

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

J. L. ALTABER

Représentations arithmétiques de grandeurs aléatoires

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 37, série *Mathématiques*, n° 5 (1967), p. 1-61

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1967__37_5_1_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTRODUCTION

Le problème d'engendrer par le calcul des "variables aléatoires" est déjà ancien et on sait le sens qu'il faut donner à ce problème depuis la discussion de E. BOREL sur la possibilité d'imiter le hasard et la thèse de J. VILLE sur les collectifs, [cf. 22], entre autres.

L'apparition de l'ordinateur comme instrument de recherches a donné un renouveau d'intérêt à ce problème.

En effet, les méthodes de Monte-Carlo ont pu alors être utilement mises en œuvre et on sait que ces méthodes utilisent une variable aléatoire dont, en général, l'espérance mathématique est la solution du problème posé. D'autre part, les variables aléatoires et les fonctions aléatoires s'introduisent naturellement dans un problème physique observé à échelle assez fine ; si l'on se propose de simuler sur ordinateur un dispositif physique, la question se posera donc de construire un grand nombre de réalisations d'une famille de variables ou fonctions aléatoires.

Le même problème se posera si l'on veut étudier à l'aide d'un calculateur électronique un modèle statistique (file d'attente et divers problèmes de recherche opérationnelle).

Plusieurs solutions ont été envisagées jusque là pour ce problème.

La première consiste à adjoindre à l'ordinateur un équipement spécial utilisant les propriétés stochastiques d'un dispositif physique [cf. 9] (bruit de fond dans un circuit électronique comportant des tubes électroniques). L'inconvénient de cette solution, outre la nécessité d'une installation périphérique, est que la variable aléatoire ainsi engendrée n'est pas reproductible.

La deuxième solution envisagée consiste à enregistrer une fois pour toutes la variable aléatoire engendrée par le dispositif physique dont nous venons de parler. On obtient ainsi une "table" qu'il suffit de faire lire par l'ordinateur au fur et à mesure du besoin. On se heurte alors au fait que l'insertion de données tirées d'une table dans un ordinateur est lente et que l'on perd donc les avantages dus à la rapidité de la machine.

On construit ainsi une "table de nombres au hasard", résultats d'une expérience ; on doit alors vérifier **a posteriori** que cette suite de nombres vérifie les propriétés exigées et en particulier que :

a) Les résultats successifs sont indépendants et peuvent donc être considérés comme les valeurs de variables aléatoires indépendantes X_i .

b) Les X_i ont la répartition souhaitée et, comme chacun d'eux a un nombre fini de valeurs possibles (10^{10} par exemple dans le cas de "table" de nombres de 10 chiffres), on suppose en général ces valeurs également probables.

Troisième solution : pour ne pas perdre le profit de la grande vitesse d'un calculateur électronique, il faut construire des programmes générant des suites numériques représentant, en un sens qui sera précisé plus loin, des variables aléatoires de lois variées. On procède en général en deux étapes :

- on représente une variable aléatoire de densité uniforme sur $[0,1[$.

- à partir d'une telle représentation, on forme d'autres représentations de variables aléatoires ayant une loi donnée, remarquant que si x est une variable aléatoire de densité uniforme sur $[0,1[$, alors $F^{-1}(x)$ a pour répartition F . Notons que F^{-1} peut ne pas être définie de façon précise pour un ensemble dénombrable de valeurs de x , ceci est sans importance, cet ensemble étant de probabilité nulle.

Dans cette optique du problème, l'essentiel est donc de représenter une variable aléatoire de densité uniforme sur $[0,1[$.

Il existe de nombreuses études (générateur pseudo-aléatoire) [cf. 21] sur ce sujet et elles procèdent pour la plupart en deux étapes.

On définit tout d'abord un procédé arithmétique de génération d'une suite de nombres $u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_0)$ [procédé du milieu du carré, Von Neuman, ...]. On vérifie ensuite que cette suite de nombres satisfait à des propriétés du type a) et b) énoncées plus haut, en appliquant un certain nombre de tests (test du poker, des files, ...).

Notons que de telles méthodes, outre la nécessité d'une vérification **a posteriori** délicate, présentent l'inconvénient d'engendrer des suites nécessairement périodiques ; bien que l'on puisse rendre cette période T plus ou moins grande en choisissant la valeur u_0 de départ, certains "générateurs" seront de ce fait inutilisables pour certaines simulations (cas où le nombre de termes de la suite nécessaire est supérieur à la plus grande période possible).

Dans ce mémoire, nous avons tout d'abord défini une représentation d'une variable aléatoire par une suite infinie de nombres et nous avons ensuite utilisé les propriétés asymptotiques des suites équiréparties et des nombres normaux pour construire de telles suites.

Que l'on utilise un générateur pseudo-aléatoire (période T) ou un générateur construit dans ce mémoire (T est infini), il est clair que, lors d'une simulation, on n'utilisera qu'un nombre fini $N < T$ de termes de la suite. Le problème se pose alors de savoir dans quelle mesure les propriétés annoncées pour la suite jusqu'au Tⁱème terme, sont conservées lorsqu'on s'arrête au Nⁱème terme ($N < T$).

On possède des théorèmes sur la rapidité de convergence des suites définies dans ce mémoire, vers les propriétés de répartition souhaitées ; mais, N étant fixé au départ et déterminant le coût de la méthode, il nous a semblé plus judicieux de chercher des ensembles de N éléments, A_N , approchant "au mieux" la variable aléatoire à représenter. De plus, nous ne nous bornerons pas à considérer des ensembles A_N dont les éléments sont également pondérés ($\frac{1}{N}$), on verra plus loin que l'on obtient, pour le même nombre N de points X_i de A_N , une représentation "meilleure" si on place en chacun des points X_i une masse α_i .

Nous avons étudié trois méthodes de construction de A_N :

- $\rho(F_N, F)$ étant la distance de P. LEVY entre la fonction de répartition F_N de l'ensemble A_N et la fonction de répartition F de la variable aléatoire à représenter, on a cherché l'ensemble A_N de cardinal N minimisant cette distance.

- On peut aussi comparer les fonctions caractéristiques $\Phi_N(u)$ et $\Phi(u)$ à l'aide de la distance :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(u) |\Phi_N(u) - \Phi(u)|^2 du \quad \text{où } \rho(u) > 0, \rho(0) = 1$$

et $\lim_{u \rightarrow \infty} \rho(u) = 0$ [cette dernière condition étant imposée par le comportement asymptotique différent de $\Phi_N(u)$ et $\Phi(u)$].

- Nous avons enfin construit A_N tels que les premiers moments de F_N coïncident avec ceux de F.

Je remercie Monsieur le Délégué Général à la Recherche Scientifique et Technique qui a subventionné mes recherches sous le contrat n° 64 FR 204.

Cette étude a fait l'objet d'une thèse de Docteur-Ingénieur soutenue à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand le 26 Novembre 1966.

PREMIÈRE PARTIE
REPRÉSENTATION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE
PAR UNE SUITE INFINIE DE NOMBRES

Avant même d'étudier les procédés mathématiques de génération de suites infinies de nombres représentant une variable aléatoire, il convient de bien définir le problème que l'on se propose de résoudre, compte tenu des contraintes que nous impose la mise en œuvre sur ordinateur de ces procédés.

On veut représenter une réalisation d'une variable aléatoire par une suite infinie de nombres. Or, les nombres susceptibles d'être traités par l'ordinateur ont nécessairement un nombre de chiffres fini fixé, et une variable aléatoire est une fonction dont l'ensemble des valeurs possibles peut être très vaste. Donc, la représentation numérique dans un système de base g de chaque valeur prise par cette variable aléatoire, nécessite une infinité de symboles (dans le cas de la loi uniforme sur $[0,1]$ l'ensemble des valeurs possibles a la puissance du continu et les valeurs décimales sont de probabilité nulle).

L'idée vient naturellement de "discrétiser" la variable aléatoire de loi continue que nous nous proposons de représenter, en la remplaçant par une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs possibles représentables numériquement par un nombre k fini de chiffres dans la base g (si l'on utilise la représentation flottante, on écrira ces valeurs avec le même facteur de cadrage, la mantisse aura k chiffres dans la base g).

Les ensembles sur lesquels nous allons travailler étant définis nous allons maintenant caractériser les suites infinies de nombres de ces ensembles, représentant une variable aléatoire de loi donnée F .

Définition 1 - Nous dirons qu'une suite de nombres réels $\langle y_n \rangle$ représente une variable aléatoire de loi F , si on a :

$$\frac{N'(N ; y_i \leq a)}{N} \longrightarrow F(a) \quad \text{quand} \quad N \longrightarrow \infty$$

en tout point de continuité a de F .

$N'(N ; P_i)$ désigne le nombre de $i \leq N$ pour lesquels la propriété P_i est vraie.

Nous avons vu précédemment que la construction d'une telle suite $\langle y_n \rangle$ se ramenait à la construction d'une suite $\langle x_n \rangle$ représentant une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$ [alors $y_i = F^{-1}(x_i)$], aussi allons nous préciser la définition ci-dessus pour une telle variable aléatoire. Conformément à la remarque faite plus haut sur la discrétisation de la variable aléatoire à représenter, les termes de la suite que nous allons caractériser, s'écrivent avec au plus k chiffres après la virgule dans le système de base g :

$$0, a_1 a_2 \dots a_k \quad 0 \leq a_i \leq g - 1 \quad i = 1, \dots, k$$

On désignera par G_k l'ensemble des nombres de ce type et on parlera de suite de nombres $\langle x_n \rangle$ équirépartie dans G_k .

Définition 1' - Nous dirons qu'une suite de nombres $\langle x_n \rangle$ est équirépartie dans G_k (représente une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$) si, quel que soit le nombre a de G_k , on a :

$$\frac{N'(N ; x_i = a)}{N} \longrightarrow \frac{1}{g^k} \quad \text{quand} \quad N \longrightarrow \infty$$

Nous allons maintenant définir la notion d'indépendance entre de telles suites équiréparties dans G_k . Cette notion a une importance toute particulière dans les problèmes suivants :

- on veut représenter r réalisations indépendantes d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$ (ou encore un vecteur aléatoire de \mathbf{R}^r , à composantes indépendantes, uniformément réparties dans l'hypercube :

$$C = \{ \xi = \{x_i\} \in \mathbf{R}^r ; 0 \leq x_i < 1 \quad \forall i = 1, \dots, r \} \text{ de } \mathbf{R}^r$$

- soit $f(\omega, t)$ la fonction aléatoire telle que :

. $\forall t \in \mathbf{R}$ $f(\omega, t)$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$.

. $\forall t$ et $t' (t \neq t') \in \mathbf{R}$ $f(\omega, t)$ et $f(\omega, t')$ sont indépendantes. Soit $\{t_j\}$ une suite donnée croissante d'instants.

On veut représenter la suite des observations aux instants t_j des réalisations de $f(\omega, t)$.

Une telle représentation sera réalisée par la suite de suites $\langle x_n^j \rangle$ où $\langle x_n^j \rangle$ est équirépartie dans G_k et les suites $\langle x_n^j \rangle$ indépendantes dans G_k . On aura donc $x_n^j = f(\omega_n, t_j)$.

Définition 2 - Nous dirons que les r suites $\langle x_n^j \rangle$ $j = 1, 2, \dots, r$ équiréparties dans G_k , sont indépendantes dans G_k (représentent r réalisations indépendantes d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$), si, quels que soient les r nombres k_j de G_k , on a :

$$\frac{N'(N ; x_1^1 = k_1, \dots, x_1^r = k_r)}{N} \longrightarrow \frac{1}{g^{kr}}$$

quand $N \longrightarrow \infty$.

Nous définissons enfin l'indépendance p à p des termes d'une suite équirépartie dans G_k . Nous pourrions alors définir une représentation d'une suite de tirages indépendants d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$ comme étant une suite de G_k dont les termes sont indépendants p à p , quel que soit p fixé.

Définition 3 - Etant donnée la suite $\langle x_n \rangle$ de G_k , nous dirons que ses termes sont indépendants p à p , si, quel que soit $j < p$ et quels que soient les j nombres k_j de G_k , on a :

$$\frac{N'(N ; x_1 = k_1, \dots, x_{1+j-1} = k_j)}{N} \longrightarrow \frac{1}{g^{kj}}$$

quand $N \longrightarrow \infty$.

Les définitions étant données, nous allons dans les chapitres suivants étudier la construction de telles suites, à partir des théorèmes de H. WEYL et de la définition des nombres normaux.

SUITES ÉQUIREPARTIES ET THÉORÈMES DE H. WEYL

I - DEFINITIONS

a) Suite infinie de points

Soit $P_1, P_2, \dots, P_1, \dots$ une suite de points appartenant à l'hypercube fondamental C de l'espace de dimension r (toutes les coordonnées de chacun des P_i sont comprises entre 0 et 1).

Soit D un domaine quarrable, intérieur à C , de volume \mathcal{V} .

Définition 4 - On dira que la suite de points $\langle P_i \rangle$ est équirépartie dans C si, quel que soit le domaine $D \subset C$, on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N'(N ; P_i \in D)}{N} = \mathcal{V}$$

b) Suite finie de points

Considérons un ensemble fini de points $P_n(x_{n_1}, \dots, x_{n_r})$ $1 \leq n \leq N$ appartenant à l'hypercube C .

Nous pouvons nous poser le problème de caractériser leur répartition dans l'hypercube C . Pour cela nous allons définir la discrédance d'une suite finie de points.

Soit $N'(\alpha, \beta)$ [$0 \leq \alpha_j < \beta_j < 1$, $1 < j \leq r$, α_j et β_j coordonnées respectives des points α et β dans R^r] le nombre de points P_q ($q \leq N$) intérieurs au parallélépipède $\mathcal{Q}(\alpha_j \leq x_{q_j} < \beta_j)$ de volume $\prod_{j=1}^r (\beta_j - \alpha_j)$.

Définition 5 - On appelle **discrédance** de la suite $\langle P_n \rangle$, la quantité :

$$D_N = \sup_{(\alpha, \beta)} \left| \frac{N'(\alpha, \beta)}{N} - \prod_j (\beta_j - \alpha_j) \right|$$

On remarque tout d'abord que, quel que soit N : $0 \leq D_N \leq 1$.

D'autre part, on peut montrer que si, lorsque N tend vers l'infini, D_N tend vers zéro, la suite $\langle P_n \rangle$ est équirépartie dans C et les deux définitions de l'équirépartition sont équivalentes [cf. 6 et 18].

La notion de discrédance que nous venons de préciser ci-dessus semble présenter un intérêt particulier du point de vue numérique. En effet elle permet de caractériser la répartition d'une suite finie et de choisir parmi les suites dont on dispose, celle dont la discrédance est la plus faible pour un N donné. Malheureusement le volume des calculs, tant au point de vue termes à mémoriser que temps de calcul, fait que ce calcul ne peut être utilement mis en œuvre sur ordinateur.

La notion de discrédance garde cependant toute son importance, car on a des résultats précis sur le comportement asymptotique de la discrédance de certaines suites équiréparties que l'on exposera dans un prochain paragraphe.

II - CONSTRUCTION DE SUITES EQUIREPARTIES DANS G_k

Supposons que l'on dispose d'une suite $\langle x_n \rangle$ équirépartie sur $[0,1[$. Avant d'étudier la construction de telles suites, nous allons voir comment, à partir de ces suites, on peut définir une suite $\langle \hat{x}_n \rangle$ équirépartie dans G_k et un ensemble de r suites $\langle \hat{x}_n^j \rangle$ équiréparties et indépendantes dans G_k .

a) Suites $\langle \hat{x}_n \rangle$ équiréparties dans G_k

La construction d'une telle suite $\langle \hat{x}_n \rangle$ à partir d'une suite $\langle x_n \rangle$ équirépartie sur $[0,1[$ résulte du lemme suivant.

Lemme 1 - Si $\langle x_n \rangle$ est une suite équirépartie sur $[0,1[$, la suite $\langle \hat{x}_n \rangle$ obtenue en remplaçant chaque terme x_i de la suite $\langle x_n \rangle$ par son approximation rationnelle d'ordre k est équirépartie dans G_k .

En effet puisque $\langle x_n \rangle$ est équirépartie sur $[0,1[$ on a pour tout a de G_k :

$$\frac{N'(N ; a \leq x_i < a + g^{-k})}{N} \rightarrow \frac{1}{g^k} \quad \text{quand} \quad N \rightarrow \infty$$

Or, on a :

$$\frac{N'(N ; a \leq x_i < a + g^{-k})}{N} = \frac{N'(N ; \hat{x}_i = a)}{N}$$

b) Suites $\langle \hat{x}_n^j \rangle$ équiréparties et indépendantes dans G_k

Soit $\langle x_n \rangle$ une suite équirépartie sur $[0,1[$, nous allons voir que l'on peut construire, à partir de cette suite, d'autres suites équiréparties sur $[0,1[$. Le théorème que nous allons démontrer à ce sujet, nous permettra de construire alors, à partir de la suite $\langle x_n \rangle$ des suites équiréparties et indépendantes dans G_k .

Dans tout ce qui va suivre, a étant un nombre réel, on pose :

$$\underline{a} = a - \text{partie entière } [a]$$

Théorème 2 - Etant donnée une suite $\langle x_n \rangle$ équirépartie sur $[0,1[$, la suite $\langle \underline{L} x_n \rangle$ est équirépartie sur $[0,1[$, quel que soit l'entier $L \neq 0$.

Nous allons donner une démonstration élémentaire de ce théorème n'utilisant que la définition 4 ; une démonstration plus rapide peut être faite à l'aide des théorèmes de H. WEYL que nous énonçons plus loin.

La suite $\langle x_n \rangle$ étant équirépartie sur $[0,1[$, on a :

$$\frac{N' (N ; \alpha \leq x_1 < \beta)}{N} \longrightarrow \beta - \alpha \quad \text{quand } N \longrightarrow \infty \quad (1)$$

quels que soient α et β $0 \leq \alpha < \beta < 1$.

Considérons alors la suite $\langle L x_n \rangle$ où L est un entier différent de zéro ($\forall n L x_n \in [0, L[$). Soit $[\alpha_1, \beta_1[$ un intervalle quelconque de $[0, L[$, on a :

$$\frac{N' [N ; \alpha_1 \leq L x_1 < \beta_1]}{N} \longrightarrow \frac{\beta_1 - \alpha_1}{L} \quad \text{quand } N \longrightarrow \infty \quad (2)$$

En effet, quel que soit le point x_1 de l'intervalle $\left[\frac{\alpha_1}{L}, \frac{\beta_1}{L} \right[\subset [0,1[$, le point $L x_1$ appartient à l'intervalle $[\alpha_1, \beta_1[\subset [0, L[$ et réciproquement. On a donc :

$$\frac{N' (N ; \alpha_1 \leq L x_1 < \beta_1)}{N} = \frac{N' \left(N ; \frac{\alpha_1}{L} \leq x_1 < \frac{\beta_1}{L} \right)}{N}$$

Utilisant la relation (1) appliquée à l'intervalle $\left[\alpha = \frac{\alpha_1}{L}, \beta = \frac{\beta_1}{L} \right[$ on obtient la relation (2).

Soit maintenant $[a, b[$ un intervalle quelconque de $[0,1[$, on a, puisque L est un entier :

$$\frac{N' (N ; a \leq \underline{L} x_1 < b)}{N} = \sum_{j=0}^{L-1} \frac{N' (N ; a+j \leq L x_1 < b+j)}{N}$$

Or, on a d'après la relation (2) :

$$\frac{N' (N ; a+j \leq L x_1 < b+j)}{N} \longrightarrow \frac{b-a}{L} \quad \text{quand } N \longrightarrow \infty$$

pour tout i et tout intervalle $[a, b[\subset [0, 1[$.

Il vient donc :

$$\frac{N' (N ; a \leq \underline{L} x_1 < b)}{N} \longrightarrow b - a \quad \text{quand } N \longrightarrow \infty$$

quel que soit l'intervalle $[a, b[\subset [0,1[$, ce qui achève la démonstration.

Nous allons voir maintenant comment ce théorème, compte tenu des résultats établis au paragraphe a) précédent, nous permet de construire r suites $\langle \hat{x}_n^j \rangle$ équiréparties et indépendantes dans G_k à partir d'une suite $\langle x_n \rangle$ équirépartie sur $[0, 1[$.

Soit :

$$\hat{x}_n = 0, \quad \alpha_n^1 \alpha_n^2 \dots \alpha_n^{kr} \quad 0 \leq \alpha_n^i \leq g-1 \quad i = 1, \dots, kr \quad (4)$$

l'approximation rationnelle d'ordre kr du n ième terme de la suite $\langle x_n \rangle$. La suite $\langle \hat{x}_n \rangle$ est équirépartie dans G_{kr} (lemme 1).

On groupe les chiffres successifs de \hat{x}_n , dans l'ordre où ils apparaissent après la virgule dans le développement (4) de \hat{x}_n , par paquets de k chiffres et on pose :

$$\hat{x}_n^j = 0, \quad \alpha_n^{(j-1)k+1} \alpha_n^{(j-1)k+2} \dots \alpha_n^{jk} \quad j = 1, \dots, r \quad (5)$$

Lemme 3 - Les r suites $\langle \hat{x}_n^j \rangle$ définies par la formule (5) ci-dessus, sont équiréparties et indépendantes dans G_k .

La suite $\langle x_n \rangle$ étant équirépartie sur $[0,1[$ la suite $\langle y_n = \underline{x_n} g^{k(j-1)} \rangle$ est équirépartie sur $[0,1[$ (théorème 2) et la suite $\langle \hat{x}_n^j \rangle$ obtenue en prenant les approximations rationnelles d'ordre k des termes de la suite $\langle y_n \rangle$, est équirépartie dans G_k (Lemme 1).

L'indépendance dans G_k des suites $\langle \hat{x}_n^j \rangle$ résulte de l'équirépartition de la suite $\langle \hat{x}_n \rangle$ dans G_{kr} .

En effet, quels que soient les r nombres k_i de G_k , dire que $\hat{x}_n^i = k_i$ ($i = 1, \dots, r$) c'est dire que :

$$\hat{x}_n = \sum_{i=1}^r k_i g^{(i-1)k} = a \quad \text{et} \quad a \in G_{kr}$$

On a donc :

$$\frac{N'(N; \hat{x}_n^i = k_i \quad i = 1, \dots, r)}{N} = \frac{N'(N; \hat{x}_n = a)}{N}$$

D'où :

$$\frac{N'(N; \hat{x}_n^i = k_i \quad i = 1, \dots, r)}{N} \longrightarrow \frac{1}{g^{kr}} \quad \text{quand} \quad N \longrightarrow \infty$$

Les r suites $\langle \hat{x}_n^j \rangle$, définies par (5), sont donc équiréparties et indépendantes dans G_k (définition 3).

III - THEOREMES SUR LES SUITES EQUIREPARTIES SUR $[0,1[$

Nous allons énoncer, sans démonstration, deux théorèmes dus à H. WEYL et qui jouent un rôle très important dans l'étude des suites équiréparties sur $[0,1[$ (cf. 4 et 23).

Théorème 4 - Pour que la suite de points $\langle P_n \rangle$ soit équirépartie dans l'hypercube C d'un espace de dimension finie, il faut et il suffit que, pour toute fonction $f(P)$, intégrable au sens de Riemann dans C , on ait :

$$\int_C f(P) d\omega = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f(P_n)$$

où $d\omega$ est l'élément de volume de l'espace.

Théorème 5 - Pour que la suite de points $\langle P_n \rangle$ soit équirépartie dans l'hypercube C , il faut et il suffit que, pour tout vecteur L , à coordonnées entières non toutes nulles, on ait :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2i\pi \langle L, P_n \rangle} = 0$$

On désigne par $\langle L, P_n \rangle$ le produit scalaire du vecteur L par le vecteur $\overrightarrow{OP_n}$.

Ces deux théorèmes énoncent des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite de points de l'hypercube C soit équirépartie dans C. Ils sont particulièrement utiles (le second surtout, exemple théorème 1) lorsque l'on veut démontrer l'équirépartition d'une suite dans C.

Remarquons que le théorème 4, donne l'équivalent arithmétique du théorème statistique sur lequel se base le calcul d'une intégrale multiple par la méthode de Monte-Carlo et qui utilise la loi forte des grands nombres.

IV - EXEMPLES DE SUITES EQUIREPARTIES SUR [0,1[

Il nous faut maintenant définir un procédé de construction de suites équiréparties sur [0,1[. On peut démontrer, un résultat métrique particulièrement intéressant puisqu'il nous assure l'existence de suites équiréparties sur [0,1[:

Si on considère l'ensemble de toutes les suites arithmétiques modulo 1, comme un cube unité à une infinité de dimensions, alors presque toutes les suites sont équiréparties sur [0,1[par rapport à la mesure produit définie sur le cube.

Ce résultat ne nous permet cependant pas de définir un procédé de construction de suite équirépartie sur [0,1[.

Nous allons voir deux résultats dus respectivement à H. WEYL et à KOKSMA qui nous définissent explicitement de tels procédés de construction.

A - Polynômes de H. WEYL [cf. 4]

a) **Théorème 6** - Si $\varphi(t) = A_0 t^m + A_1 t^{m-1} \dots + A_n$ est un polynôme de degré $m \geq 1$, dont au moins un coefficient, autre que A_n , est irrationnel, la suite $\langle \varphi(n) \rangle$ est équirépartie sur [0,1[.

Ce théorème nous fournit une classe de méthodes arithmétiques relativement simples pour engendrer une suite équirépartie sur [0,1[.

L'étude de ces suites a été réalisée par de nombreux auteurs et des résultats très intéressants ont été établis sur leur discrépanance et, l'erreur que l'on fait en les utilisant dans le calcul d'une intégrale par la méthode de Monte-Carlo.

b) Résultats sur la discrépanance de ces suites [cf. 2]

L'étude de la discrépanance de ces suites montre que la discrépanance est la plus faible pour les suites du premier degré du type $x_n = \underline{An}$ et pour les nombres A ayant une mauvaise approximation rationnelle. Or A étant un irrationnel compris entre 0 et 1, on peut le représenter d'une façon et d'une seule sous forme de fraction continue :

$$A = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots$$

les nombres a_1, a_2, \dots étant des entiers ≥ 1 appelés "quotients incomplets". L'approximation rationnelle d'un nombre A étant d'autant moins bonne que les quotients incomplets de son développement en fraction continue sont plus petits, on sera conduit à utiliser pour A l'inverse du nombre d'or. :

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Si l'on désigne par B la classe des nombres A dont les quotients incomplets sont bornés, on a les résultats suivants :

- suites du premier degré : \underline{An}

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{N D_N}{\text{Log } N} \right| < K$$

où K est un nombre réel positif, pour $A \in B$.

$$\sup_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{ND_N}{\text{Log } N} \right| > 0 \quad \text{pour } A \text{ quelconque}$$

- Suites de degré supérieur : $\underline{An^m}$ $m > 1$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{D_N}{N^{\frac{1}{2^m-1} + \epsilon}} \right| K'$$

K' est un réel positif, pour $A \in B$.

Certains résultats généraux sur la discrédance montrent que, si on ne se fixe pas la longueur de la suite, on ne pourra pas avoir de résultats "bien meilleurs" que $x_n = \underline{An}$, A appartenant à B ; En effet, un résultat de Madame VAN AARDENNE montre que pour toutes les suites arithmétiques, on a :

$$n D_n < C \sqrt{\text{Log } N}$$

pour au moins un $n < N$ [cf. 18].

B - Théorème de KOKSMA

L'utilisation de suites $x_n = \underline{A^n}$ semble prometteuse, mais pour l'instant on a peu de résultats sur ces suites [cf. 14, 17] KOKSMA a démontré le théorème suivant :

Théorème 7 - Pour presque tout A , $\langle \underline{A^n} \rangle$ est équirépartie sur $[0,1[$.

Ce résultat est malheureusement inutilisable car on ne connaît aucun exemple de nombre A pour lequel la suite $\langle \underline{A^n} \rangle$ soit équirépartie, on connaît seulement quelques exemples contraires.

V - CONCLUSIONS SUR LA MISE EN ŒUVRE DE CES PROCÉDES

Le théorème 6 énoncé plus haut nous définit toute une classe de procédés de construction de suites équiréparties sur $[0,1[$. Utilisant ensuite les résultats du paragraphe II, nous pourrions construire des suites équiréparties et indépendantes dans G_k .

Remarquons cependant qu'intervient, dans ces méthodes, au moins un irrationnel A dont le traitement sur ordinateur exige que l'on prenne une approximation rationnelle \hat{A} . Nous générerons alors une suite de nombres qui sera nécessairement périodique au-delà d'un certain rang. Le processus de génération perdrait alors tout son sens si le nombre de termes de la suite pris en considération était supérieur à la période.

On évitera cet ennui en choisissant judicieusement l'approximation rationnelle \hat{A} dans la base g en fonction du nombre de chiffres k des termes de la suite construite, du nombre r de réalisations indépendantes désirées, et d'un majorant N du nombre de termes utilisés dans la suite.

Par exemple, si on utilise le monôme $\varphi(t) = A t^m$, on prendra pour \hat{A} , l'approximation rationnelle d'ordre u de A , avec :

$$u = kr + q$$

où q est le plus petit entier tel que :

$$N^m \leq g^q$$

Ce nombre \hat{A} sera généralement de longueur supérieure à la longueur du mot traité par l'ordinateur. On trouvera dans l'annexe les divers moyens de surmonter cet obstacle.

Les suites équiréparties sur $[0,1[$ et les résultats de H. WEYL nous ont donné des procédés simples de construction de suites équiréparties et indépendantes dans G_k . Remarquons qu'il n'a pas été question jusque-là de suites équiréparties dont les termes sont indépendants p à p dans G_k et de "tables de nombres au hasard" équirépartis dans G_k .

Nous allons étudier dans le prochain chapitre, les nombres normaux dont la théorie, voisine

de celle des suites équiréparties sur $[0,1[$, nous donnera des résultats beaucoup plus puissants permettant la construction des suites et tables précitées.

NOMBRES NORMAUX

I - DEFINITIONS ET THEOREMES

On sait que tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$ admet un développement dans le système de base g , qui est de la forme :

$$x = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha_h(x)}{g^h} \quad (1)$$

où $0 \leq \alpha_h(x) \leq g-1 \quad \forall h \geq 1$.

Pour assurer l'unicité du développement, nous choisissons celui qui, lorsque l'éventualité se présente, a un nombre fini de termes non nuls.

Soit donc x un nombre réel de l'intervalle $[0,1[$ et (1) son développement dans la base g ; on appellera "chenille de rang p " construite à partir de x , la suite d'entiers, dans la base g , $u_n^p(x)$ définie par :

$$u_n^p(x) = \alpha_n \dots \alpha_{n+p-1}$$

Soit $D_t = \delta_1 \delta_2 \dots \delta_t$ un entier de t chiffres dans le système de base g ($0 \leq \delta_i \leq g-1 \quad \forall i$).

Définition 6 - On dira qu'un nombre x est normal dans le système de base g , si l'on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^t(N ; u_i^t(x) = D_t)}{N} = \frac{1}{g^t}$$

Pour tout entier D_t de t chiffres et tout $t \geq 1$.

Remarquons tout d'abord que si un nombre est normal dans le système de base g , il est aussi normal dans le système de base g^u , quel que soit l'entier positif u . Le problème se pose de savoir si, un nombre étant normal dans le système de base g , il est normal dans le système de base g' . Un théorème dû à WOLFGANG SCHMIDT [cf. 20] répond à cette question.

Théorème 8 - Si g et g' sont tels qu'il existe deux entiers m et n tels que $g^n = g'^m$, alors, tout nombre normal dans le système de base g , est normal dans le système de base g' .

Ce théorème nous sera particulièrement utile lorsque nous construirons sur calculateur traitant des nombres écrits dans la base g' , des nombres normaux dans la base g .

II - CONSTRUCTION DE SUITES EQUIREPARTIES ET INDEPENDANTES DANS G_k

A - Suites équiréparties et indépendantes dans G_k

Considérant les définitions données au chapitre I sur les suites équiréparties dans G_k et l'indépendance de telles suites, on constate que la structure du nombre normal définie plus haut semble particulièrement s'adapter à la construction de telles suites [cf. 13 et 19].

En effet, nous allons énoncer un théorème qui met en évidence le rapport qui existe entre les notions du nombre normal et d'équirépartition des suites sur $[0,1[$ [cf. 17].

Théorème 9 - Soit α un nombre réel.

Une condition nécessaire et suffisante pour que α soit normal dans le système de base g , est que la suite $\langle \alpha g^n \rangle$ soit équirépartie sur $[0,1[$.

Soit α un nombre normal dans la base g , de développement dans cette base :

$$\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j \dots \quad 0 \leq \alpha_j \leq g-1 \quad \forall j \quad (1)$$

les résultats du paragraphe II du chapitre précédent nous permettent de construire r suites équiréparties et indépendantes dans G_k (Lemme 3) :

$$\hat{x}_1^j = 0, \alpha_{1+(j-1)k} \alpha_{1+(j-1)k+1} \dots \alpha_{1+jk-1}$$

B - Suites équiréparties et dont les termes sont, quel que soit p , indépendants p à p dans G_k

La définition d'un nombre normal est en fait beaucoup plus riche, car plus forte que celles des suites équiréparties sur $[0,1[$. Nous allons voir en effet qu'à partir du développement (1) d'un nombre normal α dans la base g , on peut construire une suite équirépartie dont les termes sont, quel que soit p , indépendants p à p dans G_k (cette suite représentera donc bien une suite de tirages indépendants).

Lemme 10 - La suite $\langle \hat{x}_p \rangle$ constituée à partir des chiffres successifs du développement dans la base g d'un nombre α normal dans cette même base, suivant la formule :

$$\hat{x}_1 = 0, \alpha_{k(i-1)+1} \alpha_{k(i-1)+2} \dots \alpha_{ki}$$

a ses termes indépendants p à p , quel que soit l'entier p fixé.

En effet, α étant normal dans la base g , il est normal dans la base $g' = g^k$ (théorème 8) ; soit α' son développement dans cette base g' :

$$\alpha' = 0, (\alpha_1 \dots \alpha_k) \dots (\alpha_{(i-1)k+1} \dots \alpha_{ik}) \dots$$

$$\alpha' = 0, (\underline{x}_1) (\underline{x}_2) \dots (\underline{x}_i) \dots$$

Quels que soient l'entier p donné et les p nombres k_i de G_k , soit l'entier dans le système de base g' : $D_p = k_1 \dots k_p$.

On a :

$$\frac{N'(N ; u_1^p(\alpha') = D_p)}{N} = \frac{N'(N ; \underline{x}_1 = k_1, \dots, \underline{x}_{1+p-1} = k_p)}{N}$$

Or α' étant normal dans la base g' :

$$\frac{N'(N ; u_1^p(\alpha') = D_p)}{N} \longrightarrow \frac{1}{g'^p} = \frac{1}{g^{kp}} \quad \text{quand } N \longrightarrow \infty$$

On montre de façon identique que les r suites $\langle x_j^i \rangle$:

$$\langle x_j^i \rangle = 0, \alpha_{rk(i-1)+(j-1)k+1} \dots \alpha_{rk(i-1)+jk}$$

sont équiréparties, indépendantes et de termes indépendants p à p dans G_k .

III - CONSTRUCTION D'UN NOMBRE NORMAL

Il nous faut maintenant disposer d'un procédé de construction de nombres normaux. Un premier résultat, important du point de vue théorique puisqu'il nous assure de l'existence de tels nombres, est du à E. BOREL :

"Au sens de la mesure de LEBESGUE, presque tous les nombres sont normaux".

Ce résultat, analogue à celui énoncé pour les suites équiréparties, ne nous permet pas de définir explicitement la construction de nombres normaux et pendant longtemps on n'a connu que des exemples de nombres non normaux (rationnels par exemple) [cf. 17].

C'est CHAMPERNOWNE qui, le premier a donné un procédé de construction : [cf. 5].

Théorème 11 - Soit s_r la suite de tous les nombres de r chiffres écrits dans le système de base g , ces nombres étant pris dans leur ordre naturel :

$$\begin{array}{l} s_1 = 0' 1' 2' \dots' g-1 \\ \vdots \\ s_r = 0 \dots 0' 0 \dots 1' \dots' 0 \dots g-1' 0 \dots 10' \dots \\ \vdots \end{array}$$

Alors le nombre :

$$s = 0, s_1 s_2 \dots s_r \dots$$

obtenu en accolant les suites s_r dans l'ordre croissant de leur indice, est normal dans la base g .

Un corollaire intéressant de ce théorème est que le nombre :

$$0,1234567891011 \dots$$

est normal dans la base 10.

Ce résultat est à rapprocher de celui obtenu plus tard par BESICOVITCH : le nombre obtenu en accolant les carrés des entiers successifs : $0,149162536\dots$ est normal dans la base 10 [cf. 3].

Ces résultats ne sont en fait que des conséquences évidentes du théorème démontré ultérieurement par DAVENPORT et ERDÖS [cf. 7].

Théorème 12 - Soit $f(x)$ un polynome en x dont les valeurs pour $x = 1 ; 2 ; 3 ; \dots$ sont positives entières et écrites dans le système décimal.

Le nombre obtenu en accolant les valeurs de ce polynome pour les valeurs entières de l'argument et dans l'ordre croissant de cet argument :

$$0, f(1) f(2) \dots f(n) \dots$$

est normal dans la base 10.

Ce théorème nous fournit toute une classe de procédés arithmétiques pour construire des nombres normaux et ce sont ces procédés que nous mettrons en œuvre.

VARIABLES ALÉATOIRES DE LOI DONNÉE

Nous avons vu dans les pages précédentes diverses méthodes pour construire des suites numériques représentant une ou plusieurs réalisations indépendantes d'une variable aléatoire équirépartie sur $[0,1[$.

Nous nous proposons maintenant, à partir d'une telle représentation et conformément à la remarque faite au premier chapitre, de construire une suite numérique représentant une réalisation d'une variable aléatoire de loi donnée F .

Nous allons dans un premier paragraphe indiquer les diverses méthodes à employer pour résoudre notre problème. Nous expliciterons ensuite ces méthodes dans le cas, particulièrement important dans la pratique, de variables aléatoires gaussiennes.

I - CONSTRUCTION D'UNE VARIABLE ALEATOIRE DE LOI DONNEE [cf. 16]

Nous désignerons par $\langle x_n \rangle$ la suite équirépartie dans G_k supposée construite et par $\langle \xi_1 \rangle$ la suite à construire.

A - Méthode directe

On peut tout d'abord penser à inverser la fonction de répartition et à résoudre l'équation en ξ_1 :

$$F(\xi_1) = x_1$$

Cette méthode est très simple mais elle ne doit être utilisée que si l'on peut résoudre explicitement l'équation ci-dessus, sans calcul trop long. Ce sera notamment le cas des lois du type exponentielle ou puissance.

Supposons que F présente des sauts et des palliers, soit alors s_j l'abscisse de ces sauts et (p_k, p'_k) les abscisses respectives du début et de fin du palier.

On pose :

$$a_j = F(s_j) \quad \text{et} \quad a'_j = \lim_{\xi \rightarrow s_j^+} F(\xi)$$

$$\forall \xi \in [p_k, p'_k] \quad F(\xi) = b_k$$

Il vient alors :

- . si $\exists k$ tel que $x_1 = b_k$ alors $\xi_1 = p_k$
- . si $\exists j$ tel que $a_j < x_1 < a'_j$ alors $\xi_1 = s_j$
- . sinon $\xi_1 = F^{-1}(x_1)$.

B - Méthode de composition

Supposons que F admette une fonction densité $f(x)$ et que celle-ci puisse se mettre sous la forme :

$$f(x) = \int g_y(x) dH(y)$$

où $g_y(x)$ désigne une famille de fonctions densité, y étant un paramètre et $H(y)$ une fonction de répartition.

On procèdera alors en deux étapes :

$\langle x_n \rangle$ et $\langle x'_n \rangle$ étant deux suites équiréparties sur $[0, 1[$ et indépendantes

- on forme $Y_1 = H^{-1}(x_1)$ de fonction de répartition H (cf. A)
- on forme ξ_1 tel que $\int_{-\infty}^{\xi_1} g_{Y_1}(t) dt = x'_1$ (cf. A)

Exemple :

$$f(x) = n \int_1^{\infty} y^{-n} e^{-xy} dy \quad 0 < x < \infty$$

On écrit :

$$f(x) = \int_1^{\infty} -y e^{-xy} \left(-\frac{n}{y^{n+1}} dy \right)$$

On a donc :

$$H(y) = \frac{1}{y^n} \quad \text{et} \quad g_y(x) = -y e^{-yx}$$

$$1 < y < \infty \quad \quad \quad 0 < x < \infty$$

Il vient :

$$Y_i = (x_i)^{-1/n} \quad \text{et} \quad \xi_i = \frac{-\text{Log}(x_i)}{Y_i}$$

C - Méthode de rejection

L'idée de la méthode de rejection est la suivante :

x_i étant le i ème terme d'une suite équirépartie, on détermine [cf. A] y_i de loi $h : y_i = h^{-1}(x_i)$. On soumet la valeur y_i ainsi calculée à un test ; suivant le résultat de ce test, on pose $\xi_j = y_i$ si non on recommence le processus avec x_{i+1} .

Nous n'explicitons pas davantage cette méthode car nous en traiterons une application complète dans le paragraphe suivant.

II - VECTEUR ALEATOIRE GAUSSIEN

Nous allons tout d'abord construire un vecteur aléatoire gaussien de \mathbf{R}^r , centré et normé, de composantes indépendantes ; nous verrons ensuite comment l'on passe d'un tel vecteur à un vecteur de matrice de covariance donnée.

A - Vecteur aléatoire gaussien centré, normé ($\langle \xi_n \rangle$ et $\xi_n = \{\xi_1^n, \dots, \xi_r^n\}$)

1/ Méthode de rejection

Soit $\langle V_n \rangle = \langle x_j^n \rangle$ un vecteur aléatoire de \mathbf{R}^{r+1} équiréparti et à composantes indépendantes $V_n = \{x_1^n, x_2^n, \dots, x_{r+1}^n\}$.

Construisons alors le vecteur aléatoire $\langle Y_j \rangle$ de \mathbf{R}^r à composantes indépendantes de fonction densité :

$$h(s_1, s_2, \dots, s_r) = \left(\frac{1}{2}\right)^r e^{-|s_1| - |s_2| - \dots - |s_r|}$$

On utilise pour ce faire la méthode directe et on obtient :

$$\begin{cases} Y_1^j = +\text{Log}[2(1-x_1^j)] & \text{si } x_1^j \geq \frac{1}{2} \\ Y_1^j = -\text{Log}[2x_1^j] & \text{si } x_1^j \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad Y_j = \{Y_1^j, \dots, Y_r^j\}$$

Soit g la fonction de $r+1$ variables définie par :

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+1}) = e^{-\frac{1}{2}[(1-|\alpha_1|)^2 + \dots + (1-|\alpha_r|)^2]} - \alpha_{r+1}$$

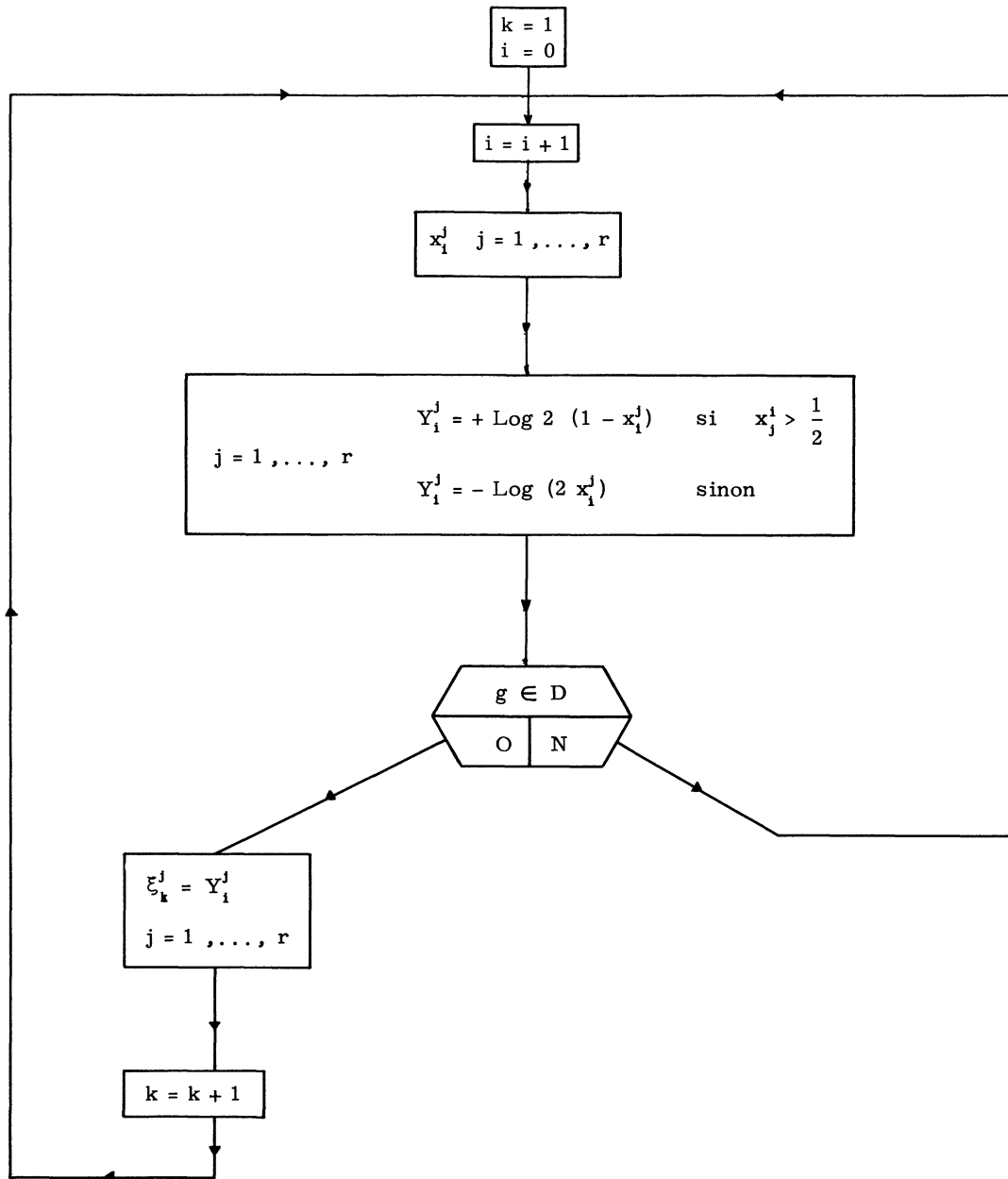
et soit D l'intervalle $[0,1]$.

Si $g(Y_1^j, \dots, Y_r^j, x_{r+1}^j)$ appartient à l'intervalle D , on pose :

$$\xi_k = Y_j \quad \text{soit} \quad \xi_1^k = Y_1^j \quad i = 1, \dots, r$$

Sinon on recommence le processus avec Y_{j+1} .

On a donc l'organigramme suivant :



Remarque : la condition $g \in D$ s'écrit encore :

$$-\text{Log } x_i^{r+1} \geq \frac{1}{2} [(1 - |Y_i^1|)^2 + \dots + (1 - |Y_i^r|)^2]$$

Cherchons la fonction densité $f(s_1, \dots, s_r)$ du vecteur $\langle \xi_n \rangle$ ainsi construit.

On a successivement :

$$\begin{aligned}
 P\{s_1 \leq \xi_1^1 \leq s_1 + ds_1, \dots, s_r \leq \xi_1^r \leq s_r + ds_r\} &\simeq f(s_1, \dots, s_r) ds_1 \dots ds_r \\
 &= P\{s_1 \leq Y_1^1 \leq s_1 + ds_1, \dots, s_r \leq Y_1^r \leq s_r + ds_r, g \in D\} \\
 &= P\{g \in D\} \times P\{s_1 \leq Y_1^1 \leq s_1 + ds_1, \dots, s_r \leq Y_1^r \leq s_r + ds_r / g \in D\} \\
 &= P\{s_1 \leq Y_1^1 \leq s_1 + ds_1, \dots, s_r \leq Y_1^r \leq s_r + ds_r\} \times P\{g \in D / Y_1^j = s_j, j = 1 \dots r\}
 \end{aligned}$$

Donc :

$$f(s_1, \dots, s_r) = \frac{h(s_1, \dots, s_r) \times P\{g \in D / Y_1^j = s_j, j = 1, \dots, r\}}{P\{g \in D\}} \quad (2)$$

Or, on a les relations :

$$\begin{aligned}
 P\{g \in D / Y_1^j = s_j, j = 1, \dots, r\} &= e^{-\frac{1}{2}[(1-|s_1|)^2 + \dots + (1-|s_r|)^2]} \\
 P\{g \in D\} &= \iint \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^r e^{-\frac{1}{2}[(1+|u_1|^2) + \dots + (1+|u_r|^2)]} du_1 du_2 \dots du_r = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-\frac{1}{2}}\right)^r \sim 0,58^r
 \end{aligned}$$

La relation 2 s'écrit donc :

$$f(s_1, \dots, s_r) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^r e^{-|s_1| \dots - |s_r|} e^{-\frac{1}{2}[(1-|s_1|)^2 + \dots + (1-|s_r|)^2]}}{\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-\frac{1}{2}}\right)^r} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^r e^{-\frac{1}{2}(s_1^2 + \dots + s_r^2)}$$

Le vecteur aléatoire $\langle \xi_n \rangle$ que l'on a construit est donc Gaussien centré, normé, à composantes indépendantes.

2/ Cas particulier où l'espace est de dimension paire $r = 2q$

Le procédé de rejection que nous venons d'appliquer à un vecteur gaussien présente l'inconvénient de nécessiter pour calculer un terme de la suite représentant ce dernier vecteur, plusieurs termes de la suite représentant un vecteur équiréparti et indépendant (le nombre de termes $\langle x_i^j \rangle$ nécessaire au calcul d'un terme $\langle \xi_k^j \rangle$ varie dans le même sens que la fonction f).

Si l'espace est de dimension paire (R^{2q}) il existe un procédé plus rapide et moins coûteux, basé sur les remarques suivantes :

Soient U et V deux variables aléatoires gaussiennes $(0, \sigma)$ indépendantes, alors :

$$R = \sqrt{U^2 + V^2} \text{ suit la loi de Rayleigh : } p(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

et θ , défini par : $\sin \theta = \frac{U}{R}$ et $\cos \theta = \frac{V}{R}$, est équiréparti entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$

Donc si le vecteur $\langle X_n \rangle$ est équiréparti dans R^{2q} à composantes indépendantes, alors le vecteur $\langle \xi_n \rangle$:

$$\begin{cases} \xi_n^{2j} = \sqrt{-2 \text{Log } x_n^{2j}} \cos 2\pi x_n^{2j-1} \\ \xi_n^{2j-1} = \sqrt{-2 \text{Log } x_n^{2j}} \sin 2\pi x_n^{2j-1} \end{cases} \quad j = 1 \dots (q)$$

est gaussien centré, normé.

B - Vecteur aléatoire gaussien de matrice de covariance donnée Γ

a) Soit ξ un vecteur aléatoire gaussien, centré, normé de R^r , de densité $\varphi(u) = \prod_0^r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u_i^2}{2}}$ et de fonction caractéristique $E(e^{i\langle t_0, \xi \rangle}) = e^{-\langle t_0, t \rangle / 2}$.

Soit d'autre part Y un vecteur aléatoire gaussien centré de R^r et de matrice de covariance Γ (symétrique définie positive).

La matrice Γ étant donnée, on cherche Δ matrice diagonale positive et U matrice orthogonale directe [$U^0 = U^{-1}$ et $\text{Det}(U) = 1$, U^0 désignant la matrice transposée de U], telles que :

$$U^0 \Gamma U = \Delta \quad (1)$$

La recherche des matrices U et Δ se ramène à la recherche des vecteurs propres et valeurs propres de Γ , en effet la relation (1) s'écrit encore :

$$\Gamma U = U \Delta$$

On en déduit :

$$(\Gamma U)_i^j = U_i^r \times \Delta_j^j$$

Donc, quel que soit j fixé, la colonne U_i^j est un vecteur propre de Γ pour la valeur propre Δ_j^j , ce qui, si les valeurs propres de Γ sont distinctes, détermine U et Δ .

Ayant déterminé les matrices U et Δ , cherchons le changement de base qui nous permettra de passer du vecteur ξ au vecteur Y .

Soit $\Delta^{1/2}$ la matrice diagonale ayant pour éléments les racines carrées ≥ 0 des éléments de Δ .

Posons :

$$Y = U \Delta^{1/2} \xi \quad (2)$$

On a :

$$E(e^{is^0 Y}) = E(e^{is^0 U \Delta^{1/2} \xi})$$

si l'on pose :

$$t^0 = s^0 U \Delta^{1/2}$$

il vient :

$$\begin{aligned} E(e^{is^0 Y}) &= E(e^{it^0 \xi}) = e^{-\frac{t^0 t}{2}} = e^{-s^0 U \Delta^{1/2} U^0 s / 2} \\ &= e^{-s^0 \Gamma s / 2} \end{aligned}$$

La matrice de covariance du vecteur gaussien Y est donc Γ .

Le passage du vecteur ξ au vecteur Y se ramène donc à la détermination des vecteurs propres et valeurs propres de la matrice de covariance Γ .

b) A titre d'exemple, nous allons considérer les matrices Γ telles que :

$\Gamma_1^j = \gamma(j - i)$ où γ est une fonction paire et périodique de période r ; les vecteurs propres et valeurs propres peuvent être obtenus directement à partir des éléments de la matrice Γ et nous pourrions expliciter les calculs du paragraphe précédent. On va ainsi construire des suites périodiques de période r . Si r est le nombre d'éléments de la suite utilisée cela ne restreint pas beaucoup la généralité.

Nous avons alors une matrice "circulante" se présentant sous la forme :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{r-1} \\ \gamma_{r-1} & \gamma_0 & \dots & \gamma_{r-2} \\ \gamma_{r-2} & \gamma_{r-1} & \gamma_0 & \dots & \gamma_{r-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_{r-1} & \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

L'équation aux vecteurs propres s'écrit :

$$\Gamma Z = \lambda Z \quad \text{soit encore :}$$

$$\sum_{j=0}^{r-1} \gamma(j-i) Z_j = \lambda Z_i$$

si l'on pose $j - i = k$, il vient :

$$\sum_k \gamma(k) Z_{i+k} = \lambda Z_i \quad \text{où } i+k \text{ est pris modulo } r$$

Désignons par α une racine $r^{\text{ième}}$ de l'unité : $\alpha^r = 1$. On a alors la solution :

$$Z_i = \alpha^i \quad \text{et} \quad \lambda = \sum_{j=0}^{r-1} \gamma(j) \alpha^j$$

soit encore :

$$\text{si } \alpha = e^{\frac{2i\pi}{r}k} \quad \lambda_k = \sum_{j=0}^{r-1} \gamma(j) e^{\frac{2i\pi}{r}jk}$$

Supposons de plus la matrice Γ symétrique, il vient alors :

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{r-1} \gamma(j) \cos \frac{2\pi}{r} j k \quad k = 0, 1, \dots, r-1 \quad (1)$$

Cette formule peut se simplifier en remarquant que l'on peut grouper les termes figurant sous le signe somme puisque $\gamma(j) = \gamma(r-j)$.

On a donc :

Si $r = 2p + 1$

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \lambda_{r-k} = \gamma(0) + \sum_{j=1}^p \gamma(j) \left[\cos \frac{2\pi}{r} jk + \cos \frac{2\pi}{r} (r-k) j \right] \\ &= \gamma(0) + 2 \sum_{j=1}^p \gamma(j) \cos \frac{2\pi}{r} jk \end{aligned}$$

Si $r = 2p$

$$\lambda_k = \lambda_{r-k} = \gamma(0) + \gamma(p) (-1)^k + 2 \sum_{j=1}^{p-1} \gamma(j) \cos \frac{2\pi}{r} jk$$

pour $k = 0, 1, \dots, p$

$$r = 2p + 1, \quad \lambda_k = \lambda_{r-k} = \gamma(0) + 2 \sum_{j=1}^p \gamma(j) \cos \frac{2\pi}{r} jk$$

$$r = 2p, \quad \lambda_k = \lambda_{r-k} = \gamma(0) + (-1)^k \gamma(p) + 2 \sum_{j=1}^{p-1} \gamma(j) \cos \frac{2\pi}{r} jk$$

On a $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda_{\mathbf{r-k}}$ soit $Z_{\mathbf{k}} = \overline{Z_{\mathbf{r-k}}}$ on en tire les deux vecteurs propres réels de composantes respectives :

$$\cos \frac{2\pi}{r} jk \quad \text{et} \quad \sin \frac{2\pi}{r} jk$$

Or, on a : $\|\vec{Z}_0\|^2 = r$; si $r = 2p$ $\|\vec{Z}_p\|^2 = r$ et dans tous les cas :

$$\|Z_{\mathbf{k}}\|^2 = \sum_{j=0}^{r-1} \left(\cos \frac{2\pi}{r} jk \right)^2 = \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{r-1} \cos \frac{2\pi}{r} k(2j) = \frac{r}{2}$$

$$\|Z_{\mathbf{r-k}}\|^2 = \sum_{j=0}^{r-1} \left(\sin \frac{2\pi}{r} jk \right)^2 = \frac{r}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{r-1} \cos \frac{2\pi}{r} k(2j) = \frac{r}{2}$$

Les vecteurs propres normés de Γ auront donc pour composantes :

$$\left. \begin{array}{l} - V_0^j = \frac{1}{\sqrt{r}} \\ - r = 2p + 1 \\ r = 2p \quad V_p^j = \frac{(-1)^j}{\sqrt{r}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_k^j = \sqrt{\frac{2}{r}} \cos \frac{2\pi}{r} jk \quad k = 1, 2, \dots, p \\ V_k^j = \sqrt{\frac{2}{r}} \sin \frac{2\pi}{r} jk \quad k = 1, 2, \dots, p-1 \\ V_k^j = \sqrt{\frac{2}{r}} \sin \frac{2\pi}{r} jk \quad k = p+1, \dots, r-1 \end{array}$$

En associant ces résultats à ceux obtenus au paragraphe (a), on voit que l'on pourra passer directement d'un vecteur gaussien centré normé $\vec{\xi}_0$ (ξ_1) à un vecteur gaussien de matrice de covariance Γ circulante dont les composantes sont données par :

$$y_j = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} V_i^j \xi_i$$

Soit encore :

$$\left. \begin{array}{l} - \text{Si } r = 2p + 1 \quad j = 0, 1, \dots, r-1 \\ y_j = \frac{\xi_0}{\sqrt{\lambda_0 r}} + \sum_{i=1}^p \sqrt{\frac{2}{r \lambda_i}} \left(\xi_i \cos \frac{2\pi}{r} ji + \xi_{r-i} \sin \frac{2\pi}{r} ji \right) \\ - \text{Si } r = 2p \quad j = 0, 1, \dots, r-1 \\ y_j = \frac{\xi_0}{\sqrt{\lambda_0 r}} + \frac{\xi_p (-1)^j}{\sqrt{\lambda_p r}} + \sum_{i=1}^{p-1} \sqrt{\frac{2}{r \lambda_i}} \left(\xi_i \cos \frac{2\pi}{r} ji + \xi_{r-i} \sin \frac{2\pi}{r} ji \right) \end{array} \right.$$

c) La matrice Γ étant symétrique on peut écrire :

$$\Gamma = A^\circ A \quad (\text{décomposition de Choleski})$$

où A est une matrice triangulaire supérieure ($a_{ij} = 0$ $i < j$). Un calcul analogue à celui du paragraphe a) montre que le vecteur $Y = A^\circ \xi$ est gaussien sa matrice de covariance étant Γ .

PROCESSUS STATIONNAIRES

De nombreux phénomènes réels sont représentables à l'aide de processus aléatoires et il est donc intéressant de pouvoir simuler sur ordinateur de tels processus.

Pour des raisons d'ordre théorique et pratique à la fois, nous n'étudierons que des modèles aléatoires relativement simples. Nous supposerons en particulier la stationnarité du processus qui de plus dépendra d'un petit nombre de paramètres.

I - PROCESSUS PONCTUELS : PROCESSUS DE POISSON ET PROCESSUS DERIVES

On suppose qu'un événement aléatoire instantané peut se produire soit à chaque instant, soit à certains instants déterminés. Une réalisation d'un tel processus est décrite par une suite de points $\{P_1, \dots, P_n, \dots\}$ de l'axe des temps. On peut donc représenter ces processus, dits ponctuels, soit par une suite croissante d'instantanés $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, soit par la longueur des intervalles consécutifs $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ qui séparent les événements pris dans leur ordre chronologique.

Un tel processus est particulièrement commode à simuler, en effet il suffit de construire la suite des intervalles successifs $\{u_i\}$ et l'on a vu dans les chapitres précédents comment construire une telle suite à partir d'un nombre normal.

A - Dans le cas où la distribution des t_i est poissonnienne stationnaire de densité ρ_0 (constante) on sait que les intervalles de cette distribution sont des variables aléatoires indépendantes de densité de probabilité :

$$\rho_0 e^{-\rho_0 t}$$

Donc, $\langle x_i \rangle$ étant une suite équirépartie dans G_k obtenue à partir d'un nombre normal (ce qui assure l'indépendance des x_i , r à r , $\forall r$ fixé) on pourra simuler un tel processus par la suite u_i :

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i-1} + v_i = \sum_{j=0}^i v_j \\ v_i &= -\frac{1}{\rho_0} \text{Log} \frac{x_i}{\rho_0} \end{aligned}$$

Remarque : Partant d'un processus ponctuel de POISSON stationnaire de densité 1 défini par l'abscisse de ses points $\{u_i\}$ sur l'axe des temps, on pourra construire un processus ponctuel de POISSON de densité $g(t)$ [non stationnaire] par un "changement d'horloge". Les abscisses des points de ce dernier processus seront déterminées par :

$$y_i = G^{-1}(u_i) \quad \text{où} \quad G(s) = \int_0^s g(x) dx$$

B - Ayant construit une réalisation d'un processus ponctuel de POISSON $\{t_j\}$ on peut construire les divers processus dérivés, dont nous allons donner quelques exemples.

a) Basculeur poissonnien

$$X(t) = 1 \quad \text{si} \quad t \in [t_{2n}, t_{2n+1}]$$

$$X(t) = -1 \quad \text{si} \quad t \in [t_{2n+1}, t_{2n+2}]$$

On a alors :

$$C(\tau) = e^{-2\rho_0 |\tau|}$$

b) Réponse d'un filtre

Les instants t_j étant poissonniens de densité ρ_0 et R_T étant la réponse percussionnelle du filtre supposée dépendre d'un paramètre aléatoire T , la réponse de ce filtre lorsqu'il est attaqué à l'entrée par une suite d'impulsions intervenant aux instants t_j , est :

$$X(t) = \sum_{t_j} R_T(t - t_j)$$

α) si le paramètre aléatoire T a pour densité :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(T) = \frac{1}{T_0} e^{-\frac{T}{T_0}} \text{ si } T > 0 \\ = 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$

On a :

$$C(\tau) = \rho_0 T_0 e^{-\frac{|\tau|}{T_0}}$$

β) Si :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(T) = \frac{1}{T_0} \text{ si } 0 < T < T_0 \\ = 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$

alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} C(\tau) = \rho_0 \left\{ T_0 - |\tau| - \frac{1}{2 T_0} (T_0^2 - \tau^2) \right\} \text{ si } |\tau| < T_0 \\ = 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$

II - PROCESSUS STATIONNAIRE DE MARKOFF

Les processus stationnaires de MARKOFF rendent de grands services en recherche opérationnelle (file d'attente, maintenance,) et la simulation de tels processus sera un outil très utile.

Ces processus sont définis par la donnée d'une matrice de transition P stationnaire et de la loi initiale p (la stationnarité du processus impose $pP = P$ mais en général on impose seulement la stationnarité des transitions). Les états étant numérotés de 1 à n , l'évolution d'un processus stationnaire de MARKOFF sera donnée par la suite des états successifs $j_1, j_2, \dots, j_n, \dots$

Pour obtenir l'état initial j_1 , il suffit "d'inverser" la loi initiale (cf. page 16).

$$j_1 = j \quad \text{tel que} \quad \sum_1^{j-1} p_k < x_1 \leq \sum_1^j p_k$$

On choisit ensuite :

$$j_i \quad \text{tel que} \quad \sum_{k=1}^{j_{i-1}} P_{j_{i-1}}^k \leq x_i \leq \sum_{k=1}^{j_i} P_{j_{i-1}}^k$$

où $\{x_n\}$ est une suite équirépartie obtenue à partir d'un nombre normal.

III - PROCESSUS ALEATOIRE STATIONNAIRE DIT DE MARKOFF LAPLACE [cf. 8]

Considérons le processus gaussien du second ordre $X(t)$ de fonction de corrélation :

$$C(\tau) = \sigma^2 \rho^{|\tau|} \quad \text{où } \sigma \text{ et } \rho \text{ sont deux paramètres réels}$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

On se propose de simuler le résultat de l'observation d'une réalisation de ce processus aux instants $t_i = \frac{i}{n}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k, \dots$ et n est un entier quelconque).

Soient $\{u_i\}$ des variables aléatoires gaussiennes indépendantes et réduites. On considère les variables aléatoires :

$$I \quad \begin{cases} X_0 = \sigma u_0 \\ X_{\frac{k+1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} X_{\frac{k}{n}} + \sigma \sqrt{1 - \rho^{\frac{2}{n}}} U_{k+1} \end{cases}$$

On a pour tout k et tout n :

$$E(X_{\frac{k}{n}}^2) = \sigma^2$$

$$E(X_{\frac{k}{n}} X_{\frac{k+1}{n}}) = \rho^{\frac{1}{n}} E(X_{\frac{k}{n}}^2) + \sigma \rho^{\frac{1}{n}} \sqrt{1 - \rho^{\frac{2}{n}}} E(X_{\frac{k}{n}}, U_{k+1})$$

$$= \sigma^2 \rho^{\frac{1}{n}}$$

et d'une façon générale, puisque l'on a :

$$X_{\frac{k+p}{n}} = \rho^{\frac{p}{n}} X_{\frac{k}{n}} + \rho^{\frac{p-1}{n}} \sigma \sqrt{1 - \rho^{\frac{2}{n}}} U_{k+1} + \dots + \sigma \rho^{\frac{1}{n}} \sqrt{1 - \rho^{\frac{2}{n}}} U_{k+p-1} + \sigma \sqrt{1 - \rho^{\frac{2}{n}}} U_{k+p}$$

$$E(X_{\frac{k}{n}}, X_{\frac{k+p}{n}}) = \sigma^2 \rho^{\frac{p}{n}}$$

Il est clair que le processus discret ainsi défini, lorsque n tend vers l'infini, tend vers le processus continu $X(t)$ défini au départ.

Nota. Un tel processus est dit de MARKOFF LAPLACE car l'état à l'instant t_1 ne dépend que de l'état à l'instant t_{1-1} (cf. formule I).

CONCLUSION SUR LA REPRÉSENTATION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE PAR UNE SUITE INFINIE

a) Le problème de la représentation d'une variable aléatoire par une suite infinie $\langle x_i \rangle$ de nombres réels étant résolu, il reste cependant une imprécision due à ce que lorsqu'on utilise une telle suite pour une simulation, on s'arrête au N ème terme et ce pour des raisons évidentes de "coût".

Or, la suite que l'on a construite est caractérisée par des propriétés asymptotiques des fréquences, que l'on utilise lors de la simulation ; on suppose que certaines de ces propriétés sont vérifiées lorsqu'on ne prend en considération que les N premiers termes de la suite. Pour "justifier" cette hypothèse, on utilisera un nombre N de termes de la suite "suffisamment grand" devant

le nombre de valeurs possibles pour les termes de la suite. Pour ne pas atteindre un nombre de termes N prohibitifs on aura intérêt à ne pas chercher une "précision" illusoire et à choisir K petit ($K = 2$ nous semble par exemple raisonnable). Malgré cette difficulté, qui ne peut être levée que par une étude délicate de la rapidité de convergence de la suite vers ses propriétés asymptotiques, les procédés de représentation que nous avons définis n'en rendent pas moins d'importants services lors d'une simulation du fait de leur programmation aisée et concise.

Il semble cependant que, N étant fixé, on puisse "faire mieux" que de considérer les N premiers termes de $\langle x_i \rangle$ et nous allons donner deux exemples illustrant notre propos.

1/ Un procédé pour construire une suite infinie représentant une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$ consiste à utiliser une suite équirépartie sur $[0,1[$. Cette dernière suite est caractérisée par le fait que sa discrétion D_N tend vers zéro quand N tend vers l'infini et c'est cette propriété caractéristique qui permet de définir la représentation cherchée.

Lorsque N est fixé, la représentation sera d'autant "meilleure" que D_N sera plus petit. Il est donc intéressant de chercher un ensemble A_N de N éléments tel que la discrétion $D_N(A_N)$ soit minimale. Pour ce faire, il suffit de considérer :

$$A_N = \left\{ x_i = \frac{i}{N} ; i = 1, \dots, N \right\}$$

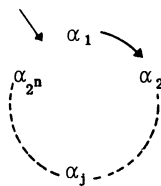
on a alors $D_N(A_N) = \frac{1}{N}$.

2/ Nous avons vu dans un chapitre précédent qu'un nombre normal dans la base g pouvait représenter une suite de tirages au sort effectués sur une variable aléatoire. La propriété caractéristique d'un nombre normal est :

$$\frac{N^t(N ; u_1^t(\alpha) = D_t)}{N} \longrightarrow \frac{1}{g^t} \quad \text{quand } N \longrightarrow \infty$$

quel que soit t et l'entier D_t de t chiffres dans le système de base g .

Soit A_N un ensemble de $N = 2^p$ nombres écrits dans le système de base $g = 2$; disposons les éléments de A_N sous forme de boucle fermée :



et soient $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j \dots \alpha_{2^n}$ les chiffres successifs que l'on rencontre en parcourant cette boucle dans un sens de rotation et à partir d'un origine choisis arbitrairement. On pose :

$$u_i^t = \alpha_1 \dots \alpha_{i+k-1} \quad i = 1 \dots 2^n$$

chacun des indices i étant pris modulo 2^n .

Nous cherchons les ensembles A_{2^n} tels que :

$$\frac{N^t(2^p ; u_1^t(A_N) = D_t)}{2^p} = \frac{1}{2^t}$$

pour tout $t \leq p$ et tout entier D_t de t chiffres dans le système de base 2.

On peut effectivement construire de tels ensembles qui sont d'ailleurs utilisés dans les problèmes de codages sous le nom de "codes récurrents". On démontre d'une façon générale que pour un p donné, il y a :

$$2^{(2^{p-1} - p)}$$

ensembles A_{2^p} vérifiant la propriété requise.

A titre d'exemple, nous donnons un de ces ensembles pour $p = 5$:

1	1	1	1	1	0	0	0	0
0								0
1								1
1								0
0								0
1								0
0								1
1								1
1	1	0	0	1	0	1	0	0

On vérifiera que l'on a, pour cet exemple, $N^i(2^5; u_i^k = D_k) = 2^{5-k}$ quels que soient $k \leq 5$ et l'entier D_k de k chiffres 0 ou 1 (i.e. on trouve une fois et une seule les 2^5 nombres de 5 chiffres, deux fois les 2^4 nombres de 4 chiffres, ...)

b) Dans la prochaine partie de cette étude, nous allons reformuler le problème de la représentation d'une variable aléatoire de loi donnée F , en tenant compte que lors des utilisations pratiques l'ensemble utilisé pour cette représentation est de cardinal N fini.

Avant d'aller plus loin nous signalons la tentative de A.N. KOLMOGOROFF et ses élèves pour caractériser des ensembles $A_N(x_1, \dots, x_N)$ représentant une suite de "tirage au sort"; A_N est caractérisé par l'invariance des fréquences quand on opère des sélections dans $\{x_1, \dots, x_N\}$ suivant une famille convenable d'algorithmes [cf. 15].

Dans cette partie de ce mémoire nous nous proposons de construire des ensembles $A_N = \{x_i\}$ tels que la représentation obtenue :

$$F_N^*(\alpha) = \frac{N^i(N; x_i = \alpha)}{N}$$

"approche au mieux" la répartition souhaitée $F(\alpha)$.

Nous préciserons trois modes de comparaison de $F(\alpha)$ et $F_N^*(\alpha)$, faisant intervenir soit la fonction de répartition, soit la fonction caractéristique, soit enfin les moments. Ces trois études ne sont pas d'ailleurs sans points communs, aussi soulignerons nous au passage les concordances des résultats obtenus.

En fait, on ne se limitera pas, comme on le fait usuellement, à chercher une répartition formée de masses égales $\left(\frac{1}{N}\right)$ en des points X_i ($i = 1, \dots, N$), car, si l'on pondère chacun des points X_i par des masses α_i , on verra que l'on obtient une approximation bien meilleure pour le même nombre N de points. Pratiquement, une simulation utilisant ces répartitions pondérées, consistera à prendre successivement les X_i comme entrées ainsi que l'on fait usuellement, puis à pondérer les sorties par les α_i .

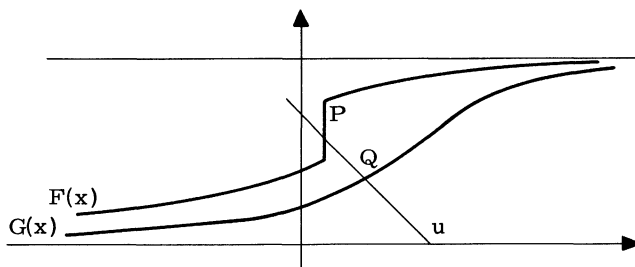
DEUXIÈME PARTIE
MEILLEURE APPROXIMATION EN LOI
D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE DE LOI DONNÉE

I - DEFINITION DE LA DISTANCE DE PAUL LEVY ; ENONCE DU PROBLEME

a) On sait que l'on peut définir une structure d'espace métrique pour l'espace des lois réelles ; ces lois étant définies par leurs fonctions de répartition F_n et F , la convergence d'une suite de lois L_n vers une loi limite L sera celle définie par la distance ρ de cet espace.

Partons de la définition liée aux graphes respectifs $F(x)$ et $G(x)$ des lois L et L' (éventuellement complétés par des segments verticaux) coupés en P et Q par la sécante $x + y = u$ ($u \in \mathbf{R}$) ; on peut alors définir une distance $\rho(L, L')$ dans l'espace des lois, dite "distance de PAUL LEVY", par :

$$\rho(L, L') = \sup_{u \in \mathbf{R}} \frac{|\overline{PQ}|}{\sqrt{2}} \quad [\text{cf. 11}]$$



Théorème 1 - $\rho = \sup_{u \in \mathbf{R}} \frac{|\overline{PQ}|}{\sqrt{2}}$ est une distance et l'espace des lois muni de cette distance est complet.

La topologie obtenue est équivalente à la topologie faible sur l'espace des mesures de probabilités sur \mathbf{R} .

Définition équivalente - $\rho = \min h$ tel que :

$$G(x - h) - h \leq F(x) \leq G(x + h) + h$$

b) Etant donnés deux nombres θ et $\theta' \in \overline{\mathbf{R}}$ ($\theta < \theta'$) on considère la fonction $\varphi(x)$ définie, continue, strictement monotone (croissante) sur $] \theta, \theta' [$ (ces deux dernières hypothèses restrictives sont nécessaires pour assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème que l'on se pose) et telle que :

$$\lim_{x \rightarrow \theta+0} \varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \theta'-0} \varphi(x) = 1$$

On considère alors la variable aléatoire réelle de loi L définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \theta \\ \varphi(x) & \text{si } \theta < x < \theta' \\ 1 & \text{si } x \geq \theta' \end{cases}$$

Soit (Σ) son graphe.

N étant un entier positif donné, on considère la variable aléatoire réelle de loi L_N définie par :

$$F_N(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Y(x - x_i)$$

où les α_i sont N nombres réels $0 < \alpha_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, N$).

et $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$; les x_i sont N nombres réels donnés tels que $x_i < x_{i+1}$ pour tout i ; $Y(x)$ est la fonction d'HEAVISIDE.

Soit (Σ_N) le graphe de F_N (complété par des segments verticaux), F_N sera dite "fonction en escalier à N sauts".

Le problème que l'on se propose de résoudre est de déterminer (Σ_N^*) [soit encore les 2 N nombres α_i, x_i] approchant au mieux Σ , c'est-à-dire tels que $\rho(\Sigma, \Sigma_N^*)$ soit minimum pour un N donné.

Nous déterminerons ainsi une répartition F_N^* formée des masses α_i ($\alpha_i = a_i - a_{i+1}$, $a_0 = 0$) en des points d'abscisse x_i ; nous montrerons que $\rho(\Sigma, \Sigma_N^*) \leq \frac{A}{N}$ (où A est constante), et donc $\rho(\Sigma, \Sigma_N^*) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$. On saura donc construire une suite V_N de variables aléatoires discrètes convergentes en loi vers la variable aléatoire de fonction de répartition F.

II - THEOREME PRELIMINAIRE

Soit $g(x)$ une fonction définie continue, strictement monotone (croissante) sur \mathbf{R} . Soit (σ) son graphe.

Soit $P(x_1, y_1)$ un point quelconque et Q le point d'intersection de la droite $(x - x_1) + (y - y_1) = 0$ et de (σ) . On pose :

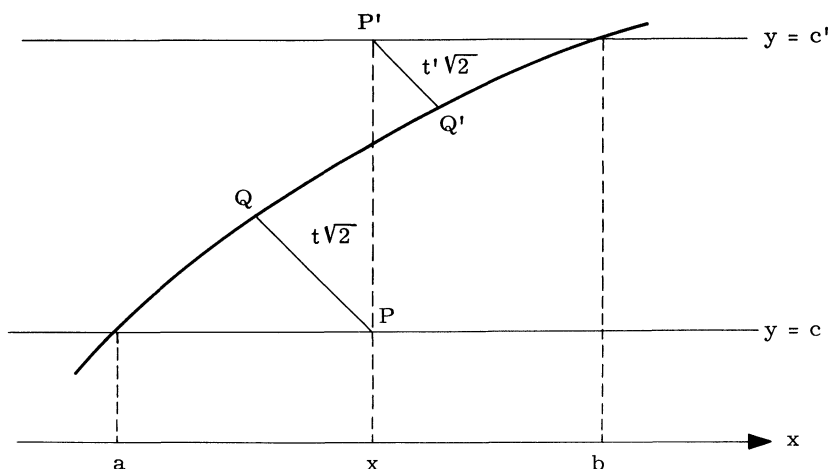
$$d(P, \sigma) = \frac{|PQ|}{\sqrt{2}} \begin{cases} d(P, \sigma) \geq 0 & \text{si } g(x_1) \geq y_1 \text{ (P est en dessous de } \sigma) \\ d(P, \sigma) \leq 0 & \text{si } g(x_1) \leq y_1 \text{ (P est en dessus de } \sigma) \end{cases}$$

et $t = |d(P, \sigma)|$.

Soient c et c' deux nombres réels, tels que $c < c'$, appartenant au domaine de variation de $y = g(x)$. On pose :

$$a = g^{-1}(c) \quad \text{et} \quad b = g^{-1}(c')$$

Soit $x \in [a, b] = D$ et P (resp. P') le point d'abscisse x sur la droite $y = c$ (resp. $y = c'$).



On pose :

$$\omega(x) = \max [t = |d(P, \sigma)|, t' = |d(P', \sigma)|]$$

Théorème 2 - Il existe x_0 unique appartenant à D , tel que :

$$\omega(x_0) = \min_{x \in D} [\omega(x)]$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $\omega(x)$ soit minimum est que :

$$t = t'$$

En effet, l'application qui à $x \in D$ fait correspondre t est continue, strictement croissant ; t est solution de :

$$c + t = g(x - t) \iff x = t + g^{-1}(c + t)$$

(g^{-1} existe et est continue, strictement croissante).

De même, l'application qui à $x \in D$ fait correspondre t' est continue et strictement décroissante.

Donc $h(x) = t - t'$ est une fonction continue et strictement croissante de x .

D'autre part, si $x \rightarrow a$ alors $g(x) \rightarrow c$ et puisque $t \leq g(x) - c$, $t \rightarrow 0$; de même si $x \rightarrow b$, $t' \rightarrow 0$.

Donc :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \inf [h(x) ; x \in D] < 0 \\ \lim_{x \rightarrow b} h(x) = \max [h(x) ; x \in D] > 0 \end{cases}$$

Par suite, il existe $x_0 \in D$ unique, tel que $h(x_0) = 0$, soit :

$$|d(P_0, \sigma)| = |d(P'_0, \sigma)| = t_0$$

On a alors pour $\omega(x)$ la définition suivante :

$$u = \omega(x) \begin{cases} c' - u = g(x + u) & \text{si } x < x_0 \\ t_0 = u & \text{si } x = x_0 \\ c + u = g(x - u) & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

Donc :

- si $x < x_0$, $\omega(x)$ est une fonction continue, strictement décroissante.
- si $x > x_0$, $\omega(x)$ est une fonction continue, strictement croissante.

On en conclut qu'il existe x_0 unique $\in D$ tel que $\omega(x)$ soit minimum $\iff t_0 = t'_0$.

III - PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DE LA REPARTITION F_N^* CHERCHÉE ; CONSTRUCTION DE Σ_N^*

a) Propriété caractéristique

N étant donné, soit (Σ_N^*) la fonction en escalier à N sauts, approchant au mieux (Σ) [$\rho(\Sigma_N^*, \Sigma) = \rho_0$ minimum].

Soient x_i l'abscisse des N sauts de Σ_N^* et α_i leurs amplitudes respectives.

D'après la définition de Σ_N^* et de $\rho(\Sigma_N^*, \Sigma)$ il existe $j \in \{1, \dots, N\}$ tel que $\omega(x_j) = \rho_0$.

Appliquons alors le théorème 2 à la fonction $y = \varphi(x)$ pour $c = a_j$ et $c' = a_{j+1}$, il en résulte que $t_j = t'_j$.

De même, le théorème 2 appliqué à la fonction $x = \varphi^{-1}(y)$ pour $c = x_j$ et $c' = x_{j+1}$, nous donne $t'_j = t_{j+1}$.

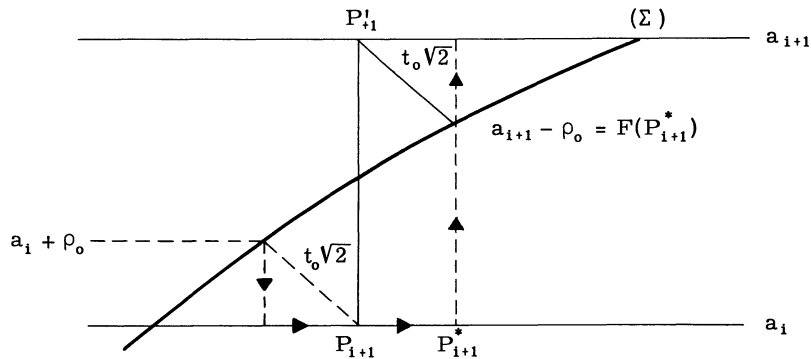
Posons $A_{2j} = P_j$, $A_{2j+1} = P'_j$, on peut énoncer :

Théorème 3 - N étant donné, s'il existe une fonction en escalier à N sauts Σ_N^* approchant au mieux Σ donnée ($\rho(\Sigma_N^*, \Sigma) = \rho_0$ minimum), elle est unique et elle est caractérisée par :

$$|d(A_i, \Sigma)| = \rho_0 \quad i = 1, \dots, 2N$$

b) Construction de Σ_N^*

Soit ρ_0 donné et supposons Σ_N^* construit jusqu'au $i^{\text{ème}}$ saut ($x_j, a_j, j < i$ connus) et nous nous proposons de calculer x_{i+1} et $a_{i+1} = \sum_{j=1}^{i+1} a_j$.



On construit successivement :

- le point $P_{i+1}(x_{i+1} = \varphi^{-1}(a_i + \rho_0) + \rho_0, a_i)$; P_{i+1} est à distance ρ_0 de Σ
- le point $P'_{i+1}(x_{i+1}, a_{i+1} = \varphi(x_{i+1} + \rho_0) + \rho_0)$; P'_{i+1} est à une distance ρ_0 de Σ .

Et, on a $\omega(x_{i+1}) = \rho_0$.

Les a_i sont donc définis par l'équation de récurrence :

I

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_i &= \varphi[\varphi^{-1}(a_{i-1} + \rho_0) + 2\rho_0] + \rho_0 \end{aligned}$$

On a alors :

$$x_i = \varphi^{-1}(a_{i-1} + \rho_0) + \rho_0$$

soit encore :

II

$$x_i = \varphi^{-1}(a_i - \rho_0) - \rho_0$$

Remarquons que $a_N = \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$; cette égalité nous donne une relation que doit vérifier ρ_0 . ρ_0 est donc solution de l'équation :

$$\lambda(\rho) = a_N(\rho) = 1 \tag{1}$$

La fonction $\lambda(\rho)$ est une fonction continue, strictement croissante et on a :

$$\lambda(0) = a_N(0) = a_0(0) = 0$$

De plus :

$$a_i \left(\frac{1}{2N} \right) = \varphi \left[\varphi^{-1} \left[a_{i-1} \left(\frac{1}{2N} \right) + \frac{1}{2N} \right] + \frac{1}{N} \right] + \frac{1}{2N}$$

soit encore :

$$\varphi^{-1} \left[a_i \left(\frac{1}{2N} \right) - \frac{1}{2N} \right] > \varphi^{-1} \left[a_{i-1} \left(\frac{1}{2N} \right) + \frac{1}{2N} \right]$$

soit :

$$a_i \left(\frac{1}{2N} \right) > a_{i-1} \left(\frac{1}{2N} \right) + \frac{1}{N}$$

D'où :

$$\lambda \left(\frac{1}{2N} \right) = a_N \left(\frac{1}{2N} \right) > 1$$

L'équation (1) a donc une racine unique ρ_0 dans $\left[0, \frac{1}{2N} \right]$. On a :

$$0 < \rho_0 \leq \frac{1}{2N}$$

On définit ainsi un procédé itératif de construction de Σ_N^* :

- 1) résolution de l'équation (1)
- 2) mise en œuvre des formules I et II.

IV - CAS DE FONCTIONS EN ESCALIER A N SAUTS D'AMPLITUDES EGALES $\left(\frac{1}{N} \right)$

La répartition F_N^* que nous avons étudié précédemment était constituée par N points x_i pondérés par des masses α_i . On se pose maintenant le problème de déterminer une répartition G_N^* constituée des N points x_i également pondérés $\left(\frac{1}{N} = \alpha_i \right)$ approchant au mieux la répartition F donnée.

$$G_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y(x - x_i) \text{ et soit } \sigma_N \text{ son graphe.}$$

L'application du théorème 2 à chacun des N sauts, nous détermine σ_N^* unique par :

$$\boxed{x_i = \varphi^{-1} \left(\frac{i-1}{N} + \rho_i \right) + \rho_i} \quad (1)$$

où ρ_i est la racine de l'équation en :

$$\boxed{\varphi \left[\varphi^{-1} \left(\frac{i-1}{N} + \rho \right) + \rho \right] + \rho = \frac{i}{N}} \quad (2)$$

Donc, pour chaque point x_i on aura à résoudre l'équation (2) ci-dessus, l'abscisse x_i est alors donnée par la formule (1).

Montrons que l'équation (2) a une racine unique ρ_i dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2N} \right]$. On pose :

$$\lambda^i(\rho) = \varphi \left[\varphi^{-1} \left(\frac{i-1}{N} + \rho \right) + \rho \right] + \rho$$

On a alors :

$$\lambda^i(0) = \frac{i-1}{N} < \frac{i}{N}$$

$$\lambda^i\left(\frac{1}{2N}\right) > \varphi \left[\varphi^{-1} \left(\frac{i-1}{N} + \frac{1}{2N} \right) \right] + \frac{1}{2N} = \frac{i}{N}$$

Or, $\lambda^i(\rho)$ est une fonction continue, strictement croissante, donc il existe ρ_i unique, $0 < \rho_i < \frac{1}{2N}$, vérifiant l'égalité (2).

Il est clair que l'on a :

$$\rho(\Sigma_N^*, \Sigma) \leq \rho(\sigma_N^*, \Sigma) = \max(\rho_i ; i = 1, \dots, N)$$

Cependant, remarquant que la définition de Σ_N^* nécessite la donnée de $2N$ nombres (x_i, a_i) , il sera intéressant de comparer $\rho(\Sigma_N^*, \Sigma)$ avec $\rho(\sigma_{2N}^*, \Sigma)$.

V - EXEMPLES D'APPLICATIONS

Les constructions des répartitions F_N^* et G_N^* explicitées plus haut se mettront bien en œuvre dans le cas où la fonction de répartition F s'inverse facilement :

$$A - \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-cx} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad c > 0$$

a) Construction de F_N^*

La relation I s'écrit alors :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_i = 1 - (1 - a_{i-1} - \rho_0) e^{-2c\rho_0} + \rho_0 \end{cases}$$

On peut résoudre cette équation affine :

$$a_i = \frac{1 + \rho_0 - (1 - \rho_0) e^{-2c\rho_0}}{1 - e^{-2c\rho_0}} (1 - e^{-2c\rho_0 i}) \quad (1)$$

Soit ρ_0 la solution de l'équation :

$$a_N = 1 \quad (2)$$

Σ_N^* est alors définie par :

$$x_i = -\frac{1}{c} \text{Log}(1 - a_i + \rho_0) - \rho_0 \quad (3)$$

De l'équation (2) on tire la relation entre ρ_0 et N :

$$N = \frac{1}{2c\rho_0} \text{Log} \left[1 + \frac{1 - e^{-2c\rho_0}}{\rho_0(1 + e^{-2c\rho_0})} \right]$$

Or lorsque $N \rightarrow \infty$, $0 < \rho_0 \leq \frac{1}{2N} \rightarrow 0$, on peut donc écrire :

$$2N\rho_0 = \frac{\text{Log}(1+c)}{c} [1 + O(\rho_0)]$$

Cette relation nous fournit une valeur approchée de ρ_0 , solution de (1), $\rho_0 \approx \frac{\text{Log}(1+c)}{c \cdot 2N}$; cette valeur approchée sera d'autant meilleure que N sera grand.

b) Construction de G_N^*

Les relations III s'écrivent :

$$\begin{aligned} 1 + \rho_1 - \left(1 - \rho_1 - \frac{i-1}{N}\right) e^{-2c\rho_1 i} &= \frac{i}{N} \\ x_1 &= -\frac{1}{c} \text{Log} \left(1 - \frac{i-1}{N} - \rho_1\right) + \rho_1 \end{aligned} \tag{4}$$

B -
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \geq x \\ x^p & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Les formules définissant G_N^* s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[\sqrt[p]{a_{1-1} + \rho_0 + 2\rho_0} \right]^p + \rho_0 \\ a_0 &= 0 \end{aligned}$$

et :

$$x_1 = \sqrt[p]{a_1 - \rho_0} - \rho_0$$

RÉPARTITION DISCRÈTE AYANT LES MÊMES PREMIERS MOMENTS QU'UNE RÉPARTITION DONNÉE

I - ENONCE DU PROBLEME ET REMARQUES

Nous nous proposons maintenant de construire une répartition F_N de N points X_i de \mathbf{R}^n , pondérés par les masses α_i , telle que les moments jusqu'à l'ordre q , par rapport à l'ensemble des variables, coïncident avec ceux de la répartition F à représenter.

Le problème se ramène à la résolution d'un système d'équations non linéaires obtenu en écrivant l'égalité des moments des deux répartitions, les inconnues étant les coordonnées des points X_i et les masses α_i qui leur sont affectées.

Si l'on ne veut pas atteindre un nombre de points prohibitif et obtenir des équations suffisamment simples pour pouvoir être résolues explicitement, on cherchera à utiliser les propriétés de symétrie de la répartition F . Ainsi, dans le cas que nous allons traiter, de vecteur à composantes indépendantes suivant la loi de Gauss $(0,1)$ ou la loi uniforme sur $]-1, +1[$, nous choisirons notre ensemble A_N ayant toutes les symétries de l'hypercube $(-1, +1)$ de \mathbf{R}^n .

C'est ainsi que, les points étant choisis symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées et deux points symétriques étant affectés de même masse, l'égalité à zéro des moments de F_N d'ordre impair par rapport à l'une quelconque des variables sera immédiatement vérifiée.

Nous nous bornerons ici à prendre $q \leq 7$, le calcul explicite des points et de leur pondération étant plus pénible au-delà. De plus les points seront choisis tels que au plus trois de leurs coordonnées soient non nulles et on prendra toujours le minimum de points.

C'est ainsi que, désignant par \vec{e}_i le vecteur unitaire du $i^{\text{ème}}$ axe de coordonnées, on prendra :

- pour $q = 3$ $2n$ points sur les axes : $\pm a \vec{e}_i$
- pour $q = 5$ $\begin{cases} 2n$ points sur les axes : $\pm a \vec{e}_i$ \\ $2n(n-1)$: $(\pm \vec{e}_i \pm \vec{e}_j) b$ $i \neq j$ \\ 1 point à l'origine
- pour $q = 7$ $\begin{cases} 2n$ points : $\pm a \vec{e}_i$ \\ $2n(n-1)$ points : $(\pm \vec{e}_i \pm \vec{e}_j) b$ $i \neq j$ \\ $\frac{4}{3} n(n-1)(n-2)$ points $(\pm \vec{e}_i \pm \vec{e}_j \pm \vec{e}_k) c$ $i \neq j \neq k$ \\ 1 point à l'origine.

II - LOI DE GAUSS

Les moments de la loi de GAUSS pour une variable à une dimension sont donnés par :

$$\mu_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p (p!)}, \quad \mu_{2p+1} = 0$$

Pour un vecteur de R^n à composantes indépendantes $\{x_i\}$ on a :

$$p = \sum_{i=1}^n q_i = E [x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}] = \frac{(2k_1)!}{2^{k_1} (k_1)!} x \dots x \frac{(2k_n)!}{2^{k_n} (k_n)!}$$

$$\text{si } \forall j = 1, \dots, n \quad q_j = 2k_j \\ \mu_p = 0 \quad \text{sinon}$$

a) Egalité des moments jusqu'au troisième ordre

On cherche $N = 2n$ points sur les axes, symétriques par rapport à l'origine. La seule inconnue est alors l'abscisse commune a de ces points sur les axes ($\alpha_i = \frac{1}{2n} \forall i = 1 \dots n$).

Ecrivons l'égalité des moments jusqu'à l'ordre trois par rapport à l'ensemble des variables. On obtient l'équation :

$$\mu_2 = \frac{2}{2n} a^2 = 1$$

D'où :

$$a = \sqrt{n}$$

On a donc $F_N = \left\{ X_i, \frac{1}{2n} \right\}$ avec $2n = N$ et :

$$\boxed{\begin{matrix} X_{2i-1} = \sqrt{n} \vec{e}_i \\ X_{2i} = -\sqrt{n} \vec{e}_i \end{matrix}} \quad i = 1, \dots, n$$

b) Egalité des moments jusqu'au cinquième ordre

On cherche :

$$N = 2n^2 + 1 \begin{cases} 2n \text{ points } \pm a \vec{e}_i, \text{ pondérés par } \alpha \\ 2n(n-1) \text{ points } b(\pm \vec{e}_i \pm \vec{e}_j) \text{ } i \neq j \text{ pondérés par } \beta \\ 1 \text{ point } \{0\} \text{ pondéré par } p_0 \end{cases}$$

Ecrivons l'égalité des moments jusqu'au cinquième ordre par rapport à l'ensemble des variables :

$$\begin{cases} 2n\alpha + 2n(n-1)\beta + p_0 = 1 & \text{moment d'ordre 0} \\ 2\alpha a^2 + 4(n-1)\beta b^2 = 1 & \text{moment d'ordre 2} \\ 2\alpha a^4 + 4(n-1)\beta b^4 = 3 & \text{moment d'ordre 4} \\ 4\beta b^4 = 1 & \text{moment d'ordre 4} \end{cases}$$

Ce système admet plusieurs solutions, par exemple :

$$a = b = \sqrt{3} \quad \beta = \frac{1}{36} \quad \alpha = \frac{4-n}{18}$$

$$p_0 = \frac{n^2 - 7n + 18}{18}$$

On peut aussi chercher une solution telle que $a = \sqrt{n}$; ainsi on passera de la répartition ayant les mêmes moments jusqu'au 3ème ordre à celle ayant les mêmes moments jusqu'au 5ème ordre, en introduisant les nouveaux points $(b, \beta ; p_0)$.

On obtient alors :

$a = \sqrt{n} \quad \alpha = \frac{4-n}{2n^2}$ $b = \sqrt{\frac{n(n-1)}{2(n+2)}} \quad \beta = \left(\frac{n-2}{n(n-1)}\right)^2$ $p_0 = \frac{2(n-2)}{n(n-1)}$

Remarquons tout d'abord que pour $n = 4$ on a $\alpha = 0$, il est donc inutile de chercher des points sur les axes puisqu'ils n'interviendront pas dans le calcul, on a dans ce cas $N = 2n(n-1) + 1$.

Notons d'autre part que pour $n > 4$ on a $\alpha < 0$, les points sur les axes seront pondérés par des masses négatives. Il semble que tant qu'on cherche à évaluer un effet moyen d'entrées aléatoires lors d'une simulation il n'y ait pas là un obstacle majeur.

c) Egalité des moments jusqu'au septième ordre

On cherche :

$$\begin{cases} 2n \text{ points } \pm a e_i \text{ pondérés par } \alpha \\ 2n \text{ points } \pm a' e_i \text{ pondérés par } \alpha' \\ 2n \text{ points } \pm a'' e_i \text{ pondérés par } \alpha'' \\ 2n(n-1) \text{ points } b(\pm \vec{e}_i \pm \vec{e}_j) \text{ } i \neq j \text{ pondérés par } \beta \\ \frac{4}{3}n(n-1)(n-2) \text{ points } c(\pm \vec{e}_i \pm \vec{e}_j \pm \vec{e}_k) \text{ pondérés par } \gamma \text{ } i \neq j \neq k \end{cases}$$

On place 1 point à l'origine des coordonnées pondéré par p_0 :

$$N = 4n \frac{(n^2 + 5)}{3} + 2n^2 + 1$$

L'égalité des moments s'écrit :

$$\begin{aligned} p_0 + 2n\alpha + 2n\alpha' + 2n\alpha'' + 2n(n-1)\beta + 4 \frac{n(n-1)(n-2)}{8} \gamma &= 1 \\ 2\alpha a^2 + 2\alpha' a'^2 + 2\alpha'' a''^2 + 4(n-1)\beta b^2 + 4(n-1)(n-2)\gamma c^2 &= 1 \\ 2\alpha a^4 + 2\alpha' a'^4 + 2\alpha'' a''^4 + 4(n-1)\beta b^4 + 4(n-1)(n-2)\gamma c^4 &= 3 \\ 2\alpha a^6 + 2\alpha' a'^6 + 2\alpha'' a''^6 + 4(n-1)\beta b^6 + 4(n-1)(n-2)\gamma c^6 &= 15 \\ 4\beta b^4 + 8(n-2)\gamma c^4 &= 1 \\ 4\beta b^6 + 8(n-2)\gamma c^6 &= 3 \\ 8\gamma c^6 &= 1 \end{aligned}$$

On résoud ce système en cherchant la solution donnant pour a et b les valeurs trouvées en b) conformément à la remarque faite précédemment.

Les trois dernières équations nous donnent :

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{n(n-1)}{2(n-2)}} & \beta &= \frac{2(5-n)(n-2)^3}{n^3(n-1)^3} \\ c &= \sqrt{\frac{(n-2)(n-1)n}{3n^2-15n+20}} & \gamma &= \frac{(3n^2-15n+20)^3}{8n^3(n-1)^3(n-2)^3} \\ a &= \sqrt{n} \end{aligned}$$

On choisit alors a' et a'' simplement (cf. fin de ce paragraphe), et on a alors un système de VAN DER MONDE qui détermine α , α'' et α' :

$$\begin{aligned} 2\alpha n + 2\alpha' a'^2 + 2\alpha'' a''^2 &= \frac{n^4 - 4n^3 + 220n^2 - 169n - 80}{2n^2(n-1)(n-2)} = d \\ 2\alpha n^2 + 2\alpha' a'^4 + 2\alpha'' a''^4 &= \frac{n^2 - 7n + 20}{2n} = d' \\ 2\alpha n^3 + 2\alpha' a'^6 + 2\alpha'' a''^6 &= \frac{38 - 9n + n^2}{2} = d'' \end{aligned}$$

Ce système a pour solution :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= - \frac{d'(a'^2 + a''^2) - d'' - d a'^2 a''^2}{2n(n-a'^2)(a''^2 - n)} \\ \alpha' &= \frac{d'(n + a''^2) - d'' - d n a''^2}{2a'^2(n-a'^2)(a'^2 - a''^2)} \\ \alpha'' &= \frac{d'(n + a'^2) - d'' - d n a'^2}{2a''^2(a'^2 - a''^2)(a''^2 - n)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

On en déduit p_0 par la première équation.

Les nombres a' et a'' étant arbitraires, on peut chercher à les choisir tels que $\alpha' = 0$ (ou $\alpha'' = 0$) ce qui diminuera de $2n$ le nombre de points à prendre en considération. Ce choix est pos-

sible si $\frac{d'' - d'n}{d' - dn}$ est positif. Or on a :

$$\frac{d'' - d'n}{d' - dn} = \frac{(9 - n)(n - 1)(n - 2)2n}{-6n^3 - 177n^2 + 95n + 40}$$

Pour $n \geq 1$ on vérifiera que le dénominateur de ce rapport est négatif donc pour $n \geq 9$ pourra choisir :

$$a'^2 = \frac{(9 - n)(n - 1)(n - 2)2n}{-6n^3 - 177n^2 + 95n + 40}$$

Si on prend alors $a''^2 = 1$, on aura :

$$\alpha = \frac{d'^2 + d''d}{2n(2d'n - dn^2 - d'')} \\ \alpha' = \frac{(d' - dn)^3}{2(d'n - d')(2d'n - dn^2 - d'')}$$

Remarquons enfin que comme au paragraphe b) précédent, certaines masses peuvent être négatives pour certaines valeurs de n , ou s'annulent (exemple : si $n > 5$, $\beta > 0$).

Remarque

Une transformation linéaire conservant le degré par rapport à l'ensemble des variables, on pourra, à partir d'une répartition F_N ayant les mêmes moments jusqu'à l'ordre q par rapport à l'ensemble des variables que la répartition de GAUSS centrée normée, construire une répartition F'_N ayant les mêmes moments jusqu'à l'ordre q par rapport à l'ensemble des variables que la répartition de GAUSS de matrice de covariance donnée Γ . En effet (cf. 1ère partie, p. 20) soit $\{X_1, \alpha_1\}$ la répartition F_N on aura pour $F'_N : \{U \Delta^{\frac{1}{2}} X_1, \alpha_1\}$ où U est la matrice orthogonale directe et Δ la matrice diagonale positive telles que $U^o \Gamma U = \Delta$.

III - LOI UNIFORME SUR $[-1, +1]$

Le même type de calcul peut être appliqué à la détermination de la répartition $\{X_1, \alpha_1\}$ ayant les mêmes moments jusqu'à l'ordre q par rapport à l'ensemble des variables que la répartition uniforme sur $[-1, +1]$. Nous ne donnerons pas le détail des calculs comme dans le chapitre précédent mais un tableau récapitulatif des résultats.

Ce tableau est extrait d'une publication de Monsieur P. L. HENNEQUIN ; traitant du calcul des intégrales multiples par la formule [cf. 10] :

$$\int_C f(\vec{X}) dX = \sum_{i=1}^N \alpha_i f(\vec{X}_i)$$

C hypercube de \mathbf{R}^n , où les X_1 et les α_1 sont choisis tels que la formule ci-dessus soit exacte pour un polynôme de degré q par rapport à l'ensemble des variables. Les deux problèmes se formulent de façon identique.

q	Points x_j	Coefficients α_j	Nombre total de points (N)
3 ($n \geq 1$)	0 $\pm \sqrt{\frac{3}{5}} \vec{e}_i$	$2^n \left[1 - \frac{5n}{9} \right]$ $2^{n-1} \cdot \frac{5}{9}$	 $2n + 1$
5 ($n \geq 2$)	0 $\pm \sqrt{\frac{3}{5}} \vec{e}_i$ $\sqrt{\frac{3}{5}} (\pm \vec{e}_i \pm \vec{e}_j) (i \neq j)$	$2^n \left[1 - \frac{5n}{9} + 25 \frac{n(n-1)}{162} \right]$ $2^{n-1} \cdot \frac{25}{9} \left(\frac{1}{5} - \frac{n-1}{9} \right)$ $2^{n-2} \cdot \frac{25}{81}$	 $2n^2 + 1$
7 ($n \geq 3$)	0 $\pm \frac{1}{3} \vec{e}_i$ $\pm \sqrt{\frac{3}{5}} \vec{e}_i$ $\pm \vec{e}_i$ $\sqrt{\frac{3}{5}} (\pm \vec{e}_i \pm \vec{e}_j) (i \neq j)$ $\sqrt{\frac{3}{5}} (\pm \vec{e}_i \pm \vec{e}_j \pm \vec{e}_k)$ ($i \neq j \neq k$)	$2^n \left[1 - \frac{283n}{315} + \frac{25n(n-1)}{132} - \frac{125n(n-1)(n-2)}{4734} \right]$ $2^{n-3} \cdot \frac{729}{385}$ $2^n \cdot \frac{5}{6} \left[\frac{50}{231} - \frac{5}{27} (n-1) + \frac{25}{483} (n-1)(n-2) \right]$ $2^{n-3} \cdot \frac{9}{35}$ $2^{n-2} \left[\frac{25}{81} - \frac{125(n-2)}{729} \right]$ $2^{n-3} \cdot \frac{125}{729}$	 $\frac{4n(n^2+5)}{3}$ $- 2n^2 + 1$

UTILISATION DES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

I - ENONCE DU PROBLEME ET REMARQUES

Plûtôt que d'écrire que la répartition F et la répartition cherchée F_N ont les mêmes moments jusqu'à un certain ordre q par rapport à l'ensemble des variables on peut chercher à pondérer l'ensemble des moments et chercher à approcher "au mieux" la fonction caractéristique $\Phi(t)$ par la fonction caractéristique Φ_N^* de l'ensemble A_N .

La définition de la meilleure approximation soulève le problème suivant :

En dimension 1, $\Phi_N^*(t)$ est presque périodique et on a donc :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Phi_N^*(t)| = 1$$

alors que, si F est absolument continue : $\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi(t)| = 0$.

On devra donc comparer $\Phi_N^*(t)$ et $\Phi(t)$ à l'aide d'une distance faisant intervenir de façon négligeable les grandes valeurs de t .

On prendra par exemple une distance telle que :

$$d(\Phi_N^*, \Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) |\Phi_N^*(t) - \Phi(t)|^2 dt$$

où $\rho(t) > 0$ est telle que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$$

On choisira par exemple :

$$\rho(t) = e^{-\lambda t^2}$$

λ est constante réelle positive.

Nous avons traité ce problème dans le cas simple d'un ensemble A_{2n} de $2n = N$ points placés sur les axes de \mathbf{R}^n , symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées et pour la loi de GAUSS $(0,1)$. Le cas d'un ensemble A_N plus complexe du type traité au chapitre précédent conduisant à des systèmes d'équations non linéaires dont la résolution explicite est très délicate.

II - VECTEUR GAUSSIEN CENTRE NORME

Soient :

$$\Phi(T) = \prod_{i=1}^n \varphi(t_i) = \prod_{i=1}^n e^{-\frac{t_i^2}{2}}$$

la fonction caractéristique du vecteur gaussien centré normé à composantes indépendantes de \mathbf{R}^n et $A_{2n} \left\{ \pm a \vec{e}_i, \frac{1}{2N} \right\}$ l'ensemble cherché de fonction caractéristique :

$$\Phi_{2n}^*(T, a) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos t_i a$$

On a :

$$\frac{\partial}{\partial a} \Phi_{2n}^*(T, a) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \sin t_i a$$

Ecrivons que la distance Φ et Φ_{2n}^* :

$$D = \int \int_n \dots \int_{\text{fois}} \rho(T) [\Phi(T) - \Phi_{2n}^*(T)]^2 dT$$

est extrémale. Il vient :

$$\int \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(T) \Phi(T) \frac{\partial}{\partial a} \Phi_{2n}^*(T, a) dT = \int \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{2n}^*(T, a) \frac{\partial}{\partial a} \Phi_{2n}^*(T, a) \rho(T) dT$$

Dans l'exemple traité, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\lambda t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \sin at dt \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\lambda t^2} dt \right]^{n-1} = \frac{1}{n} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\lambda t^2} \sin at \cos at dt \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t^2} dt \right]^{n-1} + (n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\lambda t^2} \sin at dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t^2} \cos at dt \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t^2} dt \right]^{n-2} \right\}$$

Or, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2\mu} \cos bt \, dt = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} e^{-\frac{b^2}{4\mu}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2\mu} \sin bt \, dt = \frac{b}{2\mu} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} e^{-\frac{b^2}{4\mu}}$$

Il vient donc après simplification :

$$n \left(\frac{2\lambda}{2\lambda+1} \right)^{\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{a^2}{2+4\lambda}} - e^{-\frac{a^2}{\lambda}} - (n-1) e^{-\frac{a^2}{2\lambda}} = 0$$

Posant $u = e^{-\frac{a^2}{2+4\lambda}}$ il vient :

$$\mathfrak{F}(u) = u^{\frac{2+3\lambda}{\lambda}} + (n-1) u^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} - n \left(\frac{2\lambda}{2\lambda+1} \right)^{\frac{n}{2}+1} = 0$$

Or $\mathfrak{F}(u)$ est une fonction continue, strictement croissante de u dans l'intervalle $[0,1]$, en effet :

$$\mathfrak{F}'(u) = \frac{2+3\lambda}{\lambda} u^{\frac{2(1+\lambda)}{\lambda}} + \frac{1+\lambda}{\lambda} (n-1) u^{\frac{1}{\lambda}} > 0$$

De plus :

$$\mathfrak{F}(0) < 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}(1) > 0$$

Donc $\mathfrak{F}(u)$ a une racine et une seule, soit u_0 dans l'intervalle $[0,1]$ et pour :

$$a = \sqrt{-2\lambda(1+2\lambda) \text{Log } u_0} \quad \text{D est minimum.}$$

ANNEXE

Cette annexe a été divisée en deux parties : dans la première, on trouvera les précisions nécessaires à l'écriture (organigramme) et à l'usage (paramètres d'entrée et sortie) des programmes que l'on trouvera dans la deuxième partie.

Le Laboratoire de Calcul de la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand dispose de deux ordinateurs de logiques internes différentes et dont nous donnons une brève description pour justifier leur usage :

Un PB 250 SETI, d'une capacité mémoire de 10 000 mots de 21 bits, équipés d'une installation périphérique très complète (bandes magnétiques, perforateur rapide,...). Pour l'instant ce calculateur travaille essentiellement avec le langage symbolique MAGE II.

Un 1620 I.B.M., d'une capacité de 20 000 chiffres décimaux. Cette machine travaille directement en décimal et avec des mots de longueur variable. Un compilateur ALGOL complet rend son usage très intéressant.

Nous avons écrit les programmes de ce mémoire en Algol aussi souvent que cela nous a été possible ; la faible capacité de la 1620 et le fait que très souvent une arithmétique de longueur variable nous était nécessaire font que nous avons été contraints parfois d'écrire certains programmes en langage machine 1620, perdant ainsi sur leur généralité. On trouvera cependant le listing de ces programmes pour les utilisateurs de 1620 I.B.M. ; les autres utilisateurs, plus ou moins bien équipés, trouveront un organigramme détaillé et l'assurance que, malgré la complexité apparente, l'écriture machine de tels programmes, est possible.

Nous signalons enfin, que certaines des procédures ont été utilisées avec succès par Monsieur THOMAS [21'] .

Les suites, que l'on construit à partir des polynômes de WEYL et de nombre normal, seront données, non pas sous la forme décimale : $0, a_1 a_2 \dots a_k$, mais sous la forme entière $a_1 a_2 \dots a_k$.

SUITES CONSTRUITES A PARTIR DE POLYNOMES DE WEYL

Soient à calculer les N premiers termes de R suites équiréparties et indépendantes dans G_k en utilisant le polynôme de WEYL $\varphi(I)$. Conformément à la remarque de la page 12, nous ne considérons que les polynômes $\varphi(I) = \underline{A I^m}$ pour lesquels le calcul peut être fait simplement en choisissant convenablement l'approximation rationnelle d'ordre u de l'irrationnel A ; nous mettons ensuite en œuvre les formules du paragraphe correspondant.

Si nous voulons utiliser un langage symbolique pour programmer un tel algorithme, on voit que l'on sera très vite limité dans le choix de N, K et R. En effet, pour de tels langages, la longueur du mot est fixe, de l'ordre de 8 à 10 et on a :

$$u = f(N, K, R, m) \leq 8 \text{ ou } 10 \quad (\text{cf. page 12})$$

Pour éviter cette sujétion, deux voies sont possibles :

- on travaille à l'échelle du mot symbolique. Ce travail se simplifie beaucoup quand on se borne à considérer les monomes du type $\varphi(I) = \underbrace{A I}$. En effet, puisque $\varphi(I+1) = \underbrace{A + \varphi(I)}$ on n'aura qu'à programmer l'addition en base g^{l-1} (l étant la longueur du mot symbolique, g la base).
- on utilise l'arithmétique de longueur variable de la machine et on travaille en langage machine.

I - SUITES DU PREMIER DEGRE : $\langle x_n \rangle = \langle \underbrace{A n} \rangle$

a) Procédures standard pour compilateur ALGOL 1620 (procédure écrite par M. le professeur BACCHUS de la Faculté des Sciences de Lille)

Cette procédure, dont l'identificateur est BIDON, calcule au $p^{\text{ième}}$ appel les R composantes d'un vecteur V équiréparti et à composantes indépendantes dans G_K , à partir des décimales de $\underbrace{A P}$ suivant la formule (5) de la page 10.

Les paramètres de cette procédure sont au nombre de 5 :

- X paramètre booléen qui, s'il a la valeur :
 - . VRAI provoque la lecture d'une carte donnée (mise à la fin du compilateur) contenant l'approximation rationnelle convenable de A
 - . FAUX laisse se poursuivre le calcul avec la même \hat{A}
- P paramètre entier
- K paramètre entier
- R paramètre entier
- V identificateur de tableau

On a sur ces paramètres les contraintes suivantes :

- $K \leq 8$ (longueur du mot Algol)
- $RK + Q \leq 40$ (procédure écrite en S P S)

b) Procédure Algol (Programme I)

Conformément à la remarque préliminaire de ce chapitre, nous programmons l'addition en base 10^K ($K < 9 = 10 - 1$).

Désignant par N le nombre de termes à calculer, on désigne par M le plus petit entier tel que :

$$M \geq \frac{\log N}{K}$$

L'identificateur de cette procédure est POLWEYL, elle est à 5 paramètres :

- A tableau entier : $(1 : M + R)$; soit \hat{A} l'approximation rationnelle de l'irrationnel nécessaire à notre processus de construction :

$$\hat{A} = 0, a_1 a_2 \dots a_u$$

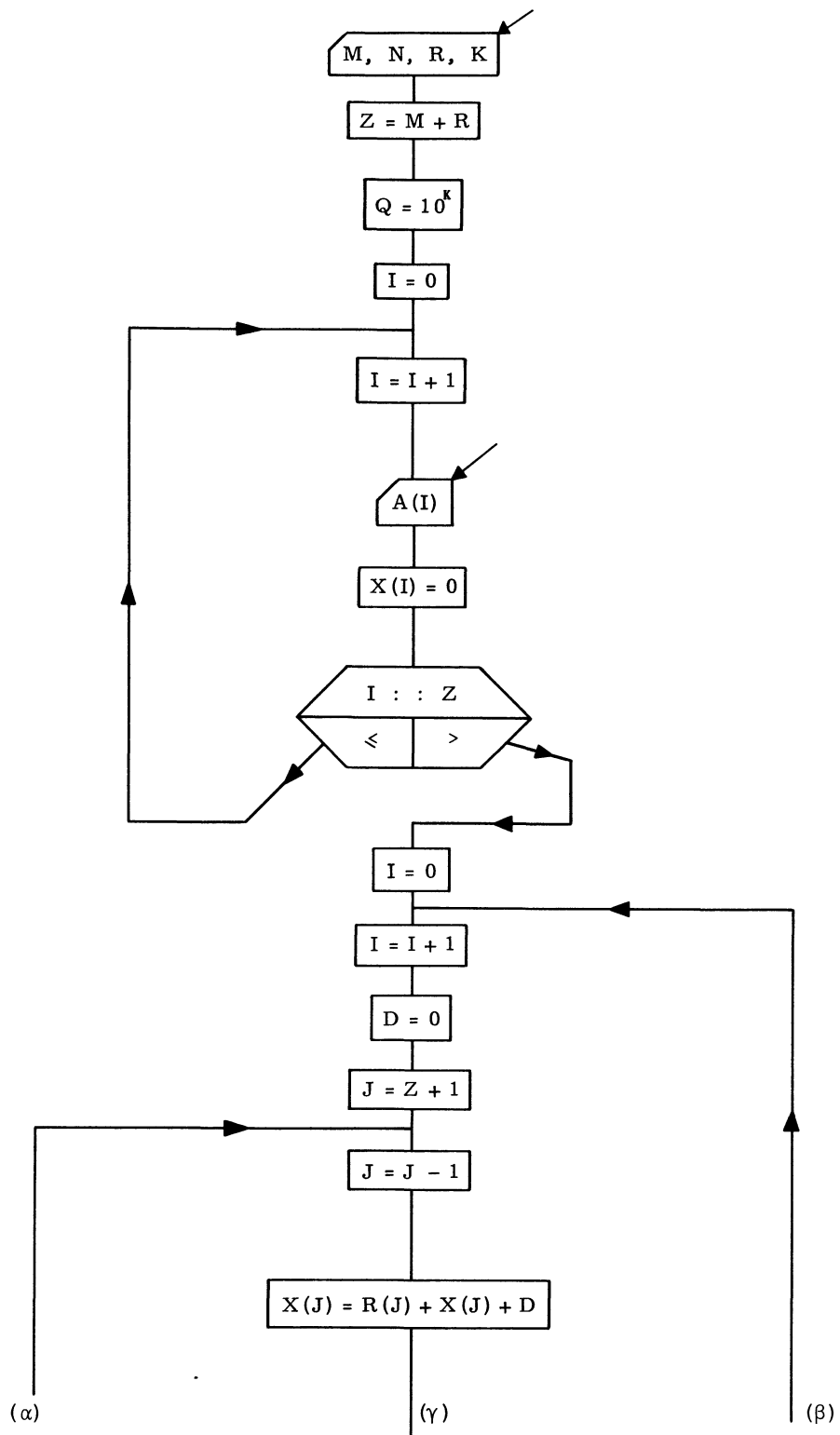
éventuellement on complète avec des 0 jusqu'à ce qu'on ait $(M + R) K$ chiffres après la virgule. Alors on pose :

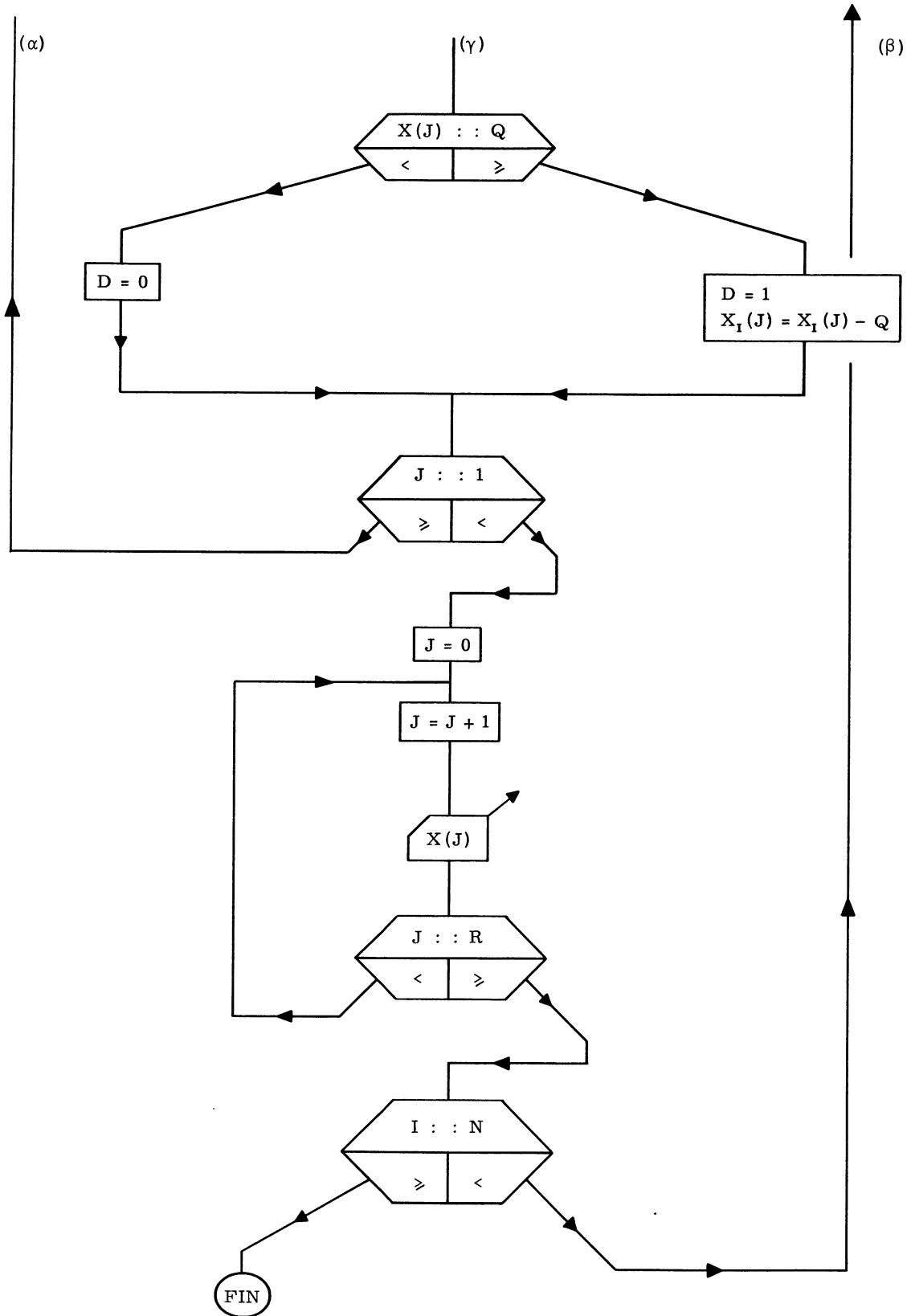
$$A[I] = a_{(I-1)K+1} a_{(I-1)K+2} \dots a_{IK}$$

- X tableau entier : $(1 : M + R)$; les R premiers termes de ce tableau représentent les R composantes du vecteur équiréparti cherché.

- K, M, R entiers déjà précisés.

Le processus de calcul est décrit par l'organigramme des pages 44 et 45.





II - SUITE DE DEGRE SUPERIEUR A 1

Pour de tels programmes l'usage de l'arithmétique de longueur variable est souhaitable, nous avons donc utilisé le langage machine I.B.M. 1620 (programme II).

Nous nous sommes limités à prendre $m = 2$ et pour A un nombre d'au plus 100 chiffres (on ne peut s'affranchir de cette contrainte sans précaution préalable lors d'une multiplication).

On aura donc :

$$u = R \times K + Q \leq 100$$

Ce programme occupe environ 500 positions décimales, son exécution est très rapide.

SUITES CONSTRUITES A PARTIR D'UN NOMBRE NORMAL

I - SUITES DONT LES TERMES SONT INDEPENDANTS p A p, QUEL QUE SOIT p DONNE

a) Procédure Algol (NOMNOR Programme III)

Pour engendrer le nombre normal nécessaire à notre processus de construction, nous avons utilisé le polynôme $P(J) = J^2$; à chaque appel de la procédure on calcule un terme A de la suite définie page 14 lemme 10.

La longueur du mot Algol en entier étant de 10, on devra se limiter à $J \leq 10^5$ pour que l'on ait tous les chiffres de $P(J)$ sans troncatures. On pourra ainsi construire 953 750 décimales du nombre normal soit $953\,750/K$ termes A de la suite, le temps de calcul d'un terme A étant de l'ordre de la seconde.

Les paramètres de cette procédure sont au nombre de 3 : K, A et un entier IND qui lors du premier appel de la procédure doit être égal à 1.

On a l'organigramme de la page 47.

CH désigne le nombre de chiffres de $P(J) = ADD$

PUI permet de prendre le nombre de chiffres adéquat de ADD pour former A avec K chiffres.

PLR désigne le nombre de chiffres restant à calculer pour avoir K chiffres dans A.

b) Programmation machine (programme IV)

Le programme machine a été écrit pour $P(J) = J^2$ et $J \leq 10^{10}$ car le résultat d'une multiplication ne peut dépasser 20 chiffres sans précautions préalables ; pour $K = 4$ on peut ainsi engendrer environ 10^{10} termes de la table. Le temps de calcul de chacun des termes est faible (inférieur à la seconde) quant au nombre de positions mémoire occupées, il est d'environ 600.

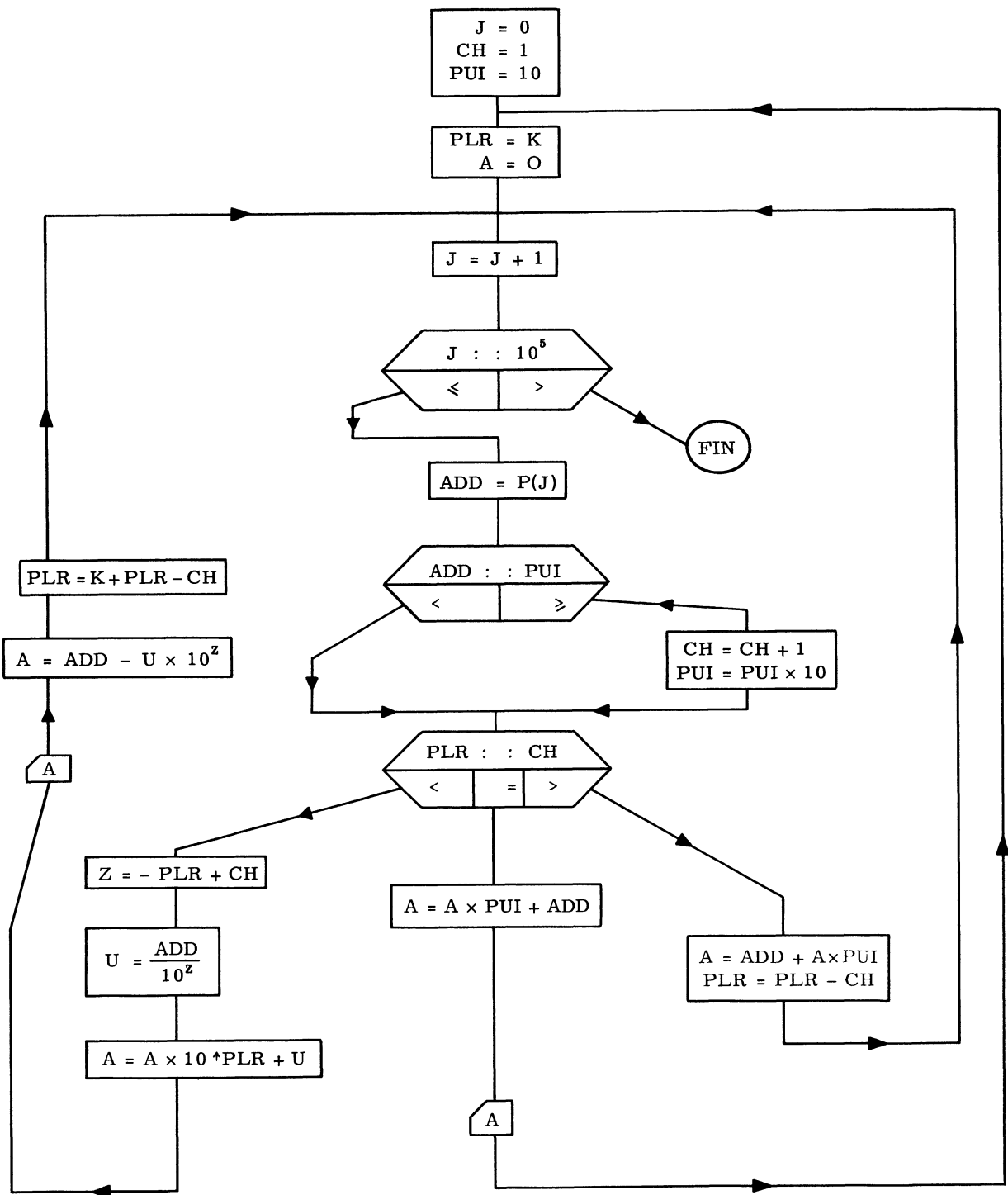
L'organigramme de calcul est celui de la page 48.

II - CONSTRUCTION DE r SUITES EQUIREPARTIES ET INDEPENDANTES DANS G_k (programme V)

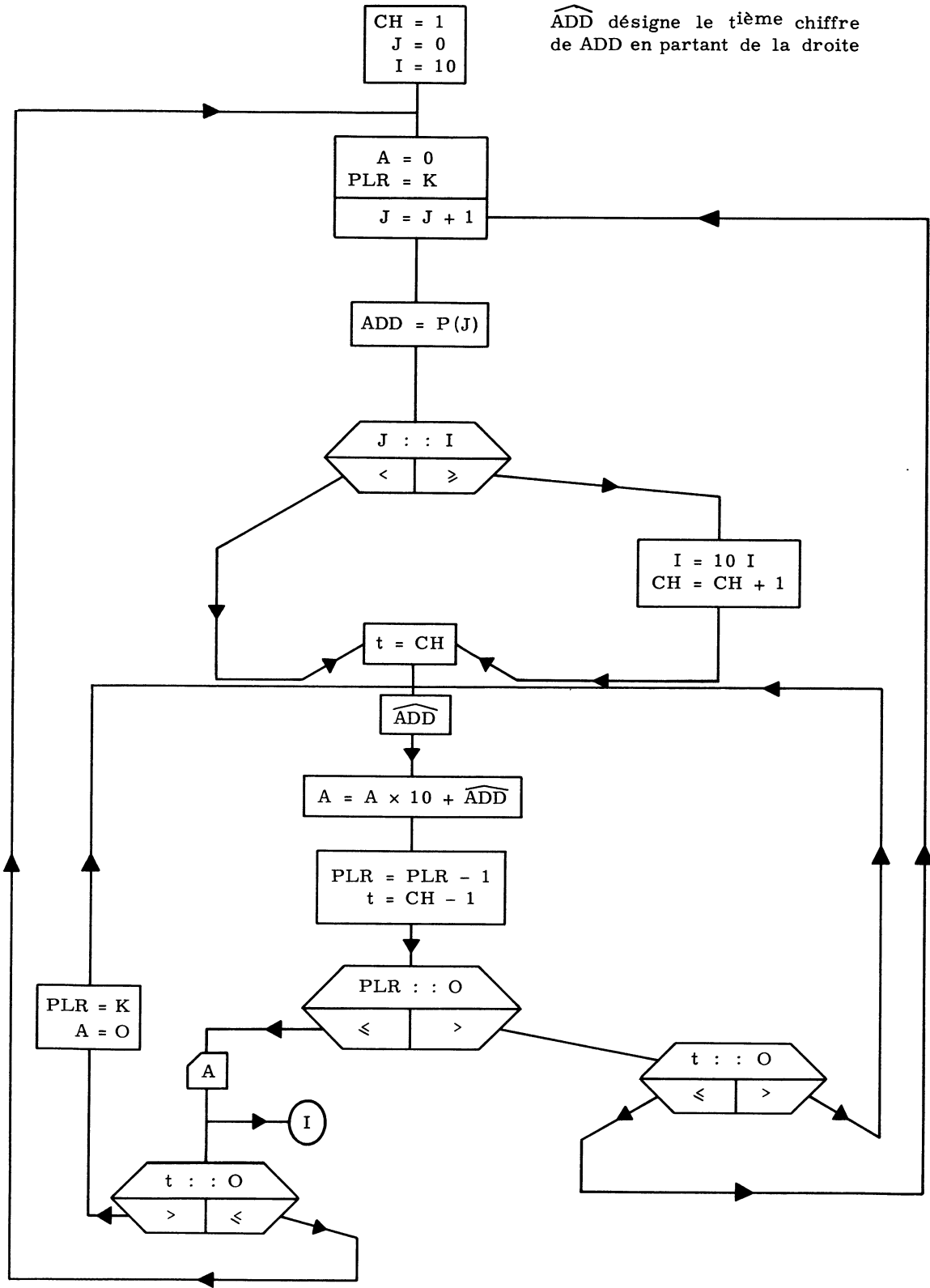
Nous avons vu dans un chapitre précédent comment on pouvait construire de telles suites à partir d'un nombre normal :

$$a = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l, \dots$$

Il suffit de construire la "chenille" de rang k r :



\widehat{ADD} désigne le $t^{\text{ième}}$ chiffre de ADD en partant de la droite



$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{kr}}{A_1}, \frac{\alpha_2 \dots \alpha_{kr+1}}{A_2}, \dots, \frac{\alpha_i \dots \alpha_{kr+i-1}}{A_i}$$

Remarquons que le premier terme A_1 de cette "chenille" étant construit en passe du terme A_1 au terme A_{i+1} en décalant A_1 d'une position à gauche et en remplaçant la position ainsi libérée à droite par le $(rk + i)$ ème chiffre du développement de α .

La première partie de l'organigramme sera identique à celui décrit précédemment (calcul de A_1), mais on sortira par la branche notée [I] dès que A_1 est fini de calculer pour poursuivre par l'organigramme de la page suivante.

EXEMPLES D'APPLICATIONS

VECTEUR GAUSSIEN ; CHAINE DE MARKOFF

Nous allons donner deux exemples de procédures utilisant respectivement les suites construites à partir des polynomes de WEYL et de nombre normal ;

a) Vecteur Laplacien de matrice de covariance circulante (programme VI)

Cette procédure, associée à la procédure POLWEYL décrite précédemment, calcule les $R = 2 P$ composantes d'un vecteur gaussien Y , de matrice de covariance C IR donnée.

Les cinq paramètres de cette procédure sont :

- Y tableau réel (1 : R)
- R dimension
- K entier et X tableau entier, même définition que dans la procédure POLWEYL
- CIR tableau réel (1 : P + 1) définissant la matrice de covariance. A l'intérieur de cette procédure, on trouvera une déclaration de procédure VALPRO, qui calcule les valeurs propres de CIR.

Le vecteur gaussien centré normé V [I] nécessaire au calcul, est construit à l'intérieur de la procédure elle-même par les formules définies page 19 puisque l'on a pris $R = 2 P$.

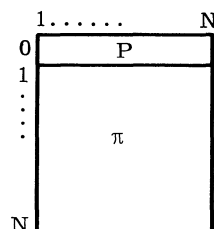
b) Chaîne de MARKOFF stationnaire (programme VII)

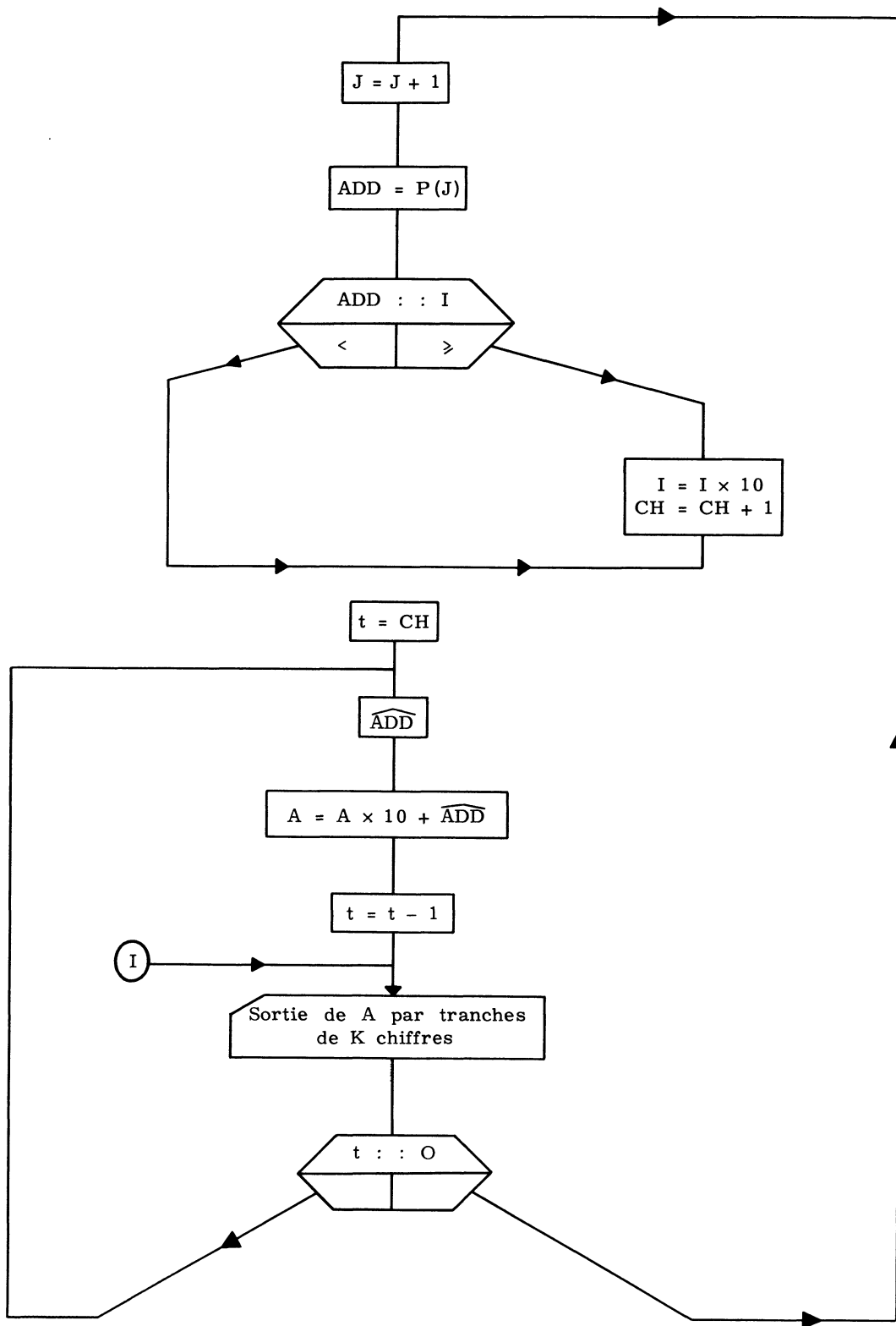
Associant à cette procédure MARKOFF, la procédure NOMNOR explicitée précédemment, on construit les états successifs d'une chaîne de MARKOFF stationnaire.

Les paramètres de cette procédure, au nombre de 3, sont :

- PI entier tableau (0 : N ; 1 : N) ; la chaîne de MARKOFF que l'on simule a N états possibles ; elle est définie par la matrice de passage Π et les probabilités initiales P , Les probabilités de transition ayant un développement décimal d'au plus K chiffres, on les écrira sous forme entière (on supprime le 0 et la virgule).

Le tableau PI est alors le suivant :





- Z entier, représente l'état. Lors du premier appel de la procédure doit être égal à 0.
- A entier de K chiffres, calculé à partir de la procédure NOMNOR.

c) La programmation des autres processus (processus de POISSON, de LAPLACE MARKOFF) étant très simple, nous n'avons pas jugé utile de publier les procédures correspondantes (cf. page 17).

APPROXIMATION EN LOI

I - MEILLEURE APPROXIMATION ($F(x) = 1 - c e^{-cx}$ programme VIII ; $F(x) = x^c$ programme IX)

Soit N le nombre de points cherchés et c le paramètre de la loi F donnée.

Le calcul des $a_j(D) = Z$ étant fait à l'aide d'une procédure REC (J, D, Z), on résoudra l'équation en D :

$$\text{REC}(N, D, Z) = 1 \quad (1)$$

Pour ce faire, nous avons procédé par dichotomie sur l'intervalle $[0, 1/2N]$, le test d'arrêt étant $\text{REC}(N, D, Z) - 1 \leq \text{EPS}$ donné. Cette résolution pourra être faite par tout autre procédé itératif et en particulier, pour $F(x) = 1 - c e^{-cx}$ on pourra prendre comme valeur de départ $\frac{\text{Log}(1+c)}{2cN}$ (cf. page 34).

Soit U la racine de l'équation (1), l'abscisse X des points et leur pondération A seront calculés par les formules de la page 33.

Etant donné la simplicité de la mise en œuvre de ces formules, lorsque U est calculé, nous n'avons pas jugé utile d'écrire ce calcul sous forme de procédure, nous donnons simplement un exemple d'utilisation.

II - APPROXIMATION EN LOI, SANS PONDERATION (programme X)

Nous calculons les N points d'abscisse X grâce aux formules de la page 34. Pour chaque point, nous aurons à résoudre l'équation :

$$\text{REC}(I, D, Z) = a_1(D) = \frac{i}{N}$$

On a alors $T = \rho(G_N^*, F) = \max(u)$.

PROGRAMME I

```

PROCEDURE POLWEYL (A, X, R, K, M) ; ENTIER TABLEAU A, X ; ENTIER R, M, K ;
DEBUT ENTIER J, D ; D := 0 ;
  POUR J := M + N PAS -1 JUSQUA 1 FAIRE
    DEBUT X[J] := A[J] + X[J] + D ;
      SI X[J] < 10 ^ K ALORS
        DEBUT D := 0 ; ALLER A FIN ; FIN ;
        X[J] := X[J] - 10 ^ K ; D := 1 ;
    FIN : FIN ;
FIN
```

Exemple d'utilisation

```
DEBUT PROCEDURE POLWEYL (A, X, R, K, M) ; ENTIER TABLEAU A, X ; ENTIER R, M, K ;  
  DEBUT  
    :  
    FIN ;  
  ENTIER M, N, K, R ; LIRE (M, N, K, R) ;  
  DEBUT ENTIER TABLEAU A, X [1 : M + R] ; ENTIER I, J ;  
    POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA M + R FAIRE  
      DEBUT LIRE (A [I]) ; X[I] := 0 ; FIN ;  
      POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE  
        DEBUT POLWEYL (A, X, R, K, M) ;  
          POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA R FAIRE  
            IMPRIMER (X[J]) ;  
          FIN ;  
        FIN ;  
      FIN ;  
  FIN
```

Données

R = 0000000004	M = 0000000002	K = 0000000002
N = 0000010000	A [1] = 0000000014	A [2] = 0000000015
A [3] = 0000000092	A [4] = 0000000065	A [5] = 0000000035
A [6] = 0000000089		

Résultats

```
0000000014  
0000000015  
0000000092  
0000000065  
  
0000000028  
0000000031  
0000000085  
0000000030  
  
0000000042  
0000000047  
0000000077  
0000000096  
  
0000000056  
0000000063  
0000000070  
0000000061
```

PROGRAMME N° II

03000	32	02910	00000)	définition d'une zone de zéro
03012	36	03008	00100)	entrée par ME de K et K-1 avec 2 chiffres au plus
03024	36	03213	00100)	entrée par ME de R avec 3 chiffres " "
03036	36	02810	00100)	entrée par ME de A avec 100 chiffres "
03048	22	03162	03011)	définition de la zone d'impression
03060	32	02990	00000)	définition de I qui compte le nombre de termes calculés
03072	11	02999	00001)	I = I + 1
03084	21	03155	03011)	on fixe la longueur de chaque coordonnée
03096	49	03276	00000)	saut vers le calcul de φ(I)
03108	16	03071	00000)	définition d'un compteur de coordonnées C
03120	11	03071	00001)	C = C + 1
03132	32	00000	00000)	définition de la Cième coordonnée
03144	26	03358	00000)	sortie de cette coordonnée
03156	38	03358	00100)	
03168	34	00000	00101)	
03180	21	03155	03009)	
03192	21	03138	03009)	progression d'adresse pour le calcul de la C + 1 ^{ème} coordonnée
03204	14	03071	00000)	test de dernière coordonnée C : : R
03216	47	03120	01300)	
03228	16	03155	00000)	réinitialisation du calcul des coordonnées
03240	16	03138	00000)	
03252	34	00000	00102)	
03264	49	03072	00000)	Saut vers Calcul de I + 1 terme
03276	23	02999	02999)	I ²
03288	26	02809	00099)	
03300	26	00079	02989)	Calcul de φ(I)
03312	23	02909	02809)	A I ²
03324	49	03108	00000)	

Exemple d'utilisation

Les tables et les programmes étant en mémoire, taper au clavier l'instruction 49 03000 00000 RS.

On introduit alors les données suivantes :

K suivi de K-1 0302 RS

R 010 RS

A avec le nombre de chiffres convenable : (40 chiffres = 3 × 10 + 2 × 5 on calculera alors T = 10⁵ termes ; on a pris dans cet exemple les 40 premières décimales de Π).

1415926535897932384626433832795028841971 RS

On obtient les résultats suivants :

141 592 653 589 793 238 462 643 383 279
 566 370 614 359 172 953 850 573 533 118
 274 333 882 308 139 146 163 790 449 515
 265 482 457 436 691 815 402 294 132 472
 539 816 339 744 830 961 566 084 581 987

PROGRAMME III

```

PROCEDURE NOMNOR (K, IND, A) ; ENTIER K, A, IND ;
DEBUT ENTIER CH, PUI, ADD, PLR, J, R, Z, U ;
    SI IND = 1 ALORS ALLER A ENTREE SINON
    SI IND = 2 ALORS ALLER A UN SINON
    DEBUT A := U ; ALLER A TROIS ; FIN ;
    ENTREE : CH := 1 ; J := 0 ; PUI := 10 ;
    UN : PLR := K ; A := 0 ;
    TROIS : J := J + 1 ; ADD := J × J ; SI ADD < PUI ALORS ALLER A
    QUATRE ; CH := CH + 1 ; PUI := PUI × 10 ;
    QUATRE : SI PLR > CH ALORS ALLER A SEPT SINON
        SI PLR < CH ALORS ALLER A SIX SINON ALLER A CINQ ;
    SEPT : A := A × PUI + ADD ; PLR := PLR - CH ; ALLER A TROIS ;
    CINQ : A := A × PUI + ADD ; IND := 2 ; ALLER A FIN ;
    SIX : R := CH - PLR ; Z := 10 ↑ R ; U := ADD ÷ Z ;
    A := A × (10 ↑ PLR) + U ; PLR := K - R ; U := ADD - U × Z ; IND := 3 ;
FIN : FIN

```

Exemple d'utilisation

```

DEBUT PROCEDURE NOMNOR (K, IND, A) ; ENTIER K, A, IND ;
    DEBUT
        FIN ;
    ENTIER A, K, IND, I, T ; LIRE (K, N) ; IND := 1 ;
    POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
    DEBUT NOMNOR (K, IND, A) ; IMPRIMER (A) ; FIN ;
FIN

```

Pour K = 4, on a les résultats suivants :

```

0000001491
0000006253
0000006496
0000004811
0000000012
0000001144
0000001691
0000009622
0000005256

```

PROGRAMME N° IV

00892	16	00839	00010)	
00904	32	00820	00000		zone de comparaison
00916	33	00838	00000		I = 10 avec 20 chiffres
00928	32	00810	00000		zone de R A Z
00940	36	01020	00100		entrée de K avec 2 chiffres
00952	22	01234	01021		calcul zone de sortie
00964	32	00780	00101		J = 0
00976	26	00890	00819		A = 0
00988	26	01023	01021		PLR = K
01000	11	00789	00001		J = J + 1
01012	49	01348	00000		Saut vers calcul de P(J)

PROGRAMME IV - (Suite)

01024	24	00839	00809] >	P(J) : J
01036	46	01108	01100		←
01048	11	00975	00001	←	CH = CH + 1
01060	13	00839	00010)	I × 10
01072	32	00080	00000		
01084	26	00839	00099		
01096	41	00000	00000	←	t = CH
01108	26	00973	00975		
01120	16	01246	00810)	\widehat{ADD}
01132	22	01246	00973		
01144	13	00890	00010)	10 A
01156	26	00890	00099		
01168	25	00890	01246		A + \widehat{ADD}
01180	12	01023	00001		PLR - 1
01192	12	00973	00001		t - 1
01204	14	01023	00000		PLR : : 0
01216	46	01312	01100) =	←
01220	38	00891	00100)	
01240	34	00000	00108)	Sortie
01252	14	00973	00000)	t : : 0
01264	47	00976	01100)	t ≠ 0 A = 0
01276	26	00890	00819		PLR = K
01288	26	01023	01021		
01300	49	01120	00000		
01312	14	00973	00000)	t : : 0
01324	46	01120	01100)	
01336	49	01000	00000		
01348	23	08789	00789)	P(J) = J ²
01360	26	00809	00099)	
01372	49	01024	00000)	

Exemple d'utilisation

Les tables et les programmes étant en mémoire, on démarre le calcul par l'instruction ;
49 00892 00000 RS

On tape ensuite K = 04 par exemple et on a les résultats suivants :

1491	6253	6496	4811	0012	1144	1691	9622
5256	2893	2436	1400	4414	8452	9576	6256
7672	9784	8419	0096	1102	4108	9115	6122
5129	6136	9144	4152	1160	0168	1176	4184
9193	6202	5211	6220	9230	4240	1250	0260
1270	4280	9291	6302	5313	6324	9336	4348
1360	0372	1384	4396	9409	6422	5435	6448
9462	4476	1490	0504	1518	4532	9547	6562
5577	6592	9608	4624	1640	0656	1672	4688
9705	6722	5739	6756	9774	4792	1810	0828

PROGRAMME N° V

03000	16	02999	00010)		
03012	33	02998	00000			Définition d'une constante C = 10 avec 20 chiffres
03024	32	01980	00000)		
03036	36	03022	00100			Entrée de K avec 2 chiffres
03048	36	02019	00100		Entrée de R chiffres avec 3 chiffres	
03060	23	03023	03021)		
03072	26	03503	00099			PLR = R × K
03084	22	03143	00099		Calcul adresse de gauche de A	
03096	26	03117	03023)		
03108	12	03117	00001			Calcul de K - 1
03120	22	03522	03117		Calcul zone d'impression	
03132	32	02970	02950		J = 0	
03144	11	02979	00001		J = J + 1	
03156	49	03660	00100		Saut vers calcul de P(J)	
03168	24	02999	02969)	ADD :: I	
03180	46	03240	01100		=]	
03192	11	03165	00001	←]	CH = CH + 1	
03204	13	02999	00010)		
03216	32	00080	00000			I = I × 10
03228	26	02999	00099)		
03240	26	03227	03165			t = CH
03252	16	03035	02970)	<u>ADD</u>	
03264	22	03035	03227			
03276	26	02000	02949)		
03288	26	02948	02000			A = A × 10
03300	25	02949	03035		A = A + ADD	
03312	12	03227	00001		t = t - 1	
03324	12	03503	00001		PLR = PLR - 1	
03336	14	03503	00000)	PLR :: 0	
03348	46	03384	01100		=]	
03360	26	03335	03383	←])	Le calcul du premier terme est achevé on réorganise le programme
03372	49	03420	00000			
03384	14	03237	00000)		
03396	46	03144	01200			t :: 0
03408	49	03252	00000			

PROGRAMME N° V (Suite)

03420	26	03498	03143
03432	26	03546	03143
03444	26	03515	03143
03456	21	03515	03117
03468	16	03599	00000
03480	11	03599	00001
03492	32	00000	00000
03504	26	03718	00000
03516	38	03718	00100
03528	34	00000	00108
03540	33	00000	00000
03552	21	03498	03023
03564	21	03546	03023
03576	21	03515	03023
03588	14	03021	00000
03600	47	03480	01200
03612	32	02940	00102
03624	49	03384	00000
03636	41	00000	00000
03648	41	00000	00000
03660	23	02979	02979
03672	26	02969	00099
03684	49	03168	00000

Sortie de A par tranches de K chiffres

Calcul de $P(J) = J^2$

Exemple d'utilisation

On démarre le calcul en tapant : 49 03000 00000 RS

On tape alors : K (= 04) et R (010)

Les résultats sont les suivants :

1491	6253	6496	4811	0012	1144	1691	9622	5256	2893
4916	2536	4964	8110	0121	1441	6919	6225	2562	8932
9162	5364	9648	1100	1211	4416	9196	2252	5628	9324
1625	3649	6481	1001	2114	4169	1962	2525	6289	3243
6253	6496	4811	0012	1144	1691	9622	5256	2893	2436
2536	4964	8110	0121	1441	6919	6225	2562	8932	4361

PROGRAMME VII

```

PROCEDURE MARKOFF (PI, Z, A) ; ENTIER TABLEAU PI ; ENTIER Z, A ;
DEBUT ENTIER B, I, J ;
      B := 0 ; J := 0 ;
      POUR J := J + 1 TANT QUE B < A FAIRE
      DEBUT B := B + PI [Z, J] ; I := J ; FIN ;
      Z := I ;
FIN

```

Exemple d'utilisation

```

DEBUT PROCEDURE MOMNOR (K, IND, A) ; ENTIER K, A, IND ;
      DEBUT
      |
      FIN ;
      PROCEDURE MARKOFF (PI, Z, A) ; ENTIER TABLEAU PI ; ENTIER Z, A ;
      DEBUT
      |
      FIN ;
      ENTIER K, N ; LIRE (K, N) ;
      DEBUT ENTIER TABLEAU PI [0 : N ; 1 : N] ; ENTIER I, J, Z, A, IND ;
      POUR I := 0 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      LIRE (PI [I, J]) ;
      Z := 0 ; IND := 1 ;
      RETOUR : MOMNOR (K, IND, A) ; MARKOFF (PI, Z, A) ;
      IMPRIMER (Z) ; ALLER A RETOUR ;
      FIN ;
FIN

```

PROGRAMME VI

```

PROCEDURE LAPCIR (Y, R, K, X, CIR) ; TABLEAU Y, CIR ; ENTIER TABLEAU X ;
ENTIER R, K ;
DEBUT REEL PROCEDURE VALPRO (P, Z, CIR) ; REEL P ; TABLEAU CIR ;
      ENTIER Z ;
      DEBUT REEL J ; VALPRO := CIR [0] + CIR [P] × (-1) ^ Z ;
      POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA P - 1 FAIRE
      VALPRO := VALPRO + 2 × CIR [J] × COS (6.28318531 × J × Z/R) ;
      FIN ;
      ENTIER I, J, P ; REEL E, F ; TABLEAU V [1 : R] ;
      POUR J := 1 PAS 2 JUSQUA R - 1 FAIRE
      DEBUT E := X [J] / 10 ^ K ; F := X [J + 1] / 10 ^ K ;
      V [J] := SQRT (2 × LN(E)) × COS (6.28318531 × F) ;
      V [J + 1] := SQRT (2 × LN(E)) × SIN (6.28318531 × F) ;
      FIN ;
      P := R/2 ; POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA R FAIRE
      DEBUT Y [J] := V [1] / SQRT (VALPRO (P, O, CIR) × R) +
      ((-1 ↑ J) × V [P + 1] / SQRT (VALPRO (P, P, CIR) × R)) ;
      POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA P - 1 FAIRE
      Y [J] = Y [J] + SQRT (2/R × VALPRO (P, I, CIR)) ×
      (V [I + 1] × COS (6.28318531 × J × I/R) + V (R - I + 1) ×
      SIN (6.28318531 × J × I/R)) ;
      FIN ;
FIN

```

FIN

Nota

Ce programme n'a pas pu être exploité sur le 1620 car il est trop long. Une mise au point par parties a seulement pu être réalisée.

PROGRAMME VIII

```

DEBUT PROCEDURE REC (J, D, Z) ; REEL J, D, Z ;
Z := (D - 1 + (1 + D) × EXP (2xCxD)) × (1 - EXP(- 2xCxD × J)) / (EXP (2xCxD) - 1) ;
PROCEDURE DICO (REC, X, EPS) ; REEL X, EPS ; PROCEDURE REC ;
DEBUT REEL XA, YA, XB, YB, Y ;
XA := 0 ; YA := - 1 ; XB := 1 / (2xN) ;
RETOUR : REC (N, X, Y) ; Y := Y - 1 ;
SI ABS (Y) < EPS ALORS ALLER A FIN ;
SI Y × YA > 0 ALORS ALLER A UN SINON ALLER A DEUX ;
UN : XA := X ; YA := Y ; ALLER A SAUT ;
DEUX : XB = X ; YB := Y ; SAUT : X := XA - YA × (XB - XA) / (YB - YA) ;
ALLER A RETOUR ;

FIN : FIN ;
REEL C, N, EPS, X, A, U, I ;
LIRE (N, C, EPS) ; DICO (REC, U, EPS) ; IMPRIMER (U) ;
POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT REC (I, U, A) ; X := - LN (1 - A + U) / C - U ;
IMPRIMER (A, X) ;

FIN ;
FIN

```

Exemple d'utilisation N = 400000001 C = 100000001
 EPS = 100000004. On obtient alors : $\rho(F_N^*, F) = 864888401$

$$A \begin{pmatrix} 3180832700 \\ 5856406700 \\ 8106984300 \\ 1000007101 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1769485800 \\ 6049631800 \\ 1201625001 \\ 2361332701 \end{pmatrix}$$

PROGRAMME IX

```

DEBUT PROCEDURE REC (J, D, Z) ; REEL J, D, Z ;
DEBUT REEL K ; Z := 0
POUR K := 1 PAS 1 JUSQUA J FAIRE
Z := ((Z + D) ↑ (1/C) + 2xD) ↑ C + D ;
FIN ;
PROCEDURE DICO (REC, X, EPS) ; REEL X, EPS ; PROCEDURE REC ;
DEBUT
FIN ;
REEL C, N, EPS, X, A, U, I ;
LIRE (N, C, EPS) ; DICO (REC, U, EPS) IMPRIMER (U) ;
POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT REC (I, U, A) ; X := (A - U) ↑ (1/C) - U ;
IMPRIMER (A, X)

FIN ;
FIN

```

Exemples d'utilisation
 1 / N := 400000001 C = 100000001 EPS = 100000004
 On obtient : $\rho(F_N^*, F_N) = \frac{1}{8N} = 625000001$

PROGRAMME IX (Suite)

$$A \begin{cases} \bar{2}5000000\bar{0}0 \\ \bar{5}0000000\bar{0}0 \\ \bar{7}5000000\bar{0}0 \\ \bar{9}9999999\bar{0}0 \end{cases} \quad X \quad \begin{cases} \bar{1}2500000\bar{0}0 \\ \bar{3}7500000\bar{0}0 \\ \bar{6}2500000\bar{0}0 \\ 87499999\bar{0}0 \end{cases}$$

On vérifie que dans ce cas $G_N^* \equiv F_N^*$.

Remarquons que la suite obtenue est de discrédance minimale $(\frac{1}{N})$ (cf. page 26).

$$2/N = \bar{4}0000000\bar{0}1 \quad C = \bar{2}0000000\bar{0}1 \quad EPS = \bar{1}0000000\bar{0}4$$

$$\text{On a alors : } \rho(F_N^*, F) = \bar{5}5769925\bar{0}1$$

$$A \begin{cases} \bar{1}7666272\bar{0}0 \\ \bar{4}0819326\bar{0}0 \\ \bar{6}8412462\bar{0}0 \\ \bar{9}9999232\bar{0}0 \end{cases} \quad X \quad \begin{cases} \bar{2}9192650\bar{0}0 \\ \bar{5}3788262\bar{0}0 \\ \bar{7}3691835\bar{0}0 \\ \bar{9}1594115\bar{0}0 \end{cases}$$

PROGRAMME X

DEBUT PROCEDURE REC (J, D, Z) ; REEL J, D, Z ;
 $Z := I/N - 1 - D - ((I-1)/N + D - 1) \times \text{EXP}(-2xDxC)$;
PROCEDURE DICO (REC, S, EPS) ; REEL X, EPS ; PROCEDURE REC ;
DEBUT REEL Y, YA, YB, XA, XB ;
 $XA := D$; $YA := 1/N$; $X := 1/(2xN)$; RETOUR : REC (I, X, Y) ;
 \vdots
FIN ;
REEL C, N, EPS, X, A, U, I, T ;
LIRE (N, C, EPS) ; $T := 0$;
POUR I : = 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT DICO (REC, U, EPS) ; SI T < U ALORS T : = U ;
 $X := -\text{LN}(1 - U - (I-1)/N) / C + U$; IMPRIMER (X) ;
FIN ;
IMPRIMER (T) ;
FIN

Exemples d'utilisation

$$N := \bar{8}0000000\bar{0}1 \quad EPS = \bar{1}0000000\bar{0}4 \quad C := \bar{1}0000000\bar{0}1$$

$$\text{On obtient alors : } \rho(G_{2N}^*, G) = \bar{5}8828206\bar{0}1 < \rho(F_N^*, F)$$

$$X \begin{cases} \bar{6}5060848\bar{0}1 \\ \bar{2}0823643\bar{0}0 \\ \bar{3}7538230\bar{0}0 \\ \bar{5}7616784\bar{0}0 \\ \bar{8}2762833\bar{0}0 \\ \bar{1}1642902\bar{0}1 \\ \bar{1}6753688\bar{0}1 \\ \bar{2}7743291\bar{0}1 \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BASS J. - *Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires*. Bulletin de la Société Mathématique de France, tome 87, fasc. 1, 1959, p. 1-64.
- *Nombres aléatoires et suites arithmétiques*. Publication de l'I.S.U.P., tome 9, fasc. 3, 1960 - p. 289-325.
- *Les fonctions pseudo-aléatoires* - Mémorial des Sciences Math. - fasc. CLIII - 1962.
- [2] BERTRANDIAS J. P. - *Calcul d'une intégrale au moyen de la suite A_n ; évaluation de l'erreur* - Publication de l'ISUP, tome 9, fasc. 4, 1960 - p. 335-357.
- *Méthodes de Monte Carlo et suites arithmétiques* - Exposé fait à Clermont-Ferrand, octobre 63.
- [3] BESICOVITCH A. - *The asymptotic distribution of the numerals in the decimal representation of the squares of natural numbers* Math 2, tome 39 - 1934 - p. 146-156.
- [3'] BLANC LAPIERRE - *Modèles statistiques pour l'étude des phénomènes de fluctuations* - Masson 1963.
- [4] CASSELS J.W.S. - *An introduction to the diophantine approximation*. Cambridge tracts in Math. and Math. Physics, n° 45, 1957.
- [5] CHAMPERNOWNE D.G. - *The construction of decimals normals in the scale of ten*. Journal of London Math. Soc. ; vol. 8 ; part 4 ; 1933.
- [6] CHAUVINEAU - *Equirépartition et équirépartition uniforme, modulo 1*. Séminaire Delange Pisot ; 3 ; 1961-62 ; n° 7.
- [7] DAVENPORT et ERDOS - *Note on normals decimal*. Canadian Journal of Math ; Vol. IV ; n° 1 ; 1952.
- [8] GIRAULT - *Processus aléatoires*, Dunod.
- [9] HAVEL J. - *An electronic generator of random sequence* (Juin 1959).
- *Devices for checking and further transformations of the output signals from the random sequence generator* (Juin 62).
- Prague conferences in information theory, statistics decisions, random processes. Czechoslovak Academy of Sciences.
- [10] HENNEQUIN P.L. - *Calcul direct des intégrales multiples*. Colloque des Mathématiciens - Moscou 1966.
- [11] HENNEQUIN et TORTRAT - *Théorie des probabilités et quelques applications* - Masson 1966.
- [12] HOFFMAN - *Définition d'un point générique d'un processus stationnaire. Construction d'un point générique d'un processus de Poisson*. Publications du département de Mathématiques, Lyon 1965, t. 2-2 ; page 66.
- [13] KAC - *Statistical independance in probability, analysis and numbers theory*. Carolus Math. Monog. (Wiley and Sons 1959).
- [14] KOKSMA - *Diophantische approximation* ; Berlin ; J. Springer, 1936 ; Ergibnise Math ; 4.
- [15] KOLMOGOROFF - *On tables of random numbers*. Sankhya Ser. ; A 25, 1963 ; pages 369-76.
- [16] LAURENT P.J. - *La méthode de Monte Carlo* - Conférences faites au C.E.N.G., Grenoble 1965.

- [17] MENDES FRANCE - *Nombres normaux et fonctions pseudo-aléatoires*. Annales de l'Institut Fourier, t. 13 ; 1963 ; p. 92-109.
- *Quelques remarques sur la répartition modulo 1 de la suite $x \theta^p$* . Séminaire Delange Pisot, 1964-65 ; n° 11.
- [18] NIJEMRODE LECTURES - *On uniform distribution modulo 1*. Compositio Mathematica, 1964.
- [19] POSTNIKOV A.G. - *Modèles arithmétiques de processus stochastiques*. Travaux de l'Institut de Mathématiques, V.A. Steklov ; Moscou ; 1960.
- [20] SCHMIDT W. - *On normal numbers* - Pacific Journal of Maths - Tome 10 - 1960.
- [21] SYMPOSIUM ON MONTE-CARLO - Methods - Meyer ; New-York ; J. Wiley, 1956.
- [21'] THOMAS G. - *Mise au point d'un programme d'ordonnement. Etude déterministe et étude probabiliste* D.E.S. Math. Appliquées - Juin 1966 - Clermont-Fd.
- [22] VILLE J. - *Etude critique de la notion de collectif*. Gauthier Villars - Paris - 1939.
- [23] WEYL H. - *Ueber die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins*. Math. ann., tome 77, 1916.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION	1
PREMIERE PARTIE	3
- Représentation d'une variable aléatoire par une suite infinie de nombres	3
- Suites équiréparties et théorème de H. WEYL	4
- Nombres normaux	10
- Variable aléatoire de loi donnée	12
- Processus stationnaires	20
- Conclusions sur la représentation d'une variable aléatoire par une suite infinie ...	22
DEUXIEME PARTIE	25
- Meilleure approximation en loi d'une variable aléatoire de loi donnée	25
- Répartition discrète ayant les mêmes premiers moments qu'une répartition donnée	31
- Utilisation des fonctions caractéristiques	36
ANNEXE	39
BIBLIOGRAPHIE	59