ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
*Série Mathématiques*

P. BOULICAUT

**Lois indéfiniment divisibles sur certains espaces vectoriels topologiques localement convexes**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 43, série *Mathématiques*, n° 6 (1970), p. 21-89

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1970__43_6_21_0>

# LOIS INDEFINIMENT DIVISIBLES SUR CERTAINS ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES LOCALEMENT CONVEXES

par

P. BOULICAUT

# PREFACE

Il s'agit de la rédaction d'une série d'exposés faits dans le cadre du Séminaire de Calcul des Probabilités de la Faculté des Sciences de l'Université de Clermont à partir d'un article de FERNIQUE : "Lois indéfiniment divisibles sur les espaces de Distributions" (Inventiones Mathematicae 3-1967 pp. 282-292).

Nous publions des démonstrations détaillées et nous nous sommes placés dans une situation légèrement plus générale.

Le lecteur ne trouvera donc pas ici un article d'une grande originalité mais nous espérons qu'il est utile.

Nous remercions Monsieur HENNEQUIN qui nous a permis de faire cet exposé à son séminaire et qui nous a encouragés à le publier.

Nous remercions également les auditeurs du séminaire pour leurs remarques.

# 1 - PRELIMINAIRES TOPOLOGIQUES

## 1.1. DEFINITIONS RELATIVES AUX e.l.c.

Soit E un e.l.c. séparé ; soit A une partie convexe, équilibrée et bornée de E. Le sous-espace vectoriel de E engendré par A est :

$$E_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} nA \;;$$

la jauge $p_A$ de A définie par : $p_A(x) = \inf \{\lambda > 0 \;;\; x \in \lambda A\}$ , est une norme sur $E_A$. Sauf mention du contraire, $E_A$ est l'espace normé ainsi obtenu.

Proposition 1.1.1.

i.) l'injection canonique de $E_A$ dans E est continue,

ii.) si A est une partie complète de E, $E_A$ est un espace de Banach.

Démonstration :

i.) A étant bornée, pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda A \subset V$ ; pour tout $x \in E_A$ tel que $p_A(x) < \lambda$, alors $x \in \lambda A$ et $x \in V$.

ii.) Puisque E est séparé et que A est une partie complète de E, A est fermé dans E. Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy de $E_A$ : elle est bornée et $c = \sup p_A(x_n) < +\infty$ ; alors, pour tout n, $x_n \in cA$. Puisque l'injection canonique de $E_A$ dans E est continue, $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy de E, contenue dans cA ; A étant une partie complète de E, il en est de même de cA, et la suite $\{x_n\}$ converge dans E vers $x \in cA$ ; alors $x \in E_A$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_o$ tel que, pour $n, m > n_o$, $p_A(x_n - x_m) < \varepsilon$, soit $x_n - x_m \in \varepsilon A$ ; puisque A est fermé, $\varepsilon A$ est fermé dans E et $x_n - x \in \varepsilon A$, donc $p_A(x_n - x) \leq \varepsilon$, pour tout $n > n_o$.

Remarque : il existe une démonstration plus savante dans [3] (chapitre III n° 2, lemme 1, page 139).

Définition 1.1.2.

Une partie A de E est dite hilbertienne si A est une partie convexe équilibrée et bornée de E telle que l'espace normé $E_A$ est un espace hilbertien.

Soit F un e.l.c. ; soit U une partie convexe équilibrée et absorbante de F ; la jauge $p_U$ de U est une semi-norme sur F et soit $F_U$ l'espace vectoriel séparé associé à l'espace semi-normé $(F, p_U)$ : $F_U$ est l'espace quotient $F / \overset{-1}{p_U}(0)$ ; désignons par $\pi_U$ l'application canonique de F dans $F_U$. $F_U$ est muni de la norme $|..|_U$ définie par : $|\pi_U(y)|_U = p_U(y)$ , $y \in F$, et, sauf mention du contraire, $F_U$ est l'espace normé ainsi obtenu. $\hat{F}_U$ est le complété de $F_U$ : $\hat{F}_U$ est un espace de Banach.

Proposition 1.1.3.

i.) Si, de plus, U est un voisinage de 0 dans F, l'application canonique $\pi_U : F \to \hat{F}_U$ est continue.

ii.) Si U et V sont deux parties convexes équilibrées et absorbantes de F telles que $V \subset U$, il existe une application linéaire continue $\pi_{UV}$ de $\hat{F}_V$ dans $\hat{F}_U$, unique, telle que $\pi_U = \pi_{UV} \circ \pi_V$ .

Démonstration

i.) U est un voisinage de 0 dans F et pour tout $y \in U$,

$$|\pi_U(y)|_U = p_U(y) \leq 1.$$

<u>Remarque</u> : ceci signifie que la topologie quotient sur $F / \overset{-1}{p_U}(0)$ est plus fine que la topologie de $F_U$.

ii.) Puisque $V \subset U$, $p_U \leq p_V$ et $\overset{-1}{p_V}(0) \subset \overset{-1}{p_U}(0)$ ; l'application $\pi_U : F \to F_U$ se factorise de la façon suivante : $\pi_U = \pi_{UV} \circ \pi_V$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\pi_U"] \arrow[dr, "\pi_V"'] & & F_U \\ & F_V \arrow[ur, "\pi_{UV}"'] & \end{tikzcd}$$

où $\pi_{UV}$ est une application linéaire de $F_V$ dans $F_U$. Pour tout $y \in F$,

$$p_U(y) = |\pi_U(y)|_U = |\pi_{UV}(\pi_V(y))|_U \leq p_V(y) = |\pi_V(y)|_V ,$$

$\pi_{UV}$ est continue sur $F_V$ et se prolonge en une application linéaire continue de $\hat{F}_V$ dans $\hat{F}_U$, encore notée $\pi_{UV}$, telle que, pour tout $\hat{y} \in \hat{F}_V$,

$$|\pi_{UV}(\hat{y})|_U \leq |\hat{y}|_V ,$$

i.e., $\pi_{UV}$ est de norme $\leq 1$. L'unicité de $\pi_{UV}$ résulte du fait que $F_V$ est dense dans $\hat{F}_V$.

<u>Définition 1.1.4.</u>

Une partie $U$ de $F$ est dite hilbertienne si $U$ est convexe équilibrée absorbante et $\hat{F}_U$ un espace hilbertien.

Etudions maintenant les relations entre les diverses notions introduites.

Soit $E$ un e.l.c. séparé ; $F = E'$ est le dual de $E$ muni de la topologie de convergence uniforme dans les parties compactes, convexes et équilibrées de E. Puisque chaque partie compacte de E est aussi $\sigma$ (E, E')-compacte, d'après le théorème de Mackey ([2] chapitre IV, § 2, n° 3) le dual de F est E.

Soit A une partie compacte convexe équilibrée de E ; le polaire $U = A^\circ$ de A dans F est un voisinage convexe équilibré de 0 dans F ; de plus, puisque A est convexe équilibrée et compacte donc $\sigma$ (E, E')-fermée, $U^\circ = A^{\circ\circ} = A$. La proposition suivante précise la relation entre $E_A$ et $F_U$.

Proposition 1.1.5.

Le dual fort de $\hat{F}_U$ est $E_A$.

Démonstration :

Le polaire (i.e. l'orthogonal) de $E_A$ est $E_A^\circ = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} U = p_U^{-1}(0)$. Les espaces vectoriels $E_A$ et $F_U$ sont mis en dualité par la forme :

$$< x , \pi_U(y) > = < x, y >$$

et la topologie $\sigma$ $(E_A, F_U)$ sur $E_A$ est identique à la topologie induite sur $E_A$ par la topologie $\sigma$ (E, E') ([2], chapitre IV, § 1, n° 5, prop. 5 et 6). Pour la dualité entre $E_A$ et $F_U$, nous avons : $\pi_U(U)^\circ = A$ et $A^\circ = \pi_U(U)$. La topologie sur $F_U$ est la topologie de convergence uniforme dans les homothétiques nA ($n \in \mathbb{N}^*$) de A. Chaque nA est compact dans E, donc $\sigma$ (E, E')-compact, soit aussi $\sigma$ $(E_A, F_U)$-compact, et est convexe équilibré ; en vertu du théorème de Mackey, la topologie de $F_U$ est compatible avec la dualité entre $F_U$ et $E_A$, et le dual de $F_U$ est $E_A$. Puisque $F_U$ est un espace vectoriel normé, le dual fort de $F_U$ est normé et sa boule unité est le polaire $\pi_U(U)^\circ = A$ de la boule unité $\pi_U(U)$ de $F_U$. Comme A est aussi la boule unité de $E_A$, le dual fort de $F_U$ est $E_A$. $\hat{F}_U$ étant le complété de $F_U$, le dual fort de $\hat{F}_U$ est identique au dual fort de $F_U$ et est $E_A$.

Remarque 1 : d'après la définition de la norme sur le dual fort de $F_U$, pour tout $x \in E_A$ ,

$$p_A(x) = \sup \{|< x , \pi_U(y) >| \; ; \; y \in U\} = \sup \{|< x , y >| \; ; \; y \in U\} .$$

En particulier, pour tout $x \in E_A$, $y \in F$ ,

$$|< x , y >| \leq p_A(x) \; p_U(y) .$$

Remarque 2 : le dual de $E_A$ sera $\hat{F}_U$ si et seulement si $F_U$ est réflexif, soit encore, si et seulement si $E_A$ est réflexif. ([3] chapitre II, n° 18, corollaire 4 du théorème 13, page 127).

Corollaire :

La correspondance $A \to A°$ établit une bijection de l'ensemble des parties compactes hilbertiennes de E sur l'ensemble des voisinages hilbertiens faiblement fermés de 0 dans F.

Démonstration :

Soit U un voisinage hilbertien faiblement fermé de 0 dans F ; en vertu de la définition de la topologie de F, il existe une partie compacte convexe équilibrée B de E telle que $B° \subset U$ ; alors $A = U° \subset B°° = B$ et A est une partie convexe équilibrée $\sigma$ (E, E')-fermée, donc fermée dans E, contenue dans le compact B : A est une partie compacte de E ; U étant convexe faiblement fermée, $A° = U°° = U$. Comme $\hat{F}_U$ est un espace hilbertien, son dual fort $E_A$ est aussi un espace hilbertien et A est une partie compacte hilbertienne de E telle que $A° = U$.

Soit A une partie compacte hilbertienne de E ; $U = A°$ est un voisinage, convexe équilibré faiblement fermé, de 0 dans F. Par hypothèse, $E_A$ est un espace hilbertien ; le dual fort $E'_A = \hat{F}^*_U$ de $E_A$ est un espace hilbertien ; puisque la restriction à $\hat{F}_U$ de la norme de $\hat{F}^*_U$ est identique à la norme de $\hat{F}_U$, $F_U$ est préhilbertien et, étant complet, est un espace hilbertien. Ainsi U est un voisinage hilbertien de 0 dans F.

Remarque : ce résultat peut être déduit du résultat mentionné dans la remarque 2 de la proposition précédente. En effet, si $E_A$ est hilbertien, $E_A$ est réflexif donc $F_U$ est réflexif et est le dual fort de $E_A$ : $F_U$ est donc hilbertien.

Proposition 1.1.6.

Soit A une partie compacte hilbertienne de E, les assertions suivantes sont équivalentes :

1.) $E_A$ est séparable

2.) A est séparable pour la topologie induite par celle de E

3.) A est séparable pour la topologie induite par la topologie $\sigma(E,E')$.

Démonstration :

Si A, muni d'une topologie $\mathcal{T}$ est séparable, A est séparable pour toute topologie moins fine que $\mathcal{T}$. Par suite, l'implication 1.) $\Rightarrow$ 2.) résulte de la proposition 1.1.1. et l'implication 2.) $\Rightarrow$ 3.) résulte du fait que la topologie $\sigma(E, E')$ est moins fine que la topologie initiale de E.

Supposons que A soit $\sigma(E, E')$-séparable ; puisque $E_A$ est hilbertien, $E_A$ est réflexif et son dual est $\hat{F}_U$ ; la boule unité A de $E_A$ est $\sigma(E_A, \hat{F}_U)$-compacte ([2] chapitre IV, 5, n° 2, prop. 6). La topologie induite sur A par

$\sigma$ (E, E') est identique à $\sigma$ $(E_A, F_U)$ et est moins fine que $\sigma$ $(E_A, \hat{F}_U)$ ; puisque A est $\sigma$ $(E_A, F_U)$-compact, les topologies induites sur A par $\sigma$ $(E_A, \hat{F}_U)$ et $\sigma$ (E, E') sont identiques et A est $\sigma$ $(E_A, \hat{F}_U)$-séparable. Il existe une partie dénombrable D de A, dense dans A pour $\sigma$ $(E_A, \hat{F}_U)$ ; le sous-espace vectoriel $\Phi$ engendré par D est $\sigma$ $(E_A, F_U)$-dense dans $E_A$ ; $\Phi$ étant convexe, son adhérence est la même pour $\sigma$ $(E_A, F_U)$ et pour la topologie de $E_A$. ([2] , chapitre IV, § 2, n° 3, prop. 4, cor. 2). Ainsi $\Phi$ est dense dans $E_A$ : D est un système total dans $E_A$ et $E_A$ est séparable.

Remarque 1 : la proposition reste vraie si on suppose seulement que A est une partie compacte convexe équilibrée telle que $E_A$ soit réflexif.

Remarque 2 : sous les hypothèses de la proposition 1.1.6., le dual fort de $F_U$ est $E_A$ et est séparable ; alors $F_U$ est séparable ([5] p. 126) et $F_U$ admet une base orthonormale dénombrable, qui est aussi une base orthonormale de $\hat{F}_U$ ([2] chapitre V, § 2, n° 4, cor. de la prop. 6).

## 1.2. OPERATEURS DE HILBERT-SCHMIDT

Soient $H_1$ et $H_2$ deux espaces hilbertiens ; une application linéaire u de $H_1$ dans $H_2$ est dite de Hilbert-Schmidt (en abrégé : H.S.) si u est continue et s'il existe une base orthonormale $\{e_i \; ; \; i \in I\}$ de $H_1$ telle que :

$$\sum_{i \in I} ||u(e_i)||^2 < + \infty$$

Alors, pour toute base orthonormale $\{f_j \; ; \; j \in J\}$ de $H_1$ ,

$$\sum_{j \in J} ||u(f_j)||^2 = \sum_{i \in I} ||u(e_i)||^2$$

$\{\sum_{i \in I} ||u(e_i)||^2\}^{\frac{1}{2}}$ est indépendant du choix de la base orthonormale $\{e_i\}$ de $H_1$, est noté $|u|_2$ et est appelé norme de Hilbert-Schmidt de u.

Rappelons les propriétés suivantes des opérateurs H.S. (cf. [4], chapitre I, 2, n° 2).

1.) Soient $H_1$ et $H_2$ deux espaces hilbertiens et u une application linéaire de $H_1$ dans $H_2$ ; u est de type H.S. si et seulement si il existe un système orthonormal dénombrable $\{e_n\}$ de $H_1$, un système orthonormal dénombrable $\{e'_n\}$ de $H_2$ et une suite $\{\lambda_n\}$ de nombres réels positifs tels que : $\sum_n \lambda_n^2 < +\infty$ et, pour tout $x \in H_1$, $u(x) = \sum_n \lambda_n < x , e_n > e'_n$.

2.) Soient u une application linéaire H.S. d'un espace hilbertien $H_1$ dans un espace hilbertien $H_2$, v une application linéaire continue de $H_2$ dans un espace hilbertien $H'_2$ et w une application linéaire continue d'un espace hilbertien $H'_1$ dans $H_1$. Alors vou et uow sont de type H.S..

La notion d'application H.S. s'étend de la façon suivante :

<u>Définition 1.2.1.</u>

Soient F un e.l.c. et H un espace hilbertien. Une application linéaire u de F dans H est dite de Hilbert-Schmidt (en abrégé : H.S.) s'il existe un espace hilbertien $H_o$ tel que u se factorise : $u = \alpha o \beta$ où $\alpha$ est une application linéaire de type H.S. de $H_o$ dans H et $\beta$ une application linéaire continue de F dans $H_o$.

Proposition 1.2.2.

Soient F un e.l.c. et H un espace hilbertien ; une application linéaire u de F dans H est de type H.S. si, et seulement si, il existe un voisinage hilbertien U de 0 dans F et une application linéaire v , de type H.S., de $\hat{F}_U$ dans H telle que $u = v \circ \pi_U$ .

Démonstration

Supposons que u soit de type H.S. ; avec les notations de la définition précédente, l'application $y \longmapsto \|\beta(y)\|^2$ est une forme quadratique positive continue sur F ; $U = \{y \in F \ / \ \|\beta(y)\| \leq 1\}$ est un voisinage convexe équilibré de 0 dans F tel que, pour tout $y \in F$ , $p_U^2(y) = \|\beta(y)\|^2$ : U est un voisinage hilbertien de 0 dans F. Puisque $\beta^{-1}(0) = p_U^{-1}(0)$ , $\beta$ se factorise de la façon suivante : $\beta = \beta_1 \circ \pi_U$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi_U"'] & & H_0 \\ & F_U \arrow[ur, "\beta_1"'] & \end{tikzcd}$$

où $\beta_1$ est une application linéaire injective de $F_U$ dans $H_0$ ; pour tout $y \in F$ , $\|\beta_1(\pi_U(y))\| = \|\beta(y)\| = p_U(y) = |\pi_U(y)|_U$

donc $\beta_1$ est une isométrie de $F_U$ dans $H_0$ . Elle se prolonge en une application linéaire continue $\hat{\beta}_1$ de $\hat{F}_U$ dans $H_0$ ; alors $v = \alpha \circ \hat{\beta}_1$ est une application de type H.S. de $\hat{F}_U$ dans H et $u = v \circ \pi_U$ .

La réciproque est triviale.

## 1.3. S-TOPOLOGIE

Soit E un e.l.c. séparé. On suppose que E satisfait à la condition suivante :

(H) : l'ensemble $\mathfrak{S}$ des parties compactes hilbertiennes de E est un système fondamental de parties compactes de E

i.e, toute partie compacte de E est contenue dans une partie compacte hilbertienne de E .

$F = E'$ désigne le dual de E muni de la topologie de convergence uniforme dans les parties compactes convexes équilibrées de E ; un système fondamental de voisinages de 0 dans F est $\mathcal{V} = \{A^\circ \ ; \ A \in \mathfrak{S}\}$ ; en vertu du corollaire de la proposition 1.1.5., $\mathcal{V}$ est l'ensemble des voisinages hilbertiens faiblement fermés de 0 dans F .

### Définition 1.3.1.

$U \in \mathcal{V}$ est dit de Hilbert-Schmidt (en abrégé : H.S.) si l'application $\pi_U : F \to \hat{F}_U$ est de type H.S.

### Proposition 1.3.2.

$U \in \mathcal{V}$ est de type H.S. si, et seulement si, il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $V \subset U$ et $\pi_{UV}$ est de type H.S.

### Démonstration :

Supposons que U soit de type H.S. Par la proposition 1.2.2., il existe un voisinage hilbertien W de 0 dans F et une application linéaire $v : \hat{F}_W \to \hat{F}_U$ , de type H.S., tels que $\pi_U = v \circ \pi_W$ ; $\mathcal{V}$ étant un système fondamental de voisinages de 0 dans F , il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $V \subset U \cap W$ ;

nous avons alors : $\pi_U = v o \pi_{WV} o \pi_V = \pi_{UV} o \pi_V$ . Les applications $v o \pi_{WV}$ et $\pi_{UV}$ sont continues sur $\hat{F}_V$ , coincident sur $F_V$ ; comme $F_V$ est dense dans $\hat{F}_V$ , $\pi_{UV} = v o \pi_{WV}$ et, v étant de type H.S. , $\pi_{UV}$ est de type H.S. La réciproque est triviale.

Proposition 1.3.3.

$U \in \mathcal{V}$ est de type H.S. si, et seulement si, il existe une partie compacte K de E et une mesure borélienne positive bornée $\mu$ sur K (muni de la topologie induite par celle de E), tels que, pour tout $y \in F$ ,

$$p_U^2(y) = \int_K |< x , y >|^2 \, d\mu(x) .$$

Démonstration : (cf. [6] prop. 10.2, p. 178)

Supposons que U soit de type H.S. Il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $V \subset U$ et $\pi_{UV}$ soit de type H.S. Par conséquent, il existe un système orthonormal $\{e_n\}$ de $\hat{F}_V$ , un système orthonormal $\{e'_n\}$ de $\hat{F}_U$ et une suite $\{\lambda_n\}$ de nombres réels positifs, tel que :

$$\sum_n \lambda_n^2 < +\infty , \text{ et } \pi_{UV}(y) = \sum_n \lambda_n < \hat{y} , e_n > e'_n \quad \text{pour} \quad \hat{y} \in \hat{F}_V ,$$

(le produit scalaire dans $F_V$ étant noté < .. , .. > .). Pour tout $\hat{y} \in \hat{F}_V$ $|\pi_{UV}(y)|_U^2 = \sum_n \lambda_n^2 |< y , e_n >|^2$ , et, si nous prenons $\hat{y} = \pi_V(y)$ , pour tout $y \in F$ , nous avons :

$$p_U^2(y) = |\pi_U(y)|_U^2 = |\pi_{UV}(\pi_V(y))|_U^2 = \sum_n \lambda_n^2 \; |<\pi_V(y) , e_n >|^2 .$$

Soit $A = V°$ : A est une partie compacte hilbertienne de E ; comme $\hat{F}_V$ est un espace hilbertien, nous pouvons identifier le dual fort $E_A$ de $\hat{F}_V$ avec $\hat{F}_V$ et considérer $\{e_n\}$ comme un système orthonormal de $E_A$ ; nous avons alors, pour tout $y \in F$ , $< \pi_V(y) , e_n > = < y , e_n >$ en vertu de la définition de la dualité entre $F_V$ et $E_A$ ; chaque $e_n$ appartient à la boule unité $A$ de $E_A$ et, comme $\sum_n \lambda_n^2 < +\infty$ , $\mu = \sum_n \lambda_n^2 \delta_{e_n}$ est une mesure positive bornée borélienne sur $A$ telle que :

$$\int_A |< x , y >|^2 d\mu (x) = \sum_n \lambda_n^2 |< y , e_n >|^2 = p_U^2(y) \text{ pour tout } y \in F .$$

Réciproquement, supposons que, pour tout $y \in F$ ,

$$p_U^2(y) = \int_K |< x , y >|^2 d\mu (x) ,$$

où $K$ est un compact de $E$ et $\mu$ une mesure positive bornée borélienne sur $K$. Puisque $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de parties compactes de $E$, il existe $B \in \mathfrak{S}$ tel que $K \subset B$ , de sorte que $B^\circ \subset K^\circ$ et $K^\circ$ est un voisinage de $0$ dans $F$ . Il existe alors $V \in \mathcal{V}$ tel que $V \subset U \cap K^\circ$ ; $A = V^\circ$ est une partie compacte hilbertienne de $E$ contenant $K^{\circ\circ}$ , donc $K$. Pour tout $x \in K \subset A \subset E_A$, pour tout $y \in F$ ,

$$< x, y > = < \pi_V(y) , x >$$

et $$|\pi_{UV}^{\bullet}(\pi_V(y))|_U^2 = |\pi_U(y)|_U^2 = p_U^2(y) = \int_K |< x , y >|^2 d\mu (x)$$

$$= \int_K |< x , \pi_V(y) >|^2 d\mu (x) ;$$

Les applications $\hat{y} \rightsquigarrow |\pi_{UV}(\hat{y})|_U^2$ et $\hat{y} \rightsquigarrow \int_K |< x , \hat{y} >|^2 d\mu (x)$ sont continues sur $\hat{F}_V$ et coïncident sur $F_V$ : elles sont donc égales et, pour tout $\hat{y} \in \hat{F}_V$ , $|\pi_{UV}(\hat{y})|_U^2 = \int_K |< x , \hat{y} >|^2 d\mu (x)$ .

Soit $\{e_i ; i \in I\}$ une base orthonormale de $\hat{F}_V$ ; en identifiant comme précédemment $\hat{F}_V$ et $E_A$, nous pouvons considérer $\{e_i\}$ comme une base orthonormale de $E_A$ , de sorte que, pour tout $x \in K \subset A$ ,

$$\sum_i |< x , e_i >|^2 = p_A^2(x) \leq 1 \quad \text{(égalité de Parseval)}$$

et $\sum_i |\pi_{UV}(e_i)|_U^2 = \sum_i \int_K |< x , e_i >|^2 \, d\mu(x) \leq \mu(K) < +\infty$ ;

par conséquent, $\pi_{UV}$ est de type H.S. et U est de type H.S.

Proposition 1.3.4.

L'ensemble des $U \in \mathcal{V}$, de type H.S., est un système fondamental de voisinages de 0 dans F pour une topologie localement convexe $\mathcal{C}_S$ sur F . $\mathcal{C}_S$ est appelée S-topologie.

A partir de la proposition 1.3.3., la vérification est triviale.

Remarque : si $\mathfrak{S}_o = \{A \in \mathfrak{S} \text{ ; } A° \text{ de type H.S.}\}$ , $\mathcal{C}_S$ est la $\mathfrak{S}_o$-topologie. Chaque $A \in \mathfrak{S}_o$ est convexe, équilibré, compact dunc $\sigma$ (E, F)-compact et $\mathfrak{S}_o \subset \mathfrak{S}$ : $\mathcal{C}_S$ est plus fine que $\sigma$ (F, E) car $\mathcal{C}_S$ est compatible avec la dualité et est moins fine que la $\mathfrak{S}$-topologie dont un système fondamental de voisinage de 0 est $\mathcal{V}$ .

## BIBLIOGRAPHIE

[1] : BOURBAKI : Espaces vectoriels topologiques
Chapitres I - II Act. Sci. et Indust. 1189

[2] : BOURBAKI : Espaces vectoriels topologiques
Chapitres III-IV-V Act. Sci. et Indust. 1229

[3] : GROTHENDIECK : Espaces vectoriels topologiques
Publicaçao da Sociedade de Matematica de S. Paulo

[4] : GUELFAND-VILENKIN : Les distributions - tome 4
Dunod (1967)

[5] : KOSAKU YOSIDA : Functional Analysis
Springer-Verlag (1965)

[6] : H.H.SCHAEFFER : Topological vector spaces
Macmillan (1966)

# 2 - TRANSFORMEES DE FOURIER

Dans ce chapitre, E désigne un e.l.c. réel séparé ; on suppose que E satisfait à la condition :

(H) : l'ensemble $\mathfrak{S}$ des parties compactes hilbertiennes de E est un système fondamental de parties compactes de E.

F = E' désigne le dual de E. Sauf mention du contraire, F est muni de la topologie de convergence uniforme dans les parties compactes convexes équilibrées de E.

## 2.0. NOTATIONS UTILISEES

a.) Soit X un espace topologique complètement régulier. $\mathcal{B}_X$ est la tribu de Borel de X ; une mesure sur X est une application $\mu$ de $\mathcal{B}_X$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, $\sigma$-additive telle que $\mu(\emptyset) = 0$

La mesure $\mu$ est dite K-régulière si, pour chaque $B \in \mathcal{B}_X$,
$\mu(B) = \sup \{\mu(K) ; K \text{ compact}, K \subset B\}$.
La mesure $\mu$ est dite tendue si elle est finie (i.e. $\mu(X) < +\infty$) et est K-régulière. $\mathcal{M}^+(X)$ désigne l'ensemble des mesures tendues sur X.

b.) $\mathcal{C}(X)$ est l'espace des fonctions continues et bornées sur X, muni de la norme de la convergence uniforme sur X. On appelle mesure de Radon bornée sur X toute forme linéaire continue m sur $\mathcal{C}(X)$ satisfaisant à la condition $(\varepsilon, K)$ :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de X tel que : pour $f \in \mathcal{C}(X)$ vérifiant $f(x) = 0$ pour $x \in K$ et $|f| \leq 1$, alors $|m(f)| \leq \varepsilon$.

Il existe une bijection de $\mathcal{M}^+(X)$ sur l'ensemble des mesures de Radon bornées et positives sur X, soit $\mu \rightsquigarrow m$, définie par :

$$m(f) = \int_X f \, d\mu , \quad f \in \mathcal{C}(X).$$

Si m est donnée, la mesure $\mu$ correspondante est définie, pour tout ouvert U de X par :

$$\mu(U) = \sup \{ m(f) \; ; \; 0 \leq f \leq 1_U , \; f \in \mathcal{C}(X) \}.$$

On identifie ces deux ensembles et $\mathcal{M}^+(X)$ est muni de la topologie induite par la topologie faible du dual de $\mathcal{C}(X)$ (appelée topologie étroite). Pour cette topologie, une suite généralisée $\mu_\alpha$ dans $\mathcal{M}^+(X)$ converge vers $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$, et on note $\mu_\alpha \Longrightarrow \mu$, si, et seulement si, pour chaque $f \in \mathcal{C}(X)$,

$$\lim \mu_\alpha(f) = \mu(f).$$

Un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de $\mathcal{M}^+(X)$ est dit équitendu si :

i.) $\sup \{ \mu(X) \; ; \; \mu \in \mathcal{H} \} < +\infty$.

ii.) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de X tel que, pour chaque $\mu \in \mathcal{H}$, $\mu(X \setminus K) \leq \varepsilon$.

Si $\mathcal{H}$ est équitendu, il est relativement compact dans $\mathcal{M}^+(X)$. (cf : [8])

c.) Soient X et Y deux espaces topologiques complètement réguliers, et f une application continue de X dans Y. Si $\mu$ est une mesure tendue sur X, la formule :

$$f(\mu)(B) = \mu[f^{-1}(B)]$$

définit une mesure tendue $f(\mu)$ sur Y.

Soit h une fonction définie sur Y et $\mathcal{B}_Y$-mesurable ; alors hof est

$\mathcal{B}_X$-mesurable. Si h est positive, alors : $\int_Y h\, df(\mu) = \int_X h \circ f\, d\mu$ .
Par suite, h est $f(\mu)$-intégrable si et seulement si hof est $\mu$-intégrable, et alors, l'égalité précédente est vérifiée.

d.) Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ , $\mathcal{B}_X$-mesurable. Si $\mu$ est une mesure tendue sur X , la formule :

$$f \,.\, \mu(B) = \int_X 1_B \, f \, d\mu$$

définit une mesure K-régulière $f.\mu$ sur X .

Soit h une fonction définie sur X et $\mathcal{B}_X$-mesurable ; alors hf est $\mathcal{B}_X$-mesurable. Si h est positive, alors : $\int_X h\, df.\mu = \int_X hf\, d\mu$ .
Par suite, h est $f.\mu$-intégrable si, et seulement si, hf est $\mu$-intégrable et l'égalité précédente est vérifiée.

e.) X est dit <u>polonais</u> s'il est métrisable complet et séparable. Si X est polonais, toute mesure finie sur X est K-régulière, donc tendue (cf : [6] , prop. II-7-3).

X est dit <u>lusinien</u> si X est séparé et s'il existe un espace polonais P et une application bijective continue de P sur X . A la métrisabilité près, c'est la définition donnée dans [2] . Les résultats établis dans [2] sont encore valables et en particulier :

si f est une application continue <u>injective</u> d'un espace lusinien X dans un espace topologique séparé Y , alors f(X) est un borélien de Y .

si X est un espace lusinien, un sous ensemble de Y est lusinien si, et seulement si, il est un borélien de X .

Il en résulte que :

toute mesure finie $\mu$ sur un espace lusinien X est tendue, et, plus précisément, pour chaque borélien B

$$\mu\,(B) = \sup\ \{\mu\,(K)\ ;\ K \text{ compact métrisable, } K \subset B\}\ ;$$

si f est une application continue bijective d'un espace lusinien X dans un espace topologique séparé Y , alors Y est lusinien et

$$\mathcal{B}_Y = \{f(B)\ ;\ B \in \mathcal{B}_X\}\ .$$

Si $\nu$ est une mesure finie sur Y ($\nu$ est alors tendue), la formule

$$\mu\,(B) = \nu\,[f(B)]$$

définit une mesure $\mu$ tendue sur X telle que $f(\mu) = \nu$ , c'est-à-dire, l'application $\mu \in \mathcal{M}^+(X) \longrightarrow f(\mu) \in \mathcal{M}^+(Y)$ est bijective.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux topologies sur X , $X_{\mathcal{C}}$ étant polonais, $X_{\mathcal{C}'}$ étant séparé et $\mathcal{C}'$ moins fine que $\mathcal{C}$ . Alors $X_{\mathcal{C}'}$ est lusinien et nous avons :

$$\mathcal{B}_{X_{\mathcal{C}}} = \mathcal{B}_{X_{\mathcal{C}'}} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^+\,(X_{\mathcal{C}}) = \mathcal{M}^+\,(X_{\mathcal{C}'})\ .$$

f.) Soit $\mu$ une mesure tendue sur un espace topologique X complètement régulier ; si $\{f_\alpha\}$ est une suite généralisée croissante de fonctions positives, semi-continues-inférieurement sur X , convergente simplement vers f , alors f est semi-continue-inférieurement et :

$$\int_X f_\alpha\, d\mu \longrightarrow \int_X f\, d\mu\ .$$

## 2.1. TRANSFORMEES DE FOURIER

$\mathcal{M}_1^+$ désigne le sous-ensemble convexe de $\mathcal{M}^+(E)$ formé des mesures de probabilités tendues sur E.

Pour $\mu \in \mathcal{M}^+(E)$ , la transformée de Fourier de $\mu$ est l'application, notée $\mathcal{F}\mu$ ou $\hat{\mu}$ de F dans $\mathbb{C}$, définie par :

$$y \rightsquigarrow \mathcal{F}\mu\,(y) = \hat{\mu}(y) = \int_E e^{i<x,y>}\, d\mu(x)\,.$$

Posons $\mathcal{F}(\mathcal{M}_1^+) = \{\hat{\mu}\ ;\ \mu \in \mathcal{M}_1^+\}$. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.1.1. (BADRIKIAN [1])

Soit $\varphi$ une application de F dans $\mathbb{C}$ ; $\varphi$ est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité tendue sur E si, et seulement si, :

1. $\varphi(0) = 1$
2. $\varphi$ est continue sur F muni de la S-topologie
3. $\varphi$ est de type positif, i.e., pour toute famille finie $\{(a_k\ ,\ y_k)\ ;\ k = 1, \ldots, n\}$ de $\mathbb{C} \times F$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k\, \bar{a}_l\, \varphi(y_k - y_l) \geq 0$$

Nous nous proposons de donner la forme générale de la transformée de Fourier des mesures de probabilité tendues et indéfiniment divisibles sur E (cf. [7]). Ces mesures sont caractérisées par la propriété suivante de leurs transformées de Fourier, propriété que nous prendrons ici comme définition :

Définition 2.1.2.

$\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{M}_1^+)$ est dite indéfiniment divisible si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\varphi_n \in \mathcal{F}(\mathcal{M}_1^+)$ telle que : $\varphi = (\varphi_n)^n$. $\mathcal{J}$ désigne l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{M}_1^+)$ indéfiniment divisibles.

Si $E = F = \mathbb{R}$, la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité indéfiniment divisible ne s'annule pas. Nous avons un résultat analogue dans le cas général.

Proposition 2.1.3.

Soit $\varphi \in \mathcal{J}$ ; pour tout $y \in F$ , $\varphi(y) \neq 0$ .

Démonstration :

Soit $y \in F$ ; $t \rightsquigarrow \varphi(ty)$ est continue sur $\mathbb{R}$ , de type positif et prend, pour $t = 0$ , la valeur 1 ; comme $\varphi$ , cette fonction est indéfiniment divisible et, par suite, ne s'annule pas ; pour $t = 1$ , nous avons donc $\varphi(y) \neq 0$ .

2.2. FONCTIONS DE TYPE NEGATIF

Les définitions et les résultats donnés ci-dessous sans démonstration sont extraits du livre de HOCHSCHILD ([4] chapitre IV).

Soit F muni d'une topologie l.c. séparée $\mathcal{C}$ ; F est simplement connexe par arcs et est donc simplement connexe ; c'est-à-dire : si $f : S \mapsto T$ est un revêtement, $y_0$ un point de F , $s_0$ un point de S , g une application continue de F dans T telle que $f(s_0) = g(y_0)$ , alors il existe une application continue h de F dans S , et une seule, telle que $g = f \circ h$ et $h(y_0) = s_0$.

Appliquons ceci au cas où $T = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , $S = \mathbb{C}$ , $f : z \in \mathbb{C} \to e^z \in \mathbb{C}^*$ , $y_0 = 0$ et $s_0 = 0$ , $\mathcal{C}$ est la S-topologie $\mathcal{C}_S$ . Alors, pour chaque $\varphi \in \mathcal{J}$, il existe une application unique $h : F \to \mathbb{C}$ , $\mathcal{C}_S$-continue telle que :

$$h(0) = 0 \text{ et, pour tout } y \in F \text{ , } \varphi(y) = e^{h(y)} .$$

Nous noterons $h = L\varphi$ .

Proposition 2.2.1.

Soit $\varphi \in \mathcal{J}$ ; alors $h = L\varphi$ possède les propriétés suivantes :

1. $h(0) = 0$ et, pour tout $y \in F$ , $h(-y) = \overline{h(y)}$ ;

2. $h$ est $\mathcal{C}_S$-continue ;

3. pour toute famille finie $\{(a_k , y_k) ; k = 1, \dots, n\}$ de $\mathbb{C} \times F$

telle que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$ , alors $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{n} a_k \, \overline{a}_l \, h(y_k - y_l) \geq 0$ .

<u>Démonstration</u> :

1. $\varphi$ étant de type positif, pour tout $y \in F$ , $\varphi(y) = \overline{\varphi(-y)}$ et $\varphi(y) = e^{h(-y)}$ . $y \rightsquigarrow \overline{h(-y)}$ est $\mathcal{C}_S$-continue sur $F$ et sa valeur, pour $y = 0$ , est $\overline{h(0)} = 0$ . En vertu de l'unicité de $h$ , nous avons donc, pour tout $y \in F$ , $h(y) = \overline{h(-y)}$.

2. c'est l'une des propriétés caractéristiques de $h$.

3. puisque $\varphi \in \mathcal{J}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe $\varphi_n \in \mathcal{F}(\mathcal{M}_1^+)$ telle que : $\varphi = (\varphi_n)^{''}$ . $\varphi_n$ ne s'annule pas : $\varphi_n$ est une application de $F$ dans $\mathbb{C}^*$ , $\mathcal{C}_S$-continue telle que $\varphi_n(0) = 1$ ; il existe donc une application $h_n : F \to \mathbb{C}$ , $\mathcal{C}_S$-continue telle que : $h_n(0) = 0$ et $\varphi_n(y) = e^{h_n(y)}$ . Par conséquent, $\varphi(y) = e^{\;''}$ , $nh_n(0) = 0$ et $nh_n$ est $\mathcal{C}_S$-continue : en vertu de l'unicité de $h$ , nous avons $h = nh_n$ et :

$$\varphi_n(y) = e^{\frac{1}{n} h(y)} .$$

Soit $\{(a_k , y_k) ; k=1, \dots, n\}$ une famille finie de $\mathbb{C} \times F$ telle que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$ . Puisque $\varphi_p$ est de type positif

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k \, \overline{a}_l \, \varphi_p(y_k - y_l) \geq 0$$

et la condition : $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ entraîne : $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k \overline{a}_l = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = 0$

donc $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k \overline{a}_l \; [\varphi_p (y_k - y_l) - 1] \quad p \geq 0$ .

Puisque $p \; [\varphi_p (y_k - y_l) - 1] = p \; [e^{\frac{1}{p} h(y_k - y_l)} - 1] \longrightarrow h\,(y_k - y_l)$

par passage à la limite, nous obtenons : $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k \overline{a}_l \, h\,(y_k - y_l) \geq 0$ .

Remarque : pour la terminologie usuelle la propriété 3 de cette proposition signifie que $-h$ est de type négatif.

Pour établir la réciproque de cette proposition, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.2. (cf : [5])

Soit $h : F \to \mathbb{C}$ telle que $h(0)$ et $h(y) = \overline{h(-y)}$ pour tout $y \in F$ .
Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i.) pour tout $t \geq 0$ , $y \leadsto e^{th(y)}$ est une fonction sur F de type positif

ii.) $-h$ est de type négatif (i.e. : h vérifie la condition 3 de la proposition 2.2.1.)

iii.) pour toute famille finie $\{(a_k , y_k) \; ; \; k = 1, \ldots, n\}$ de $\mathbb{C} \times F$ ,

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k \overline{a}_l \left[h\,(y_k - y_l) - h(y_k) - h(-y_l)\right] \geq 0 .$$

Démonstration :

i.) implique ii.) ; la démonstration est identique à celle de la proposition 2.2.1

ii.) implique iii.) ; soit $\{(a_k , y_k) ; k = 1, \dots, n\}$ une famille finie de $\mathbb{C} \times F$ ; posons $y_o = 0$ et $a_o = - \sum_{k=1}^{n} a_k$ . Puisque $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$ , en vertu de ii.), $\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} a_k \overline{a}_l \, h\,(y_k - y_l) \geq 0$

soit $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k \overline{a}_l \, h\,(y_k - y_l) - a_o \sum_{l=1}^{n} \overline{a}_l \, h(-y_l) - \overline{a_o} \sum_{k=1}^{n} a_k \, h(y_k) \geq 0$

et $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k \overline{a}_l \, [h\,(y_k - y_l) - h(y_k) - h\,(-y_l)] \geq 0$ .

iii.) implique ii.). Soit $\{(a_k , y_k) ; k = 1, \dots, n\}$ une suite finie d'éléments de $\mathbb{C} \times F$ . Pour $1 \leq k , l \leq n$ , posons :

$$A_k^l = h\,(y_k - y_l) - h(y_k) - \overline{h(y_l)} \;;$$

la matrice carrée d'ordre n : $A = ((A_k^l))$ , à coefficients complexes, est, en vertu de iii.), hermitienne positive ; il existe une matrice unitaire $U = ((U_k^l))$ et une matrice diagonale à termes positifs $\Delta = ((s_k \, \partial_k^l))$ telles que : $A = U^* \Delta U$ ; pour $1 \leq k , l \leq n$ , nous avons :

$$A_k^l = \sum_{j=1}^{n} \overline{U_l^j} \, s_j \, U_k^j \;,$$

$$h\,(y_k - y_l) = A_k^l + h(y_k) + \overline{h(y_l)} \;.$$

Soit $t \geq 0$ ; posons $b_k = a_k \, e^{th(y_k)}$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k \overline{a}_l \, e^{th(y_k - y_l)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_k \overline{b}_l \prod_{j=1}^{n} e^{ts_j \overline{U_l^j} U_k^j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_k \overline{b}_l \prod_{j=1}^{n} \Big[ \sum_{p_j=0}^{+\infty} \frac{1}{(p_j)!} (ts_j \, U_k^j \, \overline{U_l^j}\,)^{p_j} \Big].$$

Pour $1 \leq k$ , $l \leq n$ , $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ , posons :

$$u\,(p\,;\,k,\,l) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(p_j)!}\,(ts_j\ U_k^j\,\overline{U_l^j}\,)^{p_j} ,$$

la famille $\{u\,(p\,;\,k,\,l)\,;\,p \in \mathbb{N}^n\}$ est sommable et

$$\sum_{p\in\mathbb{N}^n} u\,(p;k,l) = \prod_{j=1}^{n} e^{ts_j\,U_k^j\,\overline{U_l^j}}$$

Par suite,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_k\,\overline{b}_l\,\Big(\sum_{p\,\in\,\mathbb{N}^n} u(p;k,l)\Big) = \sum_{p\in\mathbb{N}^n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_k\,\overline{b}_l\,u\,(p;k,l)$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{N}^n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_k\,\overline{b}_l \prod_{j=1}^{n} (U_k^j\,\overline{U_l^j}\,)^{p_j}\,\frac{1}{(p_j)!}\,(ts_j)^{p_j}$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{N}^n}\Big(\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(p_j)!}\,(ts_j)^{p_j}\Big)\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_k\,\overline{b}_l\,\Big[\prod_{j=1}^{n}(U_k^j)^{p_j}\Big]\,\Big[\prod_{j=1}^{n}(\overline{U_l^j}\,)^{p_j}\Big]$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{N}^n}\Big(\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(p_j)}\,(ts_j)^{p_j}\Big)\,\Big|\sum_{k=1}^{n} b_k \prod_{j=1}^{n}(U_k^j)^{p_j}\Big|^2 \geq 0 .$$

Par conséquent, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k\,\overline{a}_l\,e^{th(y_k - y_l)} \geq 0$ .

<u>Proposition 2.2.3.</u>

Soit $h : F \to \mathbb{C}$ ; il existe $\varphi \in \mathcal{J}$ telle que $h = L\varphi$ si, et seulement si, :

1.) $h(0) = 0$ et, pour tout $y \in F$ , $h(y) = \overline{h(-y)}$

2.) $h$ est $\mathcal{C}_S$-continue

3.) pour toute suite finie $\{(a_k\,,\,y_k)\,;\,k = 1, \ldots, n\}$ d'éléments de $\mathbb{C} \times F$ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ , alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k\,\overline{a}_l\,h\,(y_k - y_l) \geq 0$ .

Démonstration

Les conditions sont nécessaires en vertu de la proposition 2.2.1.

Montrons qu'elles sont suffisantes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , désignons par $\varphi_n$ l'application définie sur F par :

$$\varphi_n : y \rightsquigarrow \varphi_n(y) = e^{\frac{1}{n} h(y)} .$$

$\varphi_n$ est $\mathcal{C}_S$-continue sur F , est de type positif en vertu du lemme 2.2.2. et prend, pour $y = 0$ , la valeur 1 . En vertu de la proposition 2.1.1., $\varphi_n \in \mathcal{F}(\mathcal{M}_1^+)$ et $(\varphi_n)^n = \varphi_1$ : donc $\varphi_1 \in \mathcal{J}$ . Puisque, $h(0) = 0$ et $\varphi_1(y) = e^{h(y)}$ , alors $h = L\,\varphi_1$ .

$\mathcal{H}$ désigne l'ensemble des applications h de F dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout $y \in F$ , $h(y) = \overline{h(-y)}$ et la condition 3. de la proposition 2.2.3. soit satisfaite. $\mathcal{H}^\circ$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{H}$ formé des applications h telles que $h(0) = 0$ . $\mathcal{H}$ est un cône convexe de l'espace $\mathcal{F}(F, \mathbb{C})$ des applications de F dans $\mathbb{C}$ , contenant les applications constantes réelles et $\mathcal{H}^\circ$ est aussi un cône convexe de $\mathcal{F}(F, \mathbb{C})$ .

Lemme 2.2.4.

Soient $h \in \mathcal{H}$ , $\{(b_p , z_p) ; p = 1, \ldots, m\}$ une suite finie d'éléments de $\mathbb{C} \times F$ ; alors l'application $h_1$ définie sur F par :

$$h_1 : y \rightsquigarrow h_1(y) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} b_p \overline{b_q} \; h(y - z_p + z_q)$$

appartient à $\mathcal{H}$ .

Démonstration :

Puisque $\overline{h\ (-y - z_p + z_q)} = h\ (y - z_q + z_p)$ ,

$$\overline{h_1(-y)} = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} b_p\ \overline{b_q}\ h\ (y - z_q + z_p) = h_1(y)\ .$$

Soit $\{(a_k\ ,\ y_k)\ ;\ k = 1, \ldots, n\}$ une suite finie d'éléments de $\mathbb{C} \times F$ , telle que $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ ; posons $a_{(k,p)} = a_k\ b_p$ et $y_{(k,p)} = y_k - z_p$ . Nous avons alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} a_{(k,p)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{p=1}^{m} b_p = 0\ ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k\ \overline{a_l}\ h_1\ (y_k - y_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} a_k\ \overline{a_l}\ b_p\ \overline{b_q}\ h\ (y_k - y_l - z_p + z_q)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} a_{(k,p)}\ \overline{a_{(l,q)}}\ h\ (y_{(k,p)} - y_{(l,q)}) \geq 0$$

Lemme 2.2.5.

Soit $h \in \mathcal{H}$ , $\theta \in \mathbb{R}$ , $y_o \in F$ et $a \in [-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}]$ ; alors l'application $h_2$ définie sur F par :

$$h_2\ :\ y \rightsquigarrow h(y) + a\ e^{-i\theta}\ h\ (y + y_o) + a\ e^{i\theta}\ h\ (y - y_o)\ ,$$

appartient à $\mathcal{H}$ .

Démonstration :

Soit $t \in \mathbb{R}$ ; appliquons le lemme 2.2.4. aux éléments (1, 0) et $(te^{i\theta}\ ,\ y_o)$ de $\mathbb{C} \times F$ : l'application $h_1$ définie par :

$$h_1(y) = h(y) + t\ e^{-i\theta}\ h\ (y+y_o) + t\ e^{i\theta}\ h\ (y-y_o) + t^2\ h(y)$$
$$= (1 + t^2)\ h(y) + t\ e^{-i\theta}\ h\ (y+y_o) + t\ e^{i\theta}\ h\ (y-y_o)$$

appartient à $\mathcal{A}$ ; puisque $\mathcal{A}$ est un cône, l'application

$$y \leadsto h(y) + \frac{t\, e^{-i\theta}}{1+t^2}\ h\,(y + y_0) + \frac{t\, e^{i\theta}}{1+t^2}\ h\,(y - y_0)$$

appartient à $\mathcal{A}$.

Il suffit alors de remarquer que, pour tout $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $a = \frac{t}{1+t^2}$ pour achever la démonstration.

<u>Proposition 2.2.6.</u>

Soit $h \in \mathcal{A}^\circ$ ; alors

1. pour tout $y \in F$, $\operatorname{Re} h(y) \le 0$

2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $y \in F$

$$0 \le -\operatorname{Re} h\,(ny) \le -n^2 \operatorname{Re} h(y)$$

$$|\operatorname{Im} h(ny) - n \operatorname{Im} h(y)| \le -\,n\,(n-1) \operatorname{Re} h(y)\ .$$

<u>Démonstration</u> :

Si $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z$ désigne la partie réelle de $z$ et $\operatorname{Im} z$ sa partie imaginaire.

1. Appliquons la propriété 3 de la proposition 2.2.3. aux éléments $(1, 0)$ et $(-1, y)$ de $\mathbb{C} \times F$ : nous obtenons :

$$0 \le -\,h(y) - h\,(-y) = -\,h(y) - \overline{h(y)} = -\,2 \operatorname{Re} h(y)$$

donc $\qquad \operatorname{Re} h(y) \le 0$ .

2. Posons $h = u + iv$, $u = \operatorname{Re} h$, $v = \operatorname{Im} h$. En vertu du lemme 2.2.5., appliqué à $a = -\frac{1}{2}$, $\theta = 0$, pour $y_0 \in F$, la fonction $y \leadsto h(y) - \frac{1}{2}\,[h\,(y + y_0) + h\,(y - y_0)]$ appartient à $\mathcal{A}$ et la fonction

$h_1 : y \rightsquigarrow h(y) - \frac{1}{2}\left[h(y+y_0) + h(y-y_0) - h(y_0) - h(-y_0)\right]$
appartient à $\mathcal{H}^\circ$. Pour $y \in F$, $\operatorname{Re} h_1(y) \leq 0$, soit

$$u(y) - \frac{1}{2}\left[u(y+y_0) + u(y-y_0) - u(y_0) - u(-y_0)\right] \leq 0,$$

et, puisque $h(y_0) = \overline{h(-y_0)}$, $u(y_0) = u(-y_0)$, donc

$$u(y) - \frac{1}{2}\left[u(y+y_0) + u(y-y_0)\right] + u(y_0) \leq 0$$

soit $u(y+y_0) - u(y) \geq u(y) - u(y-y_0) + 2\,u(y_0)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et prenons $y = k\,y_0$ ;

$$u\left[(k+1)\,y_0\right] - u(k\,y_0) \geq u(k\,y_0) - u\left[(k-1)\,y_0\right] + 2\,u(y_0)$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{p-1}\left(u\left[(k+1)\,y_0\right] - u(k\,y_0)\right) \geq \sum_{k=0}^{p-1}\left[u(k\,y_0) - u\left[(k-1)\,y_0\right]\right] + 2p\,u(y_0)$$

Puisque $h \in \mathcal{H}^\circ$, $h(0) = 0$, donc $u(0) = 0$ ; et, puisque $u(y_0) = u(-y_0)$,

$$u(p\,y_0) \geq u\left[(p-1)\,y_0\right] - u(y_0) + 2\,p\,u(y_0)$$

soit : $u(p\,y_0) - u\left[(p-1)\,y_0\right] \geq 2\,p\,u(y_0) - u(y_0)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=1}^{n}\left[u(p\,y_0) - u((p-1)\,y_0)\right] \geq n\,(n+1)\,u(y_0) - n u(y_0)$$

soit : $\quad u(n\,y_0) \geq n^2\,u(y_0)$

c'est-à-dire : $-\operatorname{Re} h(ny_0) \leq -n^2 \operatorname{Re} h(y_0)$.

Pour tout $y_0 \in F$, $h(y_0) = \overline{h(-y_0)}$, donc $v(y_0) = -v(-y_0)$, et :
$i\left[h(y_0) - h(-y_0)\right] = i\left[h(y_0) - \overline{h(y_0)}\right] = -2v(y_0)$ est réel.

Appliquons le lemme 2.2.5. au cas : $a = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ : la fonction $y \leadsto h(y) - \frac{i}{2} h(y+y_0) + \frac{i}{2} h(y-y_0)$ appartient à $\mathcal{A}$, et, $\mathcal{A}$ étant un cône convexe contenant les fonctions constantes réelles, la fonction $h_2 : y \leadsto h(y) - \frac{i}{2}[h(y+y_0) - h(y-y_0) - h(y_0) + h(-y_0)]$ appartient à $\mathcal{A}^\circ$. Pour tout $y \in F$, $\mathrm{Re}\, h_2(y) \leq 0$ soit :

$$u(y) + \frac{1}{2} v(y+y_0) - \frac{1}{2} v(y-y_0) - v(y_0) \leq 0$$

$$v(y+y_0) - v(y_0) \leq v(y_0) - v[-(y-y_0)] - 2u(y) .$$

Soit $y \in F$ ; prenons $y_0 = ky$, $k \in \mathbb{N}$ ;

$$v[(k+1)y] - v(ky) \leq v(ky) - v[(k-1)y] - 2u(y) .$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$,

$$v(py) = \sum_{k=0}^{p-1} \{v[(k+1)y] - v(ky)\} = \sum_{k=1}^{p-1} \{v[(k+1)y] - v(ky)\} + v(y)$$

$$v(py) \leq \sum_{k=1}^{p-1} \{v(ky) - v[(k-1)y]\} - 2(p-1)u(y) + v(y)$$

$$v(py) \leq v[(p-1)y] + v(y) - 2(p-1)u(y) .$$

Remarquons que la formule est encore valable si $p = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{p=1}^{n} \{v(py) - v[(p-1)y]\} \leq n\, v(y) - n(n-1)u(y)$$

soit $v(ny) - n\, v(y) \leq - n(n-1)u(y)$.

Cette inégalité est aussi valable pour $-y$ ; puisque $h(y) = \overline{h(-y)}$,

$$- v(ny) + n\, v(y) \leq - n(n-1)u(y)$$

Par suite, $|v(ny) - n\, v(y)| \leq - n(n-1)u(y)$ .

**Proposition 2.2.7.**

Soit $h \in \mathcal{H}^\circ$ ; pour tout $y \in F$ , $|1 - e^{h(y)}| \leq |h(y)|$ .

**Démonstration :**

Posons $h(y) = u + iv$ ; $u, v \in \mathbb{R}$ ; en vertu de la proposition 2.2.6., $u \leq 0$ . Alors :

$$|1 - e^{h(y)}|^2 = 1 + e^{2u} - 2\,e^u \cos v = 1 + e^{2u} - 2\,e^u + 2\,e^u\,(1 - \cos v)$$
$$= (1 - e^u)^2 + 2\,e^u\,(1 - \cos v) \leq u^2 + v^2 = |h(y)|^2$$

car : $u \leq 0$ , $0 \leq 1 - e^u \leq - u$ , $2\,e^u\,(1 - \cos v) \leq 2\,(1 - \cos v) \leq v^2$

**Proposition 2.2.8.**

Soient $h \in \mathcal{H}^\circ$ , $\varepsilon > 0$ et $Q$ une forme quadratique positive sur $F$ telle que : $Q(y) \leq 1 \Longrightarrow |h(y)| < \varepsilon$ . Alors, pour tout $y \in F$ ,

$$0 \leq - \operatorname{Re} h(y) \leq 2\,\varepsilon\,[1 + Q(y)]$$
$$|h(y)| \leq 4\,\varepsilon\,[1 + Q(y)] .$$

**Démonstration :**

Soient $y \in F$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(n-1)^2 \leq Q(y) < n^2$ , et posons $y_0 = \frac{1}{n}\,y$ . Alors $Q(y_0) = \frac{1}{n^2}\,Q(y) \leq 1$ et $|h(y_0)| \leq \varepsilon$.

De la proposition 2.2.6., il résulte que :

$$0 \leq - \operatorname{Re} h\,(n\,y_0) \leq - n^2 \operatorname{Re} h(y_0)$$
$$|\operatorname{Im} h\,(n\,y_0) - n \operatorname{Im} h\,(y_0)| \leq - n\,(n-1) \operatorname{Re} h\,(y_0)$$

1.) $0 \leq - \operatorname{Re} h(y_0) \leq |h(y_0)| \leq \varepsilon$ donc

$$0 \leq - \operatorname{Re} h(y) = - \operatorname{Re} h(ny_0) \leq n^2\,\varepsilon = \varepsilon\,[(n-1) + 1]^2 \leq 2\,\varepsilon\,[(n-1)^2 + 1]$$
$$\leq 2\,\varepsilon\,[Q(y) + 1]$$

2.) $|\mathrm{Im}\ h(y)| = |\mathrm{Im}\ h(ny_o)| \leq n\ |\mathrm{Im}\ h(y_o)| - n(n-1)\ \mathrm{Re}\ h(y_o)$

$$\leq n\ |h(y_o)| + n(n-1)\ |h(y_o)| \leq n^2\ \varepsilon$$

$$\leq 2\ \varepsilon\ [Q(y) + 1]$$

et $|h(y)| \leq |\mathrm{Re}\ h(y)| + |\mathrm{Im}\ h(y)| \leq 4\varepsilon\ [Q(y) + 1]$ .

Proposition 2.2.9.

Soient $h \in \mathcal{A}^\circ$ , $\varepsilon > 0$ et $Q$ une forme quadratique positive sur F telle que :

$$Q(y) \leq 1 \implies |h(y)| \leq \varepsilon$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , $\varphi_n : y \rightsquigarrow e^{\frac{1}{n} h(y)}$ vérifie :

pour tout $y \in F$ , $0 \leq n\ \mathrm{Re}\ [1 - \varphi_n(y)] \leq 4\ \varepsilon\ [1 + Q(y)]$ .

Démonstration :

Posons $h_n = n\ (\varphi_n - 1)$. En vertu du lemme 2.2.2., $\varphi_n$ est de type positif et appartient donc à $\mathcal{A}$ ; alors $h_n \in \mathcal{A}$ et, puisque, $h_n(0) = 0$, $h_n \in \mathcal{A}^\circ$ .

Pour $y \in F$ tel que $Q(y) \leq 1$ , $|\frac{1}{n}\ h(y)| \leq \frac{\varepsilon}{n}$ et, en vertu de la proposition 2.2.7.,

$$|1 - \varphi_n(y)| = |1 - e^{\frac{1}{n} h(y)}| \leq \frac{1}{n}\ |h(y)| \leq \frac{\varepsilon}{n} .$$

Ainsi $|h_n(y)| = |n\ (1 - \varphi_n(y)| \leq \varepsilon$ , et en vertu de la proposition 2.2.8., pour tout $y \in F$

$$0 \leq -\ \mathrm{Re}\ h_n(y) = n\ \mathrm{Re}\ [1 - \varphi_n(y)] \leq 4\ \varepsilon\ [Q(y) + 1] .$$

$\mathcal{F}_S$ (F, $\mathbb{C}$) est l'espace vectoriel des applications de F dans $\mathbb{C}$, muni de la topologie de convergence simple dans F ; F est muni de la topologie de convergence uniforme dans les parties compactes convexes et équilibrées de E .

<u>Proposition 2.2.10.</u>

Soit H une partie équicontinue de $\mathcal{F}_s(F, \mathbb{C})$ , contenue dans $\mathcal{A}^\circ$ . Alors l'enveloppe convexe fermée $\overline{\Gamma}(H)$ de H est une partie compacte de $\mathcal{F}_s(F, \mathbb{C})$.

<u>Démonstration</u> :

L'enveloppe convexe $\Gamma(H)$ est une partie équicontinue de $\mathcal{F}_s(F, \mathbb{C})$ et $\overline{\Gamma}(H)$ est aussi une partie équicontinue de $\mathcal{F}_s(F, \mathbb{C})$ ([3] proposition 6, § 2, n° 3). $\mathcal{A}^\circ$ est une partie convexe, fermée de $\mathcal{F}_s(F, \mathbb{C})$ contenant H, donc $\Gamma(H) \subset \mathcal{A}^\circ$ .

Soit $\varepsilon > 0$ ; $\overline{\Gamma}(H)$ est équicontinue en 0 ; en vertu de l'hypothèse (H), il existe un voisinage hilbertien $U \in \mathcal{V}$ de 0 dans F tel que, pour tout $y \in U$ , pour tout $h \in \overline{\Gamma}(H)$ , $|h(y)| \leq \varepsilon$ . (car $h(0) = 0$). Pour toute fonction $h \in \overline{\Gamma}(H)$ , $h \in \mathcal{A}^\circ$ et pour $y \in F$ tel que $p_U(y) \leq 1$ , $y \in U$ et $|h(y)| \leq \varepsilon$ .

En appliquant la proposition 2.2.8. à $Q = p_U^2$ , on obtient :

pour tout $y \in F$ , $|h(y)| \leq 4\,\varepsilon\,[1 + Q(y)]$ .

Par suite, $\overline{\Gamma}(H)(y) = \{h(y) \; ; \; h \in \overline{\Gamma}(H)\}$ est borné dans $\mathbb{C}$ et $\overline{\Gamma}(H)$ est relativement compacte, donc compacte ([3] , th. 2, § 2, n° 5).

# BIBLIOGRAPHIE

[1] : BADRIKIAN A. — Symposium on Probability methods in Analysis. Springer-Verlag (1967)

[2] : BOURBAKI — Topologie générale - chapitre 9. 2ème édition - Act. Sci. et Indust. 1045

[3] : BOURBAKI — Topologie générale - chapitre 10. 2ème édition - Act. Sci. et Indust. 1084

[4] : HOCHSCHILD G. — The structure of Lie groups. Holden-Day (1965) - Dunod (1968)

[5] : JOHANSEN S. — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 5 p. 304-316 (1966)

[6] : NEVEU J. — Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson (1964)

[7] : TORTRAT A. — Cours 1967 (Institut H. Poincaré)

[8] : VARADARAJAN — Recueil Mathématique T.55 (97) (1961)

## 3 - APPLICATION DU THEOREME DE CHOQUET

Dans ce chapitre, E est un e.l.c. réel séparé. On suppose que E satisfait aux deux conditions suivantes :

(H) : l'ensemble $\mathfrak{S}$ des parties compactes hilbertiennes de E est un système fondamental de parties compactes de E .

(S) : toute partie compacte hilbertienne de E est $\sigma$ (E, E')-séparable.

Soit A une partie compacte hilbertienne de E ; $V = A^{\circ}$ est alors un voisinage hilbertien faiblement fermé de 0 dans F et $\hat{F}_V$ est un espace hilbertien séparable d'après la proposition 1.1.6.

### 3.1. ETUDE DE PARTIES COMPACTES DE $\mathcal{A}$

Pour $x \in A \setminus \{0\}$ , $\theta_x$ est l'application de $\hat{F}_V$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\hat{y} \rightsquigarrow \theta_x(\hat{y}) = \frac{1}{p_A^2(x)} \left(e^{i<x,\hat{y}>} - 1 - i< x, \hat{y} >\right)$$

(< x, $\hat{y}$ > notant la dualité entre $E_A$ et $\hat{F}_V$) et posons :

$$H_A = \{\theta_x \; ; \; x \in A \setminus \{0\}\} .$$

Proposition 3.1.1.

i.) $H_A$ est une partie équicontinue sur $\hat{F}_V$ .

ii.) l'application $\theta : x \rightsquigarrow \theta_x$ de $A \setminus \{0\}$ dans $\mathcal{F}_s(F_V, \mathbb{C})$ est injective et continue lorsque $A \setminus \{0\}$ est muni de la topologie induite par celle de $E_A$ .

Démonstration

i.) Des inégalités : $u, v \in \mathbb{R}$,

$$|(e^{iu} - iu) - (e^{iv} - iv)| = |\int_u^v (e^{it} - 1)\, dt| \leq |v-u| \max (|u|, |v|)$$
$$\leq |v - u| (|u| + |v|),$$

il résulte que : pour $\hat{y}_0 \in \hat{F}_V$, pour chaque $x \in A \setminus \{0\}$, pour $\hat{y} \in \hat{F}_V$,

$$|\theta_x(\hat{y}) - \theta_x(\hat{y}_0)| \leq \frac{1}{p_A^2(x)} |< x, \hat{y} - \hat{y}_0 >| (|< x , \hat{y} >| + |< x , \hat{y}_0 >|)$$
$$\leq |\hat{y} - \hat{y}_0|_V (|\hat{y}|_V + |\hat{y}_0|_V) ;$$

ceci prouve que $H_A$ est équicontinu en $\hat{y}_0$.

ii.) Soient $x_1, x_2 \in A \setminus \{0\}$ tels que : $\theta_{x_1} = \theta_{x_2}$ ; pour tout $\hat{y} \in \hat{F}_V$, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $t \leadsto \theta_{x_1}(t\hat{y})$ et $t \leadsto \theta_{x_2}(t\hat{y})$ sont égales ; les valeurs en 0 de leurs dérivées secondes, resp. troisième, sont égales, soit :

$$\frac{1}{p_A^2(x_1)} < x_1 , \hat{y} >^2 = \frac{1}{p_A^2(x_2)} < x_2 , \hat{y} >^2,$$

$$\frac{1}{p_A^2(x_1)} < x_1 , \hat{y} >^3 = \frac{1}{p_A^2(x_2)} < x_2 , \hat{y} >^3.$$

Par suite, pour chaque $\hat{y} \in \hat{F}_V$, nous avons : $< x_1 , \hat{y} > = < x_2 , \hat{y} >$, donc $x_1 = x_2$.

Munissons $A \setminus \{0\}$ de la topologie induite sur celle de $E_A$. L'application $x \leadsto p_A^2(x)$ est continue et ne s'annule pas sur $A \setminus \{0\}$ ; de plus, pour chaque $\hat{y} \in \hat{F}_V$, $x \leadsto < x , \hat{y} >$ est continue sur $A \setminus \{0\}$, donc $x \leadsto \theta_x(\hat{y})$ est continue sur $A \setminus \{0\}$. Ce qui achève la démonstration.

Corollaire 3.1.2.

L'enveloppe convexe fermé $C_A$ de $H_A \cup \{0\}$ dans $\mathcal{F}_s(\hat{F}_V, \mathbb{C})$ est une partie convexe, compacte et métrisable de $\mathcal{F}_s(\hat{F}_V, \mathbb{C})$.

Démonstration :

L'enveloppe convexe de $H_A \cup \{0\}$ est équicontinue sur $\hat{F}_V$ et son adhérence $C_A$ dans $\mathcal{F}_s(\hat{F}_V, \mathbb{C})$ l'est aussi (cf : [2], § 2, n° 3) ; $C_A$ est compacte. Sur $C_A$, les topologies de convergence simple dans $\hat{F}_V$ et de convergence simple dans une partie D dense dans $\hat{F}_V$ sont identiques (cf : [2], § 2, n° 4) ; puisque $\hat{F}_V$ est séparable, on peut choisir D dénombrable et la topologie de convergence simple dans D est métrisable : $C_A$ est métrisable.

Corollaire 3.1.3.

$H_A$ est un borélien de $C_A$.

Démonstration :

$E_A$ est un espace hilbertien séparable : il est polonais et $A \setminus \{0\}$, intersection d'un fermé A de $E_A$ et de l'ouvert $\complement\{0\}$ de $E_A$, est aussi polonais (cf : [1], § 6, n° 1). $H_A$ est l'image par l'application injective et continue $\theta$ de $A \setminus \{0\}$, et est un borélien de $C_A$. (cf : 2.0).

Pour $x \in A$, $\alpha_x$ est l'application de $\hat{F}_V$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$y \rightsquigarrow \alpha_x(\hat{y}) = -\frac{1}{2} < x , \hat{y} >^2 .$$

et posons $K_A = \{\alpha_x ; x \in A\}$.

<u>Proposition 3.1.4.</u>

$K_A$ est une partie compacte de $C_A$, disjointe de $H_A$.

<u>Démonstration</u> :

$E_A$ étant le dual fort de $\hat{F}_V$, la boule unité A de $E_A$ est $\sigma(E_A, \hat{F}_V)$-compacte. Pour chaque $\hat{y} \in \hat{F}_V$, $x \rightsquigarrow \alpha_x(\hat{y})$ est continue sur A et l'application :

$$\alpha : x \rightsquigarrow \alpha_x \in \mathcal{F}_s(\hat{F}_V, \mathbb{C})$$

est aussi continue sur A lorsque A est muni de la topologie induite par $\sigma(E_A, \hat{F}_V)$.

$K_A$, image par cette application continue de A, est une partie compacte de $\mathcal{F}_s(\hat{F}_V, \mathbb{C})$.

Soit $x \in A$ ; si $x = 0$, $\alpha_x = 0 \in C_A$. Supposons $x \neq 0$ ; pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} x = x_n \in A \setminus \{0\}$ et $\theta_{x_n} \in H_A \subset C_A$. De plus, $0 \leq p_A^2(x) \leq 1$ et $0 \in C_A$ donc $p_A^2(x)\, \theta_{x_n} \in C_A$.

Pour $\hat{y} \in \hat{F}_V$,

$$p_A^2(x)\, \theta_{x_n}(\hat{y}) = n^2 \left(e^{i \frac{1}{n} <x,\hat{y}>} - 1 - i \frac{1}{n} < x,\hat{y} >\right) \longrightarrow -\frac{1}{2} < x, \hat{y} >^2 ,$$

donc $p_A^2(x)\, \theta_{x_n} \longrightarrow \alpha_x$ dans $\mathcal{F}_s(\hat{F}_V, \mathbb{C})$, et $C_A$ étant fermée dans $\mathcal{F}_s(\hat{F}_V, \mathbb{C})$, $\alpha_x \in C_A$.

Soit $x \in A \setminus \{0\}$ ; supposons que, pour tout $\hat{y} \in \hat{F}_V$, $\theta_x(\hat{y})$ soit réel ; la partie imaginaire de $\theta_x(\hat{y})$ étant nulle, on en déduit

$$< x , \hat{y} > = \sin < x , \hat{y} > ,$$

et en remplaçant $\hat{y}$ par $2\hat{y}$, nous obtenons :

$$2 < x , \hat{y} > = \sin 2 < x , \hat{y} > = 2 \sin < x , \hat{y} > \cos < x , \hat{y} > ,$$

et $$< x , \hat{y} > (1 - \cos < x , \hat{y} > ) = 0 .$$

Ainsi, pour tout $\hat{y} \in \hat{F}_V$ , $< x , \hat{y} > \in 2\pi \mathbb{Z}$ . x étant une forme linéaire non nulle sur $\hat{F}_V$ , $\{< x , \hat{y} > ; \hat{y} \in \hat{F}_V\} = \mathbb{R}$ . Nous obtenons une contradiction. Par suite, $\theta_x \notin K_A$ .

Proposition 3.1.5.

L'ensemble $\partial C_A$ des points extrêmaux de $C_A$ est continu dans $H_A \cup K_A$ .

Démonstration :

Soit g un point extrêmal de $C_A$ ; $\overline{H_A \cup \{0\}} = \overline{H_A} \cup \{0\}$ est une partie compacte de $C_A$ , dont l'enveloppe convexe fermée est $C_A$ . Alors, en vertu du théorème de KREIN-MILMAN (cf : [3] chapitre II, § 7, n° 1) , $g \in \overline{H_A} \cup \{0\}$ .

Si $g = 0$ , alors $g = \alpha_0 \in K_A$ .

Supposons maintenant que $g \in \overline{H_A}$ ; il existe un ultrafiltre sur $H_A$ qui converge vers g ; $\theta$ étant une bijection de $A \setminus \{0\}$ sur $H_A$ , il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $A \setminus \{0\}$ tel que $\lim\limits_{\mathcal{U}} \theta_x = g$ .

Munissons A de la topologie induite par celle de E ; $\mathcal{U}$ est une base d'ultrafiltre sur A, et, A étant compact, $\mathcal{U}$ converge vers $x_0 \in A$ . L'image $p_A(\mathcal{U})$ de la base d'ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur A par l'application

$$x \rightsquigarrow p_A(x) \in [0 , 1]$$

est une base d'ultrafiltre sur $[0, 1]$ et, $[0, 1]$ étant compact, $p_A(\mathcal{U})$ converge vers $a \in [0, 1]$ . Puisque $p_A$ est semi-continue-inférieurement sur $E$ ([3], chapitre II, § 2, n° 11, proposition 2.3.),

$$a = \lim_{\mathcal{U}} p_A(x) \geq p_A(x_o) .$$

i.) si $x_o \neq 0$, alors $a \neq 0$ et $g = \frac{1}{a^2} p_A^2(x)\, \theta_{x_o}$ ; puisque, $0 \leq \frac{1}{a^2} p_A^2(x) \leq 1$ , que $0$ et $\theta_{x_o} \in C_A$ et que $g$ est un point extrêmal de $C_A$ , alors $a^2 = p_A^2(x)$ et $g = \theta_x$ : $g \in H_A$ .

ii.) si $x_o = 0$ , $\frac{1}{p_A(x)}\, x \in A$ pour chaque $x \in A \setminus \{0\}$ , et, $A$ étant compact, $\lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{p_A(x)}\, x = x_1$ existe et $x_1 \in A$ . Alors, soit $\hat{y} \in \hat{F}_V$ ,

$$|g(\hat{y}) - \alpha_{x_1}(\hat{y})| = \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{p_A^2(x)} \,|\, e^{i<x,\hat{y}>} - 1 - i <x, \hat{y}> + \frac{1}{2} <x,\hat{y}>^2$$

$$\leq \frac{1}{6} \lim_{\mathcal{U}} < \frac{1}{p_A(x)}\, x , \hat{y} >^2 \lim_{\mathcal{U}} |< x , \hat{y} >| ,$$

en vertu de l'inégalité : $|e^{iu} - 1 - iu + \frac{1}{2} u^2| \leq \frac{1}{6} u^3$ valable pour tout $u \in \mathbb{R}$ . $A$ étant compact, sur $A$ les topologies induites par la topologie initiale de $E$ , la topologie $\sigma(E , E')$ de $E$ , la topologie $\sigma(E_A , \hat{F}_V)$ sont identiques et $\mathcal{U}$ converge vers $x_o = 0$ pour la topologie $\sigma(E_A , \hat{F}_V)$ donc $\lim_{\mathcal{U}} |< x , \hat{y} >| = 0$ . De même, $x_1$ est valeur limite de la fonction de $A \setminus \{0\}$ dans $A$ : $x \leadsto \frac{1}{p_A(x)}\, x$ suivant $\mathcal{U}$ pour la topologie induite sur $A$ par celle de $E$ donc aussi pour celle induite sur $A$ par $\sigma(E_A , \hat{F}_V)$ et :

$$\lim_{\mathcal{U}} < \frac{1}{p_A(x)}\, x , y >^2 = < x_1 , y >^2 .$$

Il en résulte que, pour chaque $\hat{y} \in \hat{F}_V$ , $g(\hat{y}) = \alpha_{x_1}(\hat{y})$ , i.e., $g = \alpha_{x_1} \in K_A$ .

## 3.2. APPLICATIONS DU THEOREME DE CHOQUET

Le théorème de représentation intégrale de CHOQUET, dans le cas métrisable, peut s'énoncer de la façon suivante ([4] chapitre IV, § 7, N° 1 et 2 ; [5] ; [6] chapitre XI) :

Soient E un e.l.c. , K une partie convexe, compacte et métrisable de E. Alors, tout point $x \in K$ est le barycentre d'une mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{M}_1^+$ portée par l'ensemble des points extrêmaux de K .

Nous appliquons ce théorème à l'e.l.c. $\mathcal{F}_s(\hat{F}_V , \mathbb{C})$ et à sa partie $C_A$ compacte, convexe et métrisable. Soit $g \in C_A$ : il existe $\nu \in \mathcal{M}_1^+ (C_A)$ , de barycentre g et portée par l'ensemble $\partial C_A$ des points extrêmaux de $C_A$ :

$g = \int_{\partial C_A} \rho \, d\nu(\rho)$ et, pour tout $\hat{y} \in \hat{F}_V$ , $g(\hat{y}) = \int_{\partial C_A} \rho(\hat{y}) \, d\nu(\rho)$ .

Remarque : sur $A \setminus \{0\}$ , nous aurons à considérer les topologies $\mathcal{C}_1$ , induite par la topologie de E (ou par $\sigma(E, E')$ , ou par $\sigma(E_A , \hat{F}_V)$) , et $\mathcal{C}_2$ , induite par la topologie de $E_A$ . $\mathcal{C}_1$ est moins fine que $\mathcal{C}_2$ , et $A \setminus \{0\}$ , muni de $\mathcal{C}_2$ , est polonais. D'après § 2-0, pour ces différentes topologies,

- les tribus de Borel sont égales
- les ensembles des mesures tendues sont égaux : on les note $\mathcal{M}^+ (A \setminus \{0\})$
- toute mesure finie sur $A \setminus \{0\}$ est tendue.

Proposition 3.2.1.

Soit $g \in C_A$ ; il existe

1.) un voisinage hilbertien $W \in \mathcal{V}$ de 0 dans F tel que $V \subset W$ et $\pi_{WV}$ est du type H.S., $|\pi_{WV}|_2 \leq 1$ .

2.) $\mu \in \mathcal{M}^+ (A \setminus \{0\})$ telle que $\mu (A \setminus \{0\}) \leq 1$, satisfaisant à : pour tout $\hat{y} \in \hat{F}_V$,

$$g(\hat{y}) = - |\pi_{WV}(\hat{y})|_W^2 + \int_{A \setminus \{0\}} \theta_x(\hat{y})\, d\mu(x).$$

Démonstration :

$g$ est le barycentre de $\nu \in \mathcal{M}_1^+ (C_A)$, portée par $\partial C_A$, donc aussi par $H_A \cup K_A$ qui est un borélien de $C_A$ contenant $\partial C_A$. $H_A$ et $K_A$ étant disjoints,

$$g(\hat{y}) = \int_{K_A} \rho\, (\hat{y})\, d\nu\, (\rho) + \int_{H_A} \rho\, (\hat{y})\, d\nu\, (\rho).$$

1.) Pour chaque $\rho \in K_A$, il existe $x \in A$ tel que $\rho = \alpha_x$ ;
$\hat{y} \leadsto - \rho\, (\hat{y})$ est une forme quadratique positive sur $\hat{F}_V$ et

$$0 \leq - \rho(\hat{y}) \leq \frac{1}{2}\, p_A^2(x) \times |\hat{y}|_V^2 \leq \frac{1}{2}\ |\hat{y}|_V^2.$$

Par suite, $\hat{y} \leadsto Q(\hat{y}) = - \int_{K_A} \rho\, (\hat{y})\, d\, \nu(\rho)$ est une forme quadratique positive sur $\hat{F}_V$ ; pour tout $\hat{y} \in \hat{F}_V$, $Q(\hat{y}) \leq \frac{1}{2}\, |\hat{y}|_V^2$ et $Q$ est continue sur $\hat{F}_V$.

$W = \{y \in F\ ;\ 2\, Q\, [\pi_V(y)] \leq 1\}$ est un voisinage de $0$ dans $F$, convexe, fermé donc faiblement fermé ; $p_W^2 = 2\, Q o\, \pi_V$ est une forme quadratique sur $F$ ; $W$ est hilbertien : $W \in \mathcal{V}$. Soit $y \in V$, alors

$2\, Q\, o\, \pi_V(y) \leq |\pi_V(y)|_V^2 = p_V^2(y) \leq 1$ ; $y \in W$ et, par suite $V \subset W$.

Montrons que $\pi_{WV}$ est de type H.S. . $\hat{y} \leadsto |\pi_{WV}(\hat{y})|_W^2$ et $\hat{y} \leadsto 2\, Q(\hat{y})$ sont deux applications continues sur $\hat{F}_V$ et coïncident sur $F_V$ ; puisque $F_V$ est dense dans $\hat{F}_V$, elles sont égales et, pour tout $\hat{y} \in \hat{F}_V$, $|\pi_{WV}(\hat{y})|^2 = 2\, Q(\hat{y})$. Soit $\{\hat{y}_n\}$ une base orthonormale de $\hat{F}_V$ ; c'est aussi une base orthonormale de $E_A$ identifié à $\hat{F}_V$. Pour $\rho \in K_A$, il existe $x \in A$ tel que $\rho = \alpha_x$ ;

Alors : $- \sum_n \rho(\hat{y}_n) = \frac{1}{2} \sum_n < x , \hat{y}_n >^2 = \frac{1}{2} \; p_A^2(x) \leq \frac{1}{2}$,

donc : $\sum_n \; |\pi_{WV}(\hat{y}_n)|_W^2 = 2 \sum_n Q(\hat{y}_n) = - 2 \int_{K_A} \sum_n \rho(\hat{y}_n) \, d\nu \, (\rho) \leq 1$

Ce qui prouve que $\pi_{WV}$ est de type H.S. et $|\pi_{WV}|_2 \leq 1$.

2.) Munissons $A \setminus \{0\}$ de la topologie $\mathcal{T}_2$ induite par la topologie de $E_A$. $\theta$ étant continue et bijective de $A \setminus \{0\}$ sur $H_A$, il existe une mesure finie $\mu$ sur $A \setminus \{0\}$ telle que $\theta(\mu)$ est la restriction à $H_A$ de $\nu$.
Alors $\mu \; (A \setminus \{0\}) = \nu \; (H_A) \leq 1$
et, pour tout $\hat{y} \in \hat{F}_V$, $\int_{H_A} \rho \; (\hat{y}) \, d\nu \; (\rho) = \int_{A \setminus \{0\}} \theta_x(\hat{y}) \, d\mu \; (x)$
Le résultat est établi compte tenu de la remarque précédant cette proposition.

Soient : $\Gamma_A = \{g \circ \pi_V \; ; \; g \in C_A\}$ ;

: $h_x = \theta_x \circ \pi_V$ : $h_x(y) = \dfrac{1}{p_A^2(x)} \; (e^{i<x,y>} - 1 - i <x,y>)$

pour chaque $y \in F$, pour chaque $x \in A \setminus \{0\}$ ;

: $H'_A = \{h_x \; ; \; x \in A \setminus \{0\}\}$.

F étant muni de la $\mathfrak{S}$-topologie, $\pi_V$ est continue de F dans $\hat{F}_V$. $C_A$ étant une partie équicontinue de $\mathcal{F}(\hat{F}_V, \mathbb{C})$, $\Gamma_A$ est une partie équicontinue de $\mathcal{F}(F, \mathbb{C})$ et, en particulier, chaque fonction $h \in \Gamma_A$ est continue sur F.

L'application $g \rightsquigarrow g \circ \pi_V$ de $\mathcal{F}_s(\hat{F}_V, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{F}_s(F, \mathbb{C})$ est linéaire, continue ; $\Gamma_A$ est une partie convexe compacte de $\mathcal{F}_s(F, \mathbb{C})$ contenant $H'_A \cup \{0\}$ ; en fait, $\Gamma_A$ est l'enveloppe convexe fermée de $H'_A \cup \{0\}$ dans $\mathcal{F}_s(F, \mathbb{C})$. La proposition 3.2.1. entraîne le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.2.

Soit $h \in \Gamma_A$ ; il existe :

1.) un voisinage hilbertien $W \in \mathcal{V}$ de 0 dans F tel que :

$V \subset W$, $\pi_{WV}$ est de type H.S., $|\pi_{WV}|_2 \leq 1$,

2.) $\mu \in \mathcal{M}^+(A \setminus \{0\})$ telle que $\mu(A \setminus \{0\}) \leq 1$, satisfaisant à :

$$h(y) = -p_W^2(y) + \int_{A \setminus \{0\}} h_x(y)\, d\mu(x) .$$

Démonstration :

$h = g \circ \pi_V$ où $g \in C_A$ et admet une représentation donnée par la proposition précédente. Alors :

$$h(y) = - \quad {}_{WV} ( {}_{V}(y) )$$

$$h(y) = -|\pi_{WV}(\pi_V(y))|_W^2 + \int_{A \setminus \{0\}} \theta_x [\pi_V(y)]\, d\mu(x)$$

$$= -p_W^2(y) + \int_{A \setminus \{0\}} h_x(y)\, d\mu(x) .$$

Proposition 3.2.3.

Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(A \setminus \{0\})$ telle que $\mu(A \setminus \{0\}) \leq 1$. Alors l'application définie sur F par :

$$y \rightsquigarrow \int_{A \setminus \{0\}} h_x(y)\, d\mu(x)$$

appartient à $\Gamma_A$.

<u>Démonstration</u> :

Munissons $A \setminus \{0\}$ de la topologie induite par celle de $E_A$. Soit $\mathcal{P}$ la classe des familles finies $\pi$ de boréliens de $A \setminus \{0\}$, non vides et deux à deux disjoints ; la relation $\pi_1 \prec \pi_2$ si $\pi_1$ est contenue dans $\pi_2$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$. Pour $\pi \in \mathcal{P}$, posons :

$$\mu_\pi = \sum_{B\in\pi} \mu(B)\, \partial_{x_B} \quad \text{où } x_B \in B .$$

$\{\mu_\pi\}$ est une suite généralisée telle que $\mu_\pi \Longrightarrow \mu$. Puisque, pour tout $y \in F$, l'application : $x \rightsquigarrow h_x(y)$ est continue et bornée sur $A \setminus \{0\}$, alors :

$$\int_{A \setminus \{0\}} h_x(y)\, d\mu_\pi(x) = \sum_{B\in\pi} \mu(B)\, h_{x_B}(y) \longrightarrow \int_{A \setminus \{0\}} h_x(y)\, d\mu(x) ,$$

et $\sum_{B\in\pi} \mu(B)\, h_{x_B} \longrightarrow h$, où $h(y) = \int_{A \setminus \{0\}} h_x(y)\, d\mu(x)$, dans $\mathcal{F}_s(F, \mathbb{C})$. Or pour chaque $\pi \in \mathcal{P}$, pour chaque $B \in \pi$, $\mu(B) \geq 0$ et $\sum_{B\in\pi} \mu(B) \leq \mu(A \setminus \{0\}) \leq 1$ ; de plus $\Gamma_A$ est convexe, fermé dans $\mathcal{F}_s(F, \mathbb{C})$ et contient $H'_A$ et $0$. Par suite, $\sum \mu(B)\, h_{x_-} \in \Gamma_A$ et $h \in \Gamma_A$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] : BOURBAKI — Topologie générale - chapitre 9
(2ème édition) - Act. Sci. et Indust. 1045

[2] : BOURBAKI — Topologie générale - chapitre 10
(2ème édition) - Act. Sci. et Indust. 1084

[3] : BOURBAKI — Espace vectoriel topologique - chapitres 1-2
(2ème édition) - Act. Sci. et Indust. 1189

[4] : BOURBAKI — Intégration - chapitres 1-2-3-4
(2ème édition) - Act. Sci. et Indust. 1175

[5] : CHOQUET G. et MEYER P.A. - Existence et unicité des représentations intégrales dans les ensembles convexes compacts quelconques.
Ann. inst. FOURIER, Grenoble, t. 13, (1963),
p. 139-154.

[6] : MEYER P.A. — Probabilités et potentiel
Act. Sci. et Indust. 1318 (Hermann) 1966.

# 4 - FORMULE DE LEVY-KINTCHINE

Dans ce chapitre, les hypothèses sont celles du chapitre 3.

## 4.1. THEOREME DE MINLOS

A désigne une partie compacte hilbertienne de E ; $V = A^{\circ}$ est un voisinage hilbertien de 0 dans F et $p_V^2$ est une forme quadratique positive sur F .

Si P est une partie finie de F , $f_p$ est l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \rightsquigarrow f_p(x) = \sum\limits_{x \in P} < x , y >^2$ .

Posons $N_V = p_V^{-1}(0)$ : $N_V$ est l'orthogonal de $E_A$ et l'orthogonal $N_V^{\circ}$ de $N_V$ est l'adhérence de $E_A$ dans E pour la topologie $\sigma(E, E')$. $\mathcal{S}_V$ désigne l'ensemble des parties finies S de F telles que $\pi_V(S)$ est un système orthonormal de $F_V$ .

Lemme 4.1.1.

i.) pour $x \in E \setminus N_V^{\circ}$ , $\sum\limits_{y \in N_V} < x , y >^2 = p_A^2(x) = + \infty$

pour $x \in N_V^{\circ}$ , $\sum\limits_{y \in N_V} < x , y >^2 = 0$ .

ii.) sur $N_V^{\circ}$ , la famille $\{f_S ; S \in \mathcal{S}_V\}$ est filtrante croissante et son enveloppe supérieure est $p_A^2$ .

Démonstration :

i.) si $x \notin N_V^{\circ}$ , il existe $y_o \in N_V$ tel que $< x , y_o > \neq 0$ ; pour tout $t \in R$ , $y = ty_o \in N_V$ et :

$$< x , y_1 >^2 = t^2 < x , y_o >^2 \leq \sum_{y \in N_V} < x , y>^2 .$$

Par suite, $\sum_{y \in N_V} < x , y >^2 = + \infty$ , et, comme $x \notin E_A$ , $p_A^2 (x) = + \infty$ .

Soit $x \in N_V^\circ$ ; pour tout $y \in N_V$ , $< x , y > = 0$ et $\sum_{y \in N_V} < x , y >^2 = 0$

ii.) Soient $S_1$ , $S_2 \in \mathcal{S}_V$ ;

Supposons tout d'abord que $\pi_V(S_1)$ et $\pi_V(S_2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel de $F_V$ . Soient $S_1 = \{y_1 , \dots, y_n\}$ et $S_2 = \{z_1, \dots, z_n\}$ ; pour $k = 1, \dots, n$ ,

$$\pi_V(y_k) = \sum_{p=1}^{n} < \pi_V(y_k) , \pi_V(z_p) > \pi_V(z_p) ,$$

$$y_k = \sum_{p=1}^{n} < \pi_V(y_k) , \pi_V(z_p) > z_p + y_k'$$

où $y_k' \in N_V = p_V^{-1}(0)$ .

Soit $x \in N_V^\circ$ ; $< x , y_k' > = 0$ et :

$$< x , y_k > = \sum_{p=1}^{n} < \pi_V(y_k) , \pi_V(z_p) > < x , z_p >$$

$$f_{S_1}(x) = \sum_{n=1}^{n} < x , y_k>^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} < x, z_p > < x, z_q > < \pi_V(y_k) , \pi_V(z_p) > < \pi_V(y_k), \pi_V(z_q) >$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} < x, z_p > < x, z_q > \sum_{k=1}^{n} < \pi_V(y_k) , \pi_V(z_p) > < \pi_V(y_k), \pi_V(z_q) >$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} < x, z_p > < x, z_q > < \pi_V(z_p) , \pi_V(z_q) >$$

$$= \sum_{p=1}^{n} < x , z_p >^{2} = f_{S_2}(x) .$$

Dans le cas général, il existe deux bases orthonormales $\pi_V(S'_1)$ et $\pi_V(S'_2)$ du sous-espace vectoriel (de dimension finie) de $F_V$ engendré par $\pi_V(S_1 \cup S_2)$ , telles que : $S_1 \subset S'_1$ et $S_2 \subset S'_2$ . Alors, pour $x \in N^\circ_V$ , $f_{S'_1}(x) = f_{S'}(x)$ , et les inclusions $S_1 \subset S'_1$ , $S_2 \subset S'_2$ entraînent : $f_{S_1}(x) \leq f_{S'_1}(x)$ , $f_{S_2}(x) \leq f_{S'_2}(x)$. Ainsi, il existe $S = S'_1 \in \mathcal{S}_V$ tel que : $f_{S_1} \leq f_S$ , $f_{S_2} \leq f_S$ .

Soit $x \in E_A$ ; pour $S \in \mathcal{S}_V$ , $\pi_V(S)$ est un système orthonormal de $\hat{F}_V$ identifié à $E_A$ ; en vertu de l'inégalité de Bessel,

$$f_S(x) = \sum_{y \in S} < x , y >^2 = \sum_{y \in S} < x , \pi_V(y) >^2 \leq p_A^2(x) .$$

Réciproquement, en vertu de l'hypothèse (S) et de la proposition 1.1.6., $F_V$ est un espace préhilbertien séparable et admet une base orthonormale dénombrable $\{\pi_V(y_n)\}$ , qui est aussi base orthonormale de $\hat{F}_V = E_A$ .En vertu de l'égalité de Parseval,

$$\sum_n < x , y_n >^2 = \sum_n < x , \pi_V(y_n) >^2 = p_A^2(x) .$$

Si $S_n = \{y_1, \ldots, y_n\}$ , $S_n \in \mathcal{S}_V$ et :

$$p_A^2(x) = \sup_n f_{S_n}(x) \leq \sup_{S \in \mathcal{S}_V} f_S(x) .$$

Nous avons ainsi démontré l'égalité : $\sup_{S \in \mathcal{S}_V} f_S(x) = p_A^2(x)$ .

Soit maintenant $x \in N_V^\circ$ , $x \notin E_A$ ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , $x \notin n\,A = n\,V^\circ$ : il existe $y \in V$ tel que $|< x , y >| \geq n$ . Comme $x \in N_V^\circ$ , alors $y \notin N_V$ et $p_V(y) \neq 0$ . Posons $y_1 = \frac{1}{p_V(y)}\, y$ ; $S = \{y_1\}$ appartient à $\mathcal{S}_V$ et :

$$f_S(x) = < x , y_1 >^2 = \frac{1}{p_V^2(y)} < x , y >^2 \geq n^2$$

et $\sup_{S \in \mathcal{S}_V} f_S(x) = + \infty = p_A^2(x)$ car $x \notin E_A$ .

Soit $U \in \mathcal{V}$ un voisinage hilbertien de 0 dans F , faiblement fermé.

Lemme 4.1.2.

Soit $P = \{y_1, \ldots, y_n\}$ une partie finie de F ; soient $\eta > 0$ et $\mu \in \mathcal{M}^+(E)$ telle que, pour tout $y \in F$ ,

$$\mathrm{Re}\,[\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(y)] \leq \eta \quad [1 + p_U^2(y)] .$$

Alors : $\int_E (1 - e^{-\frac{1}{2} f_P(x)})\, d\mu(x) \leq \eta \quad [1 + \sum_{y \in P} p_U^2(y)]$.

Démonstration :

La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est notée $\|..\|$ et le produit scalaire correspondant $(..,..)$ . $\xi : x \in E \longrightarrow (< x , y_i >) \in \mathbb{R}^n$ est continue sur E . La mesure $\xi\mu$ image de la mesure $\mu$ par $\xi$ est une mesure tendue sur $\mathbb{R}^n$ ; sa transformée de Fourier est :

$$u \rightsquigarrow \widehat{\xi\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(u,t)}\, d\xi\mu(t) = \int_E e^{i(u,\xi x)}\, d\mu\,(x) \text{ où } u = (u_k) \in \mathbb{R}^n$$

$$= \int_E e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} u_k < x,\, y_k>} d\mu\,(x) = \hat{\mu}\,(\sum_{k=1}^{n} u_k\, y_k)\,.$$

$u \rightsquigarrow e^{-\frac{1}{2}||u||^2}$ est la transformée de Fourier de la mesure de probabilité gaussienne de densité :

$$t \rightsquigarrow \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\, e^{-\frac{1}{2}||t||^2}\,.$$

En vertu de la formule de Plancherel, nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}||u||^2}\, d\xi\mu(u) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}||t||^2}\, \widehat{\xi\mu}\,(t)\, dt.$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}||t||^2}\, \mathrm{Re}\,\widehat{\xi\mu}(t)\, dt.$$

et de l'égalité : $\widehat{\xi\mu}\,(0) = \xi\mu\,(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\int_E (1 - e^{-\frac{1}{2} f_p(x)})\, d\mu\,(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (1 - e^{-\frac{1}{2}||u||^2})\, d\,\xi\mu\,(u)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}\,\left[\hat{\mu}\,(0) - \hat{\mu}\,(\sum_{k=1}^{n} t_k\, y_k)\right] e^{-\frac{1}{2}||t||^2}\, dt$$

$$\leq \eta\, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[1 + p_U^2\,(\sum_{k=1}^{n} t_k\, y_k)\right] e^{-\frac{1}{2}||t||^2}\, dt.$$

$t = (t_k) \rightsquigarrow p_U^2\,(\sum\limits_{k=1}^{n} t_k\, y_k)$ est une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^n$ et définit un opérateur symétrique positif $\alpha$ sur $\mathbb{R}^n$ par :

$(\alpha t, t) = p_U^2 \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\, y_k\right)$ . En vertu de l'égalité :

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha t, t)\, e^{-\frac{1}{2}\|t\|^2}\, dt = \operatorname{tr}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} p_U^2 (y_k),\ \text{nous obtenons :}$$

$$\int_E \left(1 - e^{-\frac{1}{2} f_p(x)}\right) d\mu(x) \leq \eta \left[1 + \sum_{k=1}^{n} p_U^2 (y_k)\right] .$$

<u>Proposition 4.1.3.</u> - <u>théorème de MINLOS</u> -

Soit $U$ un voisinage hilbertien de 0 dans F de type H.S. Il existe une partie compacte hilbertienne A de E telle que, pour tout $\eta > 0$, pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(E)$ vérifiant : pour tout $y \in F$ ,

$$\operatorname{Re} \left[\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(y)\right] \leq \eta \quad \left[1 + p_U^2(y)\right] ,$$

alors $\int_E \min\left[1, p_A^2(x)\right] d\mu(x) \leq \dfrac{2\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}\, \eta$ .

<u>Démonstration</u> :

1.) Puisque U est de type H.S., il existe un voisinage hilbertien faiblement fermé V de 0 dans F tel que $V \subset U$ et $\pi_{UV}$ est de type H.S. Nous pouvons supposer que $|\pi_{UV}|_2 \leq 1$ . En effet, dans le cas contraire, soit $t = |\pi_{UV}|_2^{-1}$ et $V' = tV$ ; V étant équilibré et $0 \leq t \leq 1$, alors $V' \subset V \subset U$ . De l'égalité $t p_{V'} = p_V$ , il résulte que : $F_V = F_{V'}$ , $\hat{F}_V = \hat{F}_{V'}$, $|..|_V = t|..|_{V'}$ , $\pi_{UV} = \pi_{UV'}$ . Si $\{\hat{y}_k\}$ est une base orthonormale de $\hat{F}_{V'}$ , $\{\frac{1}{t}\ \hat{y}_k\}$ est une base orthonormale de $\hat{F}_V$ , et :

$$|\pi_{UV'}|_2^2 = \sum_k |\pi_{UV'}(\hat{y}_k)|_U^2 = t^2 \sum_k |\pi_{UV}(\tfrac{1}{t}\hat{y}_k)|_U^2 = t^2\, |\pi_{UV}|_2^2 = 1 .$$

On remplacera alors V par V' .

ii.) $A = V^\circ$ est une partie compacte hilbertienne de $E$. Puisque $p_A$ est semi-continue-inférieurement sur $E$, les fonctions $x \rightsquigarrow \min\,[1, p_A^2(x)]$ et $x \rightsquigarrow 1 - e^{-\frac{1}{2}\, p_A^2(x)}$ sont semi-continues inférieurement, positives et bornées sur $E$ ; elles sont intégrables par rapport à $\mu$. De l'égalité :

$$(u \geq 0) \qquad \min\,(1, u) \leq \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}\,(1 - e^{-\frac{1}{2}u}),$$

il résulte :

$$(1) : \int_E \min\,[1, p_A^2(x)]\;d\mu(x) \leq \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}\int_E \left[1 - e^{-\frac{1}{2}\,p_A^2(x)}\right]\;d\mu\,(x).$$

iii.) Utilisons les notations du lemme 4.1.1. Soient : $S = \{y_1, \ldots, y_p\} \in \mathcal{S}_V$ et $P = \{y_{p+1}, \ldots, y_n\}$ une partie finie de $E \setminus N_V^\circ$ ; en vertu du lemme 4.1.2.,

$$\int_E \left[1 - e^{-\frac{1}{2}\,f_{S \cup P}(x)}\right]\,d\mu\,(x) \;\leq\; \left[1 + \sum_{k=1}^{n} p_U^2\,(y_k)\right].$$

Puisque $V \subset U$, alors $p_U \leq p_V$ et $p_V^{-1}(0) = N_V \subset p_U^{-1}(0)$, et pour $k = p+1, \ldots, n$ $\quad p_U(y_k) = 0$.

$\{\pi_V(y_k)\;;\; k = 1, \ldots, p\}$ est un système orthonormal de $\hat{F}_V$. En le complétant en une base orthonormale $\{\hat{y}_j\}$ de $\hat{F}_V$, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{p} p_U^2\,(y_k) = \sum_{k=1}^{p} |\pi_{UV}\,(\pi_V(y_k))|_U^2 \;\leq\; \sum_j\; |\pi_{UV}(y_j)|_V^2 = |\pi_{UV}|_2^2 \leq 1\,.$$

$$\text{et } (2) : \int_E \left[1 - e^{-\frac{1}{2}\,f_{P \cup S}(x)}\right]\;d\mu\,(x) \leq 2\,\eta\,.$$

$$\text{et } (2) : \int_E \left[1 - e^{-\frac{1}{2}\,f_{P \cup S}(x)}\right]\;d\,\mu(x) \leq 2\,\eta\,.$$

iv.) Sur $N_V^\circ$, la famille $\{1 - e^{-\frac{1}{2} f_S}, S \in \mathcal{S}_V\}$ est une famille trante croissante de fonctions continues positives et son enveloppe érieure est $1 - e^{-\frac{1}{2} p_A^2(x)}$ ; la restriction de $\mu$ au fermé $N_V^\circ$ de E nt tendue,

$$\int_{N_V^\circ} [1 - e^{-\frac{1}{2} f_S(x)}] \, d\mu\,(x) = \int_{N_V^\circ} [1 - e^{-\frac{1}{2} p_A^2(x)}] \, d\,\mu(x)$$

Si $\mathcal{Q}$ est l'ensemble des parties finies de $E \setminus N_V^\circ$, sur $E \setminus N_V^\circ$, la ille $\{1 - e^{-\frac{1}{2} f_P}, P \in \mathcal{Q}\}$ est une famille filtrante de fonctions tinues positives, dont l'enveloppe supérieure est $1 - e^{-\frac{1}{2} p_A^2(x)} = 1.$ restriction de $\mu$ à $E \setminus N_V^\circ$ étant aussi tendue,

$$\mathcal{Q} \int_{E \setminus N_V^\circ} [1 - e^{-\frac{1}{2} f_P(x)}] \, d\mu\,(x) = \int_{E \setminus N_V^\circ} [1 - e^{-\frac{1}{2} p_A^2(x)}] \, d\mu\,(x)$$

en remarquant que $f_S \leq f_{S \cup P}$, $f_p \leq f_{S \cup P}$, nous obtenons :

$$: \sup_S \sup_P \int_E [1 - e^{-\frac{1}{2} f_{P \cup S}(x)}] \, d\,\mu(x) \geq \int_E [1 - e^{-\frac{1}{2} p_A^2(x)}] \, d\mu\,(x)$$

pte tenu des inégalités (1) , (2) , (3), nous avons :

$$\int_E \min\,[1\,,\, p_A^2(x)\,] \, d\mu\,(x) \leq 2\eta \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}\,.$$

## 4.2. FORMULE DE LEVY-KINTCHINE

Théorème 4.2.1.

Soit $\varphi \in \mathfrak{I}$ et soit $h = L\varphi$ . Alors il existe :

1.) $a \in E$

2.) une partie compacte hilbertienne $A$ de $E$, un voisinage hilbertien $W$ tels que $A^\circ \subset W$ , $\pi_{WA^\circ}$ est de type H.S. et $|\pi_{WA^\circ}|_2 \leq 1$ .

3.) une mesure $\lambda$ sur $E$ , K-régulière telle que :

$$\int_E \min\left[1, p_A^2(x)\right] \, d\lambda(x) < +\infty$$

satisfaisant à : pour chaque $y \in F$ ,

$$h(y) = i < a,y > - p_W^2(y) + \int_E \left[e^{i<x,y>} - 1 - i< x, y > 1_A(x)\right] d\lambda(x).$$

Démonstration :

Soient $\varphi_n = e^{\frac{1}{n}h}$ : $\varphi_n \in \mathcal{F}(\mathcal{M}_1^+)$ et $n\,\varphi_n$ est la transformée de Fourier d'une mesure $\mu_n \in \mathcal{M}^+(E)$ de masse totale $\mu_n(E) = n$ .

Pour $y \in F$ , $h(y) = \lim\limits_n \; n\left[\varphi_n(y) - 1\right]$ .

Soit $\varepsilon > 0$ ; $h$ est continue sur $F$ muni de la S-topologie : il existe $U \in \mathcal{V}_S$ , voisinage de 0 dans $F$ , hilbertien et de type H.S. tel que :

$$y \in U \implies |h(y)| \leq \varepsilon \;.$$

En appliquant la proposition 2.2.9., avec $Q = p_U^2$ , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout $y \in F$ , nous obtenons :

$$0 \leq \mathrm{Re}\left[\hat{\mu}_n(0) - \hat{\mu}_n(y)\right] = n\,\mathrm{Re}\left[1 - \varphi_n(y)\right] \leq 4\,\varepsilon\left[1 + p_U^2(y)\right] .$$

Il existe alors, par la proposition 4.1.3., une partie compacte hilbertienne $A_\varepsilon$ de $E$ telle que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\int_E \min\left[1, p_{A_\varepsilon}^2(x)\right] d\mu_n(x) \leq 8\,\varepsilon \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}$$

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{8}(1 - e^{-1/2})$ : il existe donc une partie compacte hilbertienne A de E telle que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_E \min [1, p_A^2(x)] \, d\mu_n(x) \leq 1 .$$

Posons $\alpha_n = 1_{A \setminus \{0\}} \cdot \mu_n$, $\beta_n = 1_{E \setminus A} \cdot \mu_n$ ;

$\alpha_n$ et $\beta_n$ sont des mesures K-régulières sur E et sont finies (cf : 2.0)

Ainsi $\alpha_n$, $\beta_n \in \mathcal{M}^+$. De plus, pour chaque $y \in F$,

$$(a) \equiv \quad n \, [\varphi_n(y) - 1] = \hat{\mu}_n(y) - \hat{\mu}_n(0) = \hat{\beta}_n(y) - \hat{\beta}_n(0) + \hat{\alpha}_n(y) - \hat{\alpha}_n(0) .$$

i.) pour chaque $n \geq 1$,

$$\beta_n(E) = \mu_n(E \setminus A) \leq \int_E \min [1, p_A^2(x)] \, d\mu_n(x) \leq 1 .$$

Pour tout $\partial > 0$, il existe une partie compacte hilbertienne $A_\partial$ de E tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_E \min [1, p_{A_\partial}^2(x)] \, d\mu_n(x) \leq \partial ,$$

(prendre $\varepsilon = \frac{\partial}{8}(1 - e^{-1/2})$.) et $\mu_n(E \setminus A_\partial) \leq \partial$ ; par suite,

$$\beta_n(E \setminus A_\partial) \leq \mu_n(E \setminus A_\partial) \leq \partial .$$

Ceci prouve que l'ensemble $\{\beta_n \, ; \, n \in \mathbb{N}^*\}$ est équitendu, donc relativement compact dans $\mathcal{M}^+$. La suite $\{\beta_n\}$ a une valeur d'adhérence $\beta \in \mathcal{M}^+$ et il existe un filtre $\Phi$ sur $\mathbb{N}^*$, plus fin que le filtre de Fréchet tel que $n \longmapsto \beta_n$ a pour limite $\beta$ suivant $\Phi$. Alors, $\beta(E) = \lim_\Phi \beta_n(E) \leq 1$ et

$$(b) \equiv \qquad \lim_\Phi \hat{\beta}_n = \hat{\beta} \quad \text{(convergence simple sur F).}$$

ii.) Soit, pour $n \geq 1$, $h_n$ définie sur F par :

$$h_n : y \rightsquigarrow h_n(y) = \int_{A \setminus \{0\}} \left[e^{i<x,y>} - 1 - i <x,y>\right] d\, \alpha_n(x)$$

$$= \int_{A\setminus\{0\}} h_x(y)\, d\, \nu_n(x) ,$$

où $\nu_n = p_A^2 \cdot \alpha_n$ est une mesure sur $A \setminus \{0\}$ vérifiant :

$$\nu_n\, (A \setminus \{0\}) = \int_{A \setminus \{0\}} p_A^2(x)\, d\mu_n(x) \leq \int_E \min\left[1,\, p_A^2(x)\right] d\, \mu_n(x) \leq 1$$

En vertu de la proposition 3.2.3., $h_n \in \Gamma_A$ ; $\Gamma_A$ étant une partie compacte de $\mathcal{F}_s\,(F, \mathbb{C})$ , l'application $n \mapsto h_n$ a une valeur d'adhérence $h^* \in \Gamma_A$ suivant le filtre $\Phi$ et il existe un filtre $\Phi'$ sur $\mathbb{N}^*$ , plus fin que $\Phi$ , tel que

(c) $\equiv \quad \lim\limits_{\Phi'} h_n = h^*$

iii.) Soit $x_n$ la résultante de $\alpha_n$ : $x_n$ est l'élément du dual algébrique $E'^* = F^*$ de F , défini par :

$$x_n : y \rightsquigarrow \int_{A \setminus \{0\}} <x,y>\ d\alpha_n(x) .$$

Puisque $\alpha_n\ (A \setminus \{0\}) \leq \mu_n(E) \leq n$ , et que A est une partie compacte convexe de E contenant $A \setminus \{0\}$ , $x_n \in E$ , plus précisément $x_n \in nA$. Alors, pour $y \in F$ , $\hat{\mu}_n(y) - \hat{\mu}_n(0) = \hat{\beta}_n(y) - \hat{\beta}_n(0) + h_n(y) + i < x_n, y >$ , et compte tenu des relations (a) , (b) et (c) ,

$\lim\limits_{\Phi'} < x_n , y >$ existe, $y \rightsquigarrow \lim\limits_{\Phi'} < x_n, y >$ est une forme linéaire $x_o$ sur F (i.e. la suite $\{x_n\}$ converge vers $x_o$ dans $F^*$ muni de la topologie $\sigma\,(F^*, F)$.) De plus :

$$h(y) = \hat{\beta}(y) - \hat{\beta}(0) + h^*(y) + i < x_0, y > ;$$

h et $\hat{\beta}$ sont continues sur F pour la S-topologie donc aussi pour la $\mathfrak{S}$-topologie ; $h^* \in \Gamma_A$ est continue sur F , donc $x_0$ est continue sur F ; comme $F' = E$ , alors $x_0 \in E$ .

iv.) Soit $x_1$ la résultante de la mesure restriction à A de $\beta$ :

$$x_1 \in E'^* \text{ est défini par : } x_1 : y \leadsto \int_A < x,y > d\beta(y) .$$

Comme $\beta(A) \leq \beta(E) \leq 1$ , alors $x_1 \in A \subset E$ et :

$$\hat{\beta}(y) - \hat{\beta}(0) = \int_{E \setminus \{0\}} \left[e^{i<x,y>} - 1 - i <x,y> 1_A(x)\right] d\beta(x) + i <x_1,y> .$$

v.) Appliquons le corollaire 3.2.2. pour déterminer $h^*$ :

- il existe un $W \in \mathcal{V}$ tel que :

  $V = A^\circ \subset W$ , $\pi_{WV}$ est de type H.S. , $|\pi_{WV}|_2 \leq 1$

- $\mu \in \mathcal{M}^+(A \setminus \{0\})$ telle que $\mu(A \setminus \{0\}) \leq 1$

  satisfaisant à :

  $$h^*(y) = - p_W^2(y) + \int_{A \setminus \{0\}} h_x(y) \, d\mu(x) .$$

Définissons la mesure $\lambda$ sur E par : B étant un borélien de E ,

$$\lambda(B) = \int_{B \cap (A \setminus \{0\})} \frac{1}{p_A^2(x)} d\mu(x) + \beta(B)$$

$\lambda$ est une mesure K-régulière sur E telle que :

$$\int_E \min\left[1, p_A^2(x)\right] d\lambda(x) = \mu(A \setminus \{0\}) + \int_E \min\left[1, p_A^2(x)\right] d\beta(x)$$

$$\leq \mu(A \setminus \{0\}) + \beta(E) \leq 2 .$$

Alors, pour chaque $y \in F$ ,

$$h(y) = i < a, y > - p_W^2(y) + \int_E \left[e^{i<x,y>} - 1 - i < x, y> 1_A(x)\right] \, d\lambda \, (x)$$

où $a = x_0 + x_1$ .

Remarque 1 : nous pouvons supposer que $\lambda(\{0\}) = \beta(\{0\}) = 0$ . Au besoin, nous remplacerons $\lambda$ par $\lambda - \lambda(\{0\})\, \partial_0$ .

Remarque 2 : la condition $\int_E \min\left[1, p_A^2(x)\right] \, d\lambda\,(x) < +\infty$ entraîne que $\lambda$ est $\sigma$-finie ; pour $n \in \mathbb{N}^*$ , considérons

$D_n = \left\{x \in E \,;\, p_A(x) > \frac{1}{n}\right\}$ ; $p_A$ étant semi-continue inférieurement sur E , $D_n$ est un ouvert de E et :

$$E = \{0\} \bigcup \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n \right);$$

pour $x \in D_n$ , $\min\left[1 , p_A^2(x)\right] \geq \frac{1}{n^2}$ ,

d'où $\lambda\,(D_n) \leq n^2 \int_E \min\left[1, p_A^2(x)\right] d\,\lambda(x) < +\infty$

et nous supposons que $\lambda(\{0\}) = 0$ .

## 4.3. ETUDE RECIPROQUE - UNICITE

**Proposition 4.3.1.**

Soient : $a \in E$

: A une partie compacte hilbertienne de E

: $W \in \mathcal{V}_S$ un voisinage de 0 dans F , faiblement fermé, de type H.S.

: $\lambda$ une mesure K-régulière sur E vérifiant :

$$\int_E \min\left[1, p_A^2(x)\right] d\lambda(x) < +\infty$$

Définissons h sur F par :

$$h(y) = i < a, y > - p_W^2(y) + \int_E \left[e^{i<x,y>} - 1 - i < x, y > 1_A(x)\right] \; d\lambda(x)$$

Alors il existe $\varphi \in \mathcal{J}$ telle que $h = L\varphi$ .

Démonstration :

Il suffit de prouver que h satisfait aux conditions de la proposition 2.2.3.

i.) $\partial_a$ étant la mesure de Dirac en a , $L\,\hat{\partial}_a(y) = i < a, y >$ . Ainsi $y \rightsquigarrow i < a, y >$ appartient à $\mathcal{A}°$ et est continue sur F pour $\mathcal{C}_S$ .

ii.) $p_W^2$ est continue sur F muni de $\mathcal{C}_S$ . Montrons que $-p_W^2 \in \mathcal{A}°$ et, plus généralement, que, si Q est une forme quadratique positive sur F , alors $-Q \in \mathcal{A}°$ . Soit b la forme bilinéaire symétrique associée à Q , et soit $\{(a_k , y_k) \; ; \; k = 1, \ldots, n\}$ une famille finie de $\mathbb{C} \times F$ telle que $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ .

Alors $Q(y_k - y_l) = Q(y_k) + Q(y_l) - 2b(y_k , y_l)$
et posons $a_k = u_k + iv_k$ ($u_k , v_k \in \mathbb{R}$).

$$- \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k \overline{a_l} \; Q(y_k - y_l)$$

$$= - \sum_{l=1}^{n} \overline{a_l} \sum_{l=1}^{n} a_k \, Q(y_k) - \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=1}^{n} \overline{a_l} \, Q(y_l) + 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k \overline{a_l} \, b(y_k , y_l)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (u_k u_l + v_k v_l) \, b(y_k, y_l) - 2i \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (u_k v_l - v_k u_l) \, b(y_k, y_l)$$

$$= 2 \, Q \, (\sum_{k=1}^{n} u_k y_k) + 2 \, Q \, (\sum_{l=1}^{n} v_k y_k) \geq 0 \, .$$

iii.) Soit $\beta = 1_{E \setminus A^\circ} \lambda$ ; $\beta$ est une mesure K-régulière sur E , et finie :

$$\beta(E) = \lambda(E \setminus A) \leq \int_E \min [1, p_A^2(x)] \, d\lambda(x) < +\infty \, .$$

$h_1 : y \rightsquigarrow \int_{E \setminus A} [e^{i<x,y>} - 1] \, d\lambda(x) = \hat{\beta}(y) - \hat{\beta}(0)$ est continue sur F muni de la S-topologie ; $\hat{\beta}$ est de type positif, donc appartient aussi à $\mathcal{F}(\mathcal{M}^+)$ et $h_1 \in \mathcal{A}^\circ$ .

iv.) Soit la mesure $\alpha$ sur $A \setminus \{0\}$ définie par :

$$\alpha(B) = \int_B p_A^2(x) \, d\lambda(x) \, , \; B \text{ borélien de } A \setminus \{0\} \, .$$

Elle est K-régulière et finie :

$$\alpha(A \setminus \{0\}) = \int_{A \setminus \{0\}} p_A^2(x) \, d\lambda(x) \leq \int_E \min [1, p_A^2(x)] \, d\lambda(x) < +\infty \, .$$

et soit $\alpha' = [\alpha(A \setminus \{0\})]^{-1} \cdot \alpha$ : $\alpha'$ est une mesure de probabilité tendue sur $A \setminus \{0\}$ . Considérons l'application $h_2 : y \rightsquigarrow \int_{A \setminus \{0\}} h_x(y) \, d\alpha'(x)$ de F dans $\mathbb{C}$ ; nous avons :

$\int_A [e^{i<x,y>} - 1 - i<x, y>] \, d\lambda(x) = \alpha(A \setminus \{0\}) \, h_2(y)$ . Et il nous suffit de prouver que $h_2 \in \mathcal{A}^\circ$ et est continue sur F muni de $\mathcal{C}_S$ . Avec les notations des propositions 3.2.2. et 3.2.3. , $h_2 \in \Gamma_A$ . Or pour chaque $x \in A \setminus \{0\}$ , $h_x \in \mathcal{A}^\circ$ , donc $H'_A \subset \mathcal{A}^\circ$ . $\mathcal{A}^\circ$ étant un cône convexe fermé de $\mathcal{F}_s(F, \mathbb{C})$ , il contient l'enveloppe convexe fermée de $H'_A$ , soit $\Gamma_A$ . Ainsi $h_2 \in \mathcal{A}^\circ$ .

Considérons $Q(y) = \int_{A \setminus \{0\}} \frac{1}{p_A^2(x)} < x, y >^2 d\alpha'(x)$ :

$Q(y) \leq p_{A°}(y)$ ,

et $U = \{y \in F \ ; \ Q(y) \leq 1\}$ est un voisinage hilbertien de 0 dans F , faiblement fermé, contenant $A°$ , tel que $Q = p_U^2$ .

Pour chaque $y \in F$ ,

$$Q(y) = |\pi_{UA°}(\pi_{A°}(y))|_U^2 = \int_{A \setminus \{0\}} \frac{1}{p_A^2(x)} < x , \pi_{A°}(y) >^2 d\alpha'(x) \ ;$$

$$\hat{y} \rightsquigarrow |\pi_{UA°}(\hat{y})|_U^2 \quad \text{et} \quad \hat{y} \rightsquigarrow \int_{A \setminus \{0\}} \frac{1}{p_A^2(x)} < x, \hat{y} >^2 d\alpha'(x)$$

sont deux applications définies et continues sur $\ddot{F}_{A°}$ et coïncident sur $F_{A°}$ qui est dense dans $\hat{F}_{A°}$ ; par conséquent, pour chaque $\hat{y} \in \hat{F}_{A°}$ ,

$$|\pi_{UA°}(\hat{y})|_U^2 = \int_{A \setminus \{0\}} \frac{1}{p_A^2(x)} < x, \hat{y} >^2 d\alpha'(x) .$$

Soit maintenant $\{\hat{y}_n\}$ une base orthonormale (dénombrable) de $\hat{F}_{A°}$ ;

$$\sum_n |\pi_{UA°}(\hat{y}_n)|_U^2 = \int_{A \setminus \{0\}} \frac{1}{p_A^2(x)} \sum_n < x , \hat{y}_n >^2 d\alpha'(x) = 1$$

car, $E_A$ et $\hat{F}_{A°}$ étant identifiés,

$$\sum_n < x , \hat{y}_n >^2 = p_A^2(x) .$$

Ainsi $\pi_{UA°}$ est de type H.S. et $U \in \mathcal{V}_S$ .

Pour $y$ , $y' \in F$ , pour chaque $x \in A \setminus \{0\}$ ,

$$|h_x(y) - h_x(y')| \leq \frac{1}{p_A^2(x)} |< x, y - y' >| (|<x,y>| + |<x,y'>|)$$

$$|h_2(y) - h_2(y')| \leq \int_{A \setminus \{0\}} \frac{1}{p_A^2(x)} |< x, y-y' >| (|<x,y>| + |<x,y'>|) \, d\alpha'(x)$$

$$\leq \left[ \int_{A \setminus \{0\}} \frac{1}{p_A^2(x)} < x, y-y' >^2 d\alpha'(x) \right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[ 2 \int_{A \setminus \{0\}} \frac{1}{p_A^2(x)} (<x, y>^2 + < x, y>^2) \, d\alpha' (x) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sqrt{2} \, Q \, (y - y')^{1/2} \, (Q(y) + Q(y'))^{1/2}.$$

Ce qui prouve que $h_2$ est continue pour $\mathcal{C}_S$ .

Ainsi, $h$ est continue sur $F$ muni de la S-topologie et $h \in \mathcal{H}^\circ$ .

A chaque $\varphi \in \mathcal{J}$ , nous pouvons associer le quadruplet $(a, W, A, \lambda)$

où : $a$ est un élément de $E$

: $A$ une partie compacte hilbertienne de $E$

: $W \in \mathcal{V}_S$ est un voisinage de 0 dans $F$ , faiblement fermé de type H.S.

: $\lambda$ une mesure K-régulière sur $E$ vérifiant :

$$\int_E \min \left[1, p_A^2(x)\right] d\, \lambda(x) < +\infty \quad .$$

Soient $(a, W, A, \lambda)$ et $(a', W', A', \lambda')$ associés à une même fonction $\varphi \in \mathcal{J}$.
Nous nous proposons d'étudier les relations liant les éléments de ces deux représentations.

Proposition 4.3.2.

Si $h = L\varphi$ , $W$ est défini de façon unique par :

pour $y \in F$ , $\quad p_W^2(y) = - \lim \frac{1}{n^2} \operatorname{Re} h(ny).$

Démonstration :

$$- \frac{1}{n^2} \operatorname{Re} h(ny) = p_W^2(y) + \int_E \frac{1 - \cos n <x,y>}{n^2} \quad d\lambda\ (x) .$$

La suite formée des fonctions $x \rightsquigarrow \dfrac{1 - \cos n <x,y>}{n^2}$ de E dans $\mathbb{R}$ converge simplement vers 0 lorsque $n \to \infty$ . De plus,

$$0 \leq \frac{1}{n^2} (1 - \cos n <x,y> ) \leq \frac{1}{2} <x,y>^2 \leq \frac{1}{2} p_A^2(x)\ p_V^2(y)$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \leq 2 \ ;$$

elles sont positives et majorées par la fonction λ-intégrable :

$$x \rightsquigarrow \min \left[1,\ p_A^2(x)\ \right].\ \max \left[\frac{1}{2}\ p_V^2(y)\ ,\ 2\right].$$

En vertu du théorème de Lebesgue,

$$\lim_n \int_E \frac{1}{n^2} \left[1 - \cos n <x,\ y>\right] \quad d\lambda\ (x) \quad \to \quad 0$$

D'où le résultat annoncé.

Proposition 4.3.3.

Si nous imposons à λ et λ' la condition : $\lambda\ (\{0\}) = \lambda'\ (\{0\}) = 0$ alors $\lambda = \lambda'$ .

Démonstration :

Nous avons par la proposition précédente $W = W'$ . pour $y, y' \in F$ ,

$$h(y') - \frac{1}{2} \left[h(y+y') + h(y'-y)\right] - p_W^2(y) = \int_E e^{i<x,y>} (1 - \cos <x,y> )\ d\lambda\ (x)$$

$$= \int_E e^{i<x,y>} (1 - \cos <x,y> )\ d\lambda'(x)$$

Soit $f_y : x \rightsquigarrow 1 - \cos \langle x, y\rangle$ : $f_y$ est $\lambda$-intégrable et $f_y.\lambda$ est une mesure K-régulière et finie sur E , donc tendue. De même, $f_y.\lambda'$ est une mesure tendue sur E et l'égalité précédente signifie que ces deux mesures ont mêmes transformées de Fourier et sont donc égales.

Les conditions :

$\int_E \min\left[1, p_A^2(x)\right] \; d\lambda(x) < +\infty$ et $\int_E \min\left[1, p_{A'}^2(x)\right] \; d\lambda'(x) < +\infty$

entraînent que $\lambda$ et $\lambda'$ sont $\sigma$-finies : il existe une partition de E formée de $\{0\}$ et d'une suite $\{D_n\}$ de boréliens de E tels que :

$$\lambda(D_n) < +\infty \quad \text{et} \quad \lambda'(D_n) < +\infty .$$

Définissons les deux mesures $\lambda_n$ et $\lambda'_n$ sur $D_n$ par restriction de $\lambda$ et $\lambda'_n$ aux boréliens de $D_n$ : $\lambda_n$ et $\lambda'_n$ sont deux mesures K-régulières et finies, i.e., tendues sur $D_n$ . $(\lambda_n - \lambda'_n)$ est une mesure signée tendue sur $D_n$ ; $(\lambda_n - \lambda'_n)^+$ est une mesure tendue sur $D_n$ ; par le théorème de Hahn-Jordan, il existe un borélien D de $D_n$ tel que, pour chaque borélien B de $D_n$ ,

$$(\lambda_n - \lambda'_n)^+(B) = (\lambda_n - \lambda'_n)\,(B \cap D) .$$

Montrons que $(\lambda_n - \lambda'_n)^+ = 0$ ; soit $y \in F$ , et soit K un compact de $D_n$ , contenu dans $D \setminus y^{-1}(2\pi\,\mathbb{Z})$. Sur K , la fonction $f_y$ ne s'annule pas ; soit $c = \min\left[f_y(x) \; ; \; x \in K\right] > 0$ . La condition $f_y.\lambda(K) = f_y.\lambda'(K)$ , entraîne que :

$$0 = \int_K (1 - \cos \langle x, y\rangle)\; d(\lambda_n - \lambda'_n)(x) \geq c \;.\; (\lambda_n - \lambda'_n)(K)$$

donc $(\lambda_n - \lambda'_n)(K) = 0$ . $(\lambda_n - \lambda'_n)^+$ étant K-régulière, nous aurons :

$(\lambda_n - \lambda'_n)^+ \; [D_n \setminus y^{-1} \; (2\pi \; \mathbb{Z})] = (\lambda_n - \lambda'_n) \quad [D \setminus y^{-1} \; (2\pi \; \mathbb{Z})] = 0 \;;$

comme $D_n \setminus y^{-1}$ $(2\pi\ \mathbb{Z})$ est un ouvert de $D_n$ , de mesure nulle, il est contenu dans le complémentaire du support de $(\lambda_n - \lambda'_n)^+$ ; par suite

$$D_n = \bigcup_{y \in F} \; [D_n \setminus y^{-1} \; (2\pi \; \mathbb{Z})] \subset D_n \setminus \text{supp} \; (\lambda_n - \lambda'_n)^+$$

ce qui entraîne que $(\lambda_n - \lambda'_n)^+ = 0$ . De même, $(\lambda_n - \lambda'_n)^- = (\lambda'_n - \lambda_n)^+ = 0$ ce qui prouve que $|\lambda_n - \lambda'_n| = 0$ et $\lambda_n = \lambda'_n$ .

Soit maintenant $B$ un borélien de $E$ ; compte tenu de la condition $\lambda\ (\{0\}) = \lambda'\ (\{0\}) = 0$ ,

$$\lambda\ (B) = \sum_n \lambda_n\ (B \cap D_n) = \sum_n \lambda'_n\ (B \cap D_n) = \lambda'(B)$$

ce qui prouve que $\lambda = \lambda'$ .

Proposition 4.3.4.

$$a + \int_{A \setminus A'} x \; d\lambda\ (x) = a' + \int_{A' \setminus A} x \; d\lambda\ (x) \; .$$

Démonstration :

Nous avons alors :

$$< a - a', y > = \int_E < x, y > [1_{A'}(x) - 1_A(x)] \; d\lambda\ (x)$$

$$= \int_E < x, y > [1_{A' \setminus A}(x) - 1_{A \setminus A'}(x)] \; d\lambda\ (x)$$

soit $< a, y > + \int_{A \setminus A'} < x, y > d\lambda\ (x) = < a', y > + \int_{A' \setminus A} < x, y > \; d\lambda\ (x)$

ou $a + \int_{A \setminus A'} x \; d\lambda\ (x) = a' + \int_{A' \setminus A} x \; d\lambda\ (x)$

Remarque :

$\int_{A\setminus A'} x \, d\lambda\,(x)$ est la forme linéaire sur $F$ définie par :

$$< \int_{A\setminus A'} x \, d\lambda\,(x), y > = \int_{A\setminus A'} < x, y > d\lambda\,(x)$$

De la majoration :

$$|1_{A\setminus A'}(x) < x, y >| \leq p_{A^\circ}(y) \min \lfloor 1, p^2_{A'}(x) \rfloor ,$$

il résulte que $x \rightsquigarrow 1_{A\setminus A'}(x) < x, y >$ est $\lambda$-intégrable et que

$$| \int_{A\setminus A'} < x, y > d\lambda\,(x)| \leq p_{A^\circ}(y) \int_E \min [1, p^2_{A'}(x)] \, d\lambda\,(x) .$$

Par suite, $\int_{A\setminus A'} x \, d\lambda\,(x)$ existe et est un élément de $E$ .