S. CHEVET

Mesures de Radon sur $\mathbf{R}^n$ et mesures cylindriques

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 43, série *Mathématiques*, n° 6 (1970), p. 91-158
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1970__43_6_91_0>

MESURES DE RADON SUR $\mathbb{R}^n$

ET MESURES CYLINDRIQUES

par

S. CHEVET

Nous avons conçu cet exposé un peu dans l'esprit d'un Séminaire et nous n'avons surtout pas la prétention de faire preuve d'originalité. Nous donnerons quelques nouveaux résultats dans la partie IV de cet exposé. Nous énoncerons beaucoup de résultats connus et pour certains nous rappelerons leurs démonstrations.

Cet exposé est basé sur le fait qu'il existe un lien étroit d'une part entre les mesures cylindriques et les fonctions de type positif et d'autre part entre les processus linéaires à lois marginales indéfiniment divisibles et les fonctions de type négatif.

Dans le paragraphe I nous parlerons des processus linéaires et des mesures cylindriques et rappelerons certaines de leurs propriétés usuelles en s'appuyant sur des articles de Badrikian [1] , Saphar [10] et Schwartz [14]. Dans le paragraphe II nous parlerons des transformées de Fourier d'une mesure cylindrique, des fonctions de type positif et de type négatif, du lien existant entre les mesures cylindriques et les fonctions de type positif et nous donnerons quelques exemples de fonctions de type positif tirés d'un article de Bretagnolle, Dacunha-Castelle et Krivine [2] . Dans le paragraphe III nous ferons quelques remarques sur les lois indéfiniment divisibles, les fonctions de type négatif et nous poserons un problème. Enfin dans le dernier paragraphe nous étudierons certaines mesures cylindriques images de mesures cylindriques sur un Hilbert et pour cela nous serons amenés à établir des lemmes intéressants par eux-mêmes. L'étude de ce paragraphe s'appuiera sur un article de Dudley [5] et une note de Sudakov [13] .

0 - PRELIMINAIRES

Dans cet exposé on ne considérera que des espaces topologiques séparés et que des probabilités (de Radon) (sauf précision contraire).

Etant donné E un espace topologique séparé, on notera $\mathcal{B}_E$ sa tribu de Borel et $\mathcal{P}(E)$ la famille des probabilités de Radon sur E (c'est-à-dire la famille des probabilités μ sur $\mathcal{B}_E$ telles que

$\mu(B) = \sup \{\mu(K) ; K \subset B , K \text{ compact}\}$

pour tout B borélien). On munira $\mathcal{P}(E)$ de la topologie étroite c'est-à-dire de la topologie la moins fine pour laquelle, pour toute fonction f bornée semi-continue inférieurement (s.c.i), la fonction $\mu \to \mu(f)$ soit s.c.i..

On a les propriétés suivantes :

(0_1) $\mathcal{P}(E)$ est séparée et on peut se borner à des f fonctions caractéristiques d'ouverts appartenant à une base de la topologie de E, stable par réunion finie.

(0_2) Pour qu'une partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(E)$ soit relativement compact dans $\mathcal{P}(E)$ il est suffisant (et nécessaire si E est localement compact ou polonais) que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset E$ tel que pour toute $\mu \in \mathcal{M}$, $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

(0_3) Soient E et F deux espaces topologiques séparés et $h : E \to F$ continue. Pour qu'une probabilité de Radon sur F soit image par h d'une probabilité de Radon sur E il faut et il suffit qu'elle soit portée pr

Radon sur E il faut et il suffit qu'elle soit portée par une réunion dénombrable d'images de compacts de E .

(O_4) Théorème de Prokhorov .- Soient $(X_i , \pi_{ij})_{i\in I}$ un système projectif d'espaces topologiques et un système projectif $(\mu_i)_{i\in I}$ de probabilités de Radon relatif au système projectif. Soient d'autre part X un espace topologique séparé, $p_i : X \to X_i$ des applications continues avec $p_i = \pi_{ij} \circ p_j$ pour tout $i \leq j$.

Pour qu'il existe une probabilité de Radon μ sur X vérifiant $\mu_i = p_i \circ \mu$ pour tout i il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de X tel que, pour tout i, $\mu_i (p_i (K_\varepsilon)) \geq 1 - \varepsilon$.

I. PROCESSUS, PROBABILITES CYLINDRIQUES, PROBABILITES DE RADON D'ORDRE p

1. Processus

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité ; on notera $L^{\circ}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace des P-classes de variables aléatoires réelles relatives à $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et on mettra toujours sur cet espace la structure uniforme de la convergence en mesure.

Une fonction aléatoire (réelle) relative à $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ définie sur un ensemble T est une application L de T dans $L^{\circ}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et elle sera notée $(\Omega, \mathcal{F}, P, L)$. Si $\phi(T)$ désigne la famille des parties finies de T, on notera, pour tout I de $\phi(T)$, P_I la loi de la variable aléatoire $\omega \to (L(t)(\omega))_{t \in I}$. Les P_I seront appelées probabilités marginales de L.

Deux fonctions aléatoires $(\Omega, \mathcal{F}, P, L)$ et $(\Omega', \mathcal{F}', P', L')$ définies sur T sont dites isonomes si elles ont même système de probabilités marginales. La "classe" d'isonomie d'une fonction aléatoire sur T sera appelée processus sur T et on dira que toute fonction aléatoire de cette classe est un représentant du processus. Si de plus $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est tel que Ω est complètement régulier, $\mathcal{F}$ est la tribu de Borel sur Ω et P une probabilité de Radon sur Ω le représentant sera dit usuel.

Si T est un espace vectoriel (resp. un espace topologique) une fonction aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}, P, L)$ sur T est dite linéaire (resp. continue) si L est linéaire (resp. continue). Un processus sur T sera dit linéaire (resp. continu) si l'un de ses représentants est linéaire (resp. continu). Mais comme la linéarité et la continuité d'une fonction aléatoire s'expriment seulement au

$$a_{ij} = \frac{< a_i^* , a_j^* >}{||a_i^*|| \; ||a_j^*||} \quad , \; b_{ij} = \frac{< b_i^* , b_j^* >}{||b_i^*|| \; ||b_j^*||}$$

On a, si $i \neq j$,

$$a_{ij} = \frac{< a_i , a_j > + 1}{\sqrt{||a_i||^2+1} \sqrt{||a_j||^2+1}} \quad \text{et } b_{ij} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 / 4 \, (M^2+1)^2}$$

On vérifie, grâce à (6), que

$$a_{ij} \leq b_{ij} \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

$$a_{ii} = b_{ii} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n .$$

Et ainsi $I_2 \leq I_3$ par le théorème (IV;5).

$I_3 \leq I_4$. Posons $C = 2 \, (M^2+1)$. On a :

$$I_3 = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n+1}} \int_{\substack{x_i \leq \frac{\lambda C}{\varepsilon} \\ 1<i<n}} \exp\left(- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \exp\left(- \frac{\lambda^2}{2}\right) dx_1 \ldots dx_n \, d\lambda$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(- \frac{\lambda^2}{2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda C/\varepsilon} \exp\left(- \frac{u^2}{2}\right) du\right)^n d\lambda$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} \exp\left(- \frac{\lambda^2}{2}\right) \left[F^n \left(\frac{\lambda C}{\varepsilon}\right) + F^n \left(\frac{- \lambda C}{\varepsilon}\right)\right] d\lambda$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} \exp\left(- \frac{\lambda^2}{2}\right) \left(1 - F \left(\frac{\lambda C}{\varepsilon}\right)\right)^n d\lambda \text{ , c.q.f.d.}$$

Ce corollaire permet de retrouver un résultat énoncé dans une note de Sudakov ⌊13⌋ et mentionné dans la remarque (I;1) à savoir le

Corollaire 2.- Soit H un Hilbert réel, de boule unité U et soit $L : H \to L^0 (\Omega, \mathcal{F}, P)$ une fonction aléatoire (réelle) linéaire gaussienne normale.

moyen des probabilités marginales, tout représentant d'un processus linéaire (resp. continu) est linéaire (resp. continu).

2. Probabilité cylindrique

Soient E et F deux espaces vectoriels en dualité par $<.,.>$, $\mathfrak{F}_F$ la famille de tous les sous espaces de dimension finie de F . Pour tout $N \in \mathfrak{F}_F$ on notera E_N l'espace quotient $E/N^{\perp}$, Π_N l'application canonique de E dans E_N et $< | >_N$ la forme bilinéaire sur $E_N \times N$ définie par

$$< \Pi_N y \mid x >_N = < y , x > \qquad (x \in N , y \in E) .$$

De plus, $\mathscr{C} < E, F >$ désignera l'algèbre des cylindres relativement à la dualité entre E et F ; c'est-à-dire

$$\mathscr{C} < E, F > = \bigcup_{N \in \mathfrak{F}_F} \Pi_N^{-1} (\mathscr{B}_{E_N}) .$$

Un cylindre $C \in \mathscr{C} < E, F >$ est dit ouvert s'il existe $N \in \mathfrak{F}_F$ et $\mathcal{O}$ ouvert de E_N tel que $C = \Pi_N^{-1} (\mathcal{O})$.

On appelle probabilité cylindrique (ou mesure cylindrique) sur E, relativement à la dualité donnée entre E et F , un système projectif d'espaces mesurés $(E_N, \mu_N)_{N \in \mathfrak{F}_F}$, où μ_N est une probabilité de Radon sur E_N .

Remarque (I,2;1).- D'après l'exposé 3 de [1] , l'espace vectoriel $\varprojlim E_N$ est isomorphe au dual algébrique F^* de F et la topologie limite projective sur F^* est identique à la topologie $\sigma(F^*, F)$. De plus, si $\hat{E}_\sigma$ est le complété de E pour $\sigma < E, F >$, on a $\hat{E}_\sigma = F^*$ algébriquement et topologiquement.

Rappelons maintenant quelques résultats sur les algèbres de cylindres et les mesures cylindriques (cf [1] et [14]).

Propriété (I,2;1).- Soient E et F deux espaces en dualité par $< ., . >$. Si E_1 est un sous-espace vectoriel de E , $\sigma < E, F >$ partout dense dans E , alors :

$$(C \in \mathcal{C}< E, F > , C \supset E_1) \Longrightarrow C = E$$

(c'est-à-dire : $(C' \in \mathcal{C}< E, F > , C' \cap E_1 = \emptyset) \Longrightarrow C' = \emptyset$) .

Preuve.- Soit $C \in \mathcal{C}< E, F >$, c'est-à-dire il existe $N_o \in \mathfrak{F}_F$ et A borélien de $E / N_o^{\perp}$ tel que $C = \Pi_{N_o}^{-1} (A)$.

On a, si $C \supset E_1$,

$$\Pi_{N_o} (C) \supset \Pi_{N_o} (E_1) = \overline{\Pi_{N_o} (E_1)} \supset \Pi_{N_o} (E) = E / N_o^{\perp}$$

puisque Π_{N_o} est faiblement continue et que $\Pi_{N_o} (E_1)$ est un espace vectoriel de dimension finie, donc fermé. Donc,

$$\Pi_{N_o} (C) = E / N_o^{\perp} = A$$

c'est-à-dire $C = E$, c.q.f.d.

Remarque (I,2;2).- Soient E et F deux espaces vectoriels en dualité par $< ., . >$. Si E_1 est un sous espace vectoriel de E en dualité aussi avec F par $<., . >$, alors E_1 est $\sigma < E, F >$-dense dans E et d'après ci-dessus l'application qui associe à $A \in \mathcal{C}< E, F >$ sa trace sur E_1 est une bijection de $\mathcal{C}< E, F >$ sur $\mathcal{C}< E_1, F >$.

Propriété (I,2;2) (cf [1], Ch. 1 et Ch. 3).- Soient E et F deux espaces vectoriels en dualité par $< ., . >$. Il existe une correspondance bijective, d'une part entre

i) les processus linéaires sur F ,

ii) les mesures cylindriques sur E (pour la dualité entre E et F) ;

et d'autre part entre

i') les applications μ de $\mathcal{C}\langle E, F\rangle$ dans $[0, 1]$ telles que, pour tout $N \in \mathfrak{F}_F$, l'application $B \to \mu\ (\Pi_N^{-1}(B))$ de $\mathcal{B}_{E_N}$ dans $[0, 1]$ est une probabilité de Radon,

ii') les mesures cylindriques $(\mu_N)_{N \in \mathfrak{F}_F}$ sur E pour la dualité entre E et F .

De plus, dans la seconde bijection on a, pour tout $N \in \mathfrak{F}_F$, $\mu_N = \Pi_N\ (\mu)$ (c'est-à-dire, pour tout $B_N \in \mathcal{B}_{E_N}$, $\mu\ (\Pi_N^{-1}\ (B_N)) = \mu_N\ (B_N)$).

Dans ce qui suit $\check{\mathcal{P}}\langle E, F\rangle$ désignera la famille des applications μ de $\mathcal{C}\langle E, F\rangle$ dans $[0, 1]$ telles que i') (c'est-à-dire, à l'identification près, la famille des mesures cylindriques sur E relativement à la dualité donnée entre E et F). Si E est un e.l.c. séparé, on notera aussi $\check{\mathcal{P}}\langle E, E'\rangle$ par $\check{\mathcal{P}}(E)$ et $\mathcal{C}\langle E, E'\rangle$ par $\mathcal{C}_E$ ($\langle .,.\rangle$ étant la dualité canonique entre E et E').

Si $\mu \in \check{\mathcal{P}}\langle E, F\rangle$, μ^* désignera l'application

$$A \to \mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_n \mu(A_n)\ ;\ A_n \in \mathcal{C}\langle E, F\rangle\ ,\ \bigcup_n A_n \supset A \right\}$$

de la classe de toutes les parties de E dans $[0, 1]$.

Bien entendu

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_n \mu(A_n)\ ;\ A_n \text{ cylindre ouvert, } \bigcup_n A_n \supset A \right\}.$$

<u>Propriété (I,2;3)</u> (cf [1], Ch. 3).-

a) Soit F un espace vectoriel. Si $\mu \in \check{\mathcal{P}}\langle F^*, F\rangle$, μ est une probabilité sur $\mathscr{C}\langle F^*, F\rangle$ ($\langle .,.\rangle$ étant la dualité usuelle entre F et F^*).

b) Soit E un e.l.c. séparé. Soit $\mu \in \check{\mathcal{P}}(E)$ et μ_1 la mesure sur $\mathscr{C}\langle F^*, F\rangle$ associée à μ. Alors μ est une mesure sur $\mathscr{C}_E$ si et seulement si $\mu_1^*(E) = 1$.

Propriété (I,2;4).- Soit E un e.l.c. séparé. Toute probabilité de Radon m sur E définit par sa restriction à $\mathscr{C}_E$ une mesure cylindrique m_c et l'application $j : m \to m_c$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\check{\mathcal{P}}(E)$ est injective.
De plus, $\mu \in \check{\mathcal{P}}(E)$ est l'image par j d'une probabilité de Radon sur E si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε tel que

$$\mu(\Pi_N^{-1}\,\Pi_N\,K_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon\ ,\ \forall\, N \in \mathfrak{F}_{E'}\ .$$

Preuve.- La première partie de cette propriété est triviale. La dernière partie est une conséquence du théorème de PROKHOROV. Montrons donc que j est injective.

Montrons d'abord, que pour toute partie K de E faiblement fermée,

$$K = \bigcap_{N\in\mathfrak{F}_{E'}} \Pi_N^{-1}\,\Pi_N\,K. \tag{1}$$

Trivialement $K \subset \bigcap_{N\in\mathfrak{F}_{E'}} \Pi_N^{-1}\,\Pi_N\,K$; d'autre part, si $x \in \complement K$, il existe $N_o \in \mathfrak{F}_{E'}$, et U ouvert de E_{N_o} tel que $x \in \Pi_{N_o}^{-1}(U)$ et $K \subset \complement\,\Pi_{N_o}^{-1}(U)$, donc tel que

$$x \in \Pi_{N_o}^{-1}(U) \subset \complement\,\Pi_{N_o}^{-1}\,\Pi_{N_o}\,K \subset \bigcup_{N\in\mathfrak{F}_{E'}} \complement\,\Pi_N^{-1}\,\Pi_N\,K\ .\qquad \text{D'où}$$

$$\complement K \subset \bigcup_{N\in\mathfrak{F}_{E'}} \complement\,\Pi_N^{-1}\,\Pi_N\,K\ ,$$

et on a bien (1).

Si K est un compact de E, il est faiblement fermé et la famille $N \to \Pi_N^{-1}\, \Pi_N\, K$, $N \in \mathfrak{F}_{E'}$, est une famille filtrante décroissante de fermés d'intersection K . Et comme μ est τ-régulière (E étant complètement régulier) on a

$$\mu\,(K) = \inf_{N \in \mathfrak{F}_{E'}} \mu_N\,(\Pi_N\, K)\ ,$$

et ainsi la valeur de μ en tout compact de E ne dépend que des valeurs de μ sur $\mathcal{C}_E$, c.q.f.d.

Propriété (I,2;5) (cf [1] , exposé 12 ou [14], exposé 13). Soit E un e.l.c. séparé et soit $L : E' \to L^{\circ}\,(\Omega,\, P)$ une fonction aléatoire linéaire usuelle. Pour que L soit décomposées (c'est-à-dire, pour qu'il existe une application φ de Ω dans E, P-lusin mesurable et telle que $\omega \to \langle \varphi\,(\omega),\, x' \rangle$ soit dans $L\,(x')$, pour tout $x' \in E'$) il est nécessaire que la probabilité cylindrique λ_L sur E associée à L soit de Radon et c'est suffisant si E a ses parties compactes métrisables.

Propriété (I,2;6).- Soit G un Banach séparable ; soit $L : G' \to L^{\circ}\,(\Omega,\, P)$ une fonction aléatoire usuelle sur G'. Notons U la boule unité fermée de G' munie de la structure uniforme induite par $\sigma\,(G',\, G)$ et soit D une partie dénombrable de U partout dense dans U (U est un compact métrisable). On a équivalence de :

i) la mesure cylindrique λ_L associée à L est de Radon sur G ;

ii) $L : G'_c \to L^{\circ}\,(\Omega,\, P)$ est continue et il existe une version $\mathcal{L}$ de L dont les restrictions à D des trajectoires de $\mathcal{L}$ sont uniformément continues sur D muni de la structure uniforme induite par celle de U .

Démonstration.- Si l'on a ii) il existe un $\mathbb{Q}$-sous espace vectoriel F de G', dénombrable partout dense dans G'_c et une version $\check{\mathcal{L}}$ de L tels que

. $F \cap U$ dense dans U ,

. pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $x \to \check{\mathcal{L}}(x)(\omega)$ est $\mathbb{Q}$-linéaire sur F_1 et a toutes ses restrictions aux $F \cap (n U)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ uniformément continues sur $F \cap (n U)$ muni de la structure uniforme induite par $\sigma(G', G)$.

On en déduit que, pour tout $\omega \in \Omega$, la restriction à F muni de la structure uniforme induite par celle de G'_c de la fonction $x \to \check{\mathcal{L}}(x)(\omega)$ est $\mathbb{Q}$-linéaire et continue. Par conséquent, $L : G'_c \to L^\circ(\Omega, P)$ étant continue, L est décomposée,d'où i) (cf. propriété (I,2;5)).

3. Topologie cylindrique (sur $\check{\mathcal{P}}(E)$) (cf exposé 3 de [14])

Soit E un e.l.c. séparé. Sur $\check{\mathcal{P}}(E)$, la topologie cylindrique est la moins fine rendant continues les applications $v : \check{\mathcal{P}}(E) \to \mathcal{P}(G)$, associées aux applications linéaires continues $v : E \to G$ de E dans des espaces vectoriels de dimension finie G .

Donnons quelques propriétés de cette topologie.

Propriété (I,3;1).- La topologie cylindrique sur $\check{\mathcal{P}}(E)$ est séparée.

Preuve : cela résulte du fait que les $\mathcal{P}(G)$ sont séparés et que les v séparent les points de $\check{\mathcal{P}}(E)$.

Propriété (I,3;2).- Pour que des probabilités cylindriques λ_i sur E convergent cylindriquement vers $\lambda \in \check{\mathcal{P}}(E)$, (il faut et) il suffit que, pour tout

$x' \in E'$, $x'(\lambda_j)$ converge étroitement vers $x'(\lambda)$.

Démonstration : Il est presque trivial que si pour tout $N \in \mathcal{F}_{E'}$, $\Pi_N(\lambda_j)$ converge étroitement vers $\Pi_N(\lambda)$ sur E_N , λ_j converge cylindriquement vers λ. Mais si G est un espace vectoriel de dimension finie, $\mu_j \in \mathcal{P}(G)$ converge étroitement vers $\mu \in \mathcal{P}(G)$ si et seulement si $x^*(\mu_j)$ converge étroitement vers $x^*(\mu)$, pour tout $x^* \in G^*$.

D'où, $\Pi_N(\lambda_j)$ converge étroitement vers $\Pi_N(\lambda)$ si et seulement si pour tout $x' \in N$, $x'(\lambda_j)$ converge étroitement vers $x'(\lambda)$. Et comme $\bigcup_{N \in \mathcal{F}_{E'}} N = E'$ la propriété (I,3;2) est établie.

Propriété (I,3;3).- Soit $\mathcal{P}(E_\sigma) \subset \check{\mathcal{P}}(E)$ l'espace des probabilités de Radon sur $E_\sigma = \sigma(E, E')$. Sur $\mathcal{P}(E_\sigma)$ la topologie étroite coïncide avec la topologie cylindrique.

Démonstration : La topologie étroite est trivialement plus fine. Il suffit donc de montrer que, si des $\lambda_j \in \mathcal{P}(E_\sigma)$ convergent cylindriquement vers $\lambda \in \mathcal{P}(E_\sigma)$, elles convergent étroitement.

Mais, la famille des cylindres ouverts de E forme une base de la topologie de E_σ stable par réunion finie et par définition même de la topologie cylindrique, $\liminf_j \lambda_j(U) \geq \lambda(U)$, pour tout cylindre ouvert U de E .

Par conséquent, on a bien convergence étroite de λ_j vers λ , c.q.f.d.

Propriété (I,3;4).- Soient λ_j des probabilités de Radon convergeant cylindriquement vers une probabilité cylindrique λ . Supposons que, pour tout

$\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de E tel que $\lambda_j\ (K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, pour tout j. Alors λ est de Radon sur E et pour tout $\varepsilon > 0$, $\lambda\ (K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$; en outre les λ_j convergent vers λ étroitement sur E.

Preuve : soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des probabilités de Radon μ sur E vérifiant $\mu\ (K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il est fermé dans $\mathcal{P}(E)$ et relativement compact dans $\mathcal{P}(E)$ (d'après les préliminaires), donc compact dans $\mathcal{P}(E)$. Il est donc à fortiori compact pour la topologie cylindrique sur $\check{\mathcal{P}}(E)$, donc fermé dans $\check{\mathcal{P}}(E)$ et sur $\mathfrak{M}$ les topologies étroites et cylindrique coïncident, c.q.f.d.

4. Ordre et type (cf [14], exposés 4, 5 et 16)

Définition.- Une probabilité cylindrique μ sur un Banach E est dite de type 0 si, lorsque $\xi' \in E'$ tend vers 0, $\xi'\ (\lambda)$ tend vers δ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire si les fonctions aléatoires associées sont continues ; elle est dite de type $p > 0$, s'il existe $M > 0$ fini tel que, pour tout $\xi' \in E'$

$$\left[\int |t|^p\ \xi'\ (\mu)\ (dt)\right]^{1/p} \leq M\ \ ||\xi'||\ .$$

Une probabilité de Radon μ sur le Banach E est dit d'ordre p si

$$\int_E ||x||^p\ \mu\ (dx) < +\infty\ .$$

Il est immédiat que dans le cas où E est de dimension finie, toute probabilité cylindrique est de Radon et qu'elle est d'ordre p si et seulement si elle est de type p.

<u>Théorème (I,4;1)</u>.- <u>Soient</u> E <u>un Banach et</u> μ <u>une probabilité de Radon d'ordre</u> p ($0 < p < \infty$) <u>sur E ; alors, il existe une mesure</u> > 0 <u>finie de Radon sur</u> E , <u>soit</u> ν , <u>portée par</u> $\{x \; ; \; x \in E \; , \; ||x|| = 1\}$, <u>de masse</u> $\int ||x||^p \, \mu\,(dx)$ <u>et satisfaisant</u>

$$\int |< x, y >|^p \, \nu\,(dx) = \int |< x, y >|^p \, \mu\,(dx) \; , \; \forall \, y \in E'$$

<u>Dans le cas où</u> p > 1 , <u>tout représentant usuel</u> $L : E'_b \to L^\circ(\Omega, P)$ <u>du processus associé à</u> μ <u>définit un opérateur</u> p-<u>intégral de</u> E'_b <u>dans</u> $L^p(\Omega, P)$.

<u>Démonstration</u> : Notons U" la boule unité de E" muni de la topologie induite par σ (E", E') et soit (Ω, P, L) une fonction aléatoire linéaire usuelle sur E' associée à μ. D'après la propriété (I,2;5) il existe $\varphi : \Omega \to E$, P-Lusin mesurable décomposant L . Et comme μ est d'ordre p :

$$\int_\Omega ||\varphi(\omega)||_E^p \; P\,(d\omega) < +\infty \, ,$$

la mesure $\mu_1 = ||\varphi(.)||^p . \mu$ sur $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega^P)$ est une mesure de Radon finie. Soit alors $x_0 \in E$, avec $||x_0|| = 1$, et soit $f : \Omega \to E$ avec :

$$f\,(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(\omega)}{||\varphi(\omega)||} \; , & \text{si } \; \varphi(\omega) \neq 0 \\ x_0 \; , & \text{si } \; \varphi(\omega) = 0 \end{cases}$$

f est P-Lusin mesurable et par suite $\nu = f \circ \mu_1$ est une mesure de Radon finie ≥ 0 , portée par $\{x \; ; \; x \in E \; , \; ||x|| = 1\}$. On vérifie aisément que, pour tout $y \in E'$

$$\int |< x, y >|^p \, \mu\,(dx) = \int |< x, y >|^p \, (f \circ \mu_1)\,(dx)$$

D'autre part, l'application $M : h \to Cl\,(||\varphi||\; h \circ f)$ de $\mathcal{C}(U")$ dans $L^p(\Omega, P)$ est linéaire continue et satisfait

$$L\,x' = M\,(\phi_{x'}) \quad (\text{où } \; \phi_{x'}(y) = < x', y >) \; , \; \forall \, x' \in E'$$

et

$$||M\ h|| < (\int_{U^{*}} |h\ (x)|^{p}\ \nu_1\ (dx))^{1/p}\ ,\ \forall h \in \mathscr{C}(U^{*})\ ,$$

où ν_1 est la mesure de Radon image de ν par l'application continue $E \to \sigma\ (E^{*}, E')$. Cette mesure a de plus son support contenu dans le compact U^{*}.

En particulier, si $p \geq 1$, l'application $L : E'_b \to L^{p}\ (\Omega, P)$ est alors p-intégrale $[L \in I^{p}\ (E'_b\ ,\ L^{p}\ (\Omega))]$ et donc p-sommante au sens de Saphar [10].

Remarque (I,4;1).- Comme pour $p \in [1, \infty[$, L^{p} a la propriété d'approximation, on a, en vertu de [3] (théorème 5, p. 133 et Corollaire p. 138) ou de [18]

$$E \underset{d_p}{\hat{\otimes}} L^{p} \subset L^{p}\ (E) \subset L^{p} \underset{d_p}{\hat{\otimes}} E \tag{2}$$

algébriquement et topologiquement, pour tout $p \in [1, \infty[$ avec :

$$d_p^{F \otimes G}\ (u) = \inf \{(\sum_{i=1}^{n} ||y_i||^{p})^{1/p} \sup_{\substack{x' \in F' \\ ||x'|| \leq 1}} (\sum_{i=1}^{n} |< x', x_i >|^{p'})^{1/p'}, u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\}$$

(si $p \neq 1$) et

$$d_1^{F \otimes G}\ (u) = \pi\ (u) = \inf\ (\sum_{i=1}^{n} ||y_i||.\sup||x_i||, u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\}$$

$$= \inf\ (\sum_{i=1}^{n} ||x_i||\ ||y_i||\ ,\ u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\ \}.$$

Dans (2), les inclusions deviennent des égalités si $p = 1$ ou si E est un espace de type L^{p}.

Remarque (I,4;2).- Conformément aux notations de Saphar [10], on a, si $p \in]1, +\infty[$,

$$\mathscr{L}_d^{p}\ (E', L^{p}) \subset L^{p}\ (E) \subset \mathscr{L}_g^{p}\ (E', L^{p}) \subset I^{p}\ (E', L^{p})\ ; \tag{3}$$

et on peut ainsi retrouver que tout représentant usuel $L : E'_b \to L^{\circ}\ (\Omega, R)$ du processus associé à une mesure de Radon d'ordre p sur E, avec $1 \leq p < \infty$, définit un opérateur p-intégral de E'_b dans $L^p(\Omega, P)$.

Remarque (I,4;3).- D'après [10], on a :

$$\mathcal{L}_d^p (L^{q'}, L^p) = \mathcal{L}_d^\infty (L^{q'}, L^p), \text{ si } 2 \leq p < \infty, 1 \leq q \leq 2 ;$$

$$\Pi^p (L^{q'}, L^p) = \Pi^1 (L^{q'}, L^p), \text{ si } 1 \leq p \leq 2, 2 \leq q < \infty,$$

$\Pi^p(E, F)$ désignant la famille des opérateurs p-sommants de E dans F.

Théorème (I,4;2).- Soit $p \in]1, \infty[$ et soit $L : L^{p}(\Omega', \mathcal{F}', P') \to L^{p}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une application linéaire continue et μ la mesure cylindrique associée sur $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Alors, on a équivalence de :

a) μ provient d'une mesure de Radon d'ordre p ;

b) L est un opérateur p-intégral ;

c) L est un opérateur p-sommant ;

d) L est un opérateur p-nucléaire à gauche ;

e) L est un opérateur p-nucléaire à droite ;

f) L est un opérateur quasi p-nucléaire.

Si de plus $p \in]1, 2]$, alors a) est équivalent à (cf [10]) :

g) L est un opérateur 1-sommant.

Remarque (I,4;4). Soit E un Banach. Introduisons la $\mathcal{S}_p$-topologie sur E ($\infty > p \geq 1$). C'est la topologie localement convexe sur E définie au moyen des semi-normes

$$x \to q_\mu(x) = \left(\int_{U'} |\langle x, y' \rangle|^p \mu(dy')\right)^{1/p}$$

où μ parcourt la famille des mesures de Radon ≥ 0, finie sur la boule unité U' de E', muni de la $\sigma(E', E)$ topologie.

Ainsi, si T est un opérateur linéaire continu d'un Banach E dans un Banach F ; T est p-sommant si et seulement si T est un opérateur linéaire continu de E muni de la $\mathcal{Y}_p$ topologie dans F $(1 \leq p < \infty)$.

II. TRANSFORMEES DE FOURIER

FONCTIONS DE TYPE POSITIF, FONCTIONS DE TYPE NEGATIF

Commençons par donner quelques définitions.

Définition (II;1).- Soient E un e.l.c., E' son dual et μ une probabilité de Radon sur E. L'application $f : y \to \int e^{i\langle x,y\rangle} \mu(dx)$ définie sur E' est appelée transformée de Fourier de μ ou fonction caractéristique.

Définition (II;2).- Soient T un ensemble et $(\Omega, \mathcal{F}, P, L)$ une fonction aléatoire sur T . L'application $\mathcal{F} : t \to \int e^{i\, L(t)\,(\omega)} P\,(d\omega)$ définie sur T est appelée transformée de Fourier de L. Bien entendu, $\mathcal{F}(t) = \int e^{itu} P_{\{t\}}(du)$ et deux fonctions aléatoires isonomes sur T ont même transformée de Fourier. La transformée de Fourier d'un processus X sur T sera, par définition, la transformée de Fourier de l'un quelconque des représentants de X .

Définition (II;3).- Soient E et F deux espaces vectoriels en dualité, μ une mesure cylindrique sur E , X le processus(linéaire) sur F associé à μ et f la transformée de Fourier de ce processus. On a, pour tout N de $\mathfrak{F}_F$

$$f\,(x) = \int_{E_N} e^{i\,\langle x|y\rangle_N} \mu_N\,(dy)\ ,\ \forall\, x \in N\ ;$$

c'est-à-dire la restriction de f à N, soit $f \mid N$, est la transformée de Fourier de la probabilité μ_N .

f sera aussi appelée transformée de Fourier de la mesure cylindrique μ .

Définition (II;4).- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{C}$ est de type positif (resp. de type négatif) si pour tout entier

$n > 0$, pour toute famille $(x_1, \dots x_n)$ de n éléments de E et pour toute famille $(\xi_1, \dots \xi_n)$ de n éléments de $\mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{i,j=1,\dots,n} f\,(x_i - x_j)\, \xi_i\, \overline{\xi}_j \geq 0$$

(resp. $\displaystyle\sum_{i,j=1,\dots,n} \left[f\,(x_i) + \overline{f\,(x_j)} - f\,(x_i - x_j)\right] \xi_i\, \overline{\xi}_j \geq 0$).

On notera $\mathfrak{P}_E$ ou $\mathfrak{P}$ (resp. $\mathfrak{N}_E$ ou $\mathfrak{N}$) l'ensemble de toutes les fonctions de type positif (resp. de type négatif) sur E.

Rappelons les propriétés élémentaires de $\mathfrak{P}_E$ et $\mathfrak{N}_E$.

1. Propriétés communes

(c_1) $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{P}$ sont deux cônes convexes.

(c_2) $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{P}$ sont simplement fermés.

(c_3) $\mathfrak{N} \wedge \mathfrak{P}$ est constitué de fonctions constantes ≥ 0.

(c_4) $\psi \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{P} \Longrightarrow \psi\,(0) \in \mathbb{R}^+$, $\check{\psi} = \overline{\psi}$;

$\psi \in \mathfrak{N} \Longrightarrow \check{\psi}, \overline{\psi}, \mathcal{R}e\,\psi \in \mathfrak{N}$; $\psi \in \mathfrak{P} \Longrightarrow \check{\psi}, \overline{\psi}, \mathcal{R}e\,\psi \in \mathfrak{P}$

(avec la notation $\check{\psi}\,(x) = \psi\,(-x)$, $\overline{\psi}\,(x) = \overline{\psi\,(x)}$, $\mathcal{R}e\,\psi = \dfrac{\psi(x)+\overline{\psi(x)}}{2}$).

(c_5) Si E et F sont deux espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F, alors :

$$\psi \in \mathfrak{N}_F \Rightarrow \psi \circ u \in \mathfrak{N}_E \,;\quad \psi \in \mathfrak{P}_F \Longrightarrow \psi \circ u \in \mathfrak{P}_E .$$

2. Autres propriétés de $\mathfrak{P}$

(p_1) $f \in \mathfrak{P} \Longrightarrow |f(x)| \leq f(0)$, $\forall\, x \in E \Longrightarrow$ f bornée.

(p_2) $\mathfrak{P}\,\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}$; d'où, $f \in \mathfrak{P} \Longrightarrow |f|^2 \in \mathfrak{P}$.

(p_3) $f \in \mathfrak{P} \Longrightarrow \exp f \in \mathfrak{P}$.

(p_4) Si $f \in \mathfrak{P}$, on a pour tout $x \in E$ et tout $h \in E$

$$|f(x) - f(x+h)|^2 \leq 2 f(0) \left[f(0) - \mathcal{R}e\, f(h)\right],$$
$$f(0) - \mathcal{R}e\, f(2x) \leq 4 \left[f(0) - f(x)\right].$$

Remarque (II,2;1) (cf. [8]).- Pour établir (p_2) dans le cas où l'on ne se donne aucune hypothèse de continuité, il suffit de montrer que si $A = ((a_{ij}))$ et $B = ((b_{ij}))$ sont deux matrices $n \times n$ de type positif la matrice $n \times n$ $C = ((a_{ij}\, b_{ij}))$ l'est aussi. Or cette propriété résulte du fait que pour toute matrice $n \times n$ M est de type positif, il existe une matrice $n \times n$, soit P, telle que $M = PP^*$; par suite M est somme de matrices $n \times n$ de la forme $R = ((\alpha_i\, \alpha_j))$ et ces matrices R sont de type positif.

Remarque (II,2;2).- D'après la remarque ci-dessus, on en déduit que si $A = ((a_{ij}))$ est une matrice $n \times n$ de type positif, la matrice $B = ((\exp a_{ij}))$ est de type positif.

3. Autres propriétés de $\mathfrak{N}$

(n_1) $\Psi \in \mathfrak{N} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cdot\ \Psi(0) \in \mathbf{R}^+ ,\ \check{\Psi} = \overline{\Psi} ; \\ \cdot\ \forall n \in \mathbf{N} ,\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n ,\ \xi_i \in \mathbf{C} \\ \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 0 \Longrightarrow \sum_{1 \leq i,j \leq n} \Psi(x_i - x_j)\, \xi_i\, \overline{\xi_j} \leq 0. \end{cases}$

(n_2) $\Psi \in \mathfrak{N} \Longrightarrow \mathcal{R}e\, \Psi \geq \Psi(0) \geq 0$ et $\Psi - \Psi(0) \in \mathfrak{N}$.

(n_3) $\Psi \in \mathfrak{N}$, Ψ réelle $\Longrightarrow \Psi^\alpha \in \mathfrak{N}$, $\forall \alpha \in \left]0, 1\right]$.

(n_4) $\Psi \in \mathfrak{N} \Longrightarrow \sqrt{|\Psi|}$ est sous additive.

(n_5) Si $\Psi \in \mathfrak{N}$, alors pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$

$$\mathcal{R}e\, \Psi(x+y) + \mathcal{R}e\, \Psi(x-y) \leq 2 \left[\mathcal{R}e\, \Psi(x) + \mathcal{R}e\, \Psi(y)\right],$$
$$\mathcal{J}m\, \Psi(x+y) - \mathcal{J}m\, \Psi(x-y) \leq 2 \left[\mathcal{R}e\, \Psi(x) + \mathcal{J}m\, \Psi(y)\right].$$

(n_6) $\Psi \in \mathfrak{N} \Longrightarrow |1 - \exp[-\Psi(x)]| \leq |\Psi(x)|$, $\forall x \in E$.

4. Théorèmes de caractérisations et lien avec les définitions (II;1), (II;2) et (II;3).

E désignera dans tout ce qui suit un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Théorème (II;1).- Si $f : E \to \mathbb{C}$ est de type positif, la fonction $x \to \Psi(x) = f(0) - f(x)$ est de type négatif sur E .

Théorème (II;2).- Soit Ψ une application quelconque de E dans $\mathbb{C}$. On a équivalence de :

i) Ψ est de type négatif ;

ii) $e^{-s\Psi}$ est de type positif pour tout $s > 0$ et $\Psi(0) \geq 0$;

iii) il existe une suite s_n de réels > 0 tels que $s_n \downarrow 0$ et $e^{-s_n\Psi}$ est de type positif pour tout n ; $\Psi(0) \geq 0$.

Preuve. Pour montrer l'implication "iii $\Longrightarrow$ i" , on peut supposer $\Psi(0) = 0$ (d'après n_2); et alors, d'après (c_2) et le théorème (II;1), iii $\Longrightarrow$ i puisque

$$1 - e^{-s_n\Psi} \in \mathfrak{N}_E \quad \text{et} \quad \Psi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \left(1 - e^{-s_n \Psi(x)}\right).$$

Il reste à montrer que : i) $\Longrightarrow$ ii). Pour cela on se donne arbitrairement $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i, a_i) \in E \times \mathbb{C}$ $(i = 1, .. n)$. On a trivialement :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \bar{a}_j \; e^{-\Psi(x_i - x_j)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_i \bar{b}_j \; e^{m_{ij}} \tag{1}$$

avec $b_i = a_i / e^{\Psi(x_i)}$ et $m_{ij} = \Psi(x_i) + \overline{\Psi(x_j)} - \Psi(x_i - x_j)$.
Et comme la matrice $n \times n$ $M = ((m_{ij}))$ est de type positif par i), il en est de même de la matrice $M_1 = ((\exp m_{ij}))$ d'après la remarque (II,2;2) ; par suite le premier membre de (1) est positif, C.Q.F.D.

Remarque (II.3;1).- Soit $f : E \to \mathbf{C}$ strictement positive et soit $\Psi = \operatorname{Log} f$. D'après ce qui précède, Ψ est de type négatif si et seulement f^s est de type positif, quel que soit $s > 0$.

Remarquons qu'il existe des fonctions $f : E \to \mathbf{C}$ de type positif et strictement positives pour lesquelles il existe $s > 0$ tel que f^s ne soit pas de type positif (cf. [11]). Il suffit de considérer la fonction $f : x \to \varepsilon^2 + \cos^2 x$. Si ε est suffisament petit, $f^{1/2}$ n'est pas de type positif.

Théorème (II;3) (Levy-Kintchine).(cf. [4] , exposé 2).- Soient Ψ une application continue de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{C}$, $|.|$ la norme euclidienne de $\mathbf{R}^n$, $<.,.>$ le produit scalaire correspondant et soit :

$$K(x, y) = \left[1 - e^{-i<x,y>} - \frac{i < x,y >}{1 + |y|^2}\right] \frac{1 + |y|^2}{|y|^2} .$$

On a équivalence de :

i) Ψ est de type négatif ;

ii) il existe une forme linéaire réelle L sur $\mathbf{R}''$, une forme quadratique Q positive sur $\mathbf{R}^n$ et une mesure de Radon $\sigma \geq 0$ bornée sur $\mathbf{R}^n - \{0\}$ telles que :

$$\Psi(x) = \Psi(0) + i\, L(x) + Q(x) + \int_{\mathbf{R}^n-\{0\}} K(x, y)\, \sigma(dy).$$

Remarque (II,4;1).- Le triplet (L, Q, σ) est déterminé de manière unique.

Corollaire.- Si $\Psi : \mathbf{R}'' \to \mathbf{C}$ est une fonction continue de type négatif alors pour tout x de $\mathbf{R}^n$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{R}e\, \Psi(nx)}{n^2}$ existe et est égale à $Q(x)$.

En effet, on a en utilisant la décomposition ci-dessus de Ψ

$$\frac{\mathcal{R}e\ \Psi\ (nx)}{n^2} = Q\ (x) + \int_{\mathbb{R}^n-\{0\}} \frac{\sin^2 \frac{n}{2} < x,y >}{n^2\ |y|^2} \left[1 + |y|^2\right] \sigma\ (dy) + \frac{\Psi\ (0)}{n^2} .$$

Il suffit d'appliquer le théorème de Lebesgue.

Théorème (II;4). (Théorème de Bochner) (cf. [8] , p. 146).- Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ continue avec $f\ (0) = 1$. On a équivalence de :

i) f est de type positif ;

ii) f est la transformée de Fourier d'une probabilité (de Radon) sur $\mathbb{R}^n$;

iii) pour toute fonction φ de $\mathcal{D}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f\ (x-y)\ \varphi(x)\ \overline{\varphi(y)}\ dx\ dy \geq 0 .$$

Définition (II;5).- On appellera fonction caractéristique sur $\mathbb{R}^n$, toute fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$, continue de type positif avec $f\ (0) = 1$. Elle sera dite dégénérée s'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f\ (x) = e^{i<x,a>}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Notation : $\mathcal{F}o\ (E)$ désignera l'ensemble de toutes les fonctions f de E dans C satisfaisant :

a) $f\ (0) = 1$; f est de type positif ,

b) les restrictions de f à tous les sous espaces vectoriels N de E de dimension finie sont continues quand N est muni de sa topologie séparée (unique).

Théorème (II;5). [1] .- Soient E et F deux espaces vectoriels en dualité et soit $f : E \to C$. On a équivalence de :

a) $f \in \mathcal{F}\sigma\,(E)$;

b) f est la transformée de Fourier d'une mesure cylindrique sur F ;

c) f est la transformée de Fourier d'un processus linéaire sur E.

Théorème (II;6).- Soient E_1 et E deux espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans E_1 . On a :

$f \in \mathcal{F}\sigma\,(E_1) \Longrightarrow f \circ u \in \mathcal{F}\sigma\,(E)$.

Théorème (II;7).- Soit E un e.l.c. Si $f : E \to \mathbf{C}$ est une fonction de type positif, on a équivalence de :

i) f est continue au point 0 ;

ii) $\mathcal{R}e\, f$ est continue au point 0 ;

iii) f est uniformément continue sur E.

Ce théorème est une conséquence immédiate de (p_4).

Théorème (II;8) (cf. [1], exposé 3).- Soit X un processus linéaire sur un e.l.c. (séparé) E et f sa transformée de Fourier. On a équivalence de

i) f est continue sur E ;

ii) X est continue.

Terminons cette partie 4 en donnant quelques autres propriétés des fonctions caractéristiques.

Théorème (II;9).- Soit μ une probabilité de Radon sur $\mathbf{R}^n$; notons f sa transformée de Fourier. S'il existe x_0 non nul dans $\mathbf{R}^n$ et α irrationnel tels que

$$|f(x_0)| = |f(\alpha x_0)| = 1,$$

alors μ est portée par un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Plus généralement, s'il existe p vecteurs $x_1, \dots x_p$ linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$ et p irrationnels $\alpha_1, \dots \alpha_p$ tels que

$$|f(x_i)| = |f(\alpha_i x_i)| = 1 \; ; \; i = 1, \dots, n,$$

alors μ est portée par une variété linéaire de dimension $n - p$.

Preuve.- Par hypothèse il existe a_0 et b_0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que

$$e^{-i<x_0,a_0>} f(x_0) = e^{-i<x_0,b_0>} f(\alpha x_0) = 1$$

donc tels que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[1 - \cos < x_0, u - a_0>\right] \mu(du) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[1 - \cos <x_0,u-b_0>\right] \mu(du) = 0.$$

D'où

$$\cos(< x_0, u-a_0 >) = \cos(\alpha < x_0, u-b_0 >) = 1 \qquad \mu - \text{pp}.$$

Par suite, si pour tout $k \in \mathbb{Z}$, Π_k (resp. Π'_k) désigne l'hyperplan

$$< x_0 , u > = < x_0 , a_0 > + 2 k\pi$$

$$(\text{resp. } < x_0 , u > = < x_0 , b_0 > + \frac{2 k\pi}{\alpha})$$

Les hyperplans Π_k et $\Pi'_{k'}$, ($(k,k') \in \mathbb{Z}^2$) étant parallèles entre eux, il existe donc $(k_0, k'_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\Pi_{k_0} = \Pi'_{k'_0}$ et comme α est irrationnel (k_0, k'_0) est unique. Par conséquent μ est portée par l'hyperplan Π_{k_0}.

On en déduit immédiatement le théorème.

Corollaire 1.- Les seules fonctions f caractéristiques sur $\mathbb{R}^n$ telles que $|f(x)| = 1$, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ sont les fonctions dégénérées.

Corollaire 2.- Si f est une fonction caractéristique sur $\mathbb{R}^n$, égale à 1 sur un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$, de mesure de Lebesgue non nulle, on a : $f \equiv 1$.

$$1 = \mu(\mathbb{R}^n) = \sum_{(k,k') \in \mathbb{Z}^2} \mu(\Pi_k \cap \Pi'_{k'}).$$

Corollaire 3.- Soit f une fonction caractéristique sur $\mathbb{R}^n$. S'il existe α réel > 1 tel que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $|f(x)| \leq |f(\alpha x)|$, alors f est dégénérée.

Preuve : C'est immédiat, car on a :

$$1 \geq |f(x)| \geq |f(\frac{x}{\alpha^n})| \to 1 \,,\ \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Donnons encore quelques propriétés.

(1) Soit f une fonction caractéristique sur $\mathbb{R}^n$. S'il existe α réel $\neq 1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = f(\alpha x)$, alors $f \equiv 1$.

(on a alors $f(x) = f(\alpha_1^n x)$ pour un $\alpha_1 \in]0, 1[$, et par suite en faisant tendre n vers + ∞, on a $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$).

(2) Soit E un espace vectoriel et p une semi-norme sur E. Alors

i) pour toute fonction Ψ de type négatif sur E

$$|\Psi(y)| \leq 2[1 + p^2(y)] \sup_{\substack{y \in E \\ p(y) \leq 1}} |\Psi(y)| \,,\ \forall y \in E \,;$$

ii) si $\varphi \in \mathcal{F}_\sigma(E)$, alors

$$|1 - \varphi(y)| \leq 2 \inf [1, p^2(y)] \,,\ \forall y \in E \,;$$

iii) si $\varphi \in \mathcal{F}_\sigma(E)$ et si $L : E \to L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une fonction aléatoire sur E, admettant φ pour transformée de Fourier, alors

$$|1 - \varphi(y)| \leq 2 [p^2(y) + P\{|L(y)| > p(y)\}] ,$$

$$P[|L(y)| \geq c] \leq \frac{c\sqrt{e}}{\sqrt{2\pi}\ (\sqrt{e} - 1)} \int_{\mathbb{R}} |1 - \varphi(ty)|\, e^{-\frac{1}{2}c^2t^2}\, dt.$$

Preuve. Pour montrer i), il suffit de remarquer que pour tout y de E, il existe un entier n tel que $n - 1 \leq p(y) \leq n$ et d'utiliser ensuite la sous additivité de $\sqrt{|\Psi|}$.

Pour montrer ii), il suffit de remarquer que :

$$|1 - \varphi(y)| \leq | \int (1 - e^{iup(y)}) \, P_{\left\{L(\frac{y}{p(y)})\right\}}(du)| \leq 2 \inf \left[p^2(y), 1\right] .$$

Pour iii), la 1ère inégalité est triviale, la 2ème est très connue, aussi nous ne la redémontrons pas.

5. Théorèmes de convergence (cf. [14] et [16])

Propriété (II,1).- Soient μ_α et μ des éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$. Notons $\hat{\mu}_\alpha$ et $\hat{\mu}$ leurs fonctions caractéristiques respectives. Alors μ_α converge étroitement vers μ si et seulement $\hat{\mu}_\alpha$ converge vers $\hat{\mu}$ uniformément sur tout compact.

Propriété (II;2).- Soit E un espace topologique séparé ; pour des probabilités de Radon portées par une partie A de E , la convergence étroite sur E est la même que la convergence étroite sur A des mesures induites.

Propriété (II;3).- Soit E un e.l.c. séparé, μ_α , $\alpha \in \Gamma$ une famille de mesures cylindriques sur E et μ une mesure cylindrique sur E. Notons $\hat{\mu}_\alpha$ (resp. $\hat{\mu}$) la transformée de Fourier de μ_α (resp. μ). On a :

1°) Si μ_α converge cylindriquement vers μ , $\hat{\mu}_\alpha$ converge simplement vers $\hat{\mu}$.

2°) Si $\{\mu_\alpha , \alpha \in \Gamma\}$ est un sous-ensemble relativement compact de $\mathcal{G}'(E)$ et si μ_α (y) converge vers $\varphi(y)$ pour tout $y \in E'$, alors il existe une mesure de Radon ν sur E telle que $\hat{\nu} = \varphi$ et μ_α converge étroitement vers ν .

3°) Supposons $\{\mu_\alpha , \alpha \in \Gamma\} \subset \mathcal{P}(E)$ et $\mu \in \mathcal{P}(E)$. Alors :

a) si E est un polonais et si μ_α converge étroitement vers μ , $\hat{\mu}_\alpha$ converge vers $\hat{\mu}$ uniformément sur toute partie équicontinue de E' ;

b) si E est un Fréchet, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K_ε de E tel que $\inf_\alpha \mu_\alpha (K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ (donc en particulier si Γ est dénombrable) et si μ_α converge étroitement vers μ , alors $\hat{\mu}_\alpha$ converge vers $\hat{\mu}$ uniformément sur toute partie équicontinue de E'.

<u>Démonstration</u>.-

1°) est trivial ; 2°) résulte du fait que deux mesures μ_1 et μ_2 de $\mathcal{P}(E)$ ont mêmes transformées de Fourier si et seulement si elles sont égales.

3°) a) est vérifiée d'après [16] , page 51.

Montrons maintenant 3°) b). Comme μ_α converge étroitement vers μ , $\inf_\alpha \mu_\alpha (K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ implique $\mu (K) \geq 1 - \varepsilon$. Les μ_α et μ sont donc portées par un sous espace vectoriel fermé séparable de E , soit E_1 . Ainsi $\mu_\alpha \mid E_1$ converge étroitement vers $\mu \mid E_1$ et d'après 3°) a) $\widehat{\mu_\alpha \mid E_1}$ converge vers $\widehat{\mu \mid E_1}$ uniformément sur toute partie équicontinue de $E_1' = E' / E_1^\circ$. Par suite, $\hat{\mu}_\alpha$ converge vers $\hat{\mu}$ uniformément sur toute partie équicontinue de E'. C.Q.F.D.

<u>Cas particulier $E = \mathbb{R}$</u> .

<u>Propriété</u> : Si f_n et f sont des fonctions caractéristiques sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n (x) \to f (x)$ alors :

1. $f_n (x) \to f (x)$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$;
2. Si $x_n \to x$ $(x_n, x \in \mathbb{R})$, alors $f_n (x_n) \to f (x)$.

Donnons une application de cette propriété. Commençons pour cela à donner une définition.

Définition (II;6).- Soit f une fonction caractéristique sur $\mathbb{R}$. On dit qu'elle est de type $\mathcal{S}$, s'il existe deux suites de réels > 0 (a_n) et (b_n) et une suite (f_k) de fonctions caractéristiques sur R telles que pour tout u de $\mathbb{R}$ (et pour $n \to \infty$)

$$g_n(u) = e^{-iua_n} \prod_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{u}{b_n}\right) \to f(u) \qquad (\alpha)$$

et $\sup\limits_{k\leq n} \left|f_k\left(\frac{u}{b_n}\right) - 1\right| \to 0$ uniformément sur tout compact. (β)

Théorème (II;10). [9] .- Si f est de type $\mathcal{S}$ et f non dégénérée, alors :

$$b_n \to \infty \, , \; \frac{b_{n+1}}{b_n} \to 1 \, , \text{ quand } n \to \infty .$$

Preuve. Si $b_n \not\to \infty$, il existe une sous suite b_{n_k} convergente, de limite $b < \infty$. On applique alors, pour tout ℓ de $\mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, la partie 2 de la propriété à la suite $x_k = b_{n_k} x$ et à la suite de fonctions caractéristiques $h_k : x \to f_\ell\left(\frac{x}{b_{n_k}}\right)$, ce qui donne $f_\ell \equiv 1$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$. Ce qui contredit le fait que f est non dégénérée. Donc $b_n \to \infty$, quand $n \to \infty$.

On montre de même que la suite b_n / b_{n+1} est bornée. Par suite $f_{n+1}\left(\frac{u}{b_n}\right) \to 1$, quand $n \to \infty$.

D'autre part, il existe a'_n, $a''_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$g_{n+1}\left(\frac{b_{n+1}}{b_n} u\right) = g_n(u)\, f_{n+1}\left(\frac{u}{b_n}\right) e^{-iua''_n}$$

$$g_n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} u\right) f_{n+1}\left(\frac{u}{b_{n+1}}\right) = g_{n+1}(u)\, e^{-iua'_n} .$$

D'où, par (β), (α) et puisque (b_n / b_{n+1}) est une suite bornée

$$\left|g_{n+1}\left(\frac{b_{n+1}}{b_n} u\right)\right| \to |f(u)| \, , \; \left|g_n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} u\right)\right| \to |f(u)| \, , \; \forall u \in \mathbb{R} .$$

Supposons que $u_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ ne tende pas vers 1. Alors il existe une sous suite n_k telle que l'une des suites u_{n_k} , $\frac{1}{u_{n_k}}$ tendent vers $s < 1$; soit par exemple u_{n_k} .

En appliquant à nouveau la partie 2 de la propriété ci-dessus, on a :

$$g_{n_k+1}(u_{n_k} u) \to f(su) , \forall u \in \mathbb{R}$$

d'où

$$|f(u)| = |f(su)| \quad , \forall u \in \mathbb{R} ,$$

et $|f| \equiv 1$, c'est-à-dire f est dégénérée, ce qui contredit l'hypothèse sur f . C.Q.F.D.

6. Donnons maintenant quelques exemples d'éléments de $\mathfrak{N}_E$ et $\mathfrak{P}_E$.

Exemple 1. [2] .- Dans tout espace $L^p(\Omega, \mu)$ (μ mesure quelconque), de quasi-norme $||.||_p$, avec $p \in]0, 2]$, $x \to ||x||_p^q$ est de type négatif pour tout $q \leq p$.

En effet, d'après (n_3), il suffit que $x \to ||x||_p^p$ soit de type négatif ; or ceci résulte du fait que $x \to |x|^p$ est de type négatif si $p \in]0, 2]$ (toujours d'après (n_3), puisque $x \to |x|^2$ est trivialement de type négatif) avec $|.|$ norme sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : Comme cas particulier de l'exemple 1, on a, si H est un Hilbert $x \to \exp(- \alpha ||x||_H^p)$ est de type positif sur H , continue sur H pour tout $p \in]0, 2]$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Exemple 3 ; [2] .- Soit $\mathbb{R}^4$ muni de la norme $||x||_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_4|^p)^{1/p}$ avec $0 < p \leq 2$. Alors, si $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ est continue et si $f(0) = 1$, on a équivalence de :

a) $x \to f(||x||_p)$ est de type positif sur $\mathbb{R}^4$,

b) il existe une probabilité σ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = \int_0^\infty e^{-ux^p}\, \sigma(du)$.

Si $p > 2$, alors a) est satisfaite si et seulement si $f \equiv 1$.

Ce résultat a été établi dans [2], p. 232, bien que l'énoncé ci-dessus soit apparamment différent. Rappelons le schéma de la preuve de "a $\Longrightarrow$ b". Posons pour cela $\Phi(x) = f(||x||_p)$. Il existe 4 variables aléatoires X_1, X_2, X_3, X_4 sur un $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telles que Φ est la transformée de Fourier de la fonction aléatoire $L : (x_1, x_2, x_3, x_4) \to \sum_{i=1}^{4} x_i X_i$.

Tout d'abord, on montre qu'il existe une probabilité conditionnelle $P(\omega, dx)$ régulière pour X_1 par rapport à la tribu $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ engendrée par les évènements dépendant symétriquement des X_i, $i = 1, \ldots, 4$ telle que :

$$\Phi(x) = E\left[\prod_{i=1}^{4} \varphi(\omega, x_i)\right]$$

avec

$$\varphi(\omega, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut}\, P(\omega, dt) = E^{\mathcal{B}}(e^{iuX_r}), \forall u \in \mathbb{R}, r = 1, \ldots, 4 .$$

Ensuite, en explicitant $E[\varphi(., t) - \varphi(., -t)]^2$ pour $t \in \mathbb{R}$, et $E\,[\varphi(., (u+v)^{1/p}) - \varphi(., u^{1/p})\,\varphi(., v^{1/p})]^2$ pour $(u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, puis en utilisant (1) et le fait que $u \to \varphi(\omega, u)$ est de type positif, on montre qu'il existe $\Omega_0 \subset \Omega$ mesurable de mesure 1, tel que :

$$\varphi(\omega, t) = \varphi(\omega, -t), \quad \forall \omega \in \Omega_0, \forall t \in \mathbb{Q}$$

$$\varphi[\omega, (u+v)^{1/p}] = \varphi(\omega, u^{1/p})\,\varphi(\omega, v^{1/p}), \forall \omega \in \Omega_0, \forall (u,v) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ .$$

Et, comme pour tout ω, $\varphi(., \omega)$ est une fonction caractéristique, donc une fonction continue, (2) (resp. (3)) est encore vraie pour $t \in \mathbb{R}$ (resp.

$(u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$

Par conséquent, il existe une fonction h définie sur Ω telle que

$$\varphi(\omega, u) = e^{h(\omega)|u|^p} \quad , \quad \forall\ \omega \in \Omega_0 \ , \forall\ u \in \mathbb{R} \ .$$

h est alors mesurable et le résultat b) s'en déduit en prenant $\sigma = h \circ P$.

Corollaire.- Soit $0 < r \leq 2$. Il existe une probabilité σ_r sur $\mathbb{R}^{\cdot}$, telle que

$$\exp(-t^r) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2t^2} \ \sigma_r(du) \ , \ (t \geq 0) \ .$$

Preuve. En effet, il suffit d'appliquer l'exemple 3 avec p = 2 et $f : t \to \exp(-t^{\cdot})$ (d'après l'exemple 2, $x \to \exp(-||x||_2^{\cdot})$ est bien de type positif, pour tout $r \in]0, 2]$).

Signalons à ce propos quelques propriétés des probabilités σ_r .

Théorème (II;11).- Les probabilités σ_r définies dans le corollaire ci-dessus ont les propriétés suivantes :

a) $\sigma_r(\{0\}) = 0$;

b) $\forall\ p \geq 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{d\sigma_r(u)}{u^p} < +\infty$.

Démonstration : La preuve de b) m'a été donnée par J. BRETAGNOLLE.

a) est immédiat car :

$$0 \leq \sigma_r(\{0\}) \leq e^{-t^r} \ , \ \forall\ t \geq 0 \ .$$

Pour montrer b), il suffit de montrer que l'on a :

$$\int_0^\infty \frac{\sigma_r'(du)}{u^n} < +\infty \ , \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

avec $\sigma_r' = f \circ \sigma_r$ et $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $f(u) = \frac{u^2}{2}$.

Considérons n entier ≥ 0 et soit

$$\varphi(t) = \int_0^\infty e^{-ut} \left[e^{ut} - \sum_0^{n-1} \frac{(ut)^k}{k!}\right] \frac{\sigma'_r(du)}{u^n} .$$

$\varphi(t)$ existe bien, pour tout $t \geq 0$ et on a :

$$\varphi(t) = \int_0^\infty f_t(u) \frac{\sigma'_r(du)}{u^n} ,$$

avec

$$f_t(u) = 1 - e^{-ut} \left(\sum_0^{n-1} \frac{(ut)^k}{k!}\right).$$

Mais

$$\frac{\partial f_s(u)}{\partial s}(t) = e^{-ut} (ut)^{n-1} u \frac{1}{(n-1)!} .$$

D'où f_t est une famille de fonctions sur $[0, \infty[$ telles que

$$\begin{cases} 0 \leq f_t \leq 1 , \lim\limits_{t\to\infty} f_t = 1 \\ f_t \leq f_{t'} , \text{ si } t \leq t' \end{cases} .$$

D'où, par Beppo-Levi

$$\int_0^\infty \frac{\sigma_r'(du)}{u^n} < +\infty \Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} \varphi(t) < +\infty .$$

Mais

$$\varphi'(t) = \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-ut} \sigma'_r(du) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t^\alpha} , \alpha = \frac{r}{2} .$$

Et comme $\varphi(0) = 0$

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-s^\alpha} ds , \forall t \in [0, \infty[;$$

d'où

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) < +\infty . \text{ C.Q.D.F.}$$

III. PROBABILITES INDEFINIMENT DIVISIBLES
PROBABILITES STABLES

Dans tout ce §, E désignera un e.l.c., $|.|_n$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ et pour tout réel c , λ_c désignera l'application $x \to cx$ de E dans E. On dira qu'une fonction Ψ de E dans $\mathbb{R}$ est homogène s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R}^+_* \times E$, $\Psi(\lambda x) = \lambda^\alpha \Psi(x)$. On dit aussi que Ψ est homogène d'ordre α .

1. Définitions

Soit $\mu \in \mathcal{P}(E)$ et f sa fonction caractéristique.

μ est dite dégénérée s'il existe a dans E tel que $\mu = \delta_a$; μ est dite symétrique si $\mu = \lambda_{-1} \circ \mu$; μ est dite idempotente si $\mu * \mu = \mu$; μ est dite non décomposable s'il existe ν_1 et ν_2 dans $\mathcal{P}(E)$ non dégénérées et telles que $\mu = \nu_1 * \nu_2$.

On a immédiatement :

Théorème (III;1).- Une probabilité de Radon est symétrique si et seulement si sa fonction caractéristique est réelle (c'est-à-dire si et seulement si $f(u) = f(-u)$).

Théorème (III;2).- Soit $\mu \in \mathcal{P}(E)$. Alors :

μ idempotente $\Longleftrightarrow$ $\mu = \delta_0$;

" $\exists c \neq 1$ tel que $\mu = \lambda_c \circ \mu$" $\Longleftrightarrow$ $\mu = \delta_0$.

Preuve. On a :

μ idempotente $\Longleftrightarrow f^2(u) = f(u), \forall u \in E \Longrightarrow f(u) = 0$ ou $f(u) = 1$.

Comme $f(0) = 1$ et que f est continue c'est donc que : $f \equiv 1$.

La deuxième équivalence est due à la propriété (1) suivant le corollaire 3 du théorème (II;8).

Remarque (III;1).- Dans un Banach E, il n'existe pas de probabilité de Radon μ quasi-invariante, c'est-à-dire telle que

$$\mu * \delta_a = \mu \ , \ \forall a \in E \ .$$

Enfin, on dira que μ_1 et $\mu_2 \in \mathcal{P}(E)$ sont équivalentes, si elles sont absolument continues l'une par rapport à l'autre.

2. Probabilités de Radon indéfiniment divisibles

Définition (III;1).- $\mu \in \mathcal{P}(E)$ est dite indéfiniment divisible si pour tout entier $n > 0$, il existe $\mu_n \in \mathcal{P}(E)$, telle que $\mu = \mu_n^{\overset{n}{*}}$. On notera $\mu \in \mathcal{J}(E)$.

En particulier si $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$, μ est indéfiniment divisible si et seulement si pour tout entier $n > 0$, il existe une fonction caractéristique f_n sur $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$f_n^n = f \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^+ \ .$$

Théorème (III;3). [4] et [17] (théorème (2.2)).- Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}^m$ de fonction caractéristique f. On a équivalence de :

i) μ est indéfiniment divisible ;

ii) il existe Ψ sur $\mathbb{R}^m$, de type négatif, telle que $\Psi(0) = 0$ et $f = e^{-\Psi}$;

iii) μ est la loi d'une variable aléatoire X, relative à un $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, cette loi étant loi limite de variables aléatoires $S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}$ relatives au même $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et telles que

. $k_n \to \infty$, $n \to \infty$,

. $\forall n$, les k_n variables X_{nk}, $k = 1, \dots k_n$ sont indépendantes,

. $\forall \varepsilon > 0$, $\sup\limits_{k \le k_n} P\left[|X_{nk}|_m \ge \varepsilon\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Nous rappelons seulement comment l'on peut établir que f (x) est différent de 0 , pour tout x de $\mathbb{R}^m$:

$(|f(u)|^{2/n})_n$ est une suite croissante de fonctions bornées de type positif, donc elle converge simplement vers g finie ; d'où g est de type positif (propriété (c_2)). Mais $g = 1_{\{f \neq 0\}}$; donc g = 1 sur un voisinage de 0 et ainsi est continue en 0. Par conséquent, d'après le théorème (II;7), g est continue sur $\mathbb{R}^m$ et par suite $\{f \neq 0\} = \mathbb{R}^m$.

Corollaire. Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}^m$, symétrique et de fonction caractéristique f . Alors, on a équivalence de :

i) μ est indéfiniment divisible ;

ii) f est strictement positive, $f^{1/n}$ est une fonction caractéristique pour tout entier n > 0 .

En particulier, si f est une fonction strictement positive et si Log f est une fonction homogène, μ est indéfiniment divisible.

Remarque (III;2).- Soit $\Psi : E \to \mathbb{R}$ de type négatif. Si elle est homogène d'ordre $\alpha > 2$, Ψ est identiquement nulle (puisque $\sqrt{\Psi}$ est sous additive).

Remarque (III;3).- Dans le théorème (III;3), la condition

(C) : $\forall \varepsilon > 0$, $\max\limits_{k \le k_n} P\left[|X_{nk}|_m \ge \varepsilon\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

est équivalente à chacune des conditions suivantes :

$$(C') : \max_{k \leq k_n} \int \frac{|x|_m^2}{1 + |x|_m^2} \, d\, P_{X_{nk}} \to 0 \ , \ n \to \infty \ ;$$

$$(C'') : \max_{k \leq k_n} |f_{nk} - 1| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ , \text{ uniformément sur tout compact de } \mathbb{R}^m$$

(avec f_{nk} fonction caractéristique de $P_{X_{nk}}$).

Propriétés élémentaires

1. $\mu_1 \in \mathfrak{I}(E),\ \mu_2 \in \mathfrak{I}(E) \Longrightarrow \mu_1 * \mu_2 \in \mathfrak{I}(E)$.

2. Si $\mu_n \in \mathfrak{I}(\mathbb{R}^m)$ et si μ_n converge étroitement vers $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$, alors μ est indéfiniment divisible.

Exemple 1 - Soit μ une mesure finie sur $\mathbb{R}^m$, de masse $||\mu||$ et soit la mesure ν :

$$\nu = e^{-||\mu||} \left(\sum_{n\geq 0} \mu^{\overset{n}{*}} \frac{1}{n!} \right). \qquad (\mu_0 = \delta_0)$$

ν est indéfiniment divisible car sa transformée de Fourier $\hat{\nu}$ satisfait

$$\hat{\nu}(x) = \exp\left(-\left[\int (1 - e^{i<x,y>})\, d\mu\,(y)\right]\right) , \forall x \in \mathbb{R}^m .$$

Exemple 2 - Commençons pour cela par donner quelques définitions. Soient $\mu \in \mathcal{P}(E)$ et f sa transformée de Fourier. On dit que μ est stable, si pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$, il existe $(\gamma, a) \in \mathbb{R}_*^+ \times E$ tel que

$$f(\alpha x)\, f(\beta x) = f(\gamma x)\, e^{-i<x,a>} \ , \forall x \in E' . \tag{1}$$

On dit que μ a la propriété $(\mathfrak{R})$, si pour tout $c \in]0, 1[$, il existe μ_c dans $\mathcal{P}(E)$ tel que

$$\mu = \mu_c * \mu^c \ , \ \mu^c = \lambda_c \circ \mu .$$

Par suite, il existe $f_c \in \mathcal{F}\sigma\,(E)$ tel que

$$f(u) = f(cu)\, f_c(u)\ ,\ \forall u \in E'\ . \tag{2}$$

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^m$, on dit que μ a la propriété $(\mathcal{S})$ s'il existe une suite $(f_k)_k$ de fonctions caractéristiques, une suite $(a_k)_k$ d'éléments de $\mathbb{R}^m$ et une suite $(b_k)_k$ d'éléments de $\mathbb{R}_*^+$ telles que :

α) $g_n(u) = e^{-i\langle u, a_n\rangle} \prod_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{u}{b_n}\right) \to f(u)\ ,\ \forall u \in \mathbb{R}^m$,

β) $\sup_{k \leq n} \left| f_k\left(\frac{u}{b_n}\right) - 1 \right|$ tend vers zéro uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^m$.

Théorème (III;4).- Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$. On a :

μ stable $\Longrightarrow$ μ a la propriété $(\mathcal{H})$ $\Longrightarrow$ μ a la propriété $(\mathcal{S})$ $\Longrightarrow$ $\mu \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^m)$.

Remarque (III;4).- S'il existe $c > 1$ tel que (2) soit satisfaite alors on aurait, pour tout $u \in E'$, $|f(u)| \leq |f(cu)|$. Donc si $E = \mathbb{R}^m$, f serait dégénérée (cf corollaire 3 du théorème (II;9)).

Remarque (III;5).- Soit G un espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{F}\sigma(G)$. Supposons que pour tout $c \in]0, 1[$, il existe $f_c \in \mathcal{F}\sigma(G)$ telle que

$$f(u) = f(cu)\, f_c(u)\ ,\ \forall u \in G\ ;$$

alors f ne s'annule en aucun point de G.

En effet, supposons qu'il existe $u_0 \in G$ tel que $f(u_0) = 0$ ($\Rightarrow$ $u_0 \neq 0$). Mais $\lambda \to f(\lambda u_0)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, prenant la valeur 1 au point 0. Il existe donc $\lambda_0 > 0$ tel que :

$$f(\lambda u_0) \neq 0\ ,\ \forall \lambda \in [0, \lambda_0[\ .$$

Soit alors

$$\lambda_1 = \sup \{ \lambda > 0\ ;\ f(\mu u_0) \neq 0\ , \forall \mu \in [0, \lambda[\}\ .$$

On a :

$$0 < \lambda_1 \leq 1 \ , \ f\ (\lambda_1 u_0) = 0 \ .$$

Posons $a = \frac{\lambda_1 u_0}{2}$. Or, $f\ (a) \neq 0$, $f\ (2\ ca) \neq 0$, $\forall c \in]0, 1[$. D'où

$$f_c\ (2a) = 0 \ , \ \forall c \in]0, 1[$$

et

$$|f_c\ (a)|^2 = |f_c\ (a) - f_c\ (2a)|^2 \leq 2\ (1 - \mathcal{R}e\ f_c\ (a)). \tag{4}$$

Mais

$$f_c\ (a) = \frac{f\ (a)}{f\ (ca)} \to 1, \text{ si } c \to 1 \ ; \ \mathcal{R}e\ f_c\ (a) \to 1 \ , \text{ si } c \to 1 \ .$$

Ce qui contredit (4).

<u>Preuve du théorème (III;4)</u>. Si μ est dégénérée, c'est trivial.

Supposons donc μ non dégénérée. Si μ est stable, on a (2) avec f_c de la forme $f_c\ (u) = e^{i<u,a>} f\ (c'u)$, avec $c' > 0$, $a \in \mathbb{R}^m$. Si μ a la propriété ($\mathfrak{R}$), f ne s'annule pas et

$$f\ (u) = \prod_{k=1}^{n} h_k\ (\frac{u}{n})$$

avec :

$$h_k\ (u) = f_{\frac{k-1}{k}}\ (ku) = \frac{f\ (ku)}{f[(k-1)\ u]} \ .$$

f étant continue sur $\mathbb{R}^m$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^m$, on a pour tout $\rho > 0$

$$\inf_{|u|_m \leq \rho} |f\ (u)| = a_\rho > 0 \ ;$$

d'où, pour tout $\rho > 0$,

$$\sup_{|u|_m \leq \rho} \ \sup_{k \leq n} \left|h_k\ (\frac{u}{n}) - 1\right| \leq \frac{2}{a_\rho} \sup_{|u|_m \leq \frac{\rho}{n}} (1 - \mathcal{R}e\ f(u)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \ .$$

μ satisfait donc ($\mathfrak{S}$).

Si μ vérifie ($\mathfrak{S}$), μ est indéfiniment divisible d'après la partie iii) du théorème (III;3).

Cas particulier : $m = 1$.

D'après [9] , f est une fonction caractéristique stable sur $\mathbb{R}$, si et seulement si l'on ait sous l'un des cas suivants :

(i) $f(u) = \exp\left[- i\alpha u - b\,|u|^{\gamma}\left(1 + ic\frac{u}{|u|}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\gamma\right)\right]$

$\gamma \in]0, 1[\cup]1, 2]$

(ii) $f(u) = \exp\left[- i\alpha u - b\,|u|\left(1 + ic\frac{u}{|u|}\frac{2}{\pi}\operatorname{Log}|u|\right)\right]$

avec :

$a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, $|c| \leq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Toujours, d'après [9] , f est une fonction caractéristique stable sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe f_0 fonction caractéristique sur $\mathbb{R}$, une suite (a_n) d'éléments de $\mathbb{R}$, une suite (b_n) d'éléments de $\mathbb{R}_*^+$ telle que

. $b_n \to \infty$, quand $n \to \infty$

. $e^{-iua_n}\, f_0^n\left(\frac{u}{b_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

Remarquons aussi, que si f est une fonction caractéristique réelle sur $\mathbb{R}$, elle est stable si et seulement si $f = e^{-\Psi}$ avec Ψ fonction de type négatif sur $\mathbb{R}$, continue, homogène et $\Psi(0) = 0$.

Remarque.- Si m est quelconque, on peut consulter [19] et [20].

3. Lien avec les processus linéaires et les mesures cylindriques.

Définition (III;2).- Soit X un processus sur T , ensemble quelconque. Il est dit symétrique (resp. stable) si toutes ses probabilités marginales sont symétriques (resp. stable).

Théorème (III;5).- Soit X un processus linéaire de transformée de Fourier f . Alors f est réelle si et seulement si le processus est symétrique.

Définition (III;3).- Soient E et F deux espaces vectoriels en dualité et μ une mesure cylindrique sur E ($\mu \in \mathcal{P}(E, F)$) : $\mu = (\mu_N)_{N \in \mathfrak{F}_F}$, où $\mathfrak{F}_F$ est la famille des sous espaces vectoriels de F de dimension finie.

μ est dite cylindriquement indéfiniment divisible si toutes les probabilités μ_N sont indéfiniment divisibles ; μ est dite cylindriquement stable, si toutes les probabilités μ_N sont stables.

Notation.- Si F est un espace vectoriel, $\mathcal{N}\sigma(F)$ désignera la famille des fonctions Ψ de F dans $\mathbb{C}$ de type négatif, nulles en 0 et dont les restrictions à tous les sous espaces vectoriels N de F de dimension finie sont continues.

Théorème (III;6).- Soient E et F en dualité, $\mu \in \check{\mathcal{P}}(E, F)$ et f la transformée de Fourier de μ. On a équivalence de :

i) μ est cylindriquement indéfiniment divisible ;

ii) $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\exists f_n \in \mathcal{F}\sigma(F) : f = f_n^n$;

iii) Il existe Ψ dans $\mathcal{N}\sigma(F)$, telle que $f = e^{-\Psi}$.

Preuve : Remarquons tout d'abord que pour tout N dans $\mathfrak{F}_F$

$$\mathcal{F}(\mu_N) = f \mid N . \tag{1}$$

On a trivialement iii) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ i).

Montrons donc l'implication " i) $\Longrightarrow$ iii ".

Les μ_N étant indéfiniment divisibles, c'est dire, que pour tout $N \in \mathfrak{F}_F$, il existe $\Psi_N : N \to \mathbb{C}$ continue telle que

$$e^{-\Psi_N} = f \mid N , \quad \Psi_N (0) = 0 , \ \Psi_N \in \mathcal{N}_N .$$

Par suite

$$N_2 \supset N_1 \ , \ N_i \in \mathcal{S}_F \ (i=1,2) \implies e^{-\Psi_{N_1}(x_1)} = e^{-\Psi_{N_2}(x_1)} \ , \forall x_1 \in N_1 \ ;$$

et comme $x_1 \to \Psi_{N_1}(x_1) - \Psi_{N_2}(x_1)$ est continue sur N_1, nulle au point 0, c'est donc que

$$\Psi_{N_2} \mid N_1 = \Psi_{N_1} \ .$$

On en déduit aisément qu'il existe $\Psi : F \to \mathbf{C}$ telle que

$$\Psi \mid N = \Psi_N \ , \ \forall N \in \mathcal{S}_F \ .$$

On vérifie immédiatement que Ψ est dans $\mathcal{N}\sigma$ (F) et que $f = e^{-\Psi}$. C.Q.F.D.

<u>Théorème (III;7)</u>.- Sous les hypothèses du théorème (III;6) et si de plus f <u>réelle</u>, on a équivalence de :

i) μ est cylindriquement stable ;

ii) Il existe Ψ dans $\mathcal{N}\sigma$ (F), homogène telle que $f = e^{-\Psi}$;

iii) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^{+}_{*} \times \mathbf{R}^{+}_{*}$, $\exists \ \gamma \in \mathbf{R}^{+}_{*}$ / $f(\alpha x) f(\beta x) = f(\gamma x)$, $\forall x \in F$.

<u>Preuve</u>.- Si $f \equiv 1$, on a simultanément i), ii) et iii). Supposons qu'il existe x_0 dans F , tel que $f(x_0) \neq 1$ et soit N_0 l'espace vectoriel engendré par x_0.

. Trivialement ii) $\implies$ iii) $\implies$ i) .

. Montrons maintenant l'implication " i $\implies$ iii ". Si l'on a i), alors :

$\forall N \in \mathcal{S}_F$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^{+}_{*} \times \mathbf{R}^{+}_{*}$, $\exists \ \gamma_N > 0$ tel que

$$f(\alpha x) f(\beta x) = f(\gamma_N x) \ , \ \forall x \in N \ .$$

D'où :

$$N_1 \subset N_2 \ , \ N_i \in \mathcal{S}_F \ (i=1,2) \implies f(\gamma_{N_2} x) = f(\gamma_{N_1} x) \ , \forall x \in N_1 \ .$$

Si $\gamma_{N_2} \neq \gamma_{N_1}$, on en déduit que :

$$f(x) = 1 \ , \forall x \in N_1 \ .$$

Donc, pour tout $N \in \mathcal{S}_F$ tel que $x_0 \in N$, on a :

$\gamma_N = \gamma_{N_0}$.

On en déduit iii).

. Montrons alors l'implication " iii) $\Longrightarrow$ ii) ".

Comme μ est cylindriquement stable (si l'on a iii)), μ est cylindriquement indéfiniment divisible. Donc :

$$\exists \Psi \in \mathcal{N}_\sigma (F) : f = e^{-\Psi} .$$

D'après iii), pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$, il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\Psi (\alpha x) + \Psi (\beta x) = \Psi (\gamma x) , \forall x \in F . \qquad (1)$$

Il s'agit de montrer que Ψ est homogène. Bien entendu, pour tout $x \in F$ l'application $\lambda \to e^{-\Psi(\lambda x)}$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction caractéristique réelle, stable sur $\mathbb{R}$. Donc, pour tout $x \in F$, $\lambda \to \Psi (\lambda x)$ est homogène ; c'est-à-dire

$$\forall x \in F , \exists a_x \in]0, 2] \ / \ \Psi (\lambda x) = |\lambda|^{a_x} \psi (x) , \forall \lambda \in \mathbb{R} .$$

Mais, d'après (1), il existe $\gamma_0 > 0$, $\gamma_0 \neq 1$ tel que :

$$2 \Psi (x) = \Psi (\gamma_0 x) = \gamma_0^{a_x} \Psi(x) , \forall x \in F .$$

D'où :

$$" x \in F , \Psi (x) \neq 0 " \Longrightarrow a_x = \frac{\text{Log } 2}{\text{Log } \gamma_0} = a_{x_0} .$$

Il est alors immédiat que

$$\Psi (\lambda x) = |\lambda|^{a_{x_0}} \Psi (x) , \forall x \in F , \forall \lambda > 0 . \text{ C.Q.F.D.}$$

<u>Exemple</u> : Soient E un Hilbert H , $||.||$ la norme dans H . D'après l'exemple 2, § 2, $x \to \exp (- \alpha ||x||_H^p)$ est,pour tout $p \in]0, 2]$, la transformée de Fourier d'une mesure cylindrique μ_p sur H . Cette mesure cylindrique μ_p est donc cylindriquement stable.

Corollaire 1.- Soit $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue de type négatif avec $\Psi(0) = 0$.
On a alors équivalence de :

a) Ψ est homogène ;

b) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$, $\exists\, c > 0 \,/\, \Psi(ax) + \Psi(bx) = \Psi(cx)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Corollaire 2.- Soit X un processus linéaire sur un espace vectoriel F et f sa transformée de Fourier. Alors, on a équivalence de :

a) il existe Ψ dans $\mathcal{N}\sigma(F)$ telle que $f = e^{-\Psi}$;

b) pour tout entier $n > 0$, il existe $f_n \in \mathcal{F}\sigma(F)$ telle que

$$f = f_n^n ;$$

c) toutes les probabilités marginales du processus sont indéfiniment divisibles.

D'autre part, si f est réelle on a équivalence de :

a') $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$, $\exists\, \gamma > 0 \,/\, f(\alpha x)\, f(\beta x) = f(\gamma x)$, $\forall x \in F$;

b') toutes les probabilités marginales du processus sont stables.

Preuve.- Soit E_1 un e.v. en dualité avec F (soit, par exemple $E^\wedge$) et soit $\mu\ (\mu_N)_{N \in \mathfrak{F}_F}$ la mesure cylindrique sur E_1 associée au processus linéaire X.
Le corollaire 2 est conséquence immédiate des théorèmes (III;4) et (III;5) et des deux points suivants :

1. Pour tout $N \in \mathfrak{F}_F$, il existe une bijection g de $E_1 / {}_{N^\perp}$ sur un $\mathbb{R}^n$ (avec $n = \dim N$) telle que $g \circ \mu_N$ soit une probabilité marginale ;
2. Si P_I $(I \in \phi(F))$ est une probabilité marginale de X, il existe N dans $\mathfrak{F}_F$, une application linéaire (continue) de $E_1 / {}_{N^\perp}$ dans $\mathbb{R}^n$, avec $n = \operatorname{card} I$, telle que $P_I = g \circ \mu_N$.

Donnons encore un théorème sur les processus stables.

Théorème (III;8) [2].- Soient X un processus linéaire sur un espace vectoriel E , f sa transformée de Fourier. Si $f = e^{-\Psi}$, avec Ψ dans $\mathcal{N}_{\sigma}$ (E), positive, homogène d'ordre α, $\alpha \in]0, 2]$, alors tout représentant $(\Omega, \mathcal{F}, P, L)$ de X définit un opérateur de E dans $L^q(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pour tout q de $]0,\alpha[$ De plus, il existe $\Lambda_{\alpha,q}$ tel que

$$\left[\int |L(x)|^q \, dP \right]^{\frac{1}{q}} = \Lambda_{\alpha,q} \, (\Psi(x))^{\frac{1}{\alpha}} \quad , \forall x \in E \, , \forall q \in]0, \alpha[\, .$$

Remarque (III;6).- On a :

$$\Lambda_{\alpha,q} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^q \; h_\alpha(x) \, dx \right]^{\frac{1}{q}}$$

où $h_\alpha(x)\,dx$ est la probabilité sur $\mathbb{R}$, de fonction caractéristique $\lambda \to e^{-|\lambda|^\alpha}$.

Remarque (III;7).- Dans le théorème (III;8), si E est un $\mathbb{R}^m$, la mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}^m$, dont f est la transformée de Fourier, est d'ordre q pour tout q de $]0, \alpha[$.

Si e_i , $i = 1, \ldots m$ est la base canonique de $\mathbb{R}^m$, on a :

$$\int |x|_m^q \, \mu(dx) \leq \sum_{i=1}^{m} \int |\langle x, e_i \rangle|^q \, \mu(dx) = \sum_{i=1}^{m} \int |L(e_i)|^q \, dP \; ;$$

d'où

$$\left[\int |x|_m^q \, \mu(dx) \right]^{\frac{1}{q}} \leq \Lambda_{\alpha,q} \left[\sum_{i=1}^{m} (\Psi(e_i))^{q/\alpha} \right]^{\frac{1}{q}} \quad , \forall q \in]0, \alpha[\, .$$

Posons alors $c_q = 1 / \Lambda_{\alpha,q}$. La mesure $\lambda_{c_q} \circ \mu$ est une probabilité de Radon sur $\mathbb{R}^m$, d'ordre q , de fonction caractéristique f_q :

$$f_q = \exp \left[- \Psi \circ \lambda_{c_q} \right] .$$

De plus

$$\sup_{0<q<\alpha} \int |x|_m^q \; \lambda_{c_q} \circ \mu \, (dx) < + \infty . \tag{1}$$

<u>Corollaire</u>. [2] .- Soit Ψ une fonction réelle sur $\mathbb{R}^m$, continue, de type négatif, avec Ψ (0) = 0 . Alors, si $\Psi \not\equiv 0$, on a équivalence de :

i) Ψ est homogène d'ordre α pour un α de $\left]0, 2\right]$;

ii) il existe une mesure de Radon ≥ 0 sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^m$ telle que $\Psi \; (x) = \int_S \; |< x, \; y >|^\alpha \; \mu(dy) \; , \forall x \in \mathbb{R}^m$;

iii) $e^{-\Psi}$ est une fonction caractéristique stable.

<u>Preuve</u>.- " i) $\Longrightarrow$ ii) " est la seule implication non triviale.

Soit μ la probabilité de Radon sur $\mathbb{R}^m$ de fonction caractéristique $f = e^{-\Psi}$ et supposons Ψ homogène d'ordre α , $\alpha \in \left]0, 2\right]$.
D'après la remarque (III;7) et le théorème (I,4;1) pour tout q dans $\left]0, \alpha\right[$, il existe une mesure de Radon ≥ 0, soit ν_q , sur S telle que

$$||\nu_q|| = \int \; |x|_m^q \; d \; \lambda_{c_q} \circ \mu$$

et

$$\int |< x, \; y >|^q \; \nu_q \; (dy) = \int |< x, \; y >|^q \; \lambda_{c_q} \circ \mu \; (dy) = \int | \; L \; (c_q \; x)|^q \; dP$$
$$= (\Psi \; (x))^{q/\alpha} .$$

D'après (1), comme S est compact, $\{\nu_q \; , \; q \in S\}$ est un ensemble de mesures de Radon ≥ 0 sur S étroitement relativement compact. Il existe donc $\nu \geq 0$, de Radon sur S et $q_n \uparrow q$ telle que ν_{q_n} converge étroitement vers ν . D'où :

$$\int |< x, \; y >|^q \; \nu \; (dy) = \Psi \; (x) \; , \; \forall x \in \mathbb{R}^m .$$

4. Rappel d'un exemple bien connu et donnée d'un problème.

Soient H un Hilbert réel, φ dans $\mathcal{P}\sigma$ (H) et μ la mesure cylindrique sur H de transformée de Fourier φ .

Sur un Hilbert H , la $\mathcal{S}_p$ topologie ($p \in [1, \infty[$) est équivalente à la $\mathcal{S}$-topologie, qui est par définition, la topologie localement convexe sur H la moins fine des topologies localement convexes sur H rendant continues tous les opérateurs de Hilbert-Schmidt de H .

D'après [1], on a donc équivalence de :

i) φ est la transformée de Fourier d'une mesure de Radon sur H ;

ii) φ est continue pour la $\mathcal{S}_p$ - topologie ($p \in [1, \infty[$) sur H ;

iii) φ est continue pour la $\mathcal{S}$- topologie sur H ;

iv) le processus linéaire sur H , de transformée de Fourier φ, est continue pour la $\mathcal{S}$- topologie.

On en déduit, en utilisant le théorème (I, 4; 2), le résultat (très connu) suivant :

"Soient μ une mesure cylindrique sur l'Hilbert H , φ sa transformée de Fourier, (Ω, P, L) un représentant usuel arbitraire du processus linéaire sur H associé à μ et $(e_i)_{i \in I}$ une base orthonormée de H . On a équivalence de :

1°) μ provient d'une mesure de Radon d'ordre 2 sur H ;

2°) L définit un opérateur d'Hilbert-Schmidt de H dans L^2 (Ω, P) ;

3°) φ est continue sur H et $\sum_{i \in I} \int_{-\infty}^{+\infty} |L(e_i)|^2 \, dP < \infty$. "

D'autre part si H est un Hilbert réel, on a équivalence de :

1°) φ est la transformée de Fourier d'une mesure de Radon sur H indéfiniment divisible, 2°) φ est la transformée de Fourier d'une mesure de Radon sur H cylindriquement indéfiniment divisible,

3°) $\varphi = e^{-\Psi}$ avec

$$\Psi(y) = i < x_o, y > + \frac{1}{2} < Sy, y > + \int_{H-\{0\}} \left(1 - e^{i<y,x>} - \frac{i < y,x >}{1 + ||x||^2}\right) \frac{1 + ||x||^2}{||x||^2} \sigma(dx)$$

où $x_o \in H$, σ est une mesure de Radon ≥ 0, finie sur $H - \{0\}$ et S un opérateur nucléaire de H .

Problème : Si E est un e.l.c. quelconque, est-ce qu'une probabilité de Radon μ sur E cylindriquement indéfiniment divisible est indéfiniment divisible ?

On sait répondre affirmativement dans les cas suivants :

a) μ est une probabilité de Radon cylindriquement stable ;

b) E a la propriété suivante : "Si μ est une mesure cylindrique sur E , μ provient d'une mesure de Radon sur E si et seulement si sa transformée de Fourier $\varphi : E' \to \mathbf{C}$ est continue pour une certaine topologie localement convexe sur E' .

IV - EXEMPLES DE MESURES CYLINDRIQUES ET QUELQUES REMARQUES

1. Théorème (IV;1).- Soient H un Hilbert réel séparable, C un disque fermé borné de H, $C°$ le polaire de C et $\hat{H}_{C°}$ le complété de $H_{C°} = H / p_{C°}^{-1}(0)$ muni de la norme $\dot{p}_{C°}$ correspondant à la jauge $p_{C°}$ de $C°$.

Soient $r \in \left]0, 2\right]$, $L_r : H \to L°(\Lambda, \mu)$ une fonction aléatoire usuelle linéaire sur H , dont la transformée de Fourier est $x \to \exp(- ||x||^r)$ et λ_r la mesure cylindrique sur $\hat{H}_{C°}$ associée à la restriction de L_r à H_C .

On a :

1°) Si λ_2 provient d'une mesure de Radon, C est un compact de H ;

2°) Si C est un compact de H , on a équivalence de :

a) λ_r provient d'une mesure de Radon sur $\hat{H}_{C°}$;

b) (resp. b')) L_r admet une version $\mathscr{L}_r$ telle que les restrictions à C des trajectoires de $\mathscr{L}_r$ sont uniformément continues sur C muni de la structure uniforme induite par celle de H (resp. par $\sigma(H_C, \hat{H}_{C°})$).

Démonstration.- 1°) résulte de la proposition 3.4 de [5] .

Montrons 2°). b) est équivalent à b') car, d'une part, C est $\sigma(H_C, \hat{H}_{C°})$ compact (H_C est le dual de $\hat{H}_{C°}$) et d'autre part, sur C, la structure uniforme séparée $\sigma(H_C, \hat{H}_{C°})$ est moins fine que la structure uniforme de H (puisque l'injection $H \to H_C$ est continue pour $\sigma(H, H)$ et $\sigma(H_C, \hat{H}_{C°})$).

a) est équivalent à b) par la propriété (I,2;6) et le théorème (II;9),c.q.f.d..

Remarque 1.- Si U est la boule unité de H et $\rho(C, U)$ l'exposant d'entropie de C relativement à U , alors pour que λ_2 provienne d'une mesure de Radon sur

$\hat{H}_C$. il est nécessaire [13] que ρ (C, U) ≤ 2 et suffisant [5] que ρ (C, U) < 2.

Théorème (IV;2).- Soient H un Hilbert réel, de norme $||.||$, E un e.l.c. séparé et U une application linéaire faiblement continue de H dans E. Soient $r \in]0, 2]$ et ν_r la mesure cylindrique sur H dont la transformée de Fourier est $x \to \exp(-||x||^r)$ (H est identifié à son dual). On a pour tout $r \in]0, 2]$ équivalence de :

a) la mesure cylindrique $U \circ \nu_r$ est une mesure sur $\mathcal{C}_E$,

b) la mesure cylindrique $U \circ \nu_2$ est une mesure sur $\mathcal{C}_E$.

($\mathcal{C}_E$ étant l'algèbre des cylindres de E).

Pour montrer ce théorème nous allons établir quelques lemmes.

Lemme 1.- Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}^m$ et soit $\mathcal{F}(\mu)$ sa fonction caractéristique. Notons $n_2^{(u)}$ la mesure sur $\mathbb{R}^m$, dont la fonction caractéristique est $x \to \exp(-\frac{1}{2}||x\, u||^2)$ (avec $||.||$ norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$).

Alors pour toute fonction f réelle continue bornée sur $\mathbb{R}^m$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^m} f\, d\mu = \lim_{\substack{\alpha\to\infty \\ \lambda\to\infty}} (\alpha\lambda)^m \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}(\mu)\,(y)\, F_\lambda\,(y)\; n_2^{(\alpha)}\,(dy)$$

avec

$$F_\lambda\,(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f\,(x) \exp(-i < x, y >)\, n_2^{(\lambda)}\,(dx).$$

Démonstration : elle est de type usuel.

Notons, pour tout $\beta > 0$, ρ_β la fonction réelle $x \to \exp(-\frac{1}{2}||x\,\beta||^2)$ définie sur $\mathbb{R}^m$. Si h est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^m$, nous noterons $\check{h}$ la fonction $x \to h(-x)$ et $\hat{h}$ la fonction $x \to \int e^{i<x,t>} h(t)\, dt$ quand elle existe.

Considérons pour tout $\lambda > 0$ et tout $\alpha > 0$ les fonctions réelles

$$h_\lambda = \rho_{1/\lambda} f \ , \ h_{\lambda,\alpha} = h_\lambda * \rho_\alpha \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\right)^m .$$

Comme $|h_{\lambda,\alpha}| \leq ||f||$ et $h_{\lambda,\alpha} \to f$ (simplement) quand α et λ tendent vers $+\infty$, on en déduit d'après le théorème de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^m} f \, d\mu = \lim_{\substack{\alpha\to\infty \\ \lambda\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^m} h_{\lambda,\alpha} (y) \, \mu (dy). \tag{1}$$

De plus (conformément aux notations usuelles en théorie des distributions) $h_{\lambda,\alpha} \in \mathcal{S}$, car $h_\lambda \in O'_M$ et $\rho_\alpha \in \mathcal{S}$. On en déduit, d'une part,

$$\hat{h}_{\lambda,\alpha} = \hat{h}_\lambda \cdot \hat{\rho}_\alpha \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\right)^m = \rho_{1/\alpha} \hat{h}_\lambda$$

et d'autre part, puisque $\mu \in \mathcal{S}'$,

$$\int_{\mathbb{R}^m} h_{\lambda,\alpha} (y) \, \mu (dy) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \bar{\hat{h}}_{\lambda,\alpha} (y) \, \mathcal{F}(\mu) (y) \, dy . \tag{2}$$

Comme ceci est valable pour tout $\alpha > 0$ et tout $\lambda > 0$, on a bien le résultat, d'après (1).

Remarque 2.- Dans [7], Gross a énoncé ce lemme.

Lemme 2.- Soit $0 < r \leq 2$. Soit σ_r la probabilité sur $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\exp(-t^r) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2} u^2 t^2\right) \sigma_r (du) \ , \ \forall t \geq 0 .$$

Si n_r est la probabilité sur $\mathbb{R}^m$, de fonction caractéristique $x \to \exp(-||x||^r)$ où $||.||$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$ et si $n_2^{(u)}$ est la probabilité sur $\mathbb{R}^m$ de fonction caractéristique $x \to \exp\left(-\frac{1}{2} ||x\, u||^2\right)$, alors pour toute fonction réelle continue bornée sur $\mathbb{R}^m$

$$n_r (f) = \int_0^\infty n_2^{(u)} (f) \, \sigma_r (du). \tag{3}$$

Remarque 3.- D'après la partie 6 du paragraphe II, on sait que σ_r existe. $n_2^{(1)}$ sera appelée mesure de Gauss normale et n_1 mesure de Cauchy normale.

Démonstration.- Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}^m$. Gardons les notations du lemme 1 (en particulier les notations F_λ , $h_{\lambda,\alpha}$). D'après ce lemme

$$n_r(f) = \lim_{\substack{\alpha\to\infty \\ \lambda\to\infty}} (\alpha\lambda)^m \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}(n_r)(x)\, F_\lambda(x)\, n_2^{(\alpha)}(dx).$$

Mais, par définition de σ_r

$$\mathcal{F}(n_r)(x) = \int_{]0,\infty[} \mathcal{F}(n_2^{(u)})(x)\, \sigma_r(du)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}^m\ ;$$

d'où, par le théorème de Fubini

$$n_r(f) = \lim_{\substack{\alpha\to\infty \\ \lambda\to\infty}} (\alpha\lambda)^m \int_{]0,\infty[} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}(n_2^{(u)})(x)\, F_\lambda(x)\, n_2^{(\alpha)}(dx)\right) \sigma_r(du).$$

Mais d'après la démonstration du lemme 1, pour tout $u \in]0,\infty[$

$$(\alpha\lambda)^m \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}(n_2^{(u)})(x)\, F_\lambda(x)\, n_2^{(\alpha)}(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} h_{\lambda,\alpha}(y)\, n_2^{(u)}(dy),$$

$$\lim_{\substack{\alpha\to\infty \\ \lambda\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^m} h_{\lambda,\alpha}(y)\, n_2^{(u)}(dy) = n_2^{(u)}(f)$$

et $\left| \int_{\mathbb{R}^m} h_{\lambda,\alpha}(y)\, n_2^{(u)}(y) \right| \leq ||f||$.

Par suite, par le théorème de Lebesgue,

$$n_r(f) = \int_{]0,\infty[} n_2^{(u)}(f)\, \sigma_r(du)\ ,\ \text{c.q.f.d.}$$

Lemme 3 - Pour tout $r \in]0, 2]$ et pour tout borélien A de $\mathbb{R}^m$

$$n_r (A) = \int_{]0,\infty[} n_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}u} A\right) \sigma_r (du). \tag{4}$$

Donnons enfin un dernier lemme.

Lemme 4 - Soit H un Hilbert réel et E_1 un e.l.c. séparé. Soit V une application linéaire faiblement continue de H dans E_1.

Notons pour tout $r \in]0, 2]$, ν_r la mesure cylindrique sur H dont la transformée de Fourier est $x \to \exp(-||x||^r)$ (H étant identifié à son dual).

Alors, pour tout $r \in]0, 2]$ et pour toute partie équilibrée A de E_1, on a :

$$(V \circ \nu_r)^* (A) = \int_{]0,\infty[} (V \circ \nu_2)^* \left(\frac{1}{\sqrt{2}\, u} A\right) \sigma_r (du) \tag{5}$$

Remarque 4 - $V \circ \nu_r$ est la mesure cylindrique sur E_1, image de la mesure cylindrique ν_r par l'application linéaire faiblement continue V ; $(V \circ \nu_r)^\wedge$ est définie comme dans le paragraphe I et $(V \circ \nu_r)^* \geq V \circ (\nu_r^*)$.

Démonstration.- Tout d'abord, pour tout cylindre C de E_1 $V^{-1}(C)$ est un cylindre de H et d'après le lemme 3

$$V \circ \nu_r (C) = \int_{]0,\infty[} V \circ \nu_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}\, u} C\right) \sigma_r (du).$$

D'autre part, pour toute partie A de E_1 la famille $\mathfrak{G}_A$ des suites $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{C}_{E_1}$ tels que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \supset A$ est un ensemble filtrant décroissant relativement à la relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur $\mathfrak{G}_A$ définie par

$$(A_n)_n \preccurlyeq (B_n)_n \iff (A_i \subset B_i, \ \forall i \in \mathbb{N}).$$

En outre, si A est équilibrée, $u \to (V \circ \nu_2)^* \left(\frac{A}{u\sqrt{2}}\right)$ est monotone donc mesurable.

On en déduit immédiatement que pour toute partie A équilibrée de E_1 , on a (5), c.q.f.d.

Remarque 5.- Les notations étant celles du lemme 4, on remarque que pour toute partie équilibrée A de E_1

$$(V \circ \nu_r)^* (A) \leq \int_0^1 \sigma_r (du) + (V \circ \nu_2)^* (\frac{A}{\sqrt{2}}) \int_1^{+\infty} \sigma_r (du),$$

c'est-à-dire

$$(V \circ \nu_2)^* (\frac{A}{\sqrt{2}}) \geq \frac{(V \circ \nu_r)^* (A) - q_r}{1 - q_r}$$

avec $q_r = \sigma_r]0, 1]$.

Montrons maintenant le théorème (IV;2).

Soit i l'injection canonique de E dans son complété faible E_1 et posons $V = i \circ U$. D'après la propriété (I,2;3), $U \circ \nu_r$ est une mesure sur $\mathcal{C}_E$ si et seulement si $(V \circ \nu_r)^* (E) = 1$. Comme E est équilibré et que pour tout réel $u > 0$, $E = \frac{1}{\sqrt{2}\, u} E$, on a par le lemme 4

$$(V \circ \nu_r)^* (E) = 1 \iff (V \circ \nu_2)^* (E) = 1 ;$$

par suite, par la propriété (I,2;3), on obtient le théorème (IV;2).

Remarque 6.- Si E est souslinien on peut remplacer dans le théorème (IV,2) l'expression "est une mesure sur $\mathcal{C}_E$" par l'expression "provient d'une mesure de Radon sur E".

D'après les remarques 1 et 6, on a le

Théorème (IV;3).- Soient H un Hilbert réel séparable de boule unité U , C un disque fermé borné de H , i l'application canonique de H dans $\hat{H}_{C^\circ}$ et $r \in]0, 2]$.

Pour que la mesure cylindrique $i \circ \nu_r$ provienne d'une mesure de Radon sur $\hat{H}_{C^\circ}$, il est nécessaire que $\rho(C, U) \leq 2$ et suffisant que $\rho(C, U) < 2$.

D'après ce théorème et le théorème (IV;1) on a le

Théorème (IV;4).- Soient H un Hilbert réel, de boule unité U, C un disque compact de H , $r \in]0, 2]$ et $L_r : H \to L^\circ(\Lambda, \mu)$ une fonction aléatoire linéaire usuelle ayant pour transformée de Fourier $x \to \exp(-\|x\|^r)$. Alors pour qu'il existe une version $\mathcal{L}_r$ de L_r pour laquelle les restrictions à C des trajectoires de $\mathcal{L}_r$ sont uniformément continues sur C muni de la structure uniforme induite par celle de H , il est nécessaire que $\rho(C, U) \leq 2$ et suffisant que $\rho(C, U) < 2$.

Remarque 7.- Dans [15], on a vu que (en tenant compte des notations du théorème (IV;3)) si $i \circ \nu_r$ provient d'une mesure de Radon, i n'est pas toujours radonifiante (au sens de [1]). Elle est radonifiante si $\rho(C, U) < 1$ (cf. [14], exposé 20). Pour chercher les cas où i est radonifiante, l'étude des mesures cylindriques $i \circ \nu_r$, $r \in]0, 2[$ est donc inutile.

2. Donnons maintenant une application du lemme 3 dans le cas où $r = 1$.

La probabilité σ_1 sur $\mathbb{R}^+$ telle que

$$e^{-t} = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\frac{u^2t^2}{2}} \sigma_1(du) , \forall t \geq 0,$$

est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$ et a pour densité

$$u \to p\,(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{u^2}\ \exp\left(-\frac{1}{2\,u^2}\right).$$

Ainsi, la mesure de Cauchy normale sur $\mathbb{R}^m$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$ et a pour densité

$$x \to h\,(x) = \frac{2}{S_{m+1}}\ \frac{1}{(1+||x||^2)^{\frac{m+1}{2}}}$$

où $||.||$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$ et où

$$S_m = \frac{2\,\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\,(\frac{m}{2})} = \frac{(2\pi)^{m/2}}{\int_0^\infty u^{m-1}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du}.$$

Remarque.- S_m est l'aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^m$ ($S_1 = 2$, $S_2 = 2\,\pi$, $S_3 = 4\,\pi$, ...).

Soit m un entier > 0. Posons pour tout entier $i > 0$ $R_i = \mathbb{R}$ et notons n_1 la mesure de Cauchy normale sur $\prod_{i=2}^{m+1} R_i$, G la mesure de Gauss normale sur R_{n+1} et G_m (resp. G_{m+1}) la mesure de Gauss normale sur $\prod_{i=2}^{m+1} R_i$ (resp. $\prod_{i=1}^{m+1} R_i$).

Alors, d'après le lemme 3, pour tout borélien A de $\prod_{i=2} R_i$, on a :

$$n_1\,(A) = 2\int_{\mathbb{R}^+} G_m\,(Au)\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(\frac{-\,u^2}{2}\right)du\ ,$$

c'est-à-dire

$$n_1\,(A) = 2\int_{\mathbb{R}^+} G_m\,(Au)\ G\,(du) = \int_{\mathbb{R}} G_m\,(Au)\ G\,(du).$$

D'où

$$\boxed{n_1 (A) = G \otimes G_m (\Sigma_A) = G_{m+1} (\Sigma_A) \text{ , avec } \Sigma_A = \bigcup_{u \in \mathbb{R}} u (\{1\} \times A).} \qquad (2)$$

Σ_A est le cône de $\prod_{i=1}^{m+1} R_i$ de sommet $(0, \ldots, 0)$ et dont la section par l'hyper-plan $x_1 = 1$ est l'ensemble des points $(x_1, \ldots, x_{m+1})$ de $\prod_{i=1}^{m+1} R_i$ tels que

$$(x_2, \ldots, x_{m+1}) \in A \text{ , } x_1 = 1 \text{ .}$$

Remarque.- Posons

$$\Delta_A = \bigcup_{u \in \mathbb{R}_*^+} u (\{1\} \times A) \text{ , } \Delta'_A = \bigcup_{u \in \mathbb{R}_*^+} u (\{1\} \times - A)$$

t $\Sigma'_A = \bigcup_{u \in \mathbb{R}} (\{u\} \times |u| A).$

n a trivialement

$$G_{m+1} (\Delta_A) = G_{m+1} (\Delta'_A) = \frac{1}{2} n_1 (A) \qquad (2')$$

et

$$G_{m+1} (\Sigma'_A) = n_1 (A).$$

Exemple.- Soient $a_1, \ldots a_p$, p éléments de $\prod_{i=2}^{m+1} R_i$. Prenons

$$A = \{x \in \prod_{i=2}^{m+1} R_i : < x , a_i > \leq 1, i = 1, \ldots p\} \text{ .} \qquad (3)$$

On a d'une part

$$\Delta_A = \{z \in \prod_{i=1}^{m+1} R_i : z_1 > 0 \text{ , } < z , \tilde{a}_i > \leq 0 \text{ , } i = 1, \ldots p \} \qquad (3')$$

avec

$$\tilde{a}_i = (-1, a_i) \quad i = 1, \ldots, p$$

et d'autre part

$$\Delta'_A = \{z \text{ ; } z \in \prod_{i=1} R_i \text{ , } z_1 > 0 \text{ , } < z , a_i > \leq 0 \text{ , } i = 1, \ldots p\}$$

avec

$$\bar{a}_i = (-1, -a_i) \ , \ i = 1, \ldots, p \ .$$

Remarquons que l'on peut être amené à comparer $n_1 (A_1)$ et $n_1 (A_2)$ avec A_1 et A_2 du type (3). D'après (2') et (3') on est ainsi conduit à rappeler l'énoncé et la preuve d'un théorème de Slépian, [12].

3. Théorème (IV;5).- Soit E_n un espace de Hilbert réel de dimension n et notons G_n la mesure de Gauss normale sur E_n .
Si les 2 familles $(a_1, \ldots a_p)$ et $(b_1, \ldots b_p)$ de p éléments non nuls de E_n vérifient

$$a_{ij} = \frac{< a_i, a_j >}{||a_i|| \ ||a_j||} \leq \frac{< b_i, b_j >}{||b_i|| \ ||b_j||} = b_{ij} \qquad i, j = 1, \ldots p$$

alors

$$G_n \ \{x \ ; \ x \in E_n \ , \ < x, a_i > \ \leq 0, \ i=1,\ldots p \ \}$$
$$\leq \ G_n \ \{x \ ; \ x \in E_n \ , \ < x, b_j > \ \leq 0, \ j=1,\ldots,p\} \ . \qquad (4)$$

Démonstration.- Notons respectivement par A et B les matrices p x p $((a_{ij}))$ et $((b_{ij}))$. Pour montrer le théorème (IV;5), il suffit de montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout couple $(C,D) = (((c_{ij})), ((d_{ij})))$ de matrices m x m réelles inversibles de type positif telles que

$$c_{ii} = d_{ii} \quad i = 1, \ldots m \ , \ c_{ij} \leq d_{ij} \qquad i, j = 1, \ldots m$$

l'on a :

$$\frac{1}{\sqrt{\det C}} \int_{\substack{x_i>0 \\ i=1,\dots,m}} e^{-\frac{1}{2} < C^{-1}x,x>} dx \leq \frac{1}{\sqrt{\det D}} \int_{\substack{x_i>0 \\ i=1,\dots,m}} e^{-\frac{1}{2} <D^{-1}x,x>} dx \,. \qquad (5)$$

En effet, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a (5) avec $C = A + \varepsilon I$ et $D = B + \varepsilon I$ (où I matrice unité p x p). En faisant tendre ε vers zéro on en déduit (4) d'après un théorème de comparaison des convergences des fonctions caractéristiques et des fonctions de répartition associées.

Montrons donc (5). Si $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, on notera $x > 0$, si $x_i > 0$, pour tout $i = 1, \dots, m$.

Considérons pour tout $\lambda \in [0, 1]$ la matrice $P(\lambda) = ((p_{ij}(\lambda))) = \lambda C + (1-\lambda) D$ et soit (pour tout $\lambda \in [0, 1]$) .

$$I(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\det P(\lambda)}} \int_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ x>0}} \exp\left(-\frac{1}{2} < P^{-1}(\lambda)x,x >\right) dx \,.$$

Nous allons montrer que $\lambda \to I(\lambda)$ est croissante sur $[0, 1]$, ce qui impliquera (5).

Commençons pour cela par introduire quelques notations. $\mathcal{M}_m$ désignera la famille des matrices m x m à coefficients réels $P = ((p_{ij}))$ telles que $\det P > 0$ et $p_{ii} = c_{ii}$ $(i = 1, \dots, m)$ et τ l'application $P = ((p_{ij})) \to (p_{ij})_{i<j;i,j=1,\dots,m}$ de $\mathcal{M}_m$ dans $R^{m(m-1)/2}$.

τ est injective. Soient aussi les applications $g : \mathbb{R}^m \times \tau(\mathcal{M}_m) \to \mathbb{R}^+$ et $J : \tau(\mathcal{M}_m) \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tout $P \in \mathcal{M}_m$, tout $x \in \mathbb{R}^m$

$$g(x\,;\,\tau(P)) = \frac{1}{\sqrt{\det P}} \exp\left(-\frac{1}{2} < P^{-1} x, x >\right) \cdot \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m}$$

$$J(\tau(P)) = \int_{\substack{x\in\mathbb{R}^m\\ x>0}} g(x\,;\,\tau(P))\,dx\,.$$

Trivialement, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $P(\lambda)$ est dans $\mathcal{M}_m$. Posons $\tau(P(\lambda)) = p(\lambda)$. On a

$$\frac{dI}{d\lambda}(\lambda) = \sum_{i<j} \frac{\partial J}{\partial p_{ij}}(p(\lambda))(d_{ij} - c_{ij})$$

et montrons que $\frac{dI}{d\lambda}(\lambda)$ est positif (pour tout $\lambda \in [0, 1]$).

Soit $P \in \mathcal{M}_m$ et $i < j$ $(i, j = 1, \ldots, m)$; pour tout $y \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial g}{\partial p_{ij}}(y,\tau(P)) = \frac{\partial}{\partial p_{ij}} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left(-\frac{1}{2} < Px, x >\right) e^{i<x,y>}\,dx$$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial y_i\,\partial y_j}(y,\tau(P))$$

et par suite

$$\frac{\partial J}{\partial p_{ij}}(\tau(P)) = \int_{\substack{\tilde{x}\in R_{ij}\\ \tilde{x}>0}} g_{ij}(\tilde{x}, \tau(P))\,d\tilde{x}$$

où $R_{ij} = \prod_{\substack{1\le k\le m\\ k\ne i,j}} R_k$, $R_k = \mathbb{R}$ et $g_{ij}(\tilde{x}, \tau(P)) = g(x, \tau(P))$

avec $x_k = \tilde{x}_k$ si $k \ne i, j$ et $x_i = x_j = 0$.

Par conséquent, pour tout $P \in \mathcal{M}_m$ et pour tout (i, j) tel que $i < j$, $i, j = 1, \ldots, m$

$$\frac{\partial J}{\partial p_{ij}}(\tau(P)) \ge 0\,;$$

et ainsi

$$\frac{dI}{d\lambda}(\lambda) \ge 0\,,\quad \forall\,\lambda \in [0, 1]\,,\ \text{c.q.f.d.}$$

<u>Corollaire 1.</u>- Soient E_{n+1} un Hilbert de dimension n+1 , M et ε deux réels > 0 et $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ une base orthonormale de E_{n+1} . Soit E_n l'espace vectoriel engendré par les e_i d'indice $i \leq n$.

Soient alors $a_1, \dots, a_n$ n éléments de E_n tels que

$$\sup_{1 \leq i \leq n} ||a_i|| \leq M , || a_i - a_j|| \geq \varepsilon \; (i \neq j \; ; \; i, j = 1, \dots n) . \qquad (6)$$

Si l'on pose $F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{2})\, dt$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $a_i^* = a_i - e_{n+1}$,

$e_i^* = \frac{\varepsilon}{2(M^2+1)} e_i - e_{n+1}$ $(i = 1, \dots, n)$ et si G est la mesure de Gauss normale sur E_{n+1} , on a :

$$I_1 \leq I_2 \leq I_3 \leq I_4 ,$$

avec :

$$I_1 = F(1) \times G(\{z \; ; \; z \in E_{n+1} , < z , a_i > \leq 1, \; i = 1, \dots, n \}) ,$$

$$I_2 = G \{z \; ; \; z \in E_{n+1} , < z , a_i^* > \leq 0 , \; i = 1, \dots, n\} ,$$

$$I_3 = G \{z \; ; \; z \in E_{n+1} , < z , e_i^* > \leq 0 , \; i = 1, \dots, n\} ,$$

$$I_4 = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{\lambda^2}{2}) (1 - F(\frac{\lambda C}{\varepsilon}))^n \, d\lambda .$$

<u>Démonstration.</u> On a $I_1 \leq I_2$ puisque

$$(z = x + \lambda e_{n+1} , x \in E_n) \Longrightarrow < z , a_i^* > = < x, a_i > - \lambda$$

et que

$$I_1 = G \{z \; ; \; z = x + \lambda e_{n+1} , \lambda \geq 1, x \in E_n , < x, a_i > \leq 1 \; ; \; i=1,\dots,n\}.$$

$I_2 \leq I_3$:

Soient les matrices n x n $A = ((a_{ij}))$ et $B = ((b_{ij}))$ avec

Si K est un disque compact de H tel que $\rho(K, U) > 2$, il n'existe pas de version de L à trajectoires bornées sur K .

<u>Démonstration</u>.- Soit K disque compact de H tel que $\rho(K, U) > 2$ et supposons qu'il existe une version $\mathscr{L}$ de L telle que

$$P\ \{\omega\ ;\ \omega \in \Omega\ ,\ \sup_{x\in K} |\mathscr{L}(x)(\omega)| < +\infty\} = 1\ ;$$

par conséquent il existe $\alpha > 0$ et $a > 0$ tels que

$$P\ \{\omega\ ;\ \omega \in \Omega\ \sup_{x\in K} |\mathscr{L}(x)(\omega)| \leq \alpha\} = a\ .$$

On peut toujours se ramener au cas $\alpha = 1$: il suffit de remplacer K par $K_1 = \alpha^{-1} K$, ce qui ne modifie pas la valeur de l'exposant d'entropie. On supposera dans ce qui suit $\alpha = 1$.

Comme $\rho(K, U) > 2$, il existe b réel et une suite $(\alpha_n)_n$ de réels > 0 tels que

$$\alpha_n \downarrow 0\ ,\ \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} C(K, \alpha_n U)}{\operatorname{Log} 1/\alpha_n} > b > 2 \tag{7}$$

(où $C(K, \alpha_n U)$ est l' α_n-capacité de K relativement à U).

Soit alors $(M_n)_n$ une suite de parties de K, α_n U-discernables et telles que

$$\operatorname{Log} \operatorname{card} M_n = C(K, \alpha_n U)\ ;$$

notons m_n ce nombre $\operatorname{card} M_n$.

Montrons que l'on obtient une contradiction en établissant que

$$P\ \{\omega\ ;\ \sup_{x\in M_n} \mathscr{L}(x)(\omega) \leq 1\} \to 0\ ,\ \text{quand } n \to \infty.$$

Posons $M = \sup\ \{\ ||x||\ ;\ x \in K\}$ et $C = 2(M^2+1)$. D'après le corollaire 1, on a pour $k \in \mathbb{N}$

$$P\ \{\omega\ ;\ \sup_{x\in M_k} \mathscr{L}(x)\ (\omega) \leq 1\ \}$$

$$\leq \frac{1}{F(1)}\ \left(\frac{1}{2^{m_k}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \left[1 - F\left(\frac{\lambda C}{\alpha_k}\right)\right]^{m_k} d\lambda\right).$$

Mais pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda > 0$

$$(1 - F\ (\frac{\lambda C}{\alpha_k}))^{m_k} < \exp\ (- m_k\ F\ (\frac{\lambda C}{\alpha_k}))\ ;$$

et comme

$$F\ (\frac{\lambda C}{\alpha_k}\ ) = \int_{\lambda C/\alpha_k}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\ du \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \geq \frac{\lambda C}{\alpha_k\ \sqrt{2\pi}} \exp\ (- 2\ \frac{\lambda^2\ C^2}{\alpha_k^2})\ ,$$

$$m_k \geq \exp\ \left[(\frac{1.}{\alpha_k}\ )^b\right]\ ,\ b > 2\ ,$$

on a pour tout $\lambda \geq 0$

$$m_k\ \ F\ (\frac{\lambda C}{\alpha_k}\ ) \to \infty\ ,\ \text{quand}\ k \to \infty\ ,$$

Par conséquent

$$P\ \{\omega\ ;\ \sup_{x\in M_k} \mathscr{L}(x)\ (\omega) \leq 1\} \quad \to \quad 0\ ,\ \text{quand}\ k \to \infty\ ,\ \text{c.q.f.d.}$$

Références

[1] BADRIKIAN : Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les mesures cylindriques. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Heidelberg - New-York, (1969). (à paraître)

[2] BRETAGNOLLE, DACUNHA-CASTELLE et KRIVINE : Lois stables et espaces L^p. Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. II, n° 3, 231-259 (1966).

[3] CHEVET : Sur certains produits tensoriels topologiques d'espaces de Banach. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 11, 120-138 (1969).

[4] CHOQUET : Séminaire (1964) : initiation à l'analyse. Paris.

[5] DUDLEY, R.M. : The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes. J. Funct. Analysis 1, 290-330 (1967).

[6] GROSS, L. : Potential theory on Hilbert space. J. Funct. Analysis 1, 123-181 (1967).

[7] GROSS, L. : Harmonic Analysis on Hilbert space. Memoirs of Amer. Math. Soc., vol 46 (1963).

[8] GUELFAND et VILENKIN : Les distributions, tome 4. Paris : Dunod (1967).

[9] LOEVE : Probability theory (3ème édition). Van Nostrand.

[10] SAPHAR : Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linéaires. Studia Mathematica (1969).

[11] SCHOENBERG : Metric spaces and positive definite functions. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 44, 522-536 (1938).

[12] SLEPIAN : The one-sided barrier problem for Gaussian noise. Bell System Tech. J. Vol. 41, 463-501 (1962).

[13] SUDAKOV : Gaussian measures, Cauchy measures and ε-entropy. Dokl. Akad. Nauk SSSR 185, n° 1 (1969) = Soviet Math. Dokl. 7, vol. 10, n° 2 (1969).

[14] SCHWARTZ L. : Séminaire 1969-1970 (Ecole Polytechnique de Paris).

[15] CHEVET : p-ellipsoïdes dans l^q ; applications aux mesures cylindriques gaussiennes. Colloque C.N.R.S. (1969) n° 186.

[16] PARTHASARATHY : Probability Measures on Metric spaces. Academic Press.

[17] RVAČEVA : On domains of attraction of multi-dimensional distributions Selected translations in Mathematical Statistics and Probability, vol. 2, 183-205.

[18] PERSSON : On some properties of p-nuclear and p-integral operators. Studia Mathematica, tome XXXIII, Fasc. 2, p. 213-222 (1969).

[19] LEVY : Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier-Villars (1937).

[20] FELDHEIM : Etude de la stabilité des lois de probabilité. Thèse de la Faculté des Sciences de Paris (1937).