C X \iff C X \in \mathfrak{b} \iff X \notin \mathfrak{b}$). On considère alors l'ordre R_c complémentaire ; $R_c(\mathfrak{b})$ est donc un filtre qui induit un filtre sur A (car $Y \cap A = \emptyset \implies A \subset C Y$, donc pour tout $X \in R^*(A)$ on a non $A R C X$ donc non $C Y R C X$ donc $Y \notin R_c(X)$; donc $Y \notin R_c(\mathfrak{b})$; soit donc \mathfrak{a} un ultrafiltre tel que $R_c(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a} \in \mathcal{T}(A)$. Pour tous $X \in \mathfrak{a}$ et $Y \in \mathfrak{b}$ on a $X R^* Y$ (car sinon on aurait $X R C Y$ soit $C X \in R_c(Y) \subset R_c(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}$ ce qui est impossible). Soit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in (\mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(B)) \cap G$. Par ailleurs $A R B \iff$ non $A R^* C B \iff (\mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(C B)) \cap G = \emptyset \iff G(\mathcal{T}(A)) \subset \mathcal{T}(B)$.

b) et c) se démontrent alors comme dans la proposition 8, par exemple. cqfd

Réciproquement, soit G une nasse sur E , le graphe R par rapport à (A, B) de la relation $B \in \bigcap_{\mathfrak{a} \in G(\mathcal{T}(A))} \mathfrak{a}$ (ou, ce qui revient au même, de la relation $G(\mathcal{T}(A)) \subset \mathcal{T}(B)$) est un ordre topogène sur E (on vérifie facilement les axiomes 1/, 2/ et 3/) dont la nasse est précisément G (car si G' est cette nasse, on a

$$G'(\mathcal{T}(X)) = G(\mathcal{T}(X))$$

pour toute partie X de E , donc (voir 0.3, b) du corollaire du lemme 11) $G' = G$).

Comme il est clair que l'ordre topogène associé à la nasse d'un ordre topogène R n'est autre que R , on obtient ainsi une bijection canonique entre l'ensemble des ordres topogènes sur un ensemble E et l'ensemble $\mathcal{N}(E)$ des nasses sur E .

On vérifie (facilement) les faits suivants : pour qu'un ordre topogène soit parfait (resp. biparfait) (voir Cszásár [9], p. 35 et 42 pour les définitions) il faut et il suffit que sa nasse soit mi-ouverte (resp. bi-ouverte). Soient R et S des ordres topogènes sur un même ensemble, G et H leurs nasses respectives ; la nasse de l'ordre “complémentaire” R_c est \bar{G} ; la nasse de l'ordre topogène composé RS est GH ; $R \subset S$ équivaut à $H \subset G$. (Par exemple : $A R_c B \iff C B R C A \iff G(\mathcal{T}(C B)) \subset \mathcal{T}(C A) = C \mathcal{T}(A) \iff G(\mathcal{T}(B)) \cap \mathcal{T}(A) = \emptyset \iff \bar{G}(\mathcal{T}(A)) \cap C \mathcal{T}(B) = \emptyset \iff \bar{G}(\mathcal{T}(A)) \subset \mathcal{T}(B)$). [Ces résultats, annoncés dans notre note [14], ont été également établis dans Cszásár [10]].

CHAPITRE 2

CARACTÉRISATIONS A L'AIDE DES NASSES

Dans ce chapitre, on utilise les résultats du précédent, notamment ceux du paragraphe 6, pour caractériser simplement divers concepts topologiques et étudier les liens entre eux. Après quelques généralités, on passe à l'étude de diverses espèces de topologies, classiques ou nouvelles, puis un long passage est consacré à la paracompacité. Enfin, on donne des caractérisations des applications continues, ouvertes, fermées ou propres.

1. GENERALITES

PROPOSITION 1.— Soient G, H des nasses de mérotopologies sur un ensemble E . Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :

a) pour tout $x \in E$ on a $HG(\tilde{x}) = G(\tilde{x})$;

b) pour tout $x \in E$ le filtre engendré par $\omega_G(\tilde{x})$ admet une base formée d'éléments appartenant à ω_H .

En effet : Soit $\mathcal{V}_G(x)$ le filtre engendré par $\omega_G(\tilde{x})$; alors $G(\tilde{x}) = \Upsilon < \omega_G(\tilde{x}) > = \Upsilon < \mathcal{V}_G(x) >$ (voir 1.5, proposition 2, c). De même $HG(\tilde{x}) = \Upsilon < \omega_H(\mathcal{V}_G(x)) >$. Ainsi, dire que $HG(\tilde{x}) = G(\tilde{x})$ c'est dire que le filtre engendré par $\omega_H(\mathcal{V}_G(x))$ n'est autre que $\mathcal{V}_G(x)$ lui-même, ce qui revient à dire que le filtre $\mathcal{V}_G(x)$ admet une base formée d'éléments appartenant à ω_H . cqfd

PROPOSITION 2.— Soient G, H, K et L des nasses de mérotopologies sur un ensemble E .

1/ Les deux énoncés suivants sont équivalents :

a) $GH \subset KL$;

b) pour toutes parties A et B de E , s'il existe $X \in \varphi_K(A)$ et $Y \in \omega_L(B)$ tels que $X \cap Y = \emptyset$ alors il existe $X' \in \varphi_G(A)$ et $Y' \in \omega_H(B)$ tels que $X' \cap Y' = \emptyset$.

2/ Les deux énoncés suivants sont équivalents :

a) $GH \subset K \cup L$;

b) pour toutes parties A et B de E , s'il existe $X \in \varphi_K(A)$ et $Y \in \omega_L(B)$ tels que $A \cap Y = \emptyset$ et $X \cap B = \emptyset$ alors il existe $X' \in \varphi_G(A)$ et $Y' \in \omega_H(B)$ tels que $X' \cap Y' = \emptyset$.

En effet : Soient A et B des parties de E . Dire qu'il existe $X \in \varphi_K(A)$ et $Y \in \omega_L(B)$ tels que $X \cap Y = \emptyset$ c'est dire que $\varphi_K(A)$ et $\omega_L(B)$ n'engendrent pas un filtre, ce qui équivaut à dire que

$$\bar{K}^1(\Upsilon(A)) \cap L(\Upsilon(B)) = \emptyset$$

(voir 0.2, rappels, g), et 1.5, proposition 2, a) et b)), ce qui équivaut à

$$(\Upsilon(B) \times \Upsilon(A)) \cap KL = \emptyset.$$

De même, dire qu'il existe $X' \in \varphi_G(A)$ et $Y' \in \omega_H(B)$ tels que $X' \cap Y' = \emptyset$ équivaut à dire que

$$(\mathcal{T}(B) \times \mathcal{T}(A)) \cap GH = \emptyset.$$

D'autre part, dire qu'il existe $X \in \varphi_K(A)$ tel que $X \cap B = \emptyset$ c'est dire que $\varphi_K(A)$ et B n'engendrent pas un filtre ce qui équivaut à dire que

$$\overline{K}^{-1}(\mathcal{T}(A)) \cap \mathcal{T}(B) = \emptyset$$

ce qui équivaut à

$$(\mathcal{T}(B) \times \mathcal{T}(A)) \cap K = \emptyset.$$

De même, dire qu'il existe $Y \in \omega_L(B)$ tel que $A \cap Y = \emptyset$ équivaut à dire que

$$(\mathcal{T}(B) \times \mathcal{T}(A)) \cap L = \emptyset.$$

Les résultats annoncés suivent alors, en remarquant que GH , KL et $K \cup L$ sont des fermés de $\mathcal{T}(E) \times \mathcal{T}(E)$ et que les $\mathcal{T}(B) \times \mathcal{T}(A)$ forment une base d'ouverts dans cet espace produit. *cqfd*

PROPOSITION 3.— Soient G , H , K et L des nasses de mérotopologies sur un ensemble E .

1/ Si E satisfait à l'énoncé 2/ b de la proposition 2 alors pour toute partie F de E et pour toutes parties A et B de F , s'il existe $X \in \varphi_K(A)$ et $Y \in \omega_L(B)$ tels que $X \cap Y \cap F = \emptyset$, il existe aussi $X' \in \varphi_G(A)$ et $Y' \in \omega_H(B)$ tels que $X' \cap Y' \cap F = \emptyset$; (autrement dit, si E satisfait à l'énoncé 2/ b de la proposition 2 alors tout "sous-espace" F de E satisfait à l'énoncé 1/ b de la proposition 2).

2/ Dans le cas particulier où $H = \overline{G}^{-1}$, $K = \overline{G}^{-1}$ et $L = G$, si tout "sous-espace" F de E satisfait à l'énoncé 1/ b de la proposition 2 alors E satisfait à l'énoncé 2/ b de la proposition 2.

En effet :

1/ Soient $A, B \subset F \subset E$, $X \in \varphi_K(A)$ et $Y \in \omega_L(B)$ tels que $X \cap Y \cap F = \emptyset$ alors $A \cap Y = \emptyset$ et $X \cap B = \emptyset$ donc il existe $X' \in \varphi_G(A)$ et $Y' \in \omega_H(B)$ tels que $X' \cap Y' = \emptyset$.

2/ Soient $A, B \subset E$, $X \in \omega_G(A)$ et $Y \in \omega_G(B)$ tels que $A \cap Y = \emptyset$ et $X \cap B = \emptyset$; on considère $F = \overline{C}(X \cap Y) = (\overline{C}X) \cup (\overline{C}Y) \in \varphi_G$; on a donc $A, B \subset F \subset E$ et $X \cap Y \cap F = \emptyset$; il existe donc $X'' \in \varphi_G(A)$ et $Y'' \in \varphi_G(B)$ tels que $X'' \cap Y'' \cap F = \emptyset$; si l'on pose $X' = X'' \cap F$ et $Y' = Y'' \cap F$ on a bien $X' \in \varphi_G(A)$, $Y' \in \varphi_G(B)$ et $X' \cap Y' = \emptyset$. *cqfd*

PROPOSITION 4.— Soient H une nasse sur un ensemble E , K une nasse sur un ensemble F et $G \subset E \times F$. On considère les deux énoncés suivants : (1) $K\widehat{G} \subset \widehat{G}H$ et (2) $G(\omega_H) \subset \omega_K$.

a) (1) implique (2).

b) Si H et K sont des nasses de mérotopologies alors (1) équivaut à (2).

En effet :

a) Pour toute partie X de E on a $\widehat{G}(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{T}(G(X))$ (voir 0.3, lemme 13, b)). Ainsi, si $X \in \omega_H$ on a $K\widehat{G}(\mathcal{T}(X)) = K\widehat{G}(\mathcal{T}(X)) \subset \widehat{G}H(\mathcal{T}(X)) = \widehat{G}(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{T}(G(X))$, donc $G(X) \in \omega_K$.

b) Pour toute partie X de E désignons par \mathfrak{a} le filtre engendré par $\omega_K(G(X))$ ou $\mathfrak{A}(F)$ si $G(X) = \emptyset$; de même désignons par \mathfrak{b} le filtre engendré par $\omega_H(X)$ ou $\mathfrak{A}(E)$ si $X = \emptyset$. On a alors

$$K\widehat{G}(\mathcal{T}(X)) = K(\mathcal{T}(G(X))) = \mathcal{T} \langle \omega_K(G(X)) \rangle = \mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle ;$$

$$\widehat{G}H(\mathcal{T}(X)) = \widehat{G}(\mathcal{T} \langle \omega_H(X) \rangle) = \widehat{G}(\mathcal{T} \langle \mathfrak{b} \rangle) = \mathcal{T} \langle G(\mathfrak{b}) \rangle$$

(voir 1.5, proposition 2, b) et 0.3, lemme 13, c); si donc (2) est vérifié on a $G(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}$,

$$\text{donc } \mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle \subset \mathcal{T} \langle G(\mathfrak{b}) \rangle, \text{ donc } K\widehat{G}(\mathcal{T}(X)) \subset \widehat{G}H(\mathcal{T}(X)), \text{ donc } K\widehat{G} \subset \widehat{G}H$$

(voir 0.3, corollaire du lemme 11).

cqfd

2. CARACTERISATIONS DE DIVERSES ESPECES DE TOPOLOGIES

On supposera dans tout ce paragraphe que E est un espace topologique de nasse T . On utilisera les remarques de 1.6 sans références explicites. ω désignera l'ensemble des ouverts de E et φ l'ensemble de ses fermés.

I – ESPACES DE KOLMOGOROFF.— On dit que l'espace E est un *espace de Kolmogoroff* (Bourbaki [4], I, 1 exerc. 2, p. 142) lorsque, quels que soient les points distincts x et y de E , il existe un voisinage de l'un au moins des points qui ne contient pas l'autre point.

PROPOSITION 5.— *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- a) E est un espace de Kolmogoroff ;
- b) pour tous $x, y \in E$, $\tilde{x} \in T(\tilde{y})$ et $\tilde{y} \in T(\tilde{x})$ impliquent $x = y$;
- c) $\delta T \delta$, la trace de T sur $\tilde{E} \times \tilde{E}$, est le graphe d'une relation d'ordre sur \tilde{E} .

En effet : Dire que E est un espace de Kolmogoroff équivaut à dire que, pour $x \neq y$, ou bien \tilde{x} ne converge pas vers y , ou bien \tilde{y} ne converge pas vers x ; d'où l'équivalence a \iff b. Comme T est le graphe d'un préordre, on voit bien que b \iff c. cqfd

II – ACCESSIBILITE FAIBLE.— On dira que l'espace E est *faiblement accessible* lorsque tout voisinage d'un point contient l'adhérence de ce point.

PROPOSITION 6.— *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- a) E est faiblement accessible ;
- b) pour tout $x \in E$ on a $\bar{T}(\tilde{x}) \subset T(\tilde{x})$;
- c) pour tous $x, y \in E$, $\bar{T}(\tilde{x}) \cap \bar{T}(\tilde{y}) \neq \emptyset$ implique $\bar{T}(\tilde{x}) = \bar{T}(\tilde{y})$;
- d) pour tous $x, y \in E$, $\tilde{y} \in \bar{T}(\tilde{x})$ implique $\tilde{x} \in \bar{T}(\tilde{y})$;
- e) $\delta T \delta$, la trace de T sur $\tilde{E} \times \tilde{E}$, est le graphe d'une relation d'équivalence sur \tilde{E} ;
- f) pour tous $x, y \in E$, $y \in \{\bar{x}\}$ implique $x \in \{\bar{y}\}$;
- g) pour tous $x, y \in E$, $y \in \{\bar{x}\}$ implique $\{\bar{x}\} = \{\bar{y}\}$.

En effet : L'énoncé b) traduit la définition des espaces faiblement accessible dans le langage des nasses puisque $\bar{T}(\tilde{x})$ représente le filtre des surembles de $\{\bar{x}\}$ et que $T(\tilde{x})$ représente le filtre des voisinages de x ; de même d) traduit f). Comme T est le graphe d'un préordre, on voit que d) équivaut à e). Il est immédiat que f) équivaut à g) qui implique c) puisque $\bar{T}(\tilde{x}) \cap \bar{T}(\tilde{y}) \neq \emptyset$ veut dire que $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\} \neq \emptyset$. D'autre part b) implique d) car $\tilde{y} \in \bar{T}(\tilde{x}) \subset T(\tilde{x})$ implique $\tilde{x} \in \bar{T}(\tilde{y})$. De plus si l'on a f) et si $y \in \{\bar{x}\}$ et V est un voisinage de x alors $x \in \{\bar{y}\}$ donc $y \in V$ donc $\{\bar{x}\} \subset V$; de sorte que f) implique a). Enfin, supposons c) vérifié et soit $\tilde{y} \in \bar{T}(\tilde{x})$ alors $\bar{T}(\tilde{x}) \cap \bar{T}(\tilde{y}) \neq \emptyset$ donc $\bar{T}(\tilde{x}) = \bar{T}(\tilde{y})$ donc $\tilde{x} \in \bar{T}(\tilde{y})$; c) implique bien d). cqfd

[L'axiome d'accessibilité faible figure déjà dans la "littérature" sous des formes diverses, désigné par différentes lettres].

III – ACCESSIBILITE.— On dit que l'espace E est *accessible* (Bourbaki [4], I, 8, exerc. 1, p. 156-157) lorsque quels que soient les points distincts x et y de E , il existe un voisinage de x qui ne contient pas y (et donc, un voisinage de y qui ne contient pas x).

PROPOSITION 7.— *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- a) *E est accessible ;*
- b) *pour tout $x \in E$ on a $\overline{T(x)} = \{x\}$;*
- c) *pour tous $x, y \in E$, $\overline{T(x)} \cap \overline{T(y)} \neq \emptyset$ implique $x = y$;*
- d) $\delta T \delta = \delta$;
- e) *E est un espace de Kolmogoroff faiblement accessible.*

En effet : La condition b) veut dire que pour tout $x \in E$ on a $\overline{\{x\}} = \{x\}$ et l'on sait que cela équivaut à dire que E est accessible. Il est immédiat que b) équivaut à d) ; de même b) implique c). D'autre part, si c) est vérifié, $\tilde{y} \in \overline{T(x)}$ entraîne $y = x$ donc $\overline{T(x)} = T(\overline{\{x\}}) = \{x\}$, donc b) est vérifié. Enfin, l'équivalence de a) et de e) résulte de la comparaison de d) avec le c) de la proposition 5 et le e) de la proposition 6. *cqfd*

IV — SEPARATION FAIBLE— On dit qu'un filtre *converge strictement* (Choquet [7], p. 81-82) lorsqu'il est convergent et qu'il converge vers tous ses points adhérents (ainsi, par exemple, tout ultrafiltre convergent converge strictement). On dira que l'espace E est *faiblement séparé* lorsque tout filtre convergent sur E converge strictement.

PROPOSITION 8.— *Pour que l'espace E soit faiblement séparé il faut et il suffit que pour tous $x, y \in E$, $T(x) \cap T(y) \neq \emptyset$ implique $T(x) = T(y)$.*

En effet : La condition est nécessaire : supposons E faiblement séparé et soit $T(x) \cap T(y) \neq \emptyset$ alors le filtre $\mathcal{V}(x)$ admet y pour point adhérent donc il converge vers y donc $\mathcal{V}(y) \subset \mathcal{V}(x)$; de même $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{V}(y)$ donc $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(y)$ donc $T(x) = T(y)$. Réciproquement, si la condition est vérifiée, soit \mathfrak{a} un filtre qui converge vers x et soit y un point adhérent à \mathfrak{a} , alors $T(\mathfrak{a}) \subset T(x)$ et $T(\mathfrak{a}) \cap T(y) \neq \emptyset$, donc $T(x) \cap T(y) \neq \emptyset$ donc $T(x) = T(y)$ donc $T(\mathfrak{a}) \subset T(y)$ donc \mathfrak{a} converge vers y. *cqfd*

Remarques :

a) *Tout espace faiblement séparé est faiblement accessible. En effet :* supposons que l'espace E est faiblement séparé et montrons qu'il satisfait à l'énoncé d) de la proposition 6 ; soit $\tilde{y} \in \overline{T(x)}$, alors $\tilde{x} \in T(x) \cap T(\tilde{y})$ donc $T(x) = T(\tilde{y})$ (proposition 8) donc $\tilde{y} \in T(x)$ donc $\tilde{x} \in \overline{T(x)}$. *cqfd*

b) *Tout espace fini faiblement accessible est faiblement séparé car alors $\delta T \delta = T$ est le graphe d'une relation d'équivalence (proposition 6 d) et proposition 8).*

c) *Tout espace accessible non séparé (il en existe !) est faiblement accessible et non faiblement séparé (voir, plus loin, proposition 9).*

[Cette notion de séparation est sans doute déjà apparue dans la "littérature" sous une autre forme].

V — ESPACES SEPARES.— On sait que l'espace E est *séparé* si et seulement si tout ultrafiltre sur E possède au plus un point limite (cela se déduit, par exemple, de Bourbaki [4], I, 8, 1, proposition 1, p. 85).

PROPOSITION 9.— *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- a) *E est séparé ;*
- b) *pour tous $x, y \in E$, $T(x) \cap T(y) \neq \emptyset$ implique $x = y$;*
- c) *E est un espace de Kolmogoroff faiblement séparé.*

PROPOSITION 13.— Pour que l'espace E soit quasi absolument fermé il faut et il suffit que $\bar{T}T(\tilde{E}) = \Upsilon(E)$.

En effet : Supposons que E soit quasi absolument fermé et soit $\mathfrak{a} \in \Upsilon(E)$ alors $T(\mathfrak{a})$ représente le filtre engendré par les ouverts de \mathfrak{a} , $T(\mathfrak{a}) = \Upsilon\langle \omega(\mathfrak{a}) \rangle$, or $\omega(\mathfrak{a})$ possède un point adhérent donc

$$\Upsilon\langle \omega(\mathfrak{a}) \rangle \cap T(\tilde{E}) \neq \emptyset \quad \text{soit} \quad T(\mathfrak{a}) \cap T(\tilde{E}) \neq \emptyset \quad \text{donc} \quad \mathfrak{a} \in \bar{T}T(\tilde{E}).$$

Réciproquement, supposons que $\bar{T}T(\tilde{E}) = \Upsilon(E)$ et soit \mathfrak{X} une base de filtre formée d'ensembles ouverts et soit \mathfrak{a} le filtre engendré par \mathfrak{X} , alors $\Upsilon\langle \mathfrak{X} \rangle = \Upsilon\langle \mathfrak{a} \rangle = T(\Upsilon\langle \mathfrak{a} \rangle)$ et puisque $\Upsilon\langle \mathfrak{a} \rangle \neq \emptyset$ on a $\Upsilon\langle \mathfrak{a} \rangle \cap T(E) \neq \emptyset$ donc $\Upsilon\langle \mathfrak{a} \rangle \cap \bar{T}T(\tilde{E}) \neq \emptyset$ donc $T(\Upsilon\langle \mathfrak{a} \rangle) \cap T(\tilde{E}) \neq \emptyset$ donc $\Upsilon\langle \mathfrak{a} \rangle \cap T(\tilde{E}) \neq \emptyset$ donc \mathfrak{a} possède un point adhérent. cqfd

X — COMPACTITE.— On sait que l'espace E est *quasi compact* si et seulement si tout ultrafiltre sur E converge (Bourbaki [4], I, 9, 1, p. 95), d'où le résultat suivant.

PROPOSITION 14.— Pour que l'espace E soit quasi compact il faut et il suffit que $T(\tilde{E}) = \Upsilon(E)$.

Remarque : Il apparait clairement, en rapprochant les propositions 11, 13 et 14, qu'un espace est quasi compact dès qu'il est quasi absolument fermé et quasi régulier. Cependant il existe des quasi compacts qui ne sont pas quasi réguliers comme on peut le voir sur des exemples d'espaces finis.

XI — NORMALITE.— On dira que l'espace E est *quasi normal* lorsque quels que soient les parties fermées disjointes A et B de E il existe des ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$ (c'est l'axiome (O'_V) de Bourbaki [5], IX, 4, 1, p. 81). Un espace *normal* est un espace quasi normal séparé (*ibid.*).

PROPOSITION 15.— Pour que l'espace E soit quasi normal il faut et il suffit que $\bar{T}T \subset T\bar{T}$.

En effet : On obtient le résultat par application de la proposition 2, 1/, au cas où $G = L = \bar{T}$ et $H = K = T$. cqfd

PROPOSITION 16.— Pour que l'espace E soit quasi compact et quasi normal il faut et il suffit que $\bar{T}T \subset T\delta\bar{T}$.

En effet : On utilise les propositions 14 et 15. Ainsi, supposons que E soit quasi compact et quasi normal et soit $\mathfrak{b} \in \bar{T}T(\mathfrak{a})$ alors il existe x et y tels que $\mathfrak{a} \in T(\tilde{x})$ et $\mathfrak{b} \in T(\tilde{y})$ donc $\tilde{y} \in \bar{T}(\mathfrak{b}) \subset \bar{T}T(\mathfrak{a}) \subset \bar{T}T(\tilde{x})$ donc $\tilde{y} \in T\bar{T}(\tilde{x})$ soit $\bar{T}(\tilde{x}) \cap \bar{T}(\tilde{y}) \neq \emptyset$; il existe donc $\tilde{z} \in \bar{T}(\tilde{x}) \cap \bar{T}(\tilde{y})$ (car $\bar{T}(\tilde{t}) = \Upsilon(\{\tilde{t}\})$) donc $\tilde{y} \in T(\tilde{z})$ et $\tilde{z} \in \bar{T}(\tilde{x}) \subset \bar{T}(\mathfrak{a})$ donc $\mathfrak{b} \in T\delta\bar{T}(\mathfrak{a})$. Réciproquement, si $\bar{T}T \subset T\delta\bar{T}$ alors $\bar{T}T \subset T\bar{T}$ et $\Upsilon(E) \subset \bar{T}T(\Upsilon(E)) \subset T\delta\bar{T}(\Upsilon(E)) = T(\tilde{E})$ donc $T(\tilde{E}) = \Upsilon(E)$. cqfd

Remarque : Parmi les espaces E finis (qui sont tous quasi compacts) il en existe qui ne satisfont pas à la condition $\bar{T}T \subset T\bar{T}$ et qui ne sont donc pas quasi normaux. Par une méthode analogue à celle de la démonstration de la proposition 16, on peut retrouver simplement le fait que tout compact est normal.

XII — NORMALITE COMPLETE.— On dira que l'espace E est *complètement quasi normal* lorsque pour tout couple de parties A, B de E telles que $\bar{A} \cap \bar{B} = A \cap B = \emptyset$ il existe des ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$ (c'est l'axiome c) de Bourbaki [5], IX, 4, exerc. 3, p. 96). Un espace *complètement normal* est un espace complètement quasi normal séparé (voir *ibid.*).

PROPOSITION 17.— *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- a) *E est complètement quasi normal ;*
- b) $\overline{T}T = T \cup \overline{T}^{-1}$;
- c) *tout sous-espace de E est quasi normal.*

En effet : L'équivalence entre a) et b) se déduit par application de la proposition 2,2/ au cas où $G = L = \overline{T}^{-1}$ et $H = K = T$ (ou encore, $G = K = \overline{T}^{-1}$ et $H = L = T$) en remarquant que $T \cup \overline{T}^{-1} \subset \overline{T}T$. L'équivalence entre a) et c) est connue (voir Bourbaki, *ibid.*) ; elle découle aussi de la proposition 3. *cqfd*

XIII — DISCONTINUITÉ EXTREME.— On dit que l'espace E est *extrêmement discontinu* (voir Bourbaki [4], I, 11, exerc. 21, a), p. 179 ; *nous ne postulons pas la séparation*) lorsque pour tout couple d'ouverts U et V de E tels que $U \cap V = \emptyset$, on a $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

PROPOSITION 18.— *Pour que l'espace E soit extrêmement discontinu il faut et il suffit que $\overline{T}T^{-1} \subset \overline{T}T$.*

En effet : C'est une application de la proposition 2,1/ au cas où $G = L = T$ et $H = K = \overline{T}^{-1}$. *cqfd*

XIV — DISCONTINUITÉ EXTREME COMPLETE— On dira que l'espace E est *complètement extrêmement discontinu* lorsque pour toutes parties A, B de E telles que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, on a aussi $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

PROPOSITION 19.— *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- a) *E est complètement extrêmement discontinu ;*
- b) $T\overline{T}^{-1} = T \cup \overline{T}^{-1}$;
- c) *tout sous-espace de E est extrêmement discontinu.*

En effet : L'équivalence entre a) et b) se déduit de la proposition 2,2/ en prenant $G = K = T$ et $H = L = \overline{T}^{-1}$ (ou encore, $G = L = T$ et $H = K = \overline{T}^{-1}$) et l'équivalence entre a) et c) se déduit de la proposition 3. *cqfd*

Remarque : On peut montrer que, lorsque E est infini, l'espace $\mathcal{T}(E)$ n'est pas complètement extrêmement discontinu, voir Bourbaki [4], I, 11, exerc. 22 d), p. 180 (et, plus généralement, que tout espace compact infini n'est pas complètement extrêmement discontinu, voir [12], exerc. 6R, p. 98). Par contre, sur tout ensemble infini E il existe des topologies *non discrètes* et complètement extrêmement discontinues séparées (en effet, il suffit de prendre un ultrafiltre non principal \mathfrak{a} sur E et un point $u \in E$ et de poser $T = \Delta \cup \{(\tilde{u}, \mathfrak{a})\}$).

XV — SEMI-COMPACTITÉ.— On dira que l'espace E est *quasi semi-compact* lorsque toute suite de points de E possède une valeur d'adhérence (c'est la condition α) de Bourbaki [5], IX, 2, exerc. 14, p. 49-50). Un espace *semi-compact* est un espace quasi semi-compact séparé.

PROPOSITION 20.— *Pour que l'espace E soit quasi semi-compact il faut et il suffit que l'on ait*

$$\text{Adh}(T(\tilde{E}) \cap C\tilde{E}) = C\tilde{E}.$$

En effet : Supposons que E soit quasi semi-compact et soit \mathfrak{a} un ultrafiltre non principal sur E ; alors pour tout $A \in \mathfrak{a}$, A est infini et il existe donc une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E formée de points *distincts* appartenant à A ; soit \mathfrak{b} le filtre élémentaire associé à cette suite (voir Bourbaki [4], I, 6, 8, définition 7, p. 72) alors $\mathcal{T} < \mathfrak{b} > \subset \mathcal{T}(A) \cap C\tilde{E}$ et \mathfrak{b} possède un point adhérent, donc $\mathcal{T} < \mathfrak{b} > \cap T(\tilde{E}) \neq \emptyset$; ainsi, pour tout $A \in \mathfrak{a}$, on a $\mathcal{T}(A) \cap T(\tilde{E}) \cap C\tilde{E} \neq \emptyset$ donc $\mathfrak{a} \in \text{Adh}(T(\tilde{E}) \cap C\tilde{E})$ et, comme $C\tilde{E}$ est fermé, on a bien l'égalité $\text{Adh}(T(\tilde{E}) \cap C\tilde{E}) = C\tilde{E}$. Réciproquement, supposons que cette égalité soit vérifiée, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

une suite de points de E, soit \mathfrak{b} le filtre élémentaire associé et posons $X_n = \{x_m \mid m \geq n\}$; alors

$$\Upsilon \langle \mathfrak{b} \rangle = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Upsilon(X_n) ;$$

si $\Upsilon \langle \mathfrak{b} \rangle \cap \tilde{E} \neq \emptyset$ alors a fortiori $\Upsilon \langle \mathfrak{b} \rangle \cap T(\tilde{E}) \neq \emptyset$ et \mathfrak{b} possède un point adhérent ; si par contre $\Upsilon \langle \mathfrak{b} \rangle \subset \tilde{C}\tilde{E}$ alors $\Upsilon \langle \mathfrak{b} \rangle = \Upsilon(X_0) \cap \tilde{C}\tilde{E}$ (car, dans ce cas, si $c \in \Upsilon(X_0) \cap \tilde{C}\tilde{E}$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c \in \Upsilon(X_n)$ donc $c \in \Upsilon \langle \mathfrak{b} \rangle$) et X_0 est infini donc $\Upsilon(X_0) \cap T(\tilde{E}) \cap \tilde{C}\tilde{E} \neq \emptyset$ donc $\Upsilon \langle \mathfrak{b} \rangle \cap T(\tilde{E}) \neq \emptyset$ donc \mathfrak{b} possède aussi un point adhérent. cqfd

Posons, pour tout $x \in E$, $T^*(\tilde{x}) = T(\tilde{x}) \cap \tilde{C}\{\tilde{x}\}$ et, pour tout $A \subset E$, $T^*(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in A} T^*(\tilde{x})$ et considérons la condition suivante sur l'espace E :

(*) tout sous-espace infini discret de E est non fermé ; (c'est la condition β) de Bourbaki [5], IX, 2, exerc. 14, p. 49-50). Remarquons que $T(\tilde{x}) = \{\tilde{x}\} \cup T^*(\tilde{x})$ et $T(\tilde{E}) = \tilde{E} \cup T^*(\tilde{E})$.

PROPOSITION 21. — Pour que l'espace E satisfasse à la condition (*) il faut et il suffit que l'on ait $\text{Adh}(T^*(\tilde{E})) \supset \tilde{C}\tilde{E}$.

En effet : Remarquons d'abord les points suivants : pour que le sous-espace A de E soit discret, il faut et il suffit que l'on ait $\Upsilon(A) \cap T^*(\tilde{A}) = \emptyset$ (car, dire que l'espace A est discret revient à dire que le seul ultrafiltre sur A qui converge vers x c'est \tilde{x}) ; d'autre part, pour que la partie A de E soit fermée, il faut et il suffit que l'on ait $\Upsilon(A) \cap T^*(\tilde{C}A) = \emptyset$ (autrement dit, qu'aucun ultrafiltre sur A ne converge vers un point de $\tilde{C}A$). Supposons à présent que E satisfasse à (*) et soit $\mathfrak{a} \in \tilde{C}\tilde{E}$, alors, pour tout $A \in \mathfrak{a}$, A est infini ; si donc $\Upsilon(A) \cap T^*(\tilde{E}) = \emptyset$, A serait un sous-espace discret infini fermé ce qui est impossible ; donc $\mathfrak{a} \in \text{Adh}(T^*(\tilde{E}))$ et l'on a donc bien $\tilde{C}\tilde{E} \subset \text{Adh}(T^*(\tilde{E}))$. Réciproquement, si l'on a cela, soit A un sous-espace infini discret de E alors $\Upsilon(A) \cap T^*(\tilde{A}) = \emptyset$ et, A étant infini, on a $\Upsilon(A) \cap \tilde{C}\tilde{E} \neq \emptyset$ donc $\Upsilon(A) \cap T^*(\tilde{E}) \neq \emptyset$ donc $\Upsilon(A) \cap T^*(\tilde{C}A) \neq \emptyset$ donc A n'est pas fermé. cqfd

Remarques :

a) Tout espace quasi semi-compact satisfait à la condition (*) puisque $\text{Adh}(T(\tilde{E}) \cap \tilde{C}\tilde{E}) = \tilde{C}\tilde{E}$ implique $\text{Adh}(T^*(\tilde{E})) \supset \tilde{C}\tilde{E}$.

b) Réciproquement, tout espace E accessible qui satisfait à la condition (*) est quasi semi-compact, car si E est accessible on a $T(\tilde{E}) \cap \tilde{C}\tilde{E} = T^*(\tilde{E})$; (voir aussi Bourbaki [5] *ibid.* et feuille d'errata n° 12, p. 2 ; et Kelley [17], chap. 5, exerc. E, p. 162).

c) Soit F un ensemble formé de deux points et muni de la topologie grossière (la topologie la moins fine), alors l'espace E somme topologique d'une infinité de copies de F satisfait à la condition (*) mais n'est pas quasi semi-compact.

XVI — IRREDUCTIBILITE. — On dit que l'espace E est *irréductible* lorsque E n'est pas vide et que tout ouvert non vide de E est dense dans E (voir Bourbaki [6], II, 4, 1, définition 1 et proposition 1, p. 119).

PROPOSITION 22. —

a) Pour que tout ouvert non vide de l'espace E soit dense dans E il faut et il suffit que l'on ait $\bar{T}^{-1}T = \Upsilon(E) \times \Upsilon(E)$.

b) Pour que, dans l'espace E, l'intersection de deux fermés non vides quelconques soit non vide, il faut et il suffit que l'on ait $T\bar{T}^{-1} = \Upsilon(E) \times \Upsilon(E)$.

En effet :

a) Supposons que tout ouvert non vide de E est dense dans E, alors, pour tout couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ d'ultrafiltres sur E, $\omega(\mathfrak{a})$ et $\omega(\mathfrak{b})$ engendrent un filtre ; donc $T(\mathfrak{a}) \cap T(\mathfrak{b}) \neq \emptyset$, donc $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \bar{T}^{-1}T$. Réciproquement, soit $\bar{T}^{-1}T = \Upsilon(E) \times \Upsilon(E)$ et soit A un ouvert non vide de E alors $\Upsilon(\bar{A}) = \bar{T}^{-1}T(\Upsilon(A)) = \bar{T}^{-1}T(\Upsilon(A)) = \Upsilon(E)$ donc $\bar{A} = E$. Le b) se démontre d'une manière analogue. cqfd

XVII – LOCALEMENT FERMES. – On dit qu'une partie X de l'espace E est *localement fermée* lorsqu'il existe un ouvert A et un fermé F de E tels que $X = A \cap F$ (voir Bourbaki [4], I, 3, 3, définition 2 et proposition 5, p. 41-42).

Entre deux définitions équivalentes, on peut adopter la suivante : on dit que l'espace E est *submaximal* lorsque tout ensemble dense dans E est un ouvert de E (voir Bourbaki [4], I, 8, exerc. 22 a) et b), p. 161).

LEMME 1. – *Pour que l'espace E soit submaximal il faut et il suffit que toute partie de E soit localement fermée.*

En effet : Supposons E submaximal et soit X une partie de E ; posons $A = X \cup C\bar{X}$, alors $\bar{A} = E$ donc A est ouvert, or $X = A \cap \bar{X}$ donc X est localement fermée. Réciproquement, si toute partie de E est localement fermée et si X est dense dans E, alors $X = A \cap F$ où A est ouvert et F fermé, donc $E = \bar{X} \subset F$ donc $F = E$ et $X = A$ est ouvert. cqfd

C'est un renforcement d'un résultat connu (voir *ibid.* c)).

LEMME 2. – *Pour qu'une partie X de l'espace E soit localement fermée il faut et il suffit que*

$$T(T(X)) \cap \bar{T}^{-1}(T(X)) = T(X).$$

En effet : Soient A un ouvert et F un fermé de E et soit $X = A \cap F$; alors $T(T(X)) \subset T(T(A)) = T(A)$ et $\bar{T}^{-1}(T(X)) \subset \bar{T}^{-1}(T(F)) = T(F)$ donc $T(T(X)) \cap \bar{T}^{-1}(T(X)) \subset T(A) \cap T(F) = T(A \cap F) = T(X)$. Réciproquement, si $T(T(X)) \cap \bar{T}^{-1}(T(X)) = T(X)$ alors, puisque $\bar{T}^{-1}(T(X)) = T(\bar{X})$ et $T(T(X)) = T(\omega(X))$, on a $T(\omega(X)) \cap T(\bar{X}) = T(X)$; autrement dit, le filtre engendré par $\omega(X)$ et $\{\bar{X}\}$ est égal au filtre $[X]$ des surensembles de X (dans le cas où $X \neq \emptyset$!) ; il existe donc $A \in \omega(X)$ tel que $X = A \cap \bar{X}$. cqfd

PROPOSITION 23. – *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- a) *toute partie de l'espace E est localement fermée ;*
- b) *pour tout filtre a sur E, on a $T(T\langle a \rangle) \cap \bar{T}^{-1}(T\langle a \rangle) = T\langle a \rangle$;*
- c) *pour tous ultrafiltres a, b sur E on a $T(a) \cap \bar{T}^{-1}(b) \subset \{a, b\}$;*
- d) *T est le graphe d'une relation (d'ordre) \rightarrow sur E qui satisfait à la condition suivante :*

$$a \rightarrow c \rightarrow b \implies c = a \text{ ou } c = b .$$

En effet : Si a) est vérifiée, alors, pour tout filtre a sur E on a

$$T(T\langle a \rangle) \cap \bar{T}^{-1}(T\langle a \rangle) = \bigcap_{A \in a} (T(T(A)) \cap \bar{T}^{-1}(T(A))) = \bigcap_{A \in a} T(A) = T\langle a \rangle ;$$

et pour voir que b) implique a) il suffit d'appliquer b) au filtre $[X]$ des surensembles de $X \neq \emptyset$. Donc a) \iff b). D'autre part, si a et b sont des ultrafiltres sur E, en appliquant b) au filtre $c = a \cap b$ on obtient aisément c) ; et réciproquement, si c) est vérifié, soit c un filtre sur E, on a alors

$$T(T\langle c \rangle) \cap \bar{T}^{-1}(T\langle c \rangle) = \bigcup_{a, b \in T\langle c \rangle} (T(a) \cap \bar{T}^{-1}(b)) \subset \bigcup_{a, b \in T\langle c \rangle} \{a, b\} = T\langle c \rangle .$$

Donc b) \iff c). Par ailleurs, si c) est vérifié, on a pour tout ultrafiltre a $T(a) \cap \bar{T}^{-1}(a) = \{a\}$ en particulier, donc $T \cap \bar{T}^{-1} = \Delta$ et, comme T est le graphe d'un préordre, c'est alors le graphe d'une relation d'ordre \rightarrow ; de plus $a \rightarrow c$ veut dire $c \in T(a)$, et $c \rightarrow b$ veut dire $c \in \bar{T}^{-1}(b)$; donc c) \implies d) ; la réciproque, d) \implies c), est immédiate. cqfd

PROPOSITION 24.— Les énoncés suivants sont équivalents :

a) toute partie de l'espace E est ouverte ou fermée ;

b) pour tout filtre \mathfrak{a} sur E , on a $T(\mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle$ ou $\bar{T}(\mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle$;

c) pour toute partie finie \mathcal{A} de $\mathfrak{T}(E)$ on a $T(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ ou $\bar{T}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$;

d) T est de l'une des trois formes suivantes :

1/ $T = \Delta$; ou 2/ $T = \Delta \cup (\{\tilde{x}\} \times \mathfrak{T} \langle \mathfrak{b} \rangle)$ (où $x \in E$ et \mathfrak{b} est un filtre sur E) ou 3/ $T = \Delta \cup (\mathfrak{T}(X) \times \{\mathfrak{a}\})$ (où $\mathfrak{a} \in \mathfrak{T}(E)$ et $X \subset E$).

En effet : D'après 0.1, lemme 3, on a d) \implies c) \implies b). De plus, b) \implies a) facilement (pour toute partie X non vide de E on applique b) au filtre $[X]$). D'autre part b) \implies c) car toute partie finie de $\mathfrak{T}(E)$ est fermée donc représente un filtre sur E si elle n'est pas vide. Pour voir que c) \implies d) on utilise 0.1, lemme 3 et le fait que T est une nasse mi-ouverte donc que $T = \text{Adh}((\bar{E} \times \mathfrak{T}(E)) \cap T)$ (voir 1.1, caractérisations, 2/ b)) ; ainsi, si $T = \Delta \cup (\{\mathfrak{a}\} \times A)$ où A est non vide, on doit avoir $\mathfrak{a} \in \bar{E}$ donc $\mathfrak{a} = \tilde{x}$ et A fermé donc de la forme $\mathfrak{T} \langle \mathfrak{b} \rangle$ où \mathfrak{b} est un filtre sur E ; si, par contre $T = \Delta \cup (A \times \{\mathfrak{a}\})$ alors on doit avoir $A = \text{Adh}(A \cap \bar{E})$ donc A de la forme $\mathfrak{T}(X)$. Pour finir, supposons que a) soit vérifié et soit \mathfrak{a} un filtre sur E ; désignons par \mathfrak{v} et \mathfrak{f} respectivement les filtres engendrés par $\omega(\mathfrak{a})$ et $\varphi(\mathfrak{a})$; alors $\mathfrak{a} = \omega(\mathfrak{a}) \cup \varphi(\mathfrak{a})$ donc aussi $\mathfrak{a} = \mathfrak{v} \cup \mathfrak{f}$ par conséquent ou bien $\mathfrak{a} = \mathfrak{v}$ ou bien $\mathfrak{a} = \mathfrak{f}$ (car si $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{v}$ alors $\mathfrak{f} \not\subset \mathfrak{v}$ donc il existe $X \in \mathfrak{f}$ tel que $X \notin \mathfrak{v}$, soit $Y \in \mathfrak{v}$ alors $X \cap Y \in \mathfrak{a}$ et $X \cap Y \notin \mathfrak{v}$ donc $X \cap Y \in \mathfrak{f}$ donc $Y \in \mathfrak{f}$, donc $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{f}$ donc $\mathfrak{a} = \mathfrak{f}$) ; il suffit alors de se rappeler que

$$T(\mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \mathfrak{T} \langle \omega(\mathfrak{a}) \rangle \quad \text{et} \quad \bar{T}(\mathfrak{T} \langle \mathfrak{a} \rangle) = \mathfrak{T} \langle \varphi(\mathfrak{a}) \rangle$$

pour conclure que a) \implies b). cqfd

Un espace qui satisfait à ces énoncés équivalents est appelé espace de portes ("door space") par Kelley [17] (chap. 2, exerc. C, p. 76).

Remarque :

1/ si $T = \Delta$ l'espace E est discret ;

2/ si E est de la forme d) 2/ alors $\omega_T = \mathfrak{b} \cup C_{\mathfrak{a}(E)} \tilde{x}$;

3/ si E est de la forme d) 3/ alors $\varphi_T = [X] \cup C_{\mathfrak{a}(E)} \mathfrak{a}$.

Cela donne un procédé simple de construction de tous les espaces de portes.

XVIII — REGULARITE FAIBLE— On introduit ici un axiome de régularité faible qui intervient notamment dans l'étude de la paracompacité et de la compacité locale des espaces non nécessairement séparés.

DEFINITION 1.— Soit \mathfrak{X} une partie de $\mathfrak{P}(E)$. On dira que \mathfrak{X} est *filtrante* lorsque toute réunion finie d'éléments de \mathfrak{X} est contenue dans un élément de \mathfrak{X} .

LEMME 3.— Les énoncés suivants sont équivalents :

a) tout filtre \mathfrak{a} sur E , pour lequel $\omega(\mathfrak{a})$ possède un point adhérent, possède lui-même un point adhérent ;

b) pour tout recouvrement ouvert filtrant \mathcal{R} de E , il existe un recouvrement ouvert \mathfrak{V} tel que l'ensemble $\mathfrak{V} = \{\bar{V} \mid V \in \mathfrak{V}\}$ soit un recouvrement plus fin que \mathcal{R} .

En effet :

a) \implies b) : soit \mathcal{R} un recouvrement ouvert filtrant de E ; si $E \in \mathcal{R}$ on prend $\mathfrak{V} = \{E\}$; si $E \notin \mathcal{R}$ alors l'ensemble $\{X \mid C X \in \mathcal{R}\}$ est une base d'un filtre \mathfrak{a} sur E n'ayant pas de point adhérent, donc $\omega(\mathfrak{a})$ n'a pas de point adhérent d'après a) ; soit alors $\mathfrak{V} = \{\bar{Y} \mid C Y \in \omega(\mathfrak{a})\}$; \mathfrak{V} est un recouvrement ouvert de E ; d'autre part, si $C Y \in \omega(\mathfrak{a})$, il existe $X \subset C Y$ tel que $C X \in \mathcal{R}$, soit $Y \subset C X$ et, comme Y est fermé, on a $\bar{Y} \subset Y \subset C X$, donc $\bar{\mathfrak{V}}$ est plus fin que \mathcal{R} .

b) \implies a) : soit \mathfrak{a} un filtre sur E qui ne possède pas de point adhérent ; $\mathcal{R} = \{\overline{CA} \mid A \in \mathfrak{a}\}$ est alors un recouvrement ouvert filtrant de E ; il existe donc, d'après b), un recouvrement ouvert \mathcal{V} tel que $\overline{\mathcal{V}}$ soit plus fin que \mathcal{R} ; alors, pour tout $X \in \mathcal{V}$ il existe $A \in \mathfrak{a}$ tel que $\overline{X} \subset \overline{CA}$, soit $\overline{A} \subset \overline{CX} \in \omega(\mathfrak{a})$; or $\overline{CX} = \overline{C\overline{X}} \subset CX$ (car X est ouvert) ; \mathcal{V} étant un recouvrement de E , on a $\bigcap_{X \in \mathcal{V}} CX = \emptyset$, donc $\omega(\mathfrak{a})$ ne possède pas de point adhérent. cqfd

DEFINITION 2.— On dira que l'espace E est *faiblement régulier* lorsqu'il satisfait aux deux énoncés équivalents précédents.

PROPOSITION 25.—

- a) Pour que l'espace E soit faiblement régulier, il faut et il suffit que l'on ait $\overline{TT}(\tilde{E}) = T(\tilde{E})$.
- b) Pour que l'espace E soit quasi régulier il faut et il suffit qu'il soit faiblement régulier et faiblement séparé.
- c) Pour que l'espace E soit régulier, il faut et il suffit qu'il soit séparé et faiblement régulier.
- d) Pour que l'espace E soit quasi compact il faut et il suffit qu'il soit quasi absolument fermé et faiblement régulier.
- e) Soit A une partie de l'espace E tel que tout ultrafiltre sur A converge dans E ; alors \overline{A} est quasi absolument fermé ; si de plus E est faiblement régulier, alors \overline{A} est quasi compact.

En effet :

a) Supposons que E soit faiblement régulier et soit $\mathfrak{a} \in \overline{TT}(\tilde{E})$, alors $T(\mathfrak{a}) \cap T(\tilde{E}) \neq \emptyset$, or $T(\mathfrak{a}) = \Upsilon \langle \omega(\mathfrak{a}) \rangle$ donc $\omega(\mathfrak{a})$ possède un point adhérent donc \mathfrak{a} aussi possède un point adhérent, donc $\mathfrak{a} \in T(\tilde{E})$, donc $\overline{TT}(\tilde{E}) = T(\tilde{E})$. Réciproquement si cette égalité est vérifiée et si \mathfrak{a} est un filtre sur E tel que $\omega(\mathfrak{a})$ possède un point adhérent, comme $\Upsilon \langle \omega(\mathfrak{a}) \rangle = T(\Upsilon \langle \mathfrak{a} \rangle)$, on a $T(\Upsilon \langle \mathfrak{a} \rangle) \cap T(\tilde{E}) \neq \emptyset$, soit $\Upsilon \langle \mathfrak{a} \rangle \cap \overline{TT}(\tilde{E}) \neq \emptyset$, soit $\Upsilon \langle \mathfrak{a} \rangle \cap T(\tilde{E}) \neq \emptyset$, donc \mathfrak{a} possède un point adhérent.

b) La condition est nécessaire en vertu de la proposition 11. Réciproquement, si E est faiblement régulier et faiblement séparé, soit $\mathfrak{a} \in \overline{TT}(\tilde{x})$, alors $\mathfrak{a} \in T(\tilde{E})$, donc il existe $y \in E$ tel que $\mathfrak{a} \in T(\tilde{y})$, donc $\tilde{y} \in \overline{TT}(\mathfrak{a}) \subset \overline{TT}(\tilde{x})$, donc $T(\tilde{x}) \cap T(\tilde{y}) \neq \emptyset$, donc (proposition 8) $T(\tilde{x}) = T(\tilde{y})$, donc $\mathfrak{a} \in T(\tilde{x})$; soit $\overline{TT}(\tilde{x}) = T(\tilde{x})$; donc E est bien quasi régulier.

c) Découle de b).

d) Découle du rapprochement de a) avec les propositions 13 et 14.

e) Dire que tout ultrafiltre sur A converge dans E revient à dire que $\Upsilon(A) \subset T(\tilde{E})$ donc cela entraîne que $\Upsilon(\overline{A}) = \overline{TT}(\Upsilon(A)) \subset \overline{TT}(\tilde{E})$; pour montrer alors que \overline{A} est quasi absolument fermé il suffit de se placer dans le cas où $\overline{A} = E$ (car \overline{A} est fermé !) et dans ce cas on a bien $\Upsilon(E) = \overline{TT}(\tilde{E})$ et le résultat suit de la proposition 13. Dans le cas où E est faiblement régulier on a donc $\Upsilon(\overline{A}) \subset T(\tilde{E})$, donc tout ultrafiltre sur \overline{A} converge dans E donc dans \overline{A} et \overline{A} est bien quasi compact. cqfd

Remarques :

- 1/ Les résultats b), c), d) et e) peuvent évidemment être démontrés par voie directe également.
- 2/ L'énoncé d) généralise (et permet de retrouver) deux résultats classiques : 1/ tout compact est régulier et 2/ tout absolument fermé régulier est compact (voir Bourbaki [3], I, 10, exerc. 10 d), p. 111).
- 3/ L'énoncé e) généralise également des résultats connus (voir Bourbaki [3], I, 10, exerc. 1 a), p. 109 et [4], I, 9, exerc. 23 a), p. 168).

4/ Si E est un ensemble infini muni de la topologie dont les ouverts sont l'ensemble vide et les complémentaires des parties finies de E, alors E est (quasi compact) faiblement régulier et accessible mais il n'est pas quasi régulier.

5/ *Tout sous-espace fermé d'un espace faiblement régulier est également faiblement régulier* (c'est quasi évident d'après la définition) ; cela permet de déduire la seconde partie de l'énoncé e) à partir de la première. Cependant, si E est un espace séparé non régulier (il en existe !) alors l'espace F, obtenu en adjoignant un point u à E ayant $F = E \cup \{u\}$ pour seul voisinage, est faiblement régulier tandis que son sous-espace (ouvert) E ne l'est pas.

XIX – COMPACTITE LOCALE.— On sait que pour les espaces non nécessairement séparés il existe plusieurs notions de compacité locale ; on en étudie une dans la proposition qui suit.

PROPOSITION 26.—

a) *Pour que $T(\tilde{E})$ soit ouvert dans $\Upsilon(E)$ il faut et il suffit que tout point de E possède un voisinage V tel que tout ultrafiltre sur V converge dans E.*

b) *Pour que tout point de l'espace E possède un voisinage quasi compact fermé, il faut et il suffit que $T(\tilde{E})$ soit ouvert dans $\Upsilon(E)$ et que E soit faiblement régulier.*

c) *En particulier, pour que l'espace E soit localement compact, il faut et il suffit que $T(\tilde{E})$ soit ouvert dans $\Upsilon(E)$ et que E soit régulier.*

En effet :

a) pour tout $x \in E$, $T(\tilde{x})$ est un fermé de $\Upsilon(E)$ qui possède donc un système fondamental de voisinages de la forme $\Upsilon(X)$ (voir 0.2, rappels, f) et g)). Donc, dire que $T(\tilde{E})$ est ouvert équivaut à dire que pour tout $x \in E$ il existe V tel que $T(\tilde{x}) \subset \Upsilon(V) \subset T(\tilde{E})$; d'où le résultat.

b) La condition est suffisante en vertu du a) et de la proposition 25, e). La condition est nécessaire, car alors $T(\tilde{E})$ est bien ouvert (en vertu du a)) et de plus si $\alpha \in \overline{T(\tilde{E})}$ alors $T(\alpha) \cap T(\tilde{E}) \neq \emptyset$ or $T(\tilde{E})$ est une réunion des $\Upsilon(V_x)$ où V_x est un voisinage quasi compact fermé de x ; donc il existe x tel que $T(\alpha) \cap \Upsilon(V_x) \neq \emptyset$, donc $\alpha \in \overline{T(\Upsilon(V_x))} = T(V_x)$ et, comme V_x est quasi compact, α converge donc $\alpha \in T(\tilde{E})$; de sorte que l'on a bien $\overline{T(\tilde{E})} = T(\tilde{E})$ et E est faiblement régulier.

c) Découle immédiatement de b) et de la proposition 25, c).

cqfd

XX – CONNEXITE.— On a $\omega_{T^{-1}} = \omega_{T^{-1}} = \omega_{T \cup T^{-1}} = \omega_T \cap \varphi_T$ ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées de E (voir 1.3, propriétés, 5/). Ainsi $m(T\overline{T}) = m(\overline{TT}) = m(T \cup T^{-1})$.

PROPOSITION 27.— *Pour que l'espace E soit connexe il faut et il suffit que l'on ait $m(\overline{TT})^{-1} = \Upsilon(E) \times \Upsilon(E)$.*

En effet : Dire que E est connexe revient à dire que $\omega_T \cap \varphi_T = \{O, E\}$ et la nasse de cette mérotopologie n'est autre que $\Upsilon(E) \times \Upsilon(E)$, d'où le résultat.

cqfd

XXI – On dira que l'espace E est *quasi éparpillé* lorsque tout point de E possède un système fondamental de voisinages à la fois ouverts et fermés. Un espace *éparpillé* est un espace quasi éparpillé séparé (voir Bourbaki [5], IX, 6, 4, définition 5, p. 128).

PROPOSITION 28.— *Pour que l'espace E soit quasi éparpillé il faut et il suffit que pour tout point x de E on ait $(m(\overline{TT}))^{-1}(\tilde{x}) = T(\tilde{x})$.*

En effet : Cela découle de la proposition 1 où $G = T$ et $H = m(\overline{TT})^{-1}$ en remarquant que $T \subset m(\overline{TT})^{-1}$ (voir 1.5).

cqfd

XXII – LEMME 4.– Si l'espace E est accessible, alors $\psi_{T^{-1}} = \varphi_T$.

En effet : On a $X \in \psi_{T^{-1}} \iff \delta \bar{T}^{-1}(T(X)) = \tilde{X} \iff \delta T(T(\bar{X})) = \tilde{X}$ (voir 1.3, définition 3, c)).

De plus, si E est accessible, alors $\tilde{x} \in T(T(\bar{X})) \iff \bar{T}^{-1}(\tilde{x}) \cap T(\bar{X}) \neq \emptyset \iff \tilde{x} \in T(\bar{X}) \iff \tilde{x} \in \tilde{\bar{X}}$;
ainsi $X \in \psi_{T^{-1}} \iff \tilde{X} = \tilde{\bar{X}} \iff X = \bar{X} \iff X \in \varphi_T$. cqfd

CONTRE-EXEMPLE.– Soit E un espace connexe normal, non vide et non réduit à un point (la droite réelle, par exemple) et posons $G = T\bar{T}$. Alors G est une nasse symétrique et idempotente (car

$$(T\bar{T})(T\bar{T}) = T(\bar{T}T)\bar{T} \subset T(T\bar{T})T = T\bar{T},$$

voir XI, proposition 15). De plus $m(G) = T(E) \times T(E)$ (voir proposition 27) mais $G \neq T(E) \times T(E)$ (car pour $x \in E$ $G(\tilde{x}) = T(\tilde{x})$ et il existe au moins un point pour lequel $T(\tilde{x}) \neq T(E)$, E étant séparé et ayant au moins deux points). Ainsi G est une nasse idempotente, une nasse de proximité qui n'est pas une nasse de mérotopologie. D'autre part,

$$\varphi_{mp(G)} = \varphi_{p(G)} = \psi_G = \varphi_T$$

(voir 1.7, proposition 5) alors que

$$\varphi_{pm(G)} = \psi_{m(G)} = \{\emptyset, E\}$$

donc $mp(G) \neq pm(G)$.

Terminons ce paragraphe par l'énoncé suivant, facile à établir.

PROPOSITION 29.– Pour que, dans l'espace E, il existe une partie finie partout dense il faut et il suffit que l'on ait $\bar{T}^{-1}(\tilde{E}) = T(E)$.

(Utiliser, par exemple, le lemme 17 de 2.4).

Voici enfin un énoncé récapitulatif.

THEOREME 1.– T étant la nasse d'une topologie sur un ensemble E :

dire que cette topologie est équivalent à dire que pour tous points x et y de E on a

- | | |
|---|--|
| I. de Kolmogoroff | $\tilde{y} \in T(\tilde{x})$ et $\tilde{x} \in T(\tilde{y}) \implies x = y$ |
| II. faiblement accessible | $\bar{T}^{-1}(\tilde{x}) \cap \bar{T}^{-1}(\tilde{y}) \neq \emptyset \implies \bar{T}^{-1}(\tilde{x}) = \bar{T}^{-1}(\tilde{y})$ |
| III. accessible | $\bar{T}^{-1}(\tilde{x}) \cap \bar{T}^{-1}(\tilde{y}) \neq \emptyset \implies x = y$ |
| IV. faiblement séparée | $T(\tilde{x}) \cap T(\tilde{y}) \neq \emptyset \implies T(\tilde{x}) = T(\tilde{y})$ |
| V. séparée | $T(\tilde{x}) \cap T(\tilde{y}) \neq \emptyset \implies x = y$ |
| VI. complètement séparée | $\bar{T}^{-1}T(\tilde{x}) \cap \bar{T}^{-1}T(\tilde{y}) \neq \emptyset \implies x = y$ |
| VII. quasi régulière | $\bar{T}^{-1}T(\tilde{x}) = T(\tilde{x})$ |
| VIII. semi-régulière | $C \bar{T}^{-1}(C \bar{T}^{-1}T(\tilde{x})) = T(\tilde{x})$ |
| IX. quasi absolument fermée | $\bar{T}^{-1}T(\tilde{E}) = T(E)$ |
| X. quasi compacte | $T(\tilde{E}) = T(E)$ |
| XI. quasi normale | $\bar{T}^{-1}T \subset T\bar{T}^{-1}$ |
| XII. complètement quasi normale | $\bar{T}^{-1}T = T \cup \bar{T}^{-1}$ |
| XIII. extrêmement discontinue | $T\bar{T}^{-1} \subset \bar{T}^{-1}T$ |
| XIV. complètement extrêmement discontinue | $T\bar{T}^{-1} = T \cup \bar{T}^{-1}$ |

XV. quasi semi-compacte	$\text{Adh}(T(\tilde{E}) \cap C\tilde{E}) = C\tilde{E}$
XVI. irréductible	$\bar{T}T = T(E) \times T(E)$
quasi compacte et quasi normale	$\bar{T}T \subset T \delta \bar{T}^{-1}$
XVIII. faiblement régulière	$\bar{T}T(\tilde{E}) = T(\tilde{E})$
XIX. localement compacte	$T(\tilde{E})$ ouvert et E régulier
XX. connexe	$m(T\bar{T}) = T(E) \times T(E)$
XXI. quasi éparpillée	$(m(T\bar{T}))^{-1}(\tilde{x}) = T(\tilde{x})$.

REMARQUE.— On obtient aussi, aisément, les équivalences suivantes :

E faiblement accessible	$\iff \delta T\bar{T}^{-1}\delta = \delta T\delta \iff \delta \bar{T}^{-1}\delta = \delta T\delta ;$
E faiblement séparé	$\iff \delta \bar{T}T\delta = \delta T\delta ;$
E accessible	$\iff \delta T\bar{T}^{-1}\delta = \delta ;$
E séparé	$\iff \delta \bar{T}T\delta = \delta ;$
E complètement séparé	$\iff \delta \bar{T}T\bar{T}^{-1}\delta = \delta .$

On pourrait ainsi, plus généralement, étudier les espaces pour lesquels on a une relation du type

$$\delta \dots \bar{T}T\bar{T}^{-1} \dots \delta = \delta \dots T\bar{T} \dots \delta .$$

3. SUR LA PARACOMPACTE

RAPPELS.— Soit E un espace topologique. On dit qu'un recouvrement \mathcal{R} de E est *uni* (en anglais "even") lorsqu'il existe un voisinage V de la diagonale de $E \times E$ tel que le recouvrement $\{V(x) \mid x \in E\}$ soit plus fin que \mathcal{R} (voir Bourbaki [5], IX, 4, exerc. 16, p. 100 et Kelley [17], p. 155). On dit qu'une famille $(A_\iota)_{\iota \in I}$ de parties de E est *discrète* lorsque pour tout $x \in E$ il existe un voisinage de x ne rencontrant qu'un A_ι au plus (voir Bourbaki [5], IX, 4, exerc. 18, p. 101).

LEMME 5.— Soit $(A_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert ponctuellement fini d'un ensemble fermé F dans un espace quasi normal E. Il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de F tel que $\bar{U}_\iota \subset A_\iota$ pour tout $\iota \in I$.

C'est un énoncé légèrement plus général que celui de Bourbaki [5], IX, 4, 3, théorème 3, p. 87, mais il a la même démonstration (puisque'elle n'utilise pas la séparation de E et seulement le fait que le recouvrement (A_ι) est ponctuellement fini, voir *ibid.*, remarque, p. 88).

DEFINITIONS ET NOTATIONS.— Soit \mathcal{X} une partie de $\mathcal{R}(E)$. On désignera par \mathcal{X}_s l'ensemble des réunions finies d'éléments de \mathcal{X} ; on a $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_s$ et \mathcal{X}_s est filtrante (voir définition 1). On posera $\mathcal{X}^* = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} X \times X$, ainsi, pour toute partie A de E, $\mathcal{X}^*(A)$ désignera la réunion des éléments de \mathcal{X} qui rencontrent A ; en particulier, $\mathcal{X}^*(x)$ désigne la réunion de tous les éléments de \mathcal{X} auxquels x appartient (c'est l'étoile de \mathcal{X} au point x). Soit \mathcal{R} un recouvrement de E, on dira que \mathcal{V} est un *étoilement* de \mathcal{R} lorsque $\{\mathcal{V}^*(x) \mid x \in E\}$ est un recouvrement de E plus fin que \mathcal{R} (en anglais on dit "star-refinement" ou " Δ -refinement" ; voir A.H. Stone [22], par exemple).

Le résultat suivant est immédiat : pour qu'un recouvrement \mathcal{R} d'un espace topologique soit uni il faut et il suffit qu'il existe un étoilement ouvert de \mathcal{R} .

QUELQUES AXIOMES.— Considérons les axiomes suivants relatifs à un espace topologique E.

(A) Tout recouvrement ouvert de E est uni.

(A') Pour tout recouvrement ouvert de E il existe un recouvrement fermé plus fin et localement fini.

- (B) Pour tout recouvrement ouvert de E il existe un recouvrement *ouvert* plus fin et localement fini.
- (B') Pour tout recouvrement ouvert *filtrant* de E il existe un recouvrement *ouvert* plus fin et localement fini.
- (B'') Pour tout recouvrement ouvert *filtrant* de E il existe un recouvrement *fermé* plus fin et localement fini.
- (C) Pour tout recouvrement ouvert de E il existe un recouvrement plus fin et localement fini.
- (C') Pour tout recouvrement ouvert *filtrant* de E il existe un recouvrement plus fin et localement fini.
- (D) Pour toute famille localement finie $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E il existe une famille localement finie $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E telle que $A_i \subset U_i$ pour tout $i \in I$.
- (E) Pour toute famille discrète $(A_i)_{i \in I}$ de fermés de E il existe une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts *deux à deux disjoints* telle que $A_i \subset U_i$ pour tout $i \in I$.

DEFINITION 3.— On dira que l'espace E est *pleinement quasi normal* lorsqu'il satisfait à l'axiome (A) ; (en anglais on dit "*fully normal*", voir Stone [22] qui cite le livre de Tukey, épuisé et introuvable). On dira que E est *quasi paracompact* lorsqu'il satisfait à l'axiome (B) (c'est l'axiome (PC) de Bourbaki [4], I, 9, 10, définition 6, p. 109). Un espace *paracompact* est un espace quasi paracompact séparé (voir *ibid*). On dira que E est *collectivement quasi normal* lorsqu'il satisfait à l'axiome (E) ; (en anglais on dit "*collectionwise normal*", voir Bing [1]). Un espace *collectivement normal* (voir Bourbaki [5], IX, 4, exerc. 18, p. 101) est un espace collectivement quasi normal séparé.

PROPOSITION 30.— *Tout espace pleinement quasi normal est collectivement quasi normal.*

En effet : Soient E un espace pleinement quasi normal et $(A_i)_{i \in I}$ une famille discrète de parties de E ; il existe donc un recouvrement ouvert \mathcal{R} de E tel que pour tout $X \in \mathcal{R}$, X ne rencontre qu'un A_i au plus ; comme \mathcal{R} est uni par hypothèse, il existe un étoilement ouvert \mathcal{V} de \mathcal{R} ; pour tout $i \in I$ posons $U_i = \mathcal{V}^*(A_i)$ alors U_i est un ouvert contenant A_i et de plus les éléments de la famille $(U_i)_{i \in I}$ sont deux à deux disjoints (car si $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ alors il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $V \cap A_\lambda \neq \emptyset$ et $V \cap A_\mu \neq \emptyset$ donc il existe un élément X de \mathcal{R} qui rencontre A_λ et A_μ donc $\lambda = \mu$). Ainsi E satisfait bien à l'axiome (E).
cqfd

Par ailleurs il est clair que *tout espace collectivement quasi normal est quasi normal*. Par contre, on trouvera dans Bing [1] un exemple d'espace normal non collectivement normal.

LEMME 6.— *L'axiome (C) est équivalent à l'axiome (C'). L'axiome (B) est équivalent à l'axiome (B').*

En effet : Soit \mathcal{R} un recouvrement ouvert de l'espace E. Considérons le recouvrement ouvert filtrant \mathcal{R}_s et soit \mathcal{V} un recouvrement localement fini plus fin que \mathcal{R}_s . Alors pour tout $V \in \mathcal{V}$ il existe une partie finie \mathcal{R}_V de \mathcal{R} telle que $V \subset \bigcup_{X \in \mathcal{R}_V} X$; posons $\mathcal{V}_V = \{V \cap X \mid X \in \mathcal{R}_V\}$ et $\mathcal{V} = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{V}_V$. \mathcal{V} est un recouvrement localement fini plus fin que \mathcal{R} . Si de plus le recouvrement \mathcal{V} est ouvert alors \mathcal{V} l'est aussi.
cqfd

Ainsi, en particulier, $(A') \implies (B'') \implies (C') \iff (C)$; de plus $(B) \implies (C)$.

LEMME 7.— *Tout espace quasi paracompact est faiblement régulier.*

En effet : Soient E un espace quasi paracompact et \mathcal{R} un recouvrement ouvert filtrant. Nous allons établir que E satisfait à l'énoncé b) du lemme 3. Il existe un recouvrement ouvert \mathcal{U} plus fin que \mathcal{R} et localement fini, donc, aussi, pour tout $x \in E$ il existe un voisinage ouvert V_x de x qui ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de \mathcal{U} . Posons $\mathcal{V} = \{V_x \mid x \in E\}$, c'est un recouvrement ouvert de E ; nous allons montrer que \mathcal{V} est plus fin que \mathcal{R} . Pour tout $x \in E$ soit $\mathcal{U}_x = \{U \mid U \in \mathcal{U} \text{ et } V_x \cap U \neq \emptyset\}$ et $U_x = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_x} U$; alors U_x est fini et $V_x \subset U_x$; mais \mathcal{U} étant plus fin que \mathcal{R} qui est filtrant, il existe $X_x \in \mathcal{R}$ tel que $U_x \subset X_x$. De plus $V_x \subset X_x$ car, si $y \in V_x$ il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $y \in U$ et $V_x \cap U \neq \emptyset$ donc $U \in \mathcal{U}_x$, donc $y \in U_x \subset X_x$.
cqfd

LEMME 8.— *Tout espace E faiblement régulier qui satisfait à l'axiome (C) satisfait aussi à l'axiome (B'').*

En effet : Soit \mathcal{R} un recouvrement ouvert filtrant de E ; il existe donc un recouvrement ouvert \mathcal{V} tel que \mathcal{V} soit plus fin que \mathcal{R} (car E est faiblement régulier) ; il existe aussi un recouvrement \mathcal{B} plus fin que \mathcal{V} et localement fini (axiome (C)). $\overline{\mathcal{B}}$ est un recouvrement fermé plus fin que \mathcal{V} donc plus fin que \mathcal{R} et localement fini car si un ouvert ne rencontre pas un élément $B \in \mathcal{B}$ il ne rencontre pas \overline{B} non plus. cqfd

Le lemme précédent est une légère généralisation du résultat Bourbaki [5], IX, 4, 5, lemme 6, p. 94, et sa démonstration est une adaptation de celle de Bourbaki.

LEMME 9.— *Tout espace qui satisfait à l'axiome (B'') est quasi paracompact.*

Ce lemme est une généralisation du lemme 7 de Bourbaki (*ibid.*), sa démonstration suit fidèlement celle de Bourbaki (*ibid.* p. 95), à deux détails près : à la ligne 7 on remplace "plus fin que \mathcal{V} " par "plus fin que \mathcal{V}_s " et à la ligne 17 on remplace "de la forme W_{y_i} " par "appartenant à \mathcal{V}_s ".

LEMME 10.— *Tout espace quasi paracompact satisfait à l'axiome (D).*

En effet : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille localement finie de parties d'un espace E quasi paracompact, il existe donc un recouvrement ouvert \mathcal{R} de E tel que pour tout $X \in \mathcal{R}$, l'ensemble $I_X = \{i \mid A_i \cap X \neq \emptyset\}$ soit fini et il existe un recouvrement ouvert localement fini \mathcal{V} plus fin que \mathcal{R} . Pour tout $i \in I$, posons $U_i = \mathcal{V}^*(A_i)$; c'est un ouvert contenant A_i . Montrons que la famille $(U_i)_{i \in I}$ est localement finie : pour tout $x \in E$ il existe un voisinage ouvert $W(x)$ de x qui ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de \mathcal{V} , soit V_1, \dots, V_n ; ainsi $W(x) \cap U_i \neq \emptyset$ implique l'existence d'un j tel que $1 \leq j \leq n$ et $A_i \cap V_j \neq \emptyset$; or \mathcal{V} étant plus fin que \mathcal{R} il existe des éléments X_1, \dots, X_n de \mathcal{R} tels que $V_j \subset X_j$ pour $1 \leq j \leq n$: ainsi $W(x) \cap U_i \neq \emptyset$ implique $i \in \bigcup_{1 \leq j \leq n} I_{X_j}$ qui est fini. cqfd

LEMME 11.— *Tout espace qui satisfait aux axiomes (C) et (D) est quasi paracompact.*

En effet : Supposons que l'espace E satisfait aux axiomes (C) et (D) et soit \mathcal{R} un recouvrement ouvert de E ; il existe donc un recouvrement \mathcal{A} localement fini plus fin que \mathcal{R} (axiome (C)) et il existe une famille localement finie $(U_A)_{A \in \mathcal{A}}$ d'ouverts tels que $A \subset U_A$ (axiome (D)). Comme \mathcal{A} est plus fin que \mathcal{R} , pour tout $A \in \mathcal{A}$ il existe $X_A \in \mathcal{R}$ tel que $A \subset X_A$. Posons $V_A = U_A \cap X_A$; alors $\mathcal{V} = \{V_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ est un recouvrement ouvert localement fini plus fin que \mathcal{R} . cqfd

En groupant ces lemmes on obtient le résultat suivant.

THEOREME 2.— *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- a) *l'espace E est quasi paracompact ;*
- b) *l'espace E est faiblement régulier et satisfait à l'axiome (C) ;*
- c) *l'espace E satisfait à l'axiome (B'') ;*
- d) *l'espace E satisfait aux axiomes (C) et (D).*

LEMME 12.— *Tout espace pleinement quasi normal est faiblement régulier.*

En effet : Soit E un espace pleinement quasi normal, on va montrer qu'il satisfait à l'énoncé b) du lemme 3. Soit \mathcal{R} un recouvrement ouvert de E (filtrant ou non) et soit \mathcal{U} un étoilement ouvert de \mathcal{R} et soit \mathcal{V} un étoilement ouvert de \mathcal{U} ; posons $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}^*(x) \mid x \in E\}$, c'est un recouvrement ouvert de E, il suffira donc de montrer que \mathcal{V} est plus fin que \mathcal{R} . Or, pour tout $x \in E$, il existe $U_x \in \mathcal{U}$ tel que $\mathcal{V}^*(x) \subset U_x$ et, de même, il existe $X_x \in \mathcal{R}$ tel que $U_x \subset X_x$; ainsi $\mathcal{V}^*(x) \subset X_x$ (car, si $y \in \mathcal{V}^*(x)$ alors le voisinage $\mathcal{V}^*(y)$ rencontre $\mathcal{V}^*(x)$; soit donc $z \in \mathcal{V}^*(x) \cap \mathcal{V}^*(y)$; on a donc $x \in \mathcal{V}^*(z)$ et $y \in \mathcal{V}^*(z)$, mais $\mathcal{V}^*(z) \subset U_z$ donc $y \in U_z \subset X_x$). cqfd

LEMME 13.— *Tout espace pleinement quasi normal satisfait à l'axiome (C).*

En effet : Pour cela on peut utiliser des résultats de Kelley [17]. Ainsi l'axiome (C) n'est autre que l'énoncé (b) p. 156, l'axiome (A) est l'énoncé (d) *ibid.* ; le lemme 34, p. 160 établit que (f) implique (b); le lemme 33, p. 159 montre que (d) implique (e) ; et il est immédiat que (e) implique (f). Donc (A) implique bien (C). cqfd

Ainsi (théorème 2) tout pleinement quasi normal est quasi paracompact.

LEMME 14.— *Tout espace pleinement quasi normal satisfait à l'axiome (A').*

En effet : Soit E un espace pleinement quasi normal et soit \mathcal{R} un recouvrement ouvert de E. Comme E est quasi paracompact, il existe un recouvrement ouvert localement fini plus fin que \mathcal{R} ; comme E est quasi normal (proposition 30) il existe (lemme 5) une famille $(V_U)_{U \in \mathcal{U}}$ localement finie (d'ouverts) telle que $\overline{V_U} \subset U$; ainsi $\overline{\mathcal{V}} = \{\overline{V_U} \mid U \in \mathcal{U}\}$ est un recouvrement fermé localement fini plus fin que \mathcal{R} . cqfd

LEMME 15.— *Tout espace qui satisfait à l'axiome (A') est pleinement quasi normal.*

C'est, en substance, le théorème 5.27 de Kelley [17], p. 155.

LEMME 16.— *Tout espace quasi paracompact et quasi normal est pleinement quasi normal.*

[Cet énoncé est une généralisation du théorème 2 de A.H. Stone [22], cependant sa démonstration est essentiellement la même, en voici un résumé].

En effet : Soit \mathcal{U} un recouvrement ouvert localement fini de E et pour tout $x \in E$, soit $V(x)$ un voisinage ouvert de x qui ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de \mathcal{U} . On pose $A(x) = \{U \mid U \in \mathcal{U} \text{ et } V(x) \cap U \neq \emptyset\}$. Comme on suppose E quasi normal il existe (lemme 5) une famille $(V_U)_{U \in \mathcal{U}}$ d'ouverts qui recouvrent E tels que $\overline{V_U} \subset U$. On pose $B(x) = \{U \mid x \in U \in \mathcal{U}\}$ et $C(x) = \{U \mid U \in A(x) \text{ et } x \in \overline{V_U}\}$. On a $A(x) = B(x) \cup C(x)$. On pose $W(x) = V(x) \cap \left(\bigcap_{U \in B(x)} U \right) \cap \left(\bigcap_{U \in C(x)} \overline{V_U} \right)$, c'est un voisinage ouvert de x. Enfin $\mathcal{W} = \{W(x) \mid x \in E\}$ est un étoilement ouvert de \mathcal{U} , car si $y \in V_U$ alors $\mathcal{W}^*(y) \subset U$. cqfd

THEOREME 3.— *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- a) *l'espace E est pleinement quasi normal ;*
- b) *l'espace E satisfait à l'axiome (A') ;*
- c) *l'espace E est quasi paracompact et quasi normal.*

En effet : Cela découle des lemmes 14, 15, 16 et de la proposition 30. cqfd

REMARQUES.—

1/ Dans le théorème 2, l'équivalence entre a) et b) est déjà connue dans le cas des espaces séparés (Bourbaki [5], IX, 4, 5, p. 94-95) et dans le cas des espaces quasi réguliers (Kelley [17], théorème 5.28, p. 156).

2/ Dans le théorème 3, "a) \iff c)" est une généralisation du résultat connu de A.H. Stone [22] sur l'équivalence des espaces paracompacts et des espaces pleinement normaux (c'est-à-dire des espaces pleinement quasi normaux accessibles donc séparés).

3/ Tout espace quasi compact étant évidemment quasi paracompact, il existe des espaces quasi paracompacts qui ne sont pas quasi normaux (voir 2.2, XI, remarque) et qui ne sont donc pas pleinement quasi normaux.

PROPOSITION 31.— *Tout espace quasi normal qui satisfait à l'axiome (D) est collectivement quasi normal.*

En effet : On suivra le modèle de la démonstration de Bourbaki [5], IX, 4, 3, théorème 3, p. 87-88. Soit E un espace quasi normal satisfaisant à l'axiome (D). Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille discrète de fermés de E et $(U_i)_{i \in I}$ une famille localement finie d'ouverts tels que $A_i \subset U_i$ pour tout $i \in I$. Munissons I d'une structure d'ensemble bien ordonné ; on va définir par récurrence transfinie une famille $(V_i)_{i \in I}$ d'ouverts telle que 1/ $A_i \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ pour tout $i \in I$, 2/ $\overline{V_i} \cap \overline{V_\lambda} = \emptyset$ pour $i \neq \lambda$ et 3/ $\overline{V_i} \cap A_\mu = \emptyset$ pour $i < \mu$. Supposons les V_i définis pour $i < \gamma$ de sorte que les trois conditions précédentes soient satisfaites pour tous $i, \lambda < \gamma$. On pose $F_\gamma = \bigcup_{i < \gamma} \overline{V_i}$; F_γ est réunion d'une famille localement finie de fermés, donc (voir Bourbaki, *ibid.*, lemme 2, p. 87) F_γ est fermé ; d'autre part $F_\gamma \cap A_\mu = \emptyset$ pour tout $\mu \geq \gamma$ (à cause de 3/); ainsi $G_\gamma = \overset{\circ}{C} F_\gamma$ est un ouvert contenant A_γ . De même, la famille $(A_i)_{i \in I}$ étant discrète donc localement finie, $H_\gamma = \overset{\circ}{C} \bigcup_{i \neq \gamma} A_i$ est un ouvert contenant A_γ . Comme E est quasi normal et A_γ fermé, il existe un ouvert V_γ tel que $A_\gamma \subset V_\gamma \subset \overline{V_\gamma} \subset G_\gamma \cap H_\gamma \cap U_\gamma$. Ainsi les conditions 1/, 2/ et 3/ sont satisfaites pour tous $i, \lambda \leq \gamma$. La famille $(V_i)_{i \in I}$ ainsi obtenue est bien formée d'ouverts deux à deux disjoints. *cqfd*

[Nous ne savons pas, par contre, s'il existe des espaces collectivement quasi-normaux qui ne satisfont pas à l'axiome (D)].

4. DISLOCATION

On va introduire et étudier la notion de partie disloquée d'un espace d'ultrafiltres qui servira à caractériser les espaces quasi paracompacts et les espaces de Lindelöf. On utilisera sans références explicites les rappels de 0.2.

DEFINITIONS ET NOTATIONS.— Soient E un ensemble et \mathfrak{X} une partie de $\mathfrak{A}(E)$. A \mathfrak{X} on fera correspondre la partie de $\Upsilon(E)$, appelée *étendue* de \mathfrak{X} , définie par

$$\text{ét}(\mathfrak{X}) = \bigcup_{X \in \mathfrak{X}} \Upsilon(X) ;$$

c'est l'ensemble de tous les ultrafiltres sur E auxquels appartient l'un quelconque des éléments de \mathfrak{X} .

On dira que \mathfrak{X} est une *dislocation* de E lorsque les éléments de \mathfrak{X} sont deux à deux disjoints ; (en particulier toute partition de E est une dislocation de E).

On dira qu'une partie \mathfrak{A} de $\Upsilon(E)$ est *disloquée* lorsqu'elle est égale à l'étendue d'une dislocation de E. On appellera *degré* de dislocation d'une partie disloquée \mathfrak{A} de $\Upsilon(E)$ le plus petit cardinal α pour lequel il existe une dislocation \mathfrak{X} de E telle que

$$\text{Card}(\mathfrak{X}) = \alpha \quad \text{et} \quad \text{ét}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{A}.$$

LEMME 17.— *Etant données des parties $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ de $\Upsilon(E)$, pour que l'on ait $\text{ét}(\mathfrak{X}) \subset \text{ét}(\mathfrak{Y})$ il faut et il suffit que \mathfrak{X} soit plus fin que \mathfrak{Y} . (En particulier $\text{ét}(\mathfrak{X}) = \Upsilon(E)$ équivaut à dire que \mathfrak{X} est un recouvrement de E qui possède un sous-recouvrement fini).*

En effet : La condition est visiblement suffisante. Réciproquement, si $\text{ét}(\mathfrak{X}) \subset \text{ét}(\mathfrak{Y})$, alors pour tout $X \in \mathfrak{X}$, $\Upsilon(X)$ est un compact recouvert par les ouverts $\Upsilon(Y)$ où Y parcourt \mathfrak{Y} ; d'où le résultat. *cqfd*

Toute partie disloquée est évidemment ouverte. Les parties $\Upsilon(X)$ sont les seules parties disloquées fermées. Ce sont aussi les seules parties disloquées de degré fini ; \emptyset est de degré 0 et $\Upsilon(X)$ pour $X \neq \emptyset$ est de degré 1.

LEMME 18.— *Soit \mathfrak{A} une partie disloquée de $\Upsilon(E)$ de degré infini α . Si $\mathfrak{A} = \text{ét}(\mathfrak{X})$ alors $\text{Card}(\mathfrak{X}) \geq \alpha$; si de plus \mathfrak{X} est une dislocation alors $\text{Card}(\mathfrak{X}) = \alpha$.*

En effet : Soit \mathcal{Y} une dislocation de E telle que $\text{Card}(\mathcal{Y}) = \alpha$ et $\text{ét}(\mathcal{Y}) = \mathcal{A}$. Supposons que $\text{ét}(\mathcal{X}) = \text{ét}(\mathcal{Y})$ et pour tout $X \in \mathcal{X}$ posons $\mathcal{Y}_X = \{Y \mid Y \in \mathcal{Y} \text{ et } X \cap Y \neq \emptyset\}$; alors, d'après le lemme 17 et le fait que \mathcal{Y} est une dislocation, \mathcal{Y}_X est fini et pour tout $Y \in \mathcal{Y}$ il existe au moins un $X \in \mathcal{X}$ tel que $Y \in \mathcal{Y}_X$; on désignera cet X là par $f(Y)$. On obtient ainsi une application $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ telle que $f(X)$ soit fini pour tout $X \in \mathcal{X}$. Comme α est infini, on a $\alpha = \text{Card}(\mathcal{Y}) = \text{Card}(f(\mathcal{Y})) \leq \text{Card}(\mathcal{X})$. Si \mathcal{X} est une dislocation, on a de même $\text{Card}(\mathcal{X}) \leq \text{Card}(\mathcal{Y})$ donc $\text{Card}(\mathcal{X}) = \alpha$. *cqfd*

Ainsi, le degré de dislocation d'une partie \mathcal{A} disloquée de degré *infini* est égal au plus petit cardinal des parties \mathcal{X} de $\mathcal{R}(E)$ pour lesquelles $\text{ét}(\mathcal{X}) = \mathcal{A}$; c'est aussi le cardinal de toute dislocation \mathcal{X} pour laquelle $\text{ét}(\mathcal{X}) = \mathcal{A}$.

LEMME 19.—

- a) Toute intersection finie de parties disloquées est disloquée.
- b) Soient \mathcal{A} une partie disloquée de $\Upsilon(E)$ et A une partie de E . Alors $\mathcal{A} \cup \Upsilon(A)$ et $\mathcal{A} \cup \tilde{A}$ sont disloquées.
- c) Soit \mathcal{X} une partie dénombrable de $\mathcal{R}(E)$; alors $\text{ét}(\mathcal{X})$ est une partie disloquée de degré $\leq \aleph_0$.
- d) Toute réunion dénombrable de parties disloquées de degré $\leq \aleph_0$ est disloquée de degré $\leq \aleph_0$.

En effet :

a) Si \mathcal{X} et \mathcal{Y} sont des dislocations alors $\mathcal{Z} = \{X \cap Y \mid X \in \mathcal{X} \text{ et } Y \in \mathcal{Y}\}$ est une dislocation et $\text{ét}(\mathcal{X}) \cap \text{ét}(\mathcal{Y}) = \text{ét}(\mathcal{Z})$.

b) Soient \mathcal{X} une dislocation et $\mathcal{A} = \text{ét}(\mathcal{X})$. Alors

$$\mathcal{Y} = \{X \cap CA \mid X \in \mathcal{X}\} \cup \{A\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} = \{\{a\} \mid a \in A \text{ et } a \notin \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X\} \cup \mathcal{X}$$

sont des dislocations et $\text{ét}(\mathcal{Y}) = \mathcal{A} \cup \Upsilon(A)$, $\text{ét}(\mathcal{Z}) = \mathcal{A} \cup \tilde{A}$.

c) Soit $\mathcal{X} = \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; on pose $Y_n = X_n \cap \bigcup_{m < n} X_m$; alors $\mathcal{Y} = \{Y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une dislocation dénombrable et $\text{ét}(\mathcal{X}) = \text{ét}(\mathcal{Y})$.

d) Découle immédiatement de c). *cqfd*

CONTRE-EXEMPLE.— Soient F, G des ensembles *infinis* et $E = F \times G$. Alors $\mathcal{X} = \{\{x\} \times G \mid x \in F\}$ et $\mathcal{Y} = \{F \times \{y\} \mid y \in G\}$ sont des dislocations de E ; $\mathcal{A} = \text{ét}(\mathcal{X})$ et $\mathcal{B} = \text{ét}(\mathcal{Y})$ sont des parties disloquées de $\Upsilon(E)$ (de degrés respectifs $\text{Card}(F)$ et $\text{Card}(G)$) tandis que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ n'est pas disloqué si $\text{Card}(G) > \aleph_0$ (Nous en omettons la démonstration qui, sans être difficile, est longue).

LEMME 20.— Soient E un espace topologique de nasse T et \mathcal{X} une partie de $\mathcal{R}(E)$. Pour que l'on ait $T(\tilde{E}) \subset \text{ét}(\mathcal{X})$ il faut et il suffit que $\mathcal{X}_s = \{\overset{\circ}{X} \mid X \in \mathcal{X}_s\}$ soit un recouvrement (ouvert) de E .

En effet : Si $x \in \overset{\circ}{X}$ alors $T(\tilde{x}) \subset \Upsilon(X)$; ainsi la condition est suffisante. Réciproquement, si $T(\tilde{E}) \subset \text{ét}(\mathcal{X})$, pour tout $x \in E$, $T(\tilde{x})$ est un compact de $\Upsilon(E)$ recouvert par les ouverts $\Upsilon(X)$ où X parcourt \mathcal{X} ; donc il existe $X \in \mathcal{X}_s$ tel que $T(\tilde{x}) \subset \Upsilon(X)$ donc $x \in \overset{\circ}{X}$. *cqfd*

THEOREME 4.— Soit E un espace topologique de nasse T . Les énoncés suivants sont équivalents :

- a) E satisfait à l'axiome (C) ;
- b) $T(\tilde{E})$ possède un système fondamental de voisinages disloqués ;
- c) $T(\tilde{E}) \cap \overset{\circ}{E}$ possède un système fondamental de voisinages disloqués.

En effet :

a) \implies b). Soit \mathcal{A} un voisinage ouvert de $T(\tilde{E})$. Considérons $\mathcal{X} = \{X \mid T(X) \subset \mathcal{A}\}$; comme \mathcal{A} est ouvert, on a $\text{ét}(\mathcal{X}) = \mathcal{A} \supset T(\tilde{E})$, donc (d'après le lemme 20) \mathcal{X}_s est un recouvrement ouvert de E . Si E satisfait à l'axiome (C), il existe un recouvrement localement fini \mathcal{Y} plus fin que \mathcal{X}_s . Pour toute partie \mathcal{F} de \mathcal{Y} posons

$$U_{\mathcal{F}} = \left(\bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y \right) \cap \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}, Y \notin \mathcal{F}} Y.$$

Alors $\mathcal{U} = \{U_{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \text{ partie finie de } \mathcal{Y}\}$ est une dislocation de E ; \mathcal{U} est plus fin que \mathcal{Y} ; enfin \mathcal{U}_s est un recouvrement de E car \mathcal{Y} est localement fini (soit, en effet, V un voisinage ouvert de x qui ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de \mathcal{Y} et soit $\mathcal{G} = \{Y \mid Y \in \mathcal{Y} \text{ et } V \cap Y \neq \emptyset\}$ alors V est recouvert par les $U_{\mathcal{F}}$ où \mathcal{F} parcourt les parties de \mathcal{G}). Donc (d'après les lemmes 20 et 17) on a

$$T(\tilde{E}) \subset \text{ét}(\mathcal{U}) \subset \text{ét}(\mathcal{Y}) \subset \text{ét}(\mathcal{X}_s) \subset \text{ét}(\mathcal{X}) = \mathcal{A}$$

de sorte que \mathcal{A} contient bien un voisinage disloqué de $T(\tilde{E})$.

b) \implies a). Soit \mathcal{R} un recouvrement ouvert *filtrant* de E ; alors (lemme 20) $T(\tilde{E}) \subset \text{ét}(\mathcal{R})$. Si la condition b) est remplie, il existe une dislocation \mathcal{X} telle que $T(\tilde{E}) \subset \text{ét}(\mathcal{X}) \subset \text{ét}(\mathcal{R})$; donc (lemme 17) \mathcal{X} est plus fin que \mathcal{R}_s qui est plus fin que \mathcal{R} (qui est filtrant). De plus \mathcal{X} est localement fini (car pour tout $x \in E$ il existe $X \in \mathcal{X}_s$ tel que $x \in X$ (lemme 20) et \mathcal{X} est une dislocation). Ainsi l'espace E satisfait à l'axiome (C') équivalent à l'axiome (C) (lemme 6).

b) \implies c). Soit \mathcal{A} un voisinage ouvert de $T(\tilde{E}) \cap C \tilde{E}$; alors $\mathcal{A} \cup \tilde{E}$ est un voisinage de $T(\tilde{E})$; soit \mathcal{B} une partie disloquée telle que $T(\tilde{E}) \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \cup \tilde{E}$ et soit $\tilde{A} = \tilde{E} \cap \mathcal{A}$. Alors $\mathcal{A} \subset T(\tilde{A})$ et

$$T(\tilde{E}) \cap C \tilde{E} \subset \mathcal{B} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \cap T(\tilde{A}) \subset (\mathcal{A} \cup \tilde{E}) \cap T(\tilde{A}) = \mathcal{A} \cup \tilde{A} = \mathcal{A} ;$$

or (lemme 19 a)) $\mathcal{B} \cap T(\tilde{A})$ est disloquée, d'où le résultat.

c) \implies b). Soit \mathcal{A} un voisinage ouvert de $T(\tilde{E})$; alors $T(\tilde{E}) \cap C \tilde{E} \subset \mathcal{A}$; soit \mathcal{B} une partie disloquée telle que $T(\tilde{E}) \cap C \tilde{E} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Alors $T(\tilde{E}) \subset \mathcal{B} \cup \tilde{E} \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \cup \tilde{E}$ est disloquée (lemme 19 b)). *cqfd*

En rapprochant le théorème 4 des théorèmes 2 et 3, on obtient une nouvelle caractérisation des espaces quasi paracompacts et des espaces pleinement quasi normaux.

Voici une autre application de ce théorème.

PROPOSITION 32.— *Soient K un espace quasi compact et E un espace satisfaisant à l'axiome (C), alors l'espace produit $K \times E$ satisfait aussi à l'axiome (C).*

En effet : Soit \mathcal{C} l'ensemble des ultrafiltres convergents sur $K \times E$. D'après le théorème 4, il suffira de montrer que \mathcal{C} possède un système fondamental de voisinages disloqués dans $T(K \times E)$. Désignons par \mathcal{C}' l'ensemble des ultrafiltres convergents sur E , par $q : K \times E \longrightarrow E$ la projection canonique et par $g = \hat{q} : T(K \times E) \longrightarrow T(E)$ son extension aux ultrafiltres. Remarquons que pour tout $X \subset E$ on a $g^{-1}(T(X)) = T(K \times X)$, donc que l'image réciproque par g de toute partie disloquée de $T(E)$ est une partie disloquée de $T(K \times E)$. En outre, comme K est quasi compact, on a $g^{-1}(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$. Soit alors \mathcal{A} un voisinage ouvert de \mathcal{C} dans $T(K \times E)$; $\mathcal{B} = C \mathcal{A}$ est fermé donc $\mathcal{B}' = g(\mathcal{B})$ est fermé dans $T(E)$ et $\mathcal{A}' = C \mathcal{B}'$ est ouvert. Mais $\mathcal{C}' \subset \mathcal{A}'$ donc, d'après le théorème 4, il existe une partie disloquée \mathcal{D}' de $T(E)$ telle que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{D}' \subset \mathcal{A}'$. Ainsi $\mathcal{D} = g^{-1}(\mathcal{D}')$ est une partie disloquée de $T(K \times E)$ telle que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$. *cqfd*

Cela généralise un résultat classique : le produit d'un espace compact et d'un espace paracompact est paracompact (voir Bourbaki [4], I, 9, 10, proposition 17, p. 110-111).

ESPACES DE LINDELOF.— On dit qu'un espace topologique E est un *espace de Lindelöf* (Bourbaki [5], IX, 4, exerc. 23, p. 103) lorsque tout recouvrement ouvert de E contient un sous-recouvrement dénombrable.

THEOREME 5.— Soit E un espace topologique de nasse T . Pour que E soit un espace de Lindelöf il faut et il suffit que $T(\tilde{E})$ possède un système fondamental de voisinages disloqué de degrés $\leq \aleph_0$.

En effet : Si E est un espace de Lindelöf, soit \mathcal{A} un voisinage ouvert de $T(\tilde{E})$ et soit $\mathcal{X} = \{X \mid T(X) \subset \mathcal{A}\}$, alors $\text{ét}(\mathcal{X}) = \mathcal{A} \supset T(\tilde{E})$ donc (lemme 20) \mathcal{X}_s est un recouvrement ouvert de E ; soit \mathcal{U} un sous-recouvrement dénombrable ; alors (lemmes 20 et 17) $T(\tilde{E}) \subset \text{ét}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{A}$ et (lemme 19 c)) $\text{ét}(\mathcal{U})$ est disloquée de degré $\leq \aleph_0$. Ainsi la condition est nécessaire. Réciproquement, supposons la condition remplie et soit \mathcal{R} un recouvrement ouvert de E ; alors $\text{ét}(\mathcal{R})$ est un voisinage de $T(\tilde{E})$ donc il existe une dislocation dénombrable \mathcal{X} telle que $T(\tilde{E}) \subset \text{ét}(\mathcal{X}) \subset \text{ét}(\mathcal{R})$ donc (lemme 17) \mathcal{X} est plus fin que \mathcal{R}_s , donc \mathcal{R} contient un sous-recouvrement dénombrable. cqfd

COROLLAIRE.— Pour qu'un espace de Lindelöf soit quasi paracompact, il faut et il suffit qu'il soit faiblement régulier.

En effet : Cela découle des théorèmes 5, 4 et 2. cqfd

Ce dernier énoncé généralise un résultat connu dans le cas séparé (Bourbaki [5], IX, 4, exerc. 23 c), p. 103).

5. CARACTERISATIONS D'APPLICATIONS

Voici, pour commencer, un résultat simple sur les homomorphismes de graphes.

LEMME 21.— Soient E, F des ensembles, G une partie de $E \times E$, H une partie de $F \times F$ et $f : E \longrightarrow F$ une application. Les énoncés suivants sont équivalents :

- a) pour tout $(x, y) \in G$ on a $(f(x), f(y)) \in H$;
- b) pour tout $(x, y) \in \bar{G}^{-1}$ on a $(f(x), f(y)) \in \bar{H}^{-1}$;
- c) $fG \subset Hf$;
- d) $f\bar{G}^{-1} \subset \bar{H}^{-1}f$.

En effet : l'équivalence entre a) et b) est immédiate ; il suffit donc d'établir l'équivalence entre a) et c). Or si a) est satisfait et si $z \in fG(x)$, alors il existe $y \in G(x)$ tel que $z = f(y)$, donc (d'après a)) $(f(x), f(y)) \in H$, soit $z \in Hf(x)$, donc $fG \subset Hf$ et c) est satisfait. Réciproquement, si c) est satisfait et si $(x, y) \in G$, alors $f(y) \in fG(x)$, donc $f(y) \in Hf(x)$, soit $(f(x), f(y)) \in H$, donc a) est satisfait. cqfd

Le résultat suivant qui caractérise certains types d'applications entre espaces topologiques, comprend quatre parties.

THEOREME 6.— Soient E, F des espaces topologiques de nasses T, V respectivement, f une application de E dans F et \hat{f} son extension aux ultrafiltres.

I — Les énoncés suivants sont équivalents :

- a) f est continue ;
- b) $\hat{f}T \subset V\hat{f}$;
- c) $\hat{f}\bar{T}^{-1} \subset \bar{V}^{-1}\hat{f}$;
- d) pour tout $(a, b) \in T$ on a $(\hat{f}(a), \hat{f}(b)) \in V$;
- e) $\hat{f}T\delta_E \subset V\hat{f}\delta_E$ (ce qui revient à dire que pour tout $x \in E$ on a $\hat{f}(T(\tilde{x})) \subset V(\tilde{f(x)})$) ;

- f) $\delta_F \hat{f}^{-1} T \subset \delta_F \hat{V}^{-1} \hat{f}$;
g) $\hat{f} \delta_E^{-1} T \subset \delta_F \hat{V}^{-1} \hat{f}$.

II – Les énoncés suivants sont équivalents :

- a) f est ouverte ;
b) $\hat{f} T \supset V \hat{f}$;
c) $\hat{f} T \delta_E \supset V \hat{f} \delta_E$.

III – Les énoncés suivants sont équivalents :

- a) f est fermée ;
b) $\hat{f}^{-1} T \supset \hat{V}^{-1} \hat{f}$;
c) $\delta_F \hat{f}^{-1} T \supset \delta_F \hat{V}^{-1} \hat{f}$.

IV – Pour que l'application f soit propre, il faut et il suffit que l'on ait $\hat{f} \delta_E^{-1} T = \delta_F \hat{V}^{-1} \hat{f}$.

En effet : I. a) \iff b). Dire que f est continue c'est dire que $\hat{f}(\varphi_V) \subset \varphi_T$ donc (d'après 2.1, proposition 4) c'est dire que $\hat{f}^{-1} T \subset \hat{V}^{-1} \hat{f}$ ce qui revient à dire que $\hat{f}^{-1} T \subset \hat{f}^{-1} V$ (puisque $\hat{f} = \hat{f}$ d'après 0.2, lemme 10 a)) donc $\hat{f} T \subset V \hat{f}$ par symétrie.

D'après le lemme 21 on a b) \iff c) \iff d). (Remarquons que c) exprime le fait que $\hat{f}^{-1}(\omega_V) \subset \omega_T$ d'après 2.1, proposition 4).

Il est immédiat que b) \implies e). Pour voir que e) \implies b), on utilise 0.3, lemme 15 en remarquant que T, V et \hat{f} sont mi-ouvertes.

On établit de même que c) \iff f) puisque f) s'écrit aussi $T \hat{f} \delta_F \subset \hat{f} V \delta_F$ et que \hat{f} est mi-ouverte.

Enfin, d'après le lemme 21, g) est équivalent à $\hat{f} T \delta_E \subset V \delta_F \hat{f}$ ce qui entraîne $\hat{f} T \delta_E \subset V \hat{f}$ donc $\hat{f} T \delta_E \subset V \hat{f} \delta_E$ de sorte que g) \implies d) ; et, réciproquement, en remarquant que $\hat{f} \delta_E \subset \delta_F \hat{f}$, on voit que d) \implies g).

II – L'équivalence a) \iff b) découle de 2.1, proposition 4, en posant $G =$ graphe de f , $H = T$ et $K = V$. D'autre part b) \implies c) est immédiat et la réciproque c) \implies b) découle de 0.3, lemme 15.

III – S'établit de manière analogue à II.

IV – On utilise la caractérisation des applications propres donnée par Bourbaki [4], I, 10, 2, théorème 1 d), p. 117-118 ; on utilise la caractérisation I, g) des applications continues donnée plus haut et on remarque que l'expression $\hat{f} \delta_E^{-1} T \supset \delta_F \hat{V}^{-1} \hat{f}$ signifie que si l'ultrafiltre \mathfrak{a} sur E est tel que $\hat{f}(\mathfrak{a})$ converge vers y alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ et que \mathfrak{a} converge vers x . D'où le résultat. *cqfd*

REMARQUES. –

a) Si l'application $f : E \longrightarrow F$ est continue et *surjective* et si de plus f est ouverte ou fermée on peut montrer, à l'aide des résultats précédents, que l'image de la nasse T de E par l'application (\hat{f}, \hat{f}) n'est autre que la nasse V de F .

b) Les caractérisations contenues dans le théorème 6 peuvent servir de modèles à la généralisation des notions d'application continue, ouverte, fermée ou propre au cas d'ensembles E, F munis de nasses *quelconques* G, H respectivement. On obtiendrait ainsi plusieurs notions de continuité généralisée, relatives aux énoncés de I, dont certaines sont nécessairement identiques à cause du lemme 21.

CHAPITRE 3

SUR LA NOTION DE TRAMAIL

On représente les structures semi-uniformes, les topologies et les proximités sur un ensemble E par les ensembles des entourages de structures semi-uniformes sur l'ensemble des ultrafiltres sur E . Un tel ensemble d'entourages est appelé tramail. Plus généralement, chaque structure syntopogène est représentée par une base de tramail.

La considération du tramail d'un espace uniforme permet en particulier de caractériser simplement ses filtres de Cauchy, sa proximité associée, ainsi que la plus fine des structures uniformes, moins fine que sa structure uniforme, pour lesquelles il est précompact, et suggère une construction nouvelle de son séparé complété.

On introduit aussi la notion de Q -famille dans un espace topologique qui remplace l'usage des fonctions continues réelles. Cela donne le moyen, entre autre, de caractériser la topologie uniformisable la plus fine parmi les topologies moins fines qu'une topologie donnée (ce qui fournit une caractérisation intrinsèque des espaces uniformisables), de caractériser la "proximité de Čech" d'un espace topologique et de présenter une nouvelle construction de son "compactifié de Čech".

1. DEFINITIONS ET EXEMPLES

DEFINITION 1.— On appellera *tramail* sur un ensemble E tout ensemble \mathfrak{C} de parties de $\mathfrak{T}(E) \times \mathfrak{T}(E)$ qui constitue l'ensemble des entourages d'une structure semi-uniforme sur $\mathfrak{T}(E)$.

Tout système fondamental d'entourages de cette structure sera appelé aussi *base* du tramail \mathfrak{C} .

On dira que le tramail \mathfrak{C} est *plus fin* que le tramail \mathfrak{C}' lorsque la structure semi-uniforme \mathfrak{C} est plus fine que \mathfrak{C}' (voir 0.4).

EXEMPLES.— Toute nasse idempotente sur E est une base de tramail sur E . En particulier la nasse d'une mérotopologie, la nasse d'une topologie et la nasse d'une proximité sont des exemples de bases de tramails. On verra dans la suite d'autres exemples.

2. TRAMAIL D'UNE STRUCTURE SEMI-UNIFORME

Etant donnée une structure semi-uniforme \mathfrak{U} sur l'ensemble E , à tout entourage V correspond par l'application $g, (x, y) \longrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$, une partie \tilde{V} de $\tilde{E} \times \tilde{E}$ dont l'adhérence \hat{V} dans $\mathfrak{T}(E) \times \mathfrak{T}(E)$ est une nasse bi-ouverte sur E , puisqu'en effet, \hat{V} est l'extension de V aux ultrafiltres (voir 0.2, définition 4 et 0.3, lemme 13 a)). L'ensemble de ces nasses \hat{V} lorsque V parcourt \mathfrak{U} est une base de tramail sur E (voir en particulier 0.2, lemme 10 b)) ; le tramail correspondant sera appelé *tramail de la structure semi-uniforme* \mathfrak{U} .

Réciproquement, si \mathfrak{C} est un tramail sur E admettant une base formée de nasses bi-ouvertes, sa trace sur $\tilde{E} \times \tilde{E}$ est un ensemble d'entourages qui (par transport à l'aide de g) définit une structure semi-uniforme \mathcal{U} sur E dont le tramail est précisément \mathfrak{C} (0.3, corollaire du lemme 12).

On a ainsi une bijection canonique entre l'ensemble des structures semi-uniformes sur E et l'ensemble des tramails sur E ayant une base formée de nasses bi-ouvertes, qui conserve la relation de finesse.

PROPOSITION 1.— Soient \mathcal{U} une structure semi-uniforme sur E , \mathfrak{C} son tramail et $G = \bigcap_{V \in \mathfrak{C}} V$. Alors G est une nasse idempotente et la nasse de la topologie déduite de \mathcal{U} n'est autre que $p(G)$.

En effet : G est bien entendu le graphe d'un préordre sur $\mathcal{T}(E)$ (voir par exemple 0.4, lemme 16 c)) et de plus, puisque \mathfrak{C} admet une base formée de fermés, G est fermé dans $\mathcal{T}(E) \times \mathcal{T}(E)$. C'est donc bien une nasse idempotente. D'autre part, soit T la nasse de la topologie déduite de \mathcal{U} et soit $\mathcal{V}(x)$ le filtre des voisinages de x dans cette topologie. On a $\tilde{\mathcal{T}}(x) = \mathcal{T} \langle \mathcal{V}(x) \rangle$ (1.6, remarque e)). Or

$$G(\tilde{x}) = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} \hat{V}(\tilde{x}) = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} \mathcal{T}(V(x)) = \mathcal{T} \langle \mathcal{V}(x) \rangle$$

(voir 0.3, lemme 13, c) et 0.2, rappels, e)). Donc $\tilde{\mathcal{T}}(x) = G(\tilde{x})$ pour tout $x \in E$, d'où le résultat. *cqfd*

REMARQUES.—

a) La nasse de la topologie déduite de $\hat{\mathcal{U}}$ est bien entendu égale à $p(\tilde{G})$.

b) Nous serions assez tenté d'appeler la nasse G "la ralingue" du tramail \mathfrak{C} , mais nous suivra-t-on jusque là !

LEMME 1.— Soit G une nasse idempotente sur un ensemble E . Alors l'ensemble \mathfrak{C} des voisinages de G dans $\mathcal{T}(E) \times \mathcal{T}(E)$ est le tramail d'une structure semi-uniforme sur E et $G = \bigcap_{V \in \mathfrak{C}} V$.

En effet : D'après 0.4, lemme 17, c'est bien un tramail et $G = \bigcap_{V \in \mathfrak{C}} V$. G étant compact admet un système fondamental de voisinages de la forme $\bigcup_{1 \leq i \leq n} \mathcal{T}(A_i) \times \mathcal{T}(B_i)$ qui sont des nasses bi-ouvertes (1.1, caractérisations, 3/ et 0.2, rappels, d)) ; d'où le résultat. *cqfd*

PROPOSITION 2.— Toute topologie est semi-uniformisable.

En effet : Soit T la nasse d'une topologie sur E . L'ensemble des voisinages de T dans $\mathcal{T}(E) \times \mathcal{T}(E)$ est le tramail d'une structure semi-uniforme sur E (lemme 1) compatible avec la topologie de E puisque $T = \bigcap_{V \in \mathfrak{C}} V$. *cqfd*

[Comparer avec Cszásár [9], p. 171 et Pervin [19]].

3. TRAMAILS ET STRUCTURES SYNTOPOGENES

RAPPELS.— Cszásár [9], p. 61, définit une structure syntopogène sur un ensemble E comme étant un ensemble \mathfrak{S} non vide d'ordres topogènes sur E qui satisfait aux conditions :

- a) pour tous $R, R' \in \mathfrak{S}$ il existe $R'' \in \mathfrak{S}$ tel que $R \subset R''$ et $R' \subset R''$;
- b) pour tout $R \in \mathfrak{S}$ il existe $R' \in \mathfrak{S}$ tel que $R \subset R' R'$.

TRAMAIL D'UNE STRUCTURE SYNTOPOGENE.— Soit \mathfrak{S} une structure syntopogène sur E ; l'ensemble \mathcal{B} des nasses des ordres topogènes appartenant à \mathfrak{S} (1.9) est une base de tramail sur E . Réciproquement, si \mathcal{B} non vide est une base de tramail sur E formée de nasses, l'ensemble \mathfrak{S} des ordres topogènes correspondant aux nasses appartenant à \mathcal{B} est une structure syntopogène sur E . Cette correspondance est bijective. On appellera tramail de la structure syntopogène \mathfrak{S} le tramail ayant pour base \mathcal{B} . Pour que deux structures syntopogènes soient équivalentes (voir la définition dans Cszásár [9], p. 71) il faut et il suffit qu'elles aient le même tramail.

4. TRAMAILS ET ESPACES UNIFORMES

On supposera dans tout ce paragraphe que E est un espace uniforme et on désignera par \mathcal{U} sa structure uniforme, par \mathfrak{C} le tramail de sa structure uniforme, par \mathcal{T} la nasse de sa topologie, par \mathcal{C} l'ensemble de ses ultrafiltres de Cauchy et on posera $S = \bigcap_{V \in \mathfrak{C}} V$.

RAPPEL.— A la structure uniforme \mathcal{U} on associe la relation binaire suivante entre les parties de E : “pour tout $V \in \mathcal{U}$, $(A \times B) \cap V \neq \emptyset$ ”. On vérifie que c'est une relation de proximité sur E (voir 1.8, rappels ; les conditions a), b), c), d) et e) sont évidemment remplies ; quand à f), s'il existe $V \in \mathcal{U}$ tel que $(A \times B) \cap V = \emptyset$, soit $W \in \mathcal{U}$ tel que $\overset{2}{W} \subset V$ et soit $X = W(A)$, alors $(A \times \overset{2}{C} X) \cap W = \emptyset$ et $(X \times B) \cap W = \emptyset$.

PROPOSITION 3.— La nasse de la proximité associée à \mathcal{U} n'est autre que S .

En effet : $(A \times B) \cap V \neq \emptyset \iff (\mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(B)) \cap \hat{V} \neq \emptyset$ (voir, par exemple, 0.3, lemme 13b)). On obtient alors le résultat à l'aide de 1.8, proposition 8, b) du fait que $S = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} \hat{V}$. cqfd

PROPOSITION 4.— Pour qu'un filtre \mathfrak{a} sur E soit un filtre de Cauchy pour \mathcal{U} il faut et il suffit que tout élément V de \mathfrak{C} soit voisinage de $\mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle \times \mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle$.

En effet : Il suffit de remarquer les deux points suivants :

- a) pour que \mathfrak{a} soit filtre de Cauchy, il faut et il suffit que le filtre produit $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ soit plus fin que \mathcal{U} ;
- b) $\mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle \times \mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle$ possède un système fondamental de voisinages de la forme $\mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(B)$ où A et B parcourent \mathfrak{a} (voir 0.2, rappels, f)). cqfd

On sait (ou l'on vérifie) que pour que l'espace uniforme E soit *précompact* il faut et il suffit que tout ultrafiltre sur E soit un filtre de Cauchy (voir notamment Bourbaki [4], II, 4, 2, théorème 3, p. 229 et exerc. 5, p. 239, qui ne postule plus la séparation dans cette nouvelle édition). D'où le résultat suivant.

COROLLAIRE.— Pour que l'espace uniforme E soit *précompact*, il faut et il suffit que tout élément de son tramail \mathfrak{C} soit un voisinage de la diagonale Δ de $\mathcal{T}(E) \times \mathcal{T}(E)$.

PROPOSITION 5.— Soit \mathfrak{a} un filtre sur E tel que $\mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle \times \mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle \subset S$. Alors si x est un point adhérent à \mathfrak{a} , \mathfrak{a} converge vers x .

En effet : Si x adhère à \mathfrak{a} , alors $\mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle \cap \mathcal{T}(\tilde{x}) \neq \emptyset$ (1.6, remarques, a)). Soit $\mathfrak{b} \in \mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle \cap \mathcal{T}(\tilde{x})$ et $\mathfrak{c} \in \mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle$; alors $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \in S$ donc $\mathfrak{c} \in S(\mathfrak{b}) \subset S\mathcal{T}(\tilde{x}) = \mathcal{T}(\tilde{x})$ (puisque, d'après la proposition 1, $\mathcal{T} = p(S)$) ; ainsi $\mathcal{T} \langle \mathfrak{a} \rangle \subset \mathcal{T}(\tilde{x})$ d'où le résultat (1.6, remarques, a)). cqfd

Cela généralise un résultat connu : tout point adhérent à un filtre de Cauchy est aussi point limite de ce filtre (Bourbaki [4], II, 3, 2, corollaire 2, p. 208).

PROPOSITION 6.— L'ensemble \mathfrak{C}^* des voisinages de S dans $\mathcal{T}(E) \times \mathcal{T}(E)$ est le tramail d'une structure uniforme \mathcal{U}^* (compatible avec la topologie de E) qui est “la plus fine des structures uniformes moins fines que \mathcal{U} pour lesquelles E est *précompact*”.

En effet : \mathfrak{C}^* est le tramail d'une structure uniforme \mathcal{U}^* (lemme 1 ; S est symétrique !) et $S = \bigcap_{V \in \mathfrak{C}^*} V$; la topologie déduite de \mathcal{U}^* ayant pour nasse $p(S)$ (proposition 1) elle est égale à la topologie de E déduite de \mathcal{U} .

Soit \mathcal{U}' une structure uniforme moins fine que \mathcal{U} et pour laquelle E est *précompact* et soit \mathfrak{C}' son tramail ; alors $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$ et tout élément de \mathfrak{C}' est un voisinage de Δ (corollaire de la proposition 4), donc la topologie sur $\mathcal{T}(E)$ déduite de la structure uniforme \mathcal{U}' est moins fine que la topologie canonique de $\mathcal{T}(E)$, donc (0.4, lemme 17) \mathfrak{C}' est l'ensemble des voisinages de $S' = \bigcap_{V \in \mathfrak{C}'} V$ dans l'espace $\mathcal{T}(E) \times \mathcal{T}(E)$.

Or $S \subset S'$, donc $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}^*$, donc $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$. D'autre part $\mathfrak{C}^* \subset \mathfrak{C}$, car si V est un voisinage ouvert de S qui ne contient aucun élément de \mathfrak{C} , alors \mathfrak{C} serait un filtre qui possède un point adhérent appartenant au compact $\bar{C} \cap V$, ce qui est absurde car les points adhérents à \mathfrak{C} sont ceux de S . Comme \mathfrak{U}^* est précompacte (corollaire de la proposition 4) l'assertion est établie. cqfd

[Comparer avec Bourbaki [5], IX, 1, exerc. 6, p. 22].

LEMME 2.— *Les ultrafiltres de Cauchy sur \tilde{E} pour la structure uniforme \mathfrak{C} sont les images des ultrafiltres de Cauchy sur E , pour \mathfrak{U} , par l'injection canonique $x \longrightarrow \tilde{x}$.*

En effet : la trace de \mathfrak{C} sur $\tilde{E} \times \tilde{E}$ n'est autre que l'image de \mathfrak{U} par cette injection. cqfd

PROPOSITION 7.—

- a) *L'adhérence de \tilde{E} pour la topologie sur $\Upsilon(E)$ déduite de la structure uniforme \mathfrak{C} est égale à C .*
- b) *La trace sur C de la topologie sur $\Upsilon(E)$ déduite de la structure uniforme \mathfrak{C} est moins fine que la trace de la topologie canonique de $\Upsilon(E)$.*
- c) *La trace de la structure uniforme \mathfrak{C} sur C en fait un espace uniforme complet.*

En effet :

a) Soit A cette adhérence ; $a \in A \iff \forall V \in \mathfrak{U} \hat{V}(a) \cap \tilde{E} \neq \emptyset \iff \forall V \in \mathfrak{U} a \in \hat{V}(\tilde{E}) \iff \forall V \in \mathfrak{U} a \in \bigcup_{x \in E} \Upsilon(V(x))$ (0.3, lemme 13 c)) $\iff \forall V \in \mathfrak{U} \exists x \in E V(x) \in a \iff a \in C$; donc $A = C$.

b) Pour tout $a \in C$ et pour tout $V \in \mathfrak{C}$, $V(a)$ est un voisinage de a pour la topologie canonique de $\Upsilon(E)$ (proposition 4), d'où le résultat.

c) Comme \tilde{E} est dense dans C (pour la topologie déduite de \mathfrak{C}) il suffit de montrer que toute base de filtre de Cauchy sur \tilde{E} converge dans C (Bourbaki [4], II, 3, 4, proposition 9, p. 211) et pour cela (Bourbaki *ibid.* II, 3, 2, corollaire 3, p. 208) il suffit de montrer que tout ultrafiltre de Cauchy sur \tilde{E} converge dans C . Ainsi (lemme 2) soit $a \in C$ et soit \tilde{a} son image par l'injection $x \longrightarrow \tilde{x}$; alors \tilde{a} converge vers a dans la topologie canonique de $\Upsilon(E)$, donc aussi dans la topologie moins fine (voir b)) déduite de \mathfrak{C} . cqfd

Soit R la relation d'équivalence sur E dont le graphe est égal à $\bigcap_{V \in \mathfrak{U}} V$ et soit \hat{E} l'ensemble quotient E/R de E par cette relation d'équivalence. L'image $\hat{\mathfrak{U}}$ de \mathfrak{U} par l'extension de l'application canonique α de E sur \hat{E} est une structure uniforme séparée sur \hat{E} appelée *structure séparée associée* à \mathfrak{U} (voir Bourbaki [3], II, 1, 4, p. 137 et non pas Bourbaki [4], II, 3, 8, p. 221-223). L'espace uniforme \hat{E} ainsi obtenu est la solution du problème universel suivant : pour toute application uniformément continue f de l'espace uniforme E dans un espace uniforme *séparé* F , il existe une application uniformément continue g et une seule telle que $f = g\alpha$ (α elle-même étant uniformément continue). On le vérifie facilement d'après la construction de $\hat{\mathfrak{U}}$. (Ainsi l'espace \hat{E} est en quelque sorte "l'espace uniforme quotient" de l'espace uniforme E par la relation d'équivalence R). La topologie de \hat{E} est le quotient de celle de E par R .

THEOREME 1.— *L'ensemble C étant muni de la structure uniforme (induite) trace de la structure uniforme \mathfrak{C} , l'espace séparé \hat{C} associé à l'espace uniforme C n'est autre que l'espace séparé complété de l'espace E (pour l'application canonique $i : E \longrightarrow \hat{E} \longrightarrow C \longrightarrow \hat{C}$).*

En effet : On utilise Bourbaki [4], II, 3, 7, p. 216-219 en prenant pour définition du séparé complété la propriété (P) du théorème 3 ; nous montrerons que (\hat{C}, i) est solution de ce problème universel. Désignons par j l'injection canonique $x \longrightarrow \tilde{x}$ de E dans C , par α l'application canonique de C sur \hat{C} et par i le composé αj . Soit $f : E \longrightarrow F$ une application uniformément continue de E dans un espace complet séparé F . Alors il existe une application $f' : \hat{E} \longrightarrow F$ unique telle que $f = f'j$; il est clair que f' est une application uniformément continue du sous-espace \tilde{E} de l'espace C dans F ; comme \tilde{E} est dense dans C (proposition 7 a)) f' se prolonge par continuité à C tout entier, la fonction prolongée g' est uniformément continue (voir Bourbaki [4], II, 3, 6, théorème 2, p. 215) et unique (Bourbaki, *ibid.*, I, 8, 5,

théorème 1, p. 93). Ainsi il existe une application uniformément continue unique $g : \dot{C} \longrightarrow F$ telle que $g' = g\alpha$. Donc $f = g'j = g\alpha j = gi$. De plus si $g_1 : \dot{C} \longrightarrow F$ est une application uniformément continue telle que $f = g_1 i$ alors $f = (g_1\alpha)j$ donc $g_1\alpha$ prolonge f' donc $g_1\alpha = g' = g\alpha$; donc $g_1 = g$. D'autre part \dot{C} est complet (voir Bourbaki [3], II, 3, 2, p. 149). cqfd

COROLLAIRE.— Lorsque l'espace E est précompact, le séparé complété de E n'est autre que l'espace compact quotient de l'espace $\Upsilon(E)$ par la relation d'équivalence définie par S .

En effet : Lorsque E est précompact, on a $C = \Upsilon(E)$ et l'espace séparé complété \dot{C} est compact. Comme d'autre part l'espace topologique quotient de l'espace $\Upsilon(E)$ par l'équivalence S est compact (Bourbaki [3], I, 10, 6, proposition 8, p. 97) et que sa topologie est plus fine que celle de \dot{C} (proposition 7 b)) ces deux topologies sont identiques (Bourbaki [4], I, 9, 4, corollaire 3, p. 101). cqfd

REMARQUE.— Lorsque l'espace uniforme E est séparé, l'application canonique $i : E \longrightarrow \dot{C}$ est un isomorphisme de l'espace E sur le sous-espace uniforme $i(E)$. Ainsi, si l'on part d'un espace uniforme séparé (E, \mathcal{U}) on peut lui associer canoniquement un espace (séparé) précompact (E, \mathcal{U}^*) (proposition 6) et donc (corollaire du théorème 1) un compactifié quotient de $\Upsilon(E)$ par S . Sans se servir des fonctions continues réelles, on peut donc établir l'équivalence des espaces uniformisables séparés et des sous-espaces des espaces compacts (voir aussi Samuel [20]).

5. SUR LA NOTION DE Λ -FAMILLE

DEFINITION 2.— Soient E un espace topologique, Λ un ensemble ordonné et $<$ l'ordre strict sur Λ . On appellera Λ -famille dans E toute famille $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'ouverts de E telle que $\lambda < \mu$ implique $\bar{U}_\lambda \subset U_\mu$.

On dira que la Λ -famille $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ va de A à B lorsque $A \subset B$ et que pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $A \subset U_\lambda \subset B$.

Pour tout filtre \mathfrak{a} sur E , on désignera par \mathfrak{a}_Λ l'ensemble des parties X de E telles qu'il existe $A \in \mathfrak{a}$ et une Λ -famille qui va de A à X ; c'est un filtre sur E (comme on le vérifie facilement) qu'on appellera le Λ -modifié de \mathfrak{a} (pour la topologie de E).

REMARQUES.— On a $\mathfrak{a}_\Lambda \subset \mathfrak{a}$. D'autre part, le Λ -modifié d'un filtre ne dépend que du type d'ordre de Λ . Par exemple, si $\Lambda = \emptyset$ on a $\mathfrak{a}_\Lambda = \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}$. En partant d'une prétopologie sur l'espace topologique E , on peut associer à tout $x \in E$ le Λ -modifié (pour la topologie de E) du filtre des pseudo-voisinages de x (voir 1.4) ; on obtient alors une prétopologie moins fine que la prétopologie initiale et qu'on pourra appeler la Λ -modifiée de cette prétopologie. Si P est la nasse d'une prétopologie et T est la nasse de la topologie de E , on désignera par $P_{\Lambda/T}$ la nasse de la Λ -modifiée de cette prétopologie. On pourrait développer systématiquement, pour tout type d'ordre, l'étude des modifiées des prétopologies (et des topologies) sur un espace topologique. Nous ne le ferons pas ici. Nous examinerons deux instances : $\Delta_{(-N)/T}$ la $(-N)$ -modifiée de la topologie discrète, et $T_{Q/T}$ la Q -modifiée de la topologie elle-même.

PROPOSITION 8.— Soient E un espace topologique de nasse T , $\mathfrak{Q}(x)$ le $(-N)$ -modifié de l'ultrafiltre \tilde{x} et P la nasse de la prétopologie ainsi définie.

a) Pour tout $x \in E$, on a $P(\tilde{x}) = \left(\text{Adh} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bar{T}^1 T)^n \right) (\tilde{x}) = \text{Adh} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bar{T}^1 T)^n (\tilde{x}) \right)$.

b) Pour toute topologie quasi régulière sur E de nasse V , si $T \subset V$ alors $P \subset V$.

En effet :

a) Par définition $P(\tilde{x}) = \Upsilon \langle \mathfrak{Q}(x) \rangle$; ainsi $\Upsilon(X) \supset P(\tilde{x})$ équivaut à $X \in \mathfrak{Q}(x)$ qui équivaut à l'existence d'une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de E telle que $x \in \bar{U}_{m+1} \subset U_m \subset U_0 \subset X$ pour $m \geq 1$; ce qui entraîne pour tout $n \geq 1$, $x \in U_n \subset \bar{U}_n \subset U_{n-1} \subset \dots \subset \bar{U}_1 \subset U_0 \subset X$ donc $\Upsilon(X) \supset (\bar{T}^1 T)^n (\tilde{x})$. Ainsi

$$P(\tilde{x}) \supset \text{Adh} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bar{T}^1 T)^n (\tilde{x}) \right).$$

Réciproquement, si $\Upsilon(X) \supset (\overline{TT})^n(\tilde{x})$ il existe une suite d'ouverts U_1^n, \dots, U_n^n telle que

$$x \in U_n^n \subset \overline{U}_n^n \subset \dots \subset U_1^n \subset \overline{U}_1^n \subset X;$$

si on pose, pour $n \geq 1$, $U_n = \bigcap_{1 \leq j \leq n} U_n^j$ on obtient une suite d'ouverts $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$x \in \overline{U}_{m+1} \subset U_m \subset X \quad \text{pour} \quad m \geq 1;$$

donc $X \in \mathfrak{A}(x)$, donc $\Upsilon(X) \supset P(\tilde{x})$. Ainsi $P(\tilde{x}) = \text{Adh} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\overline{TT})^n(\tilde{x}) \right)$ et la seconde égalité découle de 0.1, lemme 6.

b) Si V est la nasse d'une topologie quasi régulière telle que $T \subset V$, alors $\overline{TT}(\tilde{x}) \subset \overline{VV}(\tilde{x}) = V(\tilde{x})$ (2.2, VII) et, par récurrence, $(\overline{TT})^n(\tilde{x}) \subset V(\tilde{x})$, donc $P(\tilde{x}) \subset V(\tilde{x})$ donc $P \subset V$. cqfd

Autrement dit, la prétopologie définie par P est plus fine que la borne supérieure des topologies quasi régulières moins fines que la topologie définie par T .

COROLLAIRE.— *P étant définie comme dans la proposition 8, si T est quasi normale alors $P = p(\overline{TT})^{-1}$; si T est extrêmement discontinue alors $P = p(\overline{TT})$. Dans ces deux cas P est une nasse de topologie.*

En effet : Si T est quasi normale (2.2, XI) \overline{TT}^{-1} est idempotente donc $p(\overline{TT}^{-1})$ est une nasse de topologie (1.7, proposition 6 b)) et $(\overline{TT}^{-1})^n(\tilde{x}) \subset \overline{TT}^{-1}(\tilde{x})$ donc $P(\tilde{x}) = \overline{TT}^{-1}(\tilde{x})$ donc $P = p(\overline{TT}^{-1})$. Si T est extrêmement discontinue (2.2, XIII) c'est \overline{TT}^{-1} qui est idempotente et on a une démonstration analogue. cqfd

Nous verrons plus loin (proposition 11) que, dans ces deux cas, la topologie de nasse P est uniformisable, donc quasi régulière.

LEMME 3.— *Soient T la nasse d'une topologie et S la nasse d'une proximité sur E , telles que $T \subset S$. Alors si A et B sont des parties S -éloignées, \overline{A} et \overline{B} sont également S -éloignés (où \overline{X} désigne l'adhérence de X pour la topologie définie par T).*

En effet : Si A et B sont S -éloignées, alors (1.8, proposition 8 b)) $(\Upsilon(A) \times \Upsilon(B)) \cap S = \emptyset$ donc $(\overline{S}(\Upsilon(A)) \times \Upsilon(B)) \cap S = \emptyset$ (car $\overline{S}S = S$) donc $(\overline{T}(\Upsilon(A)) \times \Upsilon(B)) \cap S = \emptyset$, or $\overline{T}(\Upsilon(A)) = \Upsilon(\overline{A})$ donc \overline{A} et \overline{B} sont bien S -éloignés. cqfd

PROPOSITION 9.— *Soient T la nasse d'une topologie et S la nasse d'une proximité sur E , telles que $T \subset S$. Alors si A et B sont des parties S -éloignées, il existe une Q -famille (pour la topologie T) qui va de A à \overline{CB} .*

En effet : Il faut se souvenir que le type d'ordre de Q est caractérisé par le fait qu'il est total, dénombrable infini, sans premier ni dernier élément, et "dense" (c'est-à-dire que pour $r < s$ il existe t tel que $r < t < s$). Supposons que A et B sont éloignés alors (1.8 axiome f)) il existe X tel que A et \overline{CX}_0 soient éloignés et que X et B soient éloignés, donc (lemme 3) A et $\overline{CX} = \overline{CX}$ sont éloignés; soit $U = \overline{X}$, alors $A \subset U \subset \overline{CB}$, A et \overline{CU} sont éloignés et, de même, U et \overline{CB} sont éloignés. Supposons que nous ayons défini une suite croissante U_0, U_1, \dots, U_{n+1} de parties de E telle que $1/ U_0 = A$ et $U_{n+1} = \overline{CB}$, $2/ U_i$ ouvert, pour $1 \leq i \leq n$ et $3/ U_i$ éloigné de \overline{CU}_{i+1} , pour $0 \leq i \leq n$; on va construire une suite croissante $V_0, V_1, \dots, V_{2(n+1)}$ telle que $V_{2i} = U_i$ pour $0 \leq i \leq n+1$, V_i ouvert pour $1 \leq i \leq 2n+1$, et V_i éloigné de \overline{CV}_{i+1} pour $0 \leq i \leq 2n+1$. Pour cela il suffit de construire V_{2i+1} pour $0 \leq i \leq n$. Or U_i et \overline{CU}_{i+1} sont éloignés donc (voir plus haut) il existe un ouvert U^i tel que U_i et \overline{CU}^i soient éloignés et que U^i et \overline{CU}_{i+1} soient éloignés et que $U_i \subset U^i \subset U_{i+1}$; on posera $V_{2i+1} = U^i$. La famille "intercalaire" $(V_i)_{0 \leq i \leq 2(n+1)}$ ainsi obtenue satisfait aux conditions 1/, 2/ et 3/. On peut donc recommencer indéfiniment. On obtient ainsi une famille $(U_r)_{r \in \mathbb{Q}}$ d'ouverts de E telle que $A \subset U_r \subset \overline{CB}$ et que $r < s$ implique U_r et \overline{CU}_s sont éloignés, donc (lemme 3) \overline{U}_r et \overline{CU}_s sont éloignés donc $\overline{U}_r \subset U_s$. On a bien une Q -famille qui va de A à \overline{CB} . cqfd

LEMME 4.— Soit E un espace topologique. La relation suivante entre parties A et B de $\mathfrak{X}(E)$ est une proximité, “il n'existe pas de Q-famille qui va de A à $\bar{C}B$ ”.

En effet : On vérifie les axiomes (a) à f) de 1.8. L'axiome a) découle de ce que si $(U_r)_{r \in Q}$ est une Q-famille qui va de A à $\bar{C}B$ alors $(\bar{C}\bar{U}_r)_{r \in Q}$ est une Q-famille qui va de B à $\bar{C}A$. b), c) et d) sont à peu près immédiatement vérifiés. e) découle de ce que si $(U_r)_{r \in Q}$ et $(V_r)_{r \in Q}$ sont des Q-familles allant respectivement de A à $\bar{C}B$ et de A à $\bar{C}C$ alors $(U_r \cap V_r)_{r \in Q}$ est une Q-famille qui va de A à $\bar{C}(B \cup C)$. Quant à f) il découle de ce que l'on peut “scinder” une Q-famille $(U_r)_{r \in Q}$ en deux familles $(U_r)_{r < 0}$ et $(U_r)_{r > 0}$ “isomorphes” à des Q-familles (on prend $X = \bar{C}U_0$!)

cqfd

DEFINITION 3.— On appellera *proximité de Čech* d'un espace topologique la proximité définie par le lemme 4.

PROPOSITION 10.— Soit E un espace topologique de nasse T. On désigne par \check{T} l'intersection de toutes les nasses S de proximités ($\check{S} = S$ et $\bar{S} = S$) qui contiennent T. Alors \check{T} est la nasse de la proximité de Čech de E.

En effet : Il est clair que \check{T} est une nasse idempotente et symétrique telle que $T \subset \check{T}$. D'après la proposition 9, si A et B sont \check{T} -éloignées, elles sont aussi éloignées pour la proximité de Čech ; soit S la nasse de cette proximité, on a donc $S \subset \check{T}$. D'autre part, pour tout $X \neq \emptyset$, $T(\mathcal{T}(X))$ représente le filtre des voisinages de X (voir, par exemple, 1.6, remarque c)) et $S(\mathcal{T}(X))$ représente le filtre des parties B telles que X soit S-éloigné de $\bar{C}B$ (voir 1.8, proposition 8c)) donc $T(\mathcal{T}(X)) \subset S(\mathcal{T}(X))$ donc (0.3, corollaire b) du lemme 11) on a $T \subset S$; donc $\check{T} \subset S$, donc $S = \check{T}$.

cqfd

Autrement dit, la proximité de Čech d'un espace topologique est la plus fine parmi les proximités dont les topologies associées sont moins fines que la topologie de l'espace (voir 1.8, proposition 9).

Soit E un espace topologique. Pour tout $x \in E$, il est clair que le Q-modifié de \check{x} est égal au Q-modifié $\mathcal{V}_Q(x)$ du filtre $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x. L'application $x \longrightarrow \mathcal{V}_Q(x)$ définit une prétopologie sur E qui, en fait, est une topologie car (voir Bourbaki [4], I, 1, 2, proposition 2, p. 18) soit $V \in \mathcal{V}_Q(x)$ et soit $(U_r)_{r \in Q}$ une Q-famille qui va de $\{x\}$ à V alors, si l'on pose $W = U_0$, on a $W \in \mathcal{V}_Q(x)$ et pour tout $y \in W$ on a $V \in \mathcal{V}_Q(y)$ (l'axiome V_{IV} *ibid.* p. 17 est donc bien vérifié). On appellera cette topologie la *topologie de Čech* de l'espace E.

THEOREME 2.— La topologie de Čech d'un espace topologique n'est autre que la topologie associée à sa proximité de Čech.

En effet : Cela découle de la définition 3 et de 1.8, lemme 4.

cqfd

Remarquons que, si T est la nasse de la topologie de E, alors $p(\check{T})$ est la nasse de sa topologie de Čech (c'est une autre manière d'établir que c'est une topologie, à l'aide de 1.8, proposition 9 et 1.7, proposition 6 b)).

THEOREME 3.— Soit E un espace topologique de nasse T. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

- a) E est uniformisable ;
- b) E est proximisable ;
- c) $p(\check{T}) = T$.

En effet :

a) \implies b). Supposons qu'il existe une structure uniforme \mathcal{U} sur E compatible avec sa topologie. Soit \mathfrak{S} son tramail ; alors $S = \bigcap_{V \in \mathfrak{S}} V$ est une nasse de proximité sur E (4, proposition 3) et $p(S) = T$ est la nasse de la topologie déduite de \mathcal{U} (2, proposition 1) c'est aussi la nasse de la topologie associée à la proximité définie par S (1.8, proposition 9) donc E est bien proximisable.

b) \implies a). S'il existe une proximité sur E, de nasse S, dont la topologie associée est égale à celle de E alors $T = p(S)$ (*ibid.*) or (3.2, lemme 1) il existe une structure uniforme \mathcal{U} (S est symétrique !) dont le tramail \mathfrak{C} est tel que $S = \bigcap_{V \in \mathfrak{C}} V$; donc la topologie déduite de \mathcal{U} (3.2, proposition 1) est égale à la topologie de E ; donc E est bien uniformisable.

b) \implies c). Si S est la nasse d'une proximité telle que $p(T) = S$ alors $T \subset \check{T} \subset S$ donc $p(\check{T}) = T$.

c) \implies b). \check{T} est une nasse de proximité (proposition 10). cqfd

[L'équivalence entre a) et b) est connue ; cela permet, joint à 2.2; XXI, proposition 28, de retrouver le fait que tout espace quasi éparpillé est uniformisable (voir, par exemple, Bourbaki [5], IX, 6, exerc. 1a) p. 139].

COROLLAIRE 1.— *La topologie de Čech d'un espace topologique E est la plus fine des topologies uniformisables moins fines que la topologie de E.*

En effet : La topologie de Čech est uniformisable puisqu'elle est proximisable (théorème 2) et elle est moins fine que la topologie de E (d'après la définition ; ou encore, car $T \subset \check{T}$ implique $T \subset p(\check{T})$). Soit T la nasse de E et soit V la nasse d'une topologie uniformisable moins fine alors $T \subset V$ donc $\check{T} \subset \check{V}$ donc $T \subset p(\check{T}) \subset p(\check{V}) = V$; ainsi la topologie définie par V est moins fine que la topologie de Čech de E. cqfd

COROLLAIRE 2.— *Pour qu'un espace topologique soit uniformisable il faut et il suffit que sa topologie de Čech soit identique à sa topologie.*

Autrement dit, pour que l'espace E soit uniformisable il faut et il suffit que, pour tout point $x \in E$ et tout voisinage V de x, il existe une Q-famille qui va de $\{x\}$ à V.

PROPOSITION 11.— *Soit E un espace topologique de nasse T. Pour que E soit quasi normal il faut et il suffit que $\check{T} = T\check{T}$. Pour que E soit extrêmement discontinu il faut et il suffit que $\check{T} = \check{T}T$. Dans ces deux cas, la topologie de Čech est la plus fine des topologies quasi régulières moins fines que la topologie de E.*

En effet : On utilise 2.2, XI et XIII, et la proposition 8 et son corollaire. cqfd

COROLLAIRE.— *Tout espace quasi normal (resp. extrêmement discontinu) est uniformisable si et seulement s'il est quasi régulier.*

Pour les espaces normaux, ce résultat est bien connu.

REMARQUE.— Dans le même ordre d'idées, on pourrait étudier les espaces topologiques dont la nasse T satisfait à une condition du type $\check{T} = \dots \check{T}T\check{T}\check{T}\dots T\check{T}\dots$. On aurait des résultats tout à fait analogues à la proposition 11 et son corollaire (et au corollaire de la proposition 7). En particulier, la condition $\check{T} = T\check{T}T$ (qui équivaut à $T\check{T}T = \check{T}T\check{T}$) paraît intéressante comme étant la généralisation la plus immédiate de la quasi normalité et de la discontinuité extrême ; sa traduction en termes topologiques est assez simple : "tout voisinage fermé d'une partie fermée A contient un voisinage d'un voisinage fermé de A" (ou encore "pour toutes parties A fermée et B ouverte telles que $A \cap B = \emptyset$ il existe des ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $\bar{B} \subset V$ ").

Le lemme suivant qui est une très légère généralisation d'un résultat connu (Gillman et Jerison [12], 3.12, lemme, p. 43-44) explique le succès de la méthode des Q-familles.

LEMME 5.— *Soit $(U_r)_{r \in Q}$ une Q-famille d'un espace topologique E, et pour tout $x \in E$ soit*

$$f(x) = \inf \{r \mid x \in U_r\} ;$$

alors $f : E \longrightarrow \bar{R}$ est une application continue de l'espace E dans la droite achevée \bar{R} .

En effet : Il suffit de remarquer les points suivants : $x \in \bar{U}_r \implies f(x) \leq r$, $f(x) < r \implies x \in U_r$; donc $f(U_s) \subset [-\infty, s]$ et $f(C\bar{U}_r) \subset [r, +\infty]$; et $f(x) < s \implies x \in U_s$, $r < f(x) \implies x \in C\bar{U}_r$; de plus $f(U_s \cap C\bar{U}_r) \subset [r, s]$. *cqfd*

Joint au corollaire 2 du théorème 3, ce lemme permet de retrouver la caractérisation des espaces uniformisables à l'aide des fonctions continues réelles (Bourbaki [5], IX, 1, 5, théorème 2, p. 17). Il peut intervenir aussi dans de nombreuses questions où les fonctions continues réelles interviennent et donner un caractère plus intrinsèque à ces recherches. En voici un exemple.

On dit qu'un espace topologique E est *weierstrassien* (Bourbaki [5], IX, 1, exerc. 22 a), p. 27) lorsque toute fonction réelle continue sur E est bornée ; pour cela il faut et il suffit que toute fonction réelle continue f soit minorée (car alors $-f$ est aussi une fonction continue). [En anglais ces espaces sont appelés "pseudocompact" (Gillman et Jerison [12], p. 12)].

PROPOSITION 12.— *Pour qu'un espace topologique E soit weierstrassien, il faut et il suffit que toute \mathbb{Q} -famille d'ouverts non vides de E ait une intersection non vide.*

En effet : Si $(U_r)_{r \in \mathbb{Q}}$ est une \mathbb{Q} -famille d'ouverts *non vides* telle que $\bigcap_{r \in \mathbb{Q}} U_r = \emptyset$, alors la fonction $f : E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ associée (lemme 5) ne prend pas la valeur $-\infty$ et cependant s'en approche indéfiniment ; de plus $] -\infty, +\infty[$ est homéomorphe à $] -\infty, 0[$, donc il existe une fonction réelle continue sur E non minorée, donc E n'est pas weierstrassien. Réciproquement, si E n'est pas weierstrassien, il existe une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue non minorée, donc la famille $(U_r = \bar{f}^{-1}(\leftarrow, r))_{r \in \mathbb{Q}}$ est une \mathbb{Q} -famille d'ouverts non vides à intersection vide. *cqfd*

[Comparer avec le cas complètement régulier (Bourbaki [5], IX, 1, exerc. 22, p. 27-29)].

6. SUR LE COMPACTIFIÉ DE STONE-ČECH

Soit E un espace topologique quelconque. Il s'agit de résoudre le problème universel suivant : trouver un espace compact \check{E} et une application continue $i : E \longrightarrow \check{E}$ tels que pour toute application continue $f : E \longrightarrow K$ de E dans un compact K il existe une application continue et une seule $g : \check{E} \longrightarrow K$ telle que $f = gi$. Toute solution de ce problème sera appelée *espace compact de Stone-Čech* associé à E .

THEOREME 4.— *Soit E un espace topologique de nasse T . L'espace $\check{\Upsilon}(E)/\check{T}$, quotient de l'espace $\check{\Upsilon}(E)$ par la relation d'équivalence définie par \check{T} , est un espace compact de Stone-Čech associé à E (pour l'application canonique $i : E \longrightarrow \check{\Upsilon}(E) \longrightarrow \check{\Upsilon}(E)/\check{T}$).*

En effet : Soit $j : E \longrightarrow \check{\Upsilon}(E)$ l'application canonique $x \longrightarrow \tilde{x}$ et soit $\alpha : \check{\Upsilon}(E) \longrightarrow \check{\Upsilon}(E)/\check{T}$ l'application canonique sur l'espace quotient ; on a $i = \alpha j$. Soit $f : E \longrightarrow K$ une application continue de E dans un compact K . f se "prolonge" de manière unique en une application continue $f' : \check{\Upsilon}(E) \longrightarrow K$ (voir 0.3, remarques, a)) telle que $f = f'j$; on a $f'(a) = \lim_{\mathfrak{a}} f(x)$. Soit S le graphe en (a, b) de la relation d'équivalence $f'(a) = f'(b)$; S est fermé, symétrique et idempotent, c'est donc une nasse de proximité. D'autre part $(\tilde{x}, a) \in T$ veut dire que a converge vers x ; donc $f(a)$ converge vers $f(x)$ donc $f'(a) = f'(\tilde{x})$ donc $(\tilde{x}, a) \in S$. Or T est une nasse mi-ouverte donc (1.1, caractérisations, 2/ b)) $T = \text{Adh } T \delta$. Comme $T \delta \subset S$, on a $T \subset S$ donc $\check{T} \subset S$. Donc f' se factorise à travers $\check{\Upsilon}(E)/\check{T}$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction continue $g : \check{\Upsilon}(E)/\check{T} \longrightarrow K$ telle que $f' = g\alpha$. Donc $f = g\alpha j = gi$. Si $g_1 : \check{\Upsilon}(E)/\check{T} \longrightarrow K$ est une fonction continue telle que $f = g_1 i$ on a $g_1 i = gi$ donc $g_1 \alpha j = g\alpha j = f'j$ donc $g_1 \alpha = f' = g\alpha$ (unicité de f') donc $g_1 = g$ (α est surjective). Comme d'autre part l'espace $\check{\Upsilon}(E)/\check{T}$ est compact (Bourbaki [3], I, 10, 6, proposition 8, p. 97), le théorème est établi. *cqfd*

Dans le cas où E est complètement régulier, $\check{\Upsilon}(E)/\check{T}$ n'est autre que le *compactifié de Stone-Čech* βE .

[Comparer avec Samuel [20], Inagaki et Sugawara [16] et Bourbaki [5], IX, 1, exerc. 7, p. 22-23].

CHAPITRE 4

TOPOLOGIES SUR L'ENSEMBLE DES TOPOLOGIES SUR UN ENSEMBLE DONNÉ

On munit l'ensemble des topologies sur un ensemble donné de trois topologies "naturelles" dont on étudie et compare les propriétés. En particulier, toute topologie est approximable par des topologies "de type fini" ; toute topologie accessible est limite de topologies compactes.

On montre ainsi que bon nombre de propriétés topologiques classiques ne sont pas "stables" en un certain sens.

1. DEFINITION DES TROIS TOPOLOGIES

RAPPELS.— Les résultats suivants sont établis dans Choquet [7].

Soit E un espace localement compact. On munit l'ensemble $\mathcal{T}(E)$ des fermés non vides de E d'une topologie canonique localement compacte ; dans cette topologie, la famille $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{T}(E)$ converge vers l'élément A de $\mathcal{T}(E)$ suivant le filtre \mathfrak{c} sur I , si et seulement si $\lim A_i$ (voir 0.1, définition 3) existe et est égale à A .

Pour que l'espace $\mathcal{T}(E)$ soit compact il faut et il suffit que l'espace E soit compact ; dans ce cas évidemment l'ensemble $\mathcal{T}(E)$ est identique à l'ensemble $\mathcal{K}(E)$ des compacts non vides de E .

On appelle recouvrement *effectif* d'une partie A de E tout recouvrement fini de A par des ouverts B_1, \dots, B_n de E tels que $A \cap B_i \neq \emptyset$ pour $1 \leq i \leq n$.

Lorsque E est compact, la topologie canonique de $\mathcal{T}(E)$ (donc de $\mathcal{K}(E)$) peut aussi être définie de la manière suivante : pour tout élément K de $\mathcal{K}(E)$ et tout recouvrement effectif \mathcal{R} de K , on considère l'ensemble $\mathcal{V}(K ; \mathcal{R})$ des éléments de $\mathcal{K}(E)$ pour lesquels \mathcal{R} est un recouvrement effectif. Alors l'ensemble des $\mathcal{V}(K ; \mathcal{R})$ où \mathcal{R} décrit l'ensemble des recouvrements effectifs de K est un système fondamental de voisinages ouverts de K pour la topologie canonique de $\mathcal{K}(E)$.

TOPOLOGIE DES MEROTOPOLOGIES.— Soit E un ensemble et $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des nasses de mérotopologies sur E (voir 1.5). On définira sur $\mathcal{M}(E)$ une topologie "naturelle", appelée *topologie des mérotopologies* (ou topologie \mathcal{M}), de la manière suivante : l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ muni de la topologie discrète est, évidemment, localement compact ; ainsi l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{P}(E))$ des parties non vides de $\mathcal{P}(E)$ est muni d'une topologie canonique localement compacte (voir rappels) ; l'ensemble des mérotopologies sur E est une partie de l'espace $\mathcal{T}(\mathcal{P}(E))$, on prend la topologie induite et on la transporte sur $\mathcal{M}(E)$ par la bijection canonique (voir 1.5). Explicitement, une famille $(\omega_i)_{i \in I}$ de mérotopologies sur E converge vers la mérotopologie ω suivant le filtre \mathfrak{c} sur I lorsque

$$\omega = \inf_{\mathfrak{c}} \omega_i = \sup_{\mathfrak{c}} \omega_i$$

$$\text{(où } \inf_{\mathfrak{c}} \omega_i = \bigcap_{J \in \mathfrak{g}(\mathfrak{c})} \bigcup_{i \in J} \omega_i = \bigcup_{J \in \mathfrak{c}} \bigcap_{i \in J} \omega_i$$

et

$$\sup_{\mathfrak{c}} \omega_i = \bigcap_{J \in \mathfrak{c}} \bigcup_{i \in J} \omega_i = \bigcup_{J \in \mathfrak{g}(\mathfrak{c})} \bigcap_{i \in J} \omega_i,$$

et où $\mathfrak{g}(\mathfrak{c})$ est la grille associée au filtre \mathfrak{c} .

TOPOLOGIE DES PRETOPOLOGIES.— On définira sur $\mathfrak{Rr}(E)$, l'ensemble des nasses mi-ouvertes sur E (voir 1.2), une topologie “naturelle”, appelée *topologie des prétopologies* (ou topologie \mathfrak{Rr}), de la manière suivante : à chaque élément P de $\mathfrak{Rr}(E)$ correspond l'élément $(P(\tilde{x}))_{x \in E}$ de l'espace produit $(\mathcal{K}(\Upsilon(E)))^E$ où $\mathcal{K}(\Upsilon(E))$ est l'espace des parties compactes non vides de l'espace $\Upsilon(E)$; cette correspondance est bijective ; $(\mathcal{K}(\Upsilon(E)))$ s'identifie aussi à l'espace des filtres $\Phi(E)$ sur E , voir 0.2, rappels, \mathfrak{g}). On transporte ainsi la topologie produit de $(\mathcal{K}(\Upsilon(E)))^E$ à $\mathfrak{Rr}(E)$ par cette bijection. Explicitement, une famille $(P_i)_{i \in I}$ de nasses mi-ouvertes sur E converge vers la nasse mi-ouverte P suivant le filtre \mathfrak{c} sur I lorsque : pour tout $x \in E$ on a $P(\tilde{x}) = \inf_{\mathfrak{c}} P_i(\tilde{x}) = \sup_{\mathfrak{c}} P_i(\tilde{x})$

$$\text{(où } \inf_{\mathfrak{c}} P_i(\tilde{x}) = \bigcap_{J \in \mathfrak{g}(\mathfrak{c})} \text{Adh} \bigcup_{i \in J} P_i(\tilde{x}) \quad \text{et} \quad \sup_{\mathfrak{c}} P_i(\tilde{x}) = \bigcap_{J \in \mathfrak{c}} \text{Adh} \bigcup_{i \in J} P_i(\tilde{x}).$$

TOPOLOGIE DES NASSES.— L'ensemble $\mathfrak{N}(E)$ des nasses sur E est une partie de l'espace compact $\mathcal{K}(\Upsilon(E) \times \Upsilon(E))$ des compacts non vides de l'espace produit $\Upsilon(E) \times \Upsilon(E)$ (lorsque $E \neq \emptyset$). La topologie induite sur $\mathfrak{N}(E)$ sera appelée *topologie des nasses* (ou topologie \mathfrak{N}).

$\mathfrak{T}(E)$, l'ensemble des nasses de topologies sur E (voir 1.6) étant une partie de chacun des espaces $\mathfrak{N}(E)$, $\mathfrak{Rr}(E)$ et $\mathfrak{N}(E)$ est ainsi muni de trois topologies “naturelles” induites qu'on désignera encore par \mathfrak{N} , \mathfrak{Rr} et \mathfrak{N} respectivement.

2. PROPRIETES DE CES TROIS TOPOLOGIES

THEOREME 1.—

a) *Les trois espaces $\mathfrak{N}(E)$, $\mathfrak{Rr}(E)$ et $\mathfrak{N}(E)$ (munis des topologies \mathfrak{N} , \mathfrak{Rr} et \mathfrak{N} respectivement) sont compacts.*

b) *Les applications $p : \mathfrak{N}(E) \longrightarrow \mathfrak{Rr}(E)$ et $m : \mathfrak{N}(E) \longrightarrow \mathfrak{N}(E)$ sont continues (voir 1.2 et 1.5).*

En effet :

a) Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ une famille de mérotopologies et soit \mathfrak{c} un ultrafiltre sur I , alors $\lim_{\mathfrak{c}} \omega_i = \bigcap_{J \in \mathfrak{c}} \bigcup_{i \in J} \omega_i$ est stable pour les réunions finies et les intersections finies et définit donc une mérotopologie. Ainsi tout ultrafiltre sur $\mathfrak{N}(E)$ est convergent et de plus $\mathfrak{N}(E)$ est séparé puisque l'espace $\mathfrak{F}(\mathfrak{Rr}(E))$ l'est.

L'espace $\mathcal{K}(\Upsilon(E))$ étant compact (voir rappels) il en est de même de $\mathfrak{Rr}(E)$. Enfin l'espace $\mathfrak{N}(E)$ est compact puisque toute limite de nasses est une nasse.

b) Soient $(G_i)_{i \in I}$ une famille de nasses sur E et \mathfrak{c} un filtre sur I pour lequel $G = \lim_{\mathfrak{c}} G_i$ existe ; soient ω_i l'ensemble des ouverts de G_i et ω l'ensemble des ouverts de G . Alors (1.3, lemme 1)

$$\omega = \inf_{\mathfrak{c}} \omega_i \subset \sup_{\mathfrak{c}} \omega_i \subset \omega$$

donc $\lim_{\mathfrak{c}} \omega_i$ existe et est égale à ω , autrement dit la famille $(m(G_i))_{i \in I}$ converge vers $m(G)$ suivant le filtre \mathfrak{c} . m est bien continue.

D'autre part, d'après 0.1, corollaire a) et c) des lemmes 6 et 7, pour tout $x \in E$ $\lim_{\mathfrak{c}} G_i(\tilde{x})$ existe et est égal à $G(\tilde{x})$, autrement dit la famille $(p(G_i))_{i \in I}$ converge vers $p(G)$ suivant le filtre \mathfrak{c} . cqfd

COROLLAIRE.— Sur $\mathfrak{C}(E)$ les topologies \mathfrak{N} et \mathfrak{R} sont moins fines que la topologie \mathfrak{U} .

En effet : Les restrictions de p et m à $\mathfrak{C}(E)$ sont des injections canoniques (voir 1.2 et 1.5). cqfd

On verra plus loin (contre-exemples) que si E est infini les topologies \mathfrak{N} et \mathfrak{R} sont strictement moins fines que la topologie \mathfrak{U} sur $\mathfrak{C}(E)$.

PROPOSITION 1.— Sur $\mathfrak{C}(E)$ la topologie \mathfrak{U} est égale à la borne supérieure des topologies \mathfrak{N} et \mathfrak{R} .

En effet : D'après le corollaire, il suffit de montrer que si un ultrafiltre sur $\mathfrak{C}(E)$ converge vers un même élément T de $\mathfrak{C}(E)$ pour les topologies \mathfrak{N} et \mathfrak{R} alors il converge aussi vers T dans la topologie \mathfrak{U} . Soit donc $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathfrak{C}(E)$ et soit \mathfrak{c} un ultrafiltre sur I tel que la famille converge vers $T \in \mathfrak{C}(E)$ dans la topologie \mathfrak{N} et la topologie \mathfrak{R} ; comme $\mathfrak{U}(E)$ est compact (pour la topologie \mathfrak{U}) cette famille converge vers $G \in \mathfrak{U}(E)$. Or, d'après le théorème 1, la famille $(m(T_i))_{i \in I}$ identique à $(T_i)_{i \in I}$ converge vers $m(G)$ pour la topologie \mathfrak{N} et la famille $(p(T_i))_{i \in I}$ identique à $(T_i)_{i \in I}$ converge vers $p(G)$ pour la topologie \mathfrak{R} . Ainsi $m(G) = T = p(G)$ or (voir 1.2 et 1.5) on a $p(G) \subset G \subset m(G)$ donc $G = T$. cqfd

DEFINITION 1.— On dira qu'une topologie sur un ensemble E est de type fini lorsque l'espace E est somme topologique d'un espace discret et d'un espace fini.

Soit T la nasse d'une topologie sur E ; pour que cette topologie soit de type fini il faut et il suffit que $T \cap \bigcap_{\mathfrak{c} \in \mathfrak{T}(E)} \Delta$ soit fini et contenu dans $\tilde{E} \times \tilde{E}$.

On désignera par $\mathfrak{C}_f(E)$ l'ensemble des nasses de topologies de type fini sur E . On désignera par $\mathfrak{B}_f(E)$ l'ensemble des nasses G sur E pour lesquelles $G \cap \bigcap \Delta$ est (fini et) contenu dans $\tilde{E} \times \tilde{E}$ (on a $\mathfrak{B}_f(E) \subset \mathfrak{B}(E)$, voir 1.2). On désignera par $\mathfrak{U}_*(E)$ l'ensemble des nasses G sur E telles que $G \delta G \subset G$; on a $\mathfrak{C}_f(E) \subset \mathfrak{C}(E) \subset \mathfrak{N}(E) \subset \mathfrak{U}_*(E)$. D'autre part, $\mathfrak{C}_a(E)$ désignera l'ensemble des nasses de topologies accessibles sur E (voir 2.2, III) et $\mathfrak{C}_s(E)$ l'ensemble des nasses T de topologies séparées sur E pour lesquels $T \cap \bigcap \Delta$ est fini.

THEOREME 2.— L'adhérence de $\mathfrak{C}_f(E)$ dans $\mathfrak{U}(E)$ (pour la topologie \mathfrak{U}) est égale à $\mathfrak{U}_*(E)$.

En effet : D'après 0.2, lemme 8, l'adhérence de $\mathfrak{C}_f(E)$ est contenue dans $\mathfrak{U}_*(E)$. Réciproquement, soit $G \in \mathfrak{U}_*(E)$, nous allons montrer que tout voisinage de G pour la topologie \mathfrak{U} contient un élément de $\mathfrak{C}_f(E)$; pour cela, on considère un recouvrement effectif \mathcal{R} (voir 1, rappels) de G dans l'espace $\mathfrak{T}(E) \times \mathfrak{T}(E)$. Pour tout $R \in \mathcal{R}$ on choisit un point $r_R \in G \cap R$ et l'on considère $G' = \Delta \cup \{r_R \mid R \in \mathcal{R}\}$; il est clair que $A = G' \cap \bigcap \Delta$ est fini, (que G' est une nasse) et que \mathcal{R} est un recouvrement effectif de G' . Soit $B = (pr_1 A) \cup (pr_2 A)$; B est un ensemble fini. On considère l'ensemble \mathcal{E} des parties X de $B \times B$ telles que $A \subset X$ et $X \delta X \subset X$. Alors $(B \times B) \cap G \in \mathcal{E}$ (car $A \subset B \times B$, $A \subset G$, $G \delta G \subset G$ et $(B \times B) \delta (B \times B) \subset B \times B$). Soit C l'intersection de tous les éléments de \mathcal{E} et soit $G'' = \Delta \cup C$. Alors $C \in \mathcal{E}$ et $G' \subset G'' \subset G$. Ainsi $G'' \in \mathfrak{U}_*(E)$, \mathcal{R} est un recouvrement effectif de G'' et $D = G'' \cap \bigcap \Delta$ est fini.

Posons $H = D \cap (\tilde{E} \times \tilde{E})$, $K = D \cap ((\tilde{C}\tilde{E}) \times (\tilde{C}\tilde{E}))$, $L = D \cap (\tilde{E} \times \tilde{C}\tilde{E})$ et $M = D \cap ((\tilde{C}\tilde{E}) \times \tilde{E})$. Pour tout $d \in D$, soit U_d l'intersection de tous les éléments de \mathcal{R} auxquels d appartient $\left(U_d = \bigcap_{d \in R \in \mathcal{R}} R \right)$;

c'est un voisinage de d ; il existe donc des parties X'_d et Y'_d telles que $d \in \mathfrak{T}(X'_d) \times \mathfrak{T}(Y'_d) \subset U_d$. Pour tout $d \in D$ on désigne par X_d l'intersection des X'_e pour lesquels $e \in D$ et $pr_1 e = pr_1 d$; de même, on désigne par Y_d l'intersection des Y'_e pour lesquels $e \in D$ et $pr_2 e = pr_2 d$. Alors $d \in \mathfrak{T}(X_d) \times \mathfrak{T}(Y_d) \subset U_d$ et $pr_1 e = pr_1 d$ implique $X_d = X_e$, de même $pr_2 e = pr_2 d$ implique $Y_d = Y_e$. De plus, si $d \in K$ alors X_d et Y_d sont infinis ; si $d \in L$ alors Y_d est infini, de même si $d \in M$ alors X_d est infini. Pour tout $b \in pr_2 L$ il existe un $x \in E$ tel que $d = (\tilde{x}, b) \in L$ et pour tout $e = (a, b) \in D$ on a $Y_d = Y_e$, notons cet ensemble W_b ; on peut donc choisir $y_b \in W_b$ de sorte que $\tilde{y}_b \notin pr_1 D$; pour tout $d = (\tilde{x}, b) \in L$ posons $d' = (\tilde{x}, \tilde{y}_b)$ et soit $L' = \{d' \mid d \in L\}$.

De même, pour tout $\mathfrak{a} \in \text{pr}_1 M$ il existe $y \in E$ tel que $(\mathfrak{a}, \tilde{y}) \in M$ et pour tout $e = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in D$ on a $X_{\mathfrak{a}} = X_{\mathfrak{e}}$, notons $V_{\mathfrak{a}}$ cet ensemble ; on peut choisir $\tilde{x}_{\mathfrak{a}} \notin \text{pr}_2 (D \cup L')$; pour tout $d = (\mathfrak{a}, \tilde{y}) \in M$ posons $d' = (\tilde{x}_{\mathfrak{a}}, \tilde{y})$ et soit $M' = \{d' \mid d \in M\}$. Considérons l'ensemble K_0 des éléments d de K pour lesquels $\text{pr}_1 d \in \text{pr}_1 M$ et $\text{pr}_2 d \in \text{pr}_2 L$ et soit K_1 le complémentaire de K_0 dans K . Pour tout $d = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in K_0$ il existe donc $e = (\tilde{x}, \mathfrak{b}) \in L$ et $f = (\mathfrak{a}, \tilde{y}) \in M$; on posera $d' = (\tilde{x}_{\mathfrak{a}}, \tilde{y}_{\mathfrak{b}})$ (ainsi $x_{\mathfrak{a}} \in V_{\mathfrak{a}} = X_{\mathfrak{e}} = X_{\mathfrak{d}}$ et $y_{\mathfrak{b}} \in W_{\mathfrak{b}} = Y_{\mathfrak{e}} = Y_{\mathfrak{d}}$) et $K'_0 = \{d' \mid d \in K_0\}$. Enfin, on peut choisir pour tout $d \in K_1$ un point $d' = (\tilde{x}, \tilde{y})$ tel que $x \in X_{\mathfrak{d}}$, $y \in Y_{\mathfrak{d}}$, que \tilde{x} et \tilde{y} n'appartiennent pas à $(\text{pr}_1(D \cup L' \cup M' \cup K'_0)) \cup \text{pr}_2(D \cup L' \cup M' \cup K'_0)$ (qui est fini) et que, en posant $K'_1 = \{d' \mid d \in K_1\}$ on ait $(\text{pr}_1 K'_1) \cap (\text{pr}_2 K'_1) = \emptyset$ (l'ensemble K étant fini, il suffit de l'énumérer et de procéder par récurrence).

On pose alors $T = \Delta \cup H \cup L' \cup M' \cup K'_0 \cup K'_1$. Il est clair que $T \cap C \Delta$ est fini et contenu dans $\tilde{E} \times \tilde{E}$ et que \mathcal{R} est un recouvrement effectif de T (car tout élément de \mathcal{R} qui ne rencontrerait pas $H \cup L' \cup M' \cup K'_0 \cup K'_1$ rencontrerait nécessairement Δ). Vérifions que T est idempotent ce qui prouvera que $T \in \mathfrak{C}_f(E)$ et achèvera la démonstration. Pour cela, on remarquera que si V et W sont des parties de $\Upsilon(E) \times \Upsilon(E)$ telles que $(\text{pr}_1 V) \cap (\text{pr}_2 W) = \emptyset$ alors $VW = \emptyset$. Ainsi :

$$HL' = HK'_0 = L'L' = L'K'_0 = M'H = M'L' = M'M' = M'K'_0 = K'_0H = K'_0L' = K'_0M' = K'_0K'_0 = \emptyset$$

et
$$(H \cup L' \cup M' \cup K'_0) K'_1 = K'_1 (H \cup L' \cup M' \cup K'_0) = K'_1 K'_1 = \emptyset.$$

D'autre part $HH \subset G'' \delta G'' \cap (\tilde{E} \times \tilde{E}) \subset G'' \cap (\tilde{E} \times \tilde{E}) \subset H \cup \Delta$. Aussi, $L'H \subset L'$ car si $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in H$ et $(\tilde{y}, \tilde{z}) \in L'$ il existe \mathfrak{b} tel que $(\tilde{y}, \mathfrak{b}) \in L$ ($z = y_{\mathfrak{b}}$) de sorte que $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in G''$ et $(\tilde{y}, \mathfrak{b}) \in G''$ donc $(\tilde{x}, \mathfrak{b}) \in G'' \delta G'' \subset G''$ donc $(\tilde{x}, \mathfrak{b}) \in L$ et $(\tilde{x}, \tilde{z}) = (x, y_{\mathfrak{b}}) \in L'$. De même $HM' \subset M'$. Enfin $L'M' \subset K'_0$ car si $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in M'$ et $(\tilde{y}, \tilde{z}) \in L'$, il existe \mathfrak{a} et \mathfrak{b} tels que $(\tilde{y}, \mathfrak{b}) \in L$ et $(\mathfrak{a}, \tilde{y}) \in M$ avec $z = y_{\mathfrak{b}}$ et $x = x_{\mathfrak{a}}$, donc $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in G'' \delta G'' \subset G''$, soit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in K_0$ donc $(\tilde{x}_{\mathfrak{a}}, \tilde{y}_{\mathfrak{b}}) = (\tilde{x}, \tilde{z}) \in K'_0$. cqfd

[Cette démonstration nous paraît un peu laborieuse et nous posons la question de savoir si elle peut être simplifiée notablement].

En particulier, $\mathfrak{C}_f(E)$ est dense dans $\mathfrak{C}(E)$ pour l'une quelconque des topologies \mathfrak{N} , \mathfrak{R} ou \mathfrak{U} . De manière imagée on peut ainsi dire que *toute topologie est approximable à l'aide de topologies de type fini* pour l'une quelconque des trois topologies.

CONTRE-EXEMPLES.— Soit E un ensemble *infini*.

Soient \mathfrak{a} et \mathfrak{b} des ultrafiltres non principaux, distincts, sur E . Soit $G = \Delta \cup \{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\}$, alors G est une nasse et $\hat{G} = G$ donc, a fortiori, $G \in \mathfrak{N}_*(E)$ (on peut même vérifier que $G \in \mathfrak{N}(E)$) mais $G \notin \mathfrak{C}(E)$; il existe donc (théorème 2) un ultrafiltre \mathfrak{c} sur $\mathfrak{C}_f(E)$ qui converge vers G dans la topologie \mathfrak{U} . L'ultrafiltre \mathfrak{c} converge alors vers $p(G) = \Delta$ dans la topologie \mathfrak{R} (théorème 1). Ainsi \mathfrak{c} converge dans $\mathfrak{C}(E)$ pour la topologie \mathfrak{R} et ne converge pas dans $\mathfrak{C}(E)$ pour la topologie \mathfrak{U} . Donc, *sur $\mathfrak{C}(E)$ la topologie \mathfrak{U} est strictement plus fine que la topologie \mathfrak{R} .*

D'autre part, choisissons un point $u \in E$ et soit $P = \Delta \cup \{(e, \mathfrak{a}) \mid e \in \Upsilon(E)\} \cup \{(e, \mathfrak{b}) \mid e \in \Upsilon(E) \text{ et } e \neq \tilde{u}\}$. Alors $P \in \mathfrak{R}(E)$ et $P \delta P \subset P$ donc $P \in \mathfrak{U}_*(E)$. Cependant $\hat{P} \neq P$ (car $\mathfrak{b} \in PP(\tilde{u})$ et $\mathfrak{b} \notin P(\tilde{u})$) donc $P \notin \mathfrak{C}(E)$. Il existe un ultrafiltre \mathfrak{d} sur $\mathfrak{C}_f(E)$ qui converge vers P dans la topologie \mathfrak{U} (théorème 2). Ainsi \mathfrak{d} converge vers $m(P) \in \mathfrak{C}(E)$ (théorème 1 et 1.7, proposition 6 a)) pour la topologie \mathfrak{N} , tandis que \mathfrak{d} ne converge pas dans $\mathfrak{C}(E)$ pour la topologie \mathfrak{U} . Donc, *sur $\mathfrak{C}(E)$ la topologie \mathfrak{U} est strictement plus fine que la topologie \mathfrak{N} .*

PROPOSITION 2.— $\mathfrak{B}_f(E)$ est dense dans $\mathfrak{U}(E)$ pour la topologie \mathfrak{U} .

En effet : Soit G une nasse sur E et soit \mathcal{R} un recouvrement effectif de G . Comme $\tilde{E} \times \tilde{E}$ est dense dans $\Upsilon(E) \times \Upsilon(E)$, pour tout $R \in \mathcal{R}$ il existe $r_R \in (\tilde{E} \times \tilde{E}) \cap R$; ainsi $G' = \Delta \cup \{r_R \mid R \in \mathcal{R}\}$ appartient à $\mathfrak{B}_f(E)$ et \mathcal{R} est un recouvrement effectif de G' . cqfd

Donc, a fortiori, $\mathfrak{B}_f(E)$ est dense dans $\mathfrak{R}(E)$ pour la topologie \mathfrak{R} .

PROPOSITION 3.— Si E est infini, $C_{\mathfrak{R}(E)} \mathfrak{R}(E)$ est dense dans $\mathfrak{T}(E)$ pour la topologie \mathfrak{T} .

En effet : Comme $\mathfrak{R}_f(E)$ est dense dans $\mathfrak{T}(E)$, il suffit de montrer que tout élément G de $\mathfrak{B}_f(E)$ est limite d'une famille d'éléments de $C \mathfrak{R}(E)$. Or, E étant infini, il existe un ultrafiltre non principal \mathfrak{a} . Le point \mathfrak{a} n'est pas isolé dans l'espace $C_{\mathfrak{T}(E)} \tilde{E}$, il existe donc sur $I = C(\tilde{E} \cup \{\mathfrak{a}\})$ un ultrafiltre \mathfrak{c} qui converge vers \mathfrak{a} dans $\mathfrak{T}(E)$. Pour tout $\iota \in I$ on pose $G_\iota = G \cup \{(\mathfrak{a}, \iota)\}$; il est clair que $G_\iota \notin \mathfrak{R}(E)$. De plus

$$\begin{aligned} \lim_{\mathfrak{c}} G_\iota &= \bigcap_{J \in \mathfrak{c}} \text{Adh} \bigcup_{\iota \in J} G_\iota = \bigcap_{J \in \mathfrak{c}} \text{Adh} G \cup (\{\mathfrak{a}\} \times J) = \bigcap_{J \in \mathfrak{c}} G \cup (\{\mathfrak{a}\} \times \text{Adh} J) \\ &= G \cup \bigcap_{J \in \mathfrak{c}} \{\mathfrak{a}\} \times \text{Adh} J = G \cup \{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})\} = G \end{aligned} \quad \text{cqfd}$$

En particulier, si E est infini, $\mathfrak{T}(E)$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathfrak{T}(E)$ pour la topologie \mathfrak{T} .

PROPOSITION 4.— $\mathfrak{T}_a(E)$ est fermé dans $\mathfrak{T}(E)$ pour chacune des topologies \mathfrak{R} , \mathfrak{N} et \mathfrak{T} .

En effet : Soit $A = \Delta \cup (\mathfrak{T}(E) \times C \tilde{E})$; c'est la nasse d'une topologie accessible sur E et $\omega_A = \{X \mid C X \text{ partie finie de } E\} \cup \{\emptyset\}$. Pour qu'une topologie sur E de nasse T soit accessible il faut et il suffit que $T \subset A$, il faut et il suffit que $\omega_A \subset \omega_T$ (voir 2.2, III). Le résultat en découle immédiatement. cqfd

PROPOSITION 5.— L'adhérence de $\mathfrak{T}_0(E)$ dans $\mathfrak{T}(E)$ (pour chacune des topologies \mathfrak{R} , \mathfrak{N} et \mathfrak{T}) est égale à $\mathfrak{T}_a(E)$.

En effet : $\mathfrak{T}_0(E) \subset \mathfrak{T}_a(E)$ qui est fermé (proposition 4). De plus soit $T \in \mathfrak{T}_a(E)$ et soit \mathcal{R} un recouvrement effectif de T, alors, pour tout $R \in \mathcal{R}$, si R ne rencontre pas Δ , il existe un point $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de $\mathfrak{T}(E) \times \mathfrak{T}(E)$ appartenant à R où \mathfrak{b} n'est pas principal; donc il existe $x_R \in E$ et X_R infini tels que

$$\{\tilde{x}_R\} \times \mathfrak{T}(X_R) \subset R.$$

Comme \mathcal{R} est fini, $\mathcal{R}' = \{R \mid R \in \mathcal{R} \text{ et } R \cap \Delta = \emptyset\}$ est aussi fini; on peut donc choisir des ultrafiltres \mathfrak{b}_R non principaux, *distincts deux à deux*, tels que $(\tilde{x}_R, \mathfrak{b}_R) \in R$ pour $R \in \mathcal{R}'$. Soit $V = \Delta \cup \{(\tilde{x}_R, \mathfrak{b}_R) \mid R \in \mathcal{R}'\}$. Alors $V \in \mathfrak{T}_0(E)$ et \mathcal{R} est un recouvrement effectif de V. Ainsi tout voisinage de T dans la topologie \mathfrak{T} (donc aussi dans les topologies \mathfrak{R} et \mathfrak{N} moins fines) rencontre $\mathfrak{T}_0(E)$. cqfd

LEMME 1.— Tout élément de $\mathfrak{T}_0(E)$ est la nasse d'une topologie paracompacte et complètement normale.

En effet : Soit $T \in \mathfrak{T}_0(E)$; alors $T(\tilde{E}) \cap C \tilde{E}$ est fini, c'est donc un fermé de $\mathfrak{T}(E)$; il possède donc (0.2, rappels f) et 2.4) un système fondamental de voisinages disloqués. Dé plus $\overline{T(\tilde{E})} = T(\tilde{E})$ donc (voir 2.4, théorème 4) la topologie définie par T est quasi paracompacte, comme elle est séparée par définition, elle est paracompacte. D'autre part $\overline{T} \subset T \cup \overline{T}$ et le résultat découle de 2.2, XII, proposition 17. cqfd

COROLLAIRE.— L'adhérence dans $\mathfrak{T}(E)$ de l'ensemble des nasses de topologies paracompactes est égale à $\mathfrak{T}_a(E)$ (pour l'une quelconque des topologies \mathfrak{R} , \mathfrak{N} ou \mathfrak{T}).

Plus généralement, on a le résultat suivant.

THEOREME 3.— Toute topologie accessible sur E est limite (pour l'une quelconque des topologies \mathfrak{T} , \mathfrak{R} ou \mathfrak{N}) de topologies compactes sur E.

En effet : D'après la proposition 5, il suffit de montrer que si $T \in \mathfrak{T}_0(E)$ et si \mathcal{R} est un recouvrement effectif de T dans $\mathfrak{T}(E) \times \mathfrak{T}(E)$, il existe $V \in \mathfrak{V}(T; \mathcal{R})$ où V est une nasse de topologie compacte sur E. Soit donc \mathcal{R} un recouvrement effectif de T et soit $\mathcal{R}_1 = \{R \mid R \in \mathcal{R} \text{ et } R \cap \Delta \neq \emptyset\}$. Alors $W = \bigcup_{R \in \mathcal{R}_1} R$ est un voisinage ouvert de Δ , il existe donc une partition \mathfrak{X} de E telle que $\bigcup_{X \in \mathfrak{X}} \mathfrak{T}(X) \times \mathfrak{T}(X) \subset W$. D'autre part soit $\mathcal{A} = \text{pr}_2(T \cap C \Delta)$; pour tout $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ il existe un point $x_{\mathfrak{a}}$ unique tel que $(\tilde{x}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a}) \in T \cap C \Delta$ (car T est la nasse d'une topologie *séparée*). Pour tout $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ soit $R_{\mathfrak{a}}$ un élément de \mathcal{R} tel que $(\tilde{x}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a}) \in R_{\mathfrak{a}}$; il existe une famille $(Y_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}}$ de parties de E deux à deux disjointes telle que pour tout $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ on ait

$$(\tilde{x}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a}) \in \{\tilde{x}_{\mathfrak{a}}\} \times \mathfrak{T}(Y_{\mathfrak{a}}) \subset R_{\mathfrak{a}}.$$

Posons $U_\alpha = \{(\tilde{x}_\alpha, \mathfrak{b}) \mid \mathfrak{b} \in \Upsilon(Y_\alpha) \cap C\tilde{E}\}$, $Y = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} Y_\alpha$ et $\mathfrak{X}_1 = \{X \cap CY \mid X \in \mathfrak{X} \text{ et } X \cap CY \neq \emptyset\}$.
 Pour tout $X \in \mathfrak{X}_1$ soit x_X un point de X et soit $U_X = \{(\tilde{x}_X, \mathfrak{b}) \mid \mathfrak{b} \in \Upsilon(X) \cap C\tilde{E}\}$. Posons enfin

$$V = \Delta \cup \left(\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha \right) \cup \left(\bigcup_{X \in \mathfrak{X}_1} U_X \right)$$

On vérifie que V est la nasse d'une topologie compacte sur E et que $V \in \mathfrak{V}(T; \mathcal{R})$. *cqfd*

Soient E un ensemble, P une propriété portant sur les topologies sur E et $\tau(P)$ l'ensemble des nasses des topologies sur E qui satisfont à la propriété P . D'une manière imagée, on peut dire que P est *stable* lorsque $\tau(P)$ est ouvert dans $\mathfrak{T}(E)$; de même on peut dire que P est *ferme* lorsque $\tau(P)$ est fermé dans $\mathfrak{T}(E)$; correspondant aux trois topologies \mathfrak{N} , \mathfrak{R} et \mathfrak{M} , on a ainsi trois notions de stabilité et trois notions de fermeté. Les théorèmes 2 et 3 permettent alors de dire que la propriété de compacité, sur un ensemble infini quelconque, n'est ni stable ni ferme (pour \mathfrak{N} , \mathfrak{R} ou \mathfrak{M}); il en va de même des propriétés suivantes : être séparée, être régulière, être normale, être complètement normale (proposition 5 et lemme 1), être paracompacte. Par contre, la propriété d'être accessible est ferme (proposition 4).

3. ENSEMBLES D'APPLICATIONS CONTINUES

Soient G une nasse sur un ensemble E et H une nasse sur l'ensemble F . On désignera par $\mathfrak{G}(G, H)$ l'ensemble des parties X de $E \times F$ pour lesquelles on a $\hat{X}G \subset H\hat{X}$; on désignera par $\mathfrak{C}(G, H)$ la partie de $\mathfrak{G}(G, H)$ formée des graphes d'applications $f : E \longrightarrow F$. On peut identifier $\mathfrak{C}(G, H)$ à l'ensemble des applications $f : E \longrightarrow F$ pour lesquelles on a $\hat{f}G \subset H\hat{f}$; ainsi, si G et H sont des nasses de *topologies*, $\mathfrak{C}(G, H)$ est l'ensemble des *applications continues* de E dans F (voir 2.5, théorème 6). On a $\mathfrak{C}(G, H) = \mathfrak{C}(\overline{G}, \overline{H})$, d'après 2.5, lemme 21.

Soient $(G_i)_{i \in I}$ une famille de nasses sur E , H une nasse sur F et \mathfrak{c} un filtre sur I . Alors on a

$$\inf_{\mathfrak{c}} \mathfrak{G}(G_i, H) \subset \mathfrak{G}\left(\sup_{\mathfrak{c}} G_i, H\right) \quad \text{et} \quad \sup_{\mathfrak{c}} \mathfrak{G}(G_i, H) \subset \mathfrak{G}\left(\inf_{\mathfrak{c}} G_i, H\right)$$

En effet : Remarquons d'abord (voir 0.3, lemme 15) que

$$\hat{X}\left(\sup_{\mathfrak{c}} G_i\right) = \sup_{\mathfrak{c}} \hat{X}G_i \quad \text{et} \quad \hat{X}\left(\inf_{\mathfrak{c}} G_i\right) \subset \inf_{\mathfrak{c}} \hat{X}G_i,$$

car \hat{X} est mi-ouverte (0.3, lemme 13). Ainsi :

$$\begin{aligned} X \in \inf_{\mathfrak{c}} \mathfrak{G}(G_i, H) &\iff \exists J \in \mathfrak{c} \forall i \in J X \in (G_i, H) \iff \exists J \in \mathfrak{c} \forall i \in J \\ &\hat{X}G_i \subset H\hat{X} \iff \exists J \in \mathfrak{c} \text{Adh} \bigcup_{i \in J} \hat{X}G_i \subset H\hat{X} \iff \sup_{\mathfrak{c}} \hat{X}G_i \subset H\hat{X} \iff \\ &\hat{X}\left(\sup_{\mathfrak{c}} G_i\right) \subset H\hat{X} \iff X \in \mathfrak{G}\left(\sup_{\mathfrak{c}} G_i, H\right). \end{aligned}$$

On a une démonstration analogue pour la seconde inclusion. *cqfd*

Dans les mêmes conditions on a

$$\inf_{\mathfrak{c}} \mathfrak{C}(G_i, H) \subset \mathfrak{C}\left(\sup_{\mathfrak{c}} G_i, H\right) \quad \text{et} \quad \sup_{\mathfrak{c}} \mathfrak{C}(G_i, H) \subset \mathfrak{C}\left(\inf_{\mathfrak{c}} G_i, H\right);$$

car $\mathfrak{C}(G, H)$ est l'intersection de $\mathfrak{G}(G, H)$ avec l'ensemble des (graphes d') applications de E dans F .

CONTRE-EXEMPLE.— Soient E un ensemble infini et \mathfrak{a} un ultrafiltre non principal sur E . Pour tout $x \in E$ soit $G_x = \Delta \cup \{(\tilde{x}, \mathfrak{a})\}$; c'est une nasse de topologie sur E et $\lim_{\mathfrak{a}} G_x = \Delta$ (nasse de la topologie discrète).

Ainsi $\mathcal{C}(\lim_{\mathfrak{a}} G_x, \Delta) = \mathcal{C}(\Delta, \Delta)$ est l'ensemble des applications de E dans E.

D'autre part,

$$\mathcal{C}(G_x, \Delta) = \{f \mid \exists A \in \mathfrak{a} \ f(A) = f(x)\} ;$$

ainsi

$$\lim_{\mathfrak{a}} \mathcal{C}(G_x, \Delta) = \bigcap_{X \in \mathfrak{a}} \bigcup_{x \in X} \mathcal{C}(G_x, \Delta) = \{f \mid \forall X \in \mathfrak{a} \ \exists x \in X \ \exists A \in \mathfrak{a} \ f(A) = f(x)\} = \{f \mid \exists A \in \mathfrak{a}$$

tel que f soit constante sur A\}.

Donc $\lim_{\mathfrak{a}} \mathcal{C}(G_x, \Delta) \neq \mathcal{C}(\lim_{\mathfrak{a}} G_x, \Delta)$. Autrement dit l'application $G \longrightarrow \mathcal{C}(G, \Delta)$ de l'espace $\mathfrak{C}(E)$ (muni de la topologie $\mathcal{J}\mathcal{C}$) dans l'espace des parties non vides de l'ensemble (discret) des applications de E dans E, n'est pas continue.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BING (R.H.).— Metrization of topological spaces, *Canad. J. Math.* 3 (1951) 175-186.
- [2] BOURBAKI (N.).— Eléments de mathématiques, *Act. Sci. Ind.*, Hermann, Paris, Livre I, *Théorie des ensembles*, chap. III, 2ème éd., 1963.
- [3] .— *id.*, Livre III, *Topologie générale*, chap. I, II, 2ème éd., 1951.
- [4] .— *id.*, Livre III, *Topologie générale*, chap. I, II, 3ème éd., 1961.
- [5] .— *id.*, Livre III, *Topologie générale*, chap. IX, 2ème éd., 1958 et feuille d'errata n° 12.
- [6] .— *id.*, *Algèbre commutative*, chap. I, II, 1961.
- [7] CHOQUET (G.).— Convergences, *Ann. Univ. Grenoble*, 23 (1947 et 1948) 57-112.
- [8] .— Sur les notions de filtre et de grille, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 224 (1947) 171-173.
- [9] CSASZAR (A.).— *Fondements de la topologie générale*, Gauthiers-Villars, Paris, 1960.
- [10] .— Structures syntopogènes et tramails, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, 8 (1965) 101-117.
- [11] EVANS (J.W.), HARARY (F.) et LYNN (M.S.).— On the computer emmeration of finite topologies, *Communic. A.C.M.*, 10 (1967) 295-297.
- [12] GILLMAN (L.) and JERISON (M.).— *Rings of continuous functions*, van Nostrand, 1960.
- [13] HADDAD (L.).— Une représentation des topologies, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 255 (1962) 2702-2704.
- [14] .— Sur la notion de tramail, *ibid.* 255 (1962) 2880-2882.
- [15] .— Sur quelques points de topologie générale, *ibid.* 266 (1968) 613-615.
- [16] INAGAKI (T.) and SUGAWARA (M.).— Compactification of topological spaces, *Math. J. Okayama Univ.*, 2 (1952) 85-101.
- [17] KELLEY (J.L.).— *General Topology*, van Nostrand, 1955.
- [18] NACHBIN (L.).— Sur les espaces uniformes ordonnés, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 226 (1948) 774-775.
- [19] PERVIN (W.J.).— Quasi-uniformization of topological spaces, *Math. Ann.*, 147 (1962) 316-317.
- [20] SAMUEL (P.).— Ultrafilters and compactification of uniform spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64 (1948) 100-132.
- [21] SHARP (H., Jr.).— Homeomorphisms on finite sets, *Math. Mag.*, 40 (1967) 152-156.
- [22] STONE (A.H.).— Paracompactness and product spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54 (1948) 977-982.

INDEX DES NOTATIONS

$\text{Adh } X, \text{Int } X, \mathcal{V}(x)$	09	$m, \mathcal{M}(E)$	29
$\inf_{\mathfrak{c}} A_i, \sup_{\mathfrak{c}} A_i, \lim_{\mathfrak{c}} A_i$	14	$\mathfrak{C}(E)$	29
$\mathfrak{g}(\mathfrak{c})$	14, 17	R^*	31
$\Upsilon \langle \mathfrak{X} \rangle, \Upsilon(X), \tilde{x}, \Upsilon(E), \tilde{X}, \tilde{E}$	16	$R_{\mathfrak{c}}$	33
δ, Δ, δ_E	16	$\mathfrak{X}_a, \mathfrak{X}^*, \mathfrak{X}^*(A), \mathfrak{X}^*(x)$	48
$\widehat{G}, G(\mathfrak{X}), G(\mathfrak{a})$	17	$\text{ét}(\mathfrak{X})$	52
$\mathcal{F}(E), \mathcal{F}_r(E), \mathcal{B}(E)$	24	\mathfrak{X}_s (abus de notation)	53
p, b	24	${}^a\Lambda$	61
$\omega_G, \varphi_G, \psi_G$	25	\check{I}	63
\bar{X}	26	$\mathcal{F}(E), \mathcal{K}(E)$	67
$\varphi(\mathfrak{a})$	26	$\mathcal{V}(K; \mathcal{R})$	67
$\mathcal{J}\mathcal{C}(\Upsilon(E))$	27	$\mathfrak{C}_f(E), \mathcal{B}_f(E), \mathcal{N}_*(E), \mathfrak{C}_a(E), \mathfrak{C}_o(E)$	69
$[X], \mathfrak{X}(\mathfrak{a}), \varphi(\mathfrak{a}), \mathfrak{X}(X)$	28	$\mathcal{G}(G, H), \mathcal{C}(G, H)$	72
$\omega(\mathfrak{a})$	28		

INDEX TERMINOLOGIQUE

Application continue	55	Espace quasi compact	40
Application fermée	56	Espace quasi éparpillé	46
Application ouverte	56	Espace quasi normal	40
Application propre	56	Espace quasi paracompact	49
Bi-ouvert (graphe)	13	Espace quasi régulier	39
Compactifié de Stone-Čech	65	Espace quasi semi-compact	41
Complémentaire d'un ordre topogène	33	Espace régulier	39
Concentrée (partie)	14	Espace semi-compact	41
Converge strictement (un filtre)	38	Espace semi-régulier	39
Degré (de dislocation)	52	Espace semi-uniforme	21
Discrète (famille)	48	Espace séparé	38
Dislocation	52	Espace séparé associé (à un espace uniforme)	60
Disloquée (partie)	52	Espace submaximal	43
Eloignée	31	Espace des ultrafiltres	16
Espace absolument fermé	39	Espace uniforme précompact	59
Espace accessible	37	Espace weierstrassien	65
Espace collectivement normal	49	Etendue	52
Espace collectivement quasi normal	49	Etoilement	48
Espace compact	40	Extension continue (d'une application)	
Espace compact de Stone-Čech associé	65	aux ultrafiltres	19
Espace complètement extrêmement discontinu	41	Extension continue à $\Upsilon(E)$	19
Espace complètement normal	40	Extension (d'un graphe) aux ultrafiltres	17
Espace complètement quasi normal	40	Faiblement fermé (pour une nasse)	25
Espace complètement séparé	39	Fermé (d'une mérotopologie)	28
Espace concentré	14	Fermé (pour une nasse)	25
Espace connexe	46	Fermeture	24
Espace éparpillé	46	Filtrante (partie de $\mathfrak{A}(E)$)	44
Espace extrêmement discontinu	41	Filtre de Cauchy	59
Espace faiblement accessible	37	Grille (associée à un filtre)	14, 17
Espace faiblement régulier	45	Idempotent (graphe ou fonction)	9
Espace faiblement séparé	38	Limite	14
Espace de Kolmogoroff	37	Limite inférieure	14
Espace irréductible	42	Limite supérieure	14
Espace localement compact	46	Localement fermée (partie)	43
Espace de Lindelöf	55	Λ -famille	61
Espace normal	40	Λ -modifié (d'un filtre)	61
Espace paracompact	49	Λ -modifiée (d'une prétopologie)	61
Espace pleinement quasi normal	49	Mérotopologie	28
Espace quasi absolument fermé	39	Mi-ouvert (graphe)	13
		Nasse	23

Nasse bi-ouverte	23	Proximité de Čech	63
Nasse d'une mérotopologie	28	Représenter (un filtre)	17
Nasse mi-ouverte	23	Séparé complété (d'un espace uniforme)	60
Nasse d'un ordre topogène	34	Structure semi-uniforme	21
Nasse d'une prétopologie	26	Structure séparée associée (à une structure uniforme)	60
Nasse d'une proximité	32	Structure syntopogène	58
Nasse d'une topologie	29	Topologie associée à une proximité	31
Ordre topogène	33	Topologie de Čech	63
Ouvert (d'une mérotopologie)	28	Topologie des mérotopologies (ou topologie \mathfrak{M})	67
Ouvert (pour une nasse)	25	Topologie des nasses (ou topologie \mathfrak{N})	68
Ouvert régulier	39	Topologie des prétopologies (ou topologie \mathfrak{R})	68
Pré-adhérence	26	Topologie de type fini	69
Prétopologie	26	Tramail	57
Proche	31	Tramail d'une structure semi-uniforme	57
Propriété ferme	72	Treillis des nasses	24
Propriété stable	72	Ultrafiltre principal	16
Proximisable (espace ou topologie)	31	Uni (recouvrement)	48
Proximité	31		
Proximité associée (à une structure uniforme)	59		

(127 av. Philippe-Auguste, 75 – Paris 11e)