

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

JACQUES NEVEU

Chaînes de Markov et théorie du potentiel

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 24, série *Mathématiques*, n° 3 (1964), p. 37-89

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1964__24_3_37_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAINES DE MARKOV ET THÉORIE DU POTENTIEL

Jacques NEVEU

L'objet de cet article d'exposition ⁽¹⁾ est de rassembler en une nouvelle présentation quelques uns des résultats les plus intéressants obtenus ces dernières années (depuis la parution de [3]) dans la théorie des chaînes de Markov définies sur un espace dénombrable d'états. On y trouvera développée la théorie du potentiel markovien dans le cas particulièrement simple où l'espace des états du processus est dénombrable et où le temps est discret ; cette simplicité de la structure du processus présente l'avantage pédagogique de bien faire apparaître les idées fondamentales de la théorie.

Pour ne pas allonger démesurément notre exposé, nous avons supposé le lecteur familier avec les notions fondamentales de la théorie des chaînes de Markov. Nous avons notamment considéré connue la décomposition de l'espace des états d'une chaîne de Markov en classes récurrentes et en une classe transiente et nous nous sommes alors bornés à développer la théorie dans les 2 cas extrêmes d'une chaîne transiente et d'une chaîne récurrente. De plus, pour lire les paragraphes relatifs à la théorie des frontières (§ II,2, II,6, III,3), le lecteur devra connaître la théorie de la représentation intégrale des cônes convexes à base compacte telle qu'elle est exposée par exemple dans [2].

On trouvera dans la table des matières ci-dessous, un bref aperçu des matières traitées. L'omission la plus importante de notre exposé nous semble concerner l'étude des promenades aléatoires récurrentes ; nous n'avons pu l'aborder faute de place et renvoyons le lecteur aux articles de Spitzer pour cette étude.

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	37
PRELIMINAIRES	39
Notations	39
Fonctions aléatoires de Markov	39
ETUDE DU CAS TRANSIENT	43
1/ Décomposition de Riesz des fonctions sur-harmoniques	43
2/ Représentation intégrale des fonctions harmoniques	45
3/ Probabilités d'atteinte et de retour	47
4/ Principes de la théorie du potentiel	50
5/ Processus symétriques. Notion d'Energie	53

(1) La matière de cet article a fait l'objet en automne 1963 d'un séminaire à l'Université de Göttingen et d'une série de conférences à l'Université de Clermont-Ferrand.

	Pages
6/ Théorème de convergence à la frontière	56
7/ Application aux promenades aléatoires	63
ETUDE DU CAS RECURRENT	67
1/ Théorèmes de convergence	68
2/ Matrices potentiel	74
3/ Théorie de la frontière	80
BIBLIOGRAPHIE	89

I - PRÉLIMINAIRES

1 - NOTATIONS -

Dans toute la suite, E désignera un espace dénombrable dont on notera les points (qu'on appellera *états*) par les lettres i, j, k, \dots et les sous-ensembles par les lettres A, B, \dots . On désigne par 1_A la fonction indicatrice du sous-ensemble A , égale par définition à 1 sur A et à 0 sur A^c ; on écrit 1 plutôt que 1_E . On note ε_i la masse unité en l'état i . Le produit scalaire d'une mesure positive f et d'une fonction positive g définies sur E sera noté $\langle f, g \rangle$; on a donc :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i \in E} f(i) g(i) \leq +\infty$$

Une matrice $P = \{P(i, j) ; j \in E\}$ définie sur $E \times E$ est dite positive si $P(i, j) \geq 0$ pour tout $i, j \in E$. Etant donnée une matrice positive P et une mesure positive f (resp. une fonction positive g), on note fP la mesure positive finie ou infinie (resp. Pg la fonction positive finie ou infinie) définie par :

$$fP(j) = \sum_{i \in E} f(i) P(i, j) \quad Pg(i) = \sum_{j \in E} P(i, j) g(j)$$

Il est clair que l'on a toujours : $\langle fP, g \rangle = \langle f, Pg \rangle$, c'est-à-dire que les deux opérateurs associés à la matrice P que nous venons de définir l'un sur les mesures, l'autre sur les fonctions sont transposés l'un de l'autre. Remarquons d'autre part que les notions de mesure et de fonction ne sont pas distinguées sur l'espace discret E que par la manière dont on fait agir sur elles les matrices P ; cette distinction sera commode pour la suite. Néanmoins en passant de la matrice P à sa transposée $P^* = \{P^*(i, j) = P(j, i)\}$ (ce qui reviendra à renverser le sens du temps dans les chaînes aléatoires), on échange entre elles les notions de fonctions et de mesures.

Une matrice positive P est dite markovienne (resp. sous-markovienne) si elle est telle que $P1 = 1$ (resp. $P1 \leq 1$). On désigne par I la matrice identité : $I(i, j) = 1$ si $i = j$, = 0 sinon; la puissance d'exposant nul de toute matrice vaut I . A tout sous-ensemble A de l'espace des états on associe la matrice I_A définie par :

$$I_A(i, j) = 1 \quad \text{si} \quad i = j \in A, = 0 \quad \text{sinon}$$

2 - FONCTIONS ALEATOIRES DE MARKOV -

Soit P une matrice de Markov définie sur l'espace dénombrable E .

Soit $\Omega = E^{\{0, 1, \dots\}}$ l'espace des suites $\omega = \{i_0, i_1, \dots\}$ d'états de E , encore appelées *trajectoires*. On note X_n ($n \geq 0$) les coordonnées de Ω , c'est-à-dire les applications de Ω sur E définies par $X_n(\{i_0, i_1, \dots\}) = i_n$. On munit l'espace Ω de la " σ -algèbre produit" \mathcal{A} qui par définition est la σ -algèbre engendrée par les cylindres :

$$\prod_{m \geq 0} A_m = \{ \omega : X_m(\omega) \in A_m \ (0 \leq m \leq M) \}$$

où A_m est pour tout $m \geq 0$ une partie de E et où $A_m = E$ si m est suffisamment grand, soit si $m > M$. Cette σ -algèbre \mathcal{A} est aussi la plus petite σ -algèbre de \mathcal{A} rendant mesurables les applications coordonnées de Ω sur E (muni de la σ -algèbre de toutes ses parties).

Un théorème classique de la théorie de la mesure dû à Kolmogorov affirme l'existence pour tout $i \in E$, d'une probabilité P_i sur (Ω, \mathcal{A}) univoquement déterminée par sa valeur sur les cylindres :

$$P_i [X_m \in A_m \ (0 \leq m \leq M)] = \sum_{i_0 \in A_0} \dots \sum_{i_M \in A_M} I(i, i_0) P(i_0, i_1) \dots P(i_{M-1}, i_M)$$

La fonction aléatoire $\{X_n, n \geq 0\}$ définie par les coordonnées de Ω sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P_i)$ est appelée *fonction aléatoire (ou chaîne) de Markov d'état initial i et de matrice de transition P* ; on remarquera que effectivement $P_i(X_0 = i) = 1$. Si $E_i(\cdot)$ désigne l'espérance associée à la probabilité P_i , un calcul facile donne l'interprétation probabiliste suivante de l'opérateur P^n agissant sur les fonctions :

$$P^n g(i) = E_i[g(X_n)] \quad (n \geq 0)$$

Plus généralement, on associe à toute probabilité f sur E , une probabilité P_f définie sur (Ω, \mathcal{A}) par :

$$P_f(\cdot) = \sum_{i \in E} f(i) P_i(\cdot)$$

et on dit que $\{X_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov de loi initiale f . On a en effet $P_f(X_0 = i) = f(i)$ et un calcul facile montre que :

$$f P^n(i) = P_f(X_n = i) \quad (n \geq 0)$$

On a donc aussi :

$$E_f[g(X_n)] = \langle f, P^n g \rangle.$$

On définit sur l'espace Ω les opérateurs de translation θ_p ($p \geq 0$) par la formule :

$$\theta_p(\{i_0, i_1, \dots\}) = \{i_p, i_{p+1}, \dots\}$$

Il est clair que $\theta_p \theta_q = \theta_{p+q}$ ($p, q \geq 0$) et que $X_n \circ \theta_p = X_{n+p}$ ($n, p \geq 0$). Si on désigne d'une manière générale par \mathcal{A}_q^p la sous σ -algèbre de \mathcal{A} engendrée par les cylindres $\prod_{m \geq 0} A_m$ ($A_m = E$ si $m \notin [p, q]$) ou, ce qui est équivalent, la plus petite σ -algèbre rendant mesurables les coordonnées X_n ($n \in [p, q]$), il est facile de démontrer le lemme suivant :

LEMME -

Pour qu'une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}) soit \mathcal{A}_∞^n -mesurable, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme $Y \circ \theta_n$ pour une variable aléatoire Y définie sur (Ω, \mathcal{A}) .

(Il revient au même de dire que $\theta_n^{-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_\infty^n$, ainsi qu'on le voit en se restreignant aux variables Y indicatrices d'ensembles).

Les probabilités P_i possèdent alors la propriété suivante, dite *Propriété de Markov* (cas homogène dans le temps) :

Pour toute variable aléatoire réelle \mathcal{A}_∞^n -mesurable et positive, donc de la forme $Y \circ \theta_n$ ($Y \geq 0$) et tout événement $A \in \mathcal{A}_\infty^n$, on a :

$$\int_A Y \circ \theta_n \cdot dP_i = \sum_{j \in E} P_i[A \cap \{X_n = j\}] E_j(Y)$$

En particulier, on a :

$$E_i[Y \circ \theta_n] = \sum_{j \in E} P^n(i, j) E_j(Y)$$

La vérification de cette propriété est immédiate lorsque A est un cylindre de \mathcal{A}_∞^n et Y la fonction indicatrice d'un cylindre dans \mathcal{A} ; l'extension au cas général se fait alors par les méthodes habituelles de prolongement de la théorie de la mesure. On voit ainsi également que dans l'énoncé de la propriété précédente, nous aurions pu remplacer l'événement A par une variable aléatoire réelle positive \mathcal{A}_∞^n -mesurable arbitraire. Inversement, on peut montrer sans difficulté que P_i est l'unique probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) jouissant de la propriété de Markov et telle que :

$$P_i(X_0 = i) = 1, P_i[X_{n+1} = k / X_n = j] = P(j, k) \quad (j, k \in E ; n \geq 0)$$

On peut encore écrire la propriété ci-dessus sous la forme suivante :

$$E_i [Y \circ \theta_n | \mathcal{A}_n^\circ] = E_{x_n} (Y) \stackrel{\text{d'ef}}{=} E_j (Y) \text{ sur } \{X_n = j\}$$

La propriété de Markov ci-dessus exprime donc d'une part que les σ -algèbres \mathcal{A}_n° et \mathcal{A}_∞° sont conditionnellement indépendantes en X_n (indépendance conditionnelle du futur et du passé en le présent) et d'autre part que $E_i [Y \circ \theta_n | \mathcal{A}_n^\circ]$ ne dépend pas explicitement de l'instant n , mais seulement de la variable d'espace X_n (homogénéité dans le temps).

On appelle *temps d'arrêt* sur (Ω, \mathcal{A}) une application ν de Ω dans $\{0, 1, \dots, +\infty\}$ telle que $\{\nu = n\} \in \mathcal{A}_n^\circ$ pour tout $n \geq 0$. Le temps d'atteinte ν_A d'une partie A de E constitue l'exemple fondamental d'un temps d'arrêt ; on a en effet :

$$\{\nu_A = n\} = \{X_m \notin A \ (m < n), X_n \in A\} \ (0 \leq n < \infty)$$

On convient de poser $\nu_A = \infty$ sur l'évènement $\{X_n \notin A \ (n \geq 0)\}$. La définition suivante de la σ -algèbre des évènements antérieurs à ν :

$$\mathcal{A}_\nu^\circ = \{A : A \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad A \cap \{\nu = n\} \in \mathcal{A}_n^\circ \text{ pour tout } n \geq 0\}$$

est naturelle et légitime puisque si $\nu = n$ sur Ω on a $\mathcal{A}_\nu^\circ = \mathcal{A}_n^\circ$. Il n'y a alors aucune difficulté à généraliser la propriété de Markov ci-dessus au cas où ν est un temps d'arrêt. On définira d'abord sur l'ensemble $\{\nu < \infty\}$:

- a) l'opérateur de translation θ_ν , en posant $\theta_\nu(\omega) = \theta_n(\omega)$ si $\nu(\omega) = n$ ($0 \leq n < \infty$) ;
- b) la variable aléatoire réelle $Y \circ \theta_\nu$, par $Y \circ \theta_\nu = Y \circ \theta_n$ sur $\{\nu = n\}$ lorsque $n < \infty$;
- c) la variable aléatoire réelle X_ν , par $X_\nu = X_n$ sur $\{\nu = n\}$ lorsque $n < \infty$. On conviendra que toute probabilité et toute espérance faisant intervenir l'une de ces quantités est restreinte à l'ensemble $\{\nu < \infty\}$ sans que cela soit indiqué explicitement.

Sous cette convention, on peut alors énoncer la *propriété de Markov forte* :

Pour toute variable aléatoire réelle Y positive définie sur (Ω, \mathcal{A}) , pour tout temps d'arrêt ν et tout évènement $A \in \mathcal{A}_\nu^\circ$, on a la formule :

$$\int_A Y \circ \theta_\nu \, dP_i = \sum_{j \in E} P_i [A \cap \{X_\nu = j\}] E_j(Y)$$

En particulier :

$$E_i(Y \circ \theta_\nu) = \sum_{j \in E} P(X_\nu = j) E_j(Y)$$

Cette propriété s'obtient en écrivant la propriété de Markov pour l'évènement $A \cap \{\nu = n\}$ et la variable $Y \circ \theta_n$ et en sommant sur n ($0 \leq n < \infty$). Dans la suite, nous utiliserons par exemple la formule suivante valable lorsque g est une fonction positive définie sur E :

$$\int_{\{x_\nu \in A\}} \left[\sum_{n \geq \nu} g(X_n) \right] dP_i = \sum_{j \in A} P_i(X_\nu = j) E_j \left[\sum_{n \geq 0} g(X_n) \right] \quad (A \subset E)$$

que l'on obtient à partir de ce qui précède en remarquant que :

$$\sum_{n \geq 0} g(X_n) \circ \theta_\nu = \sum_{n \geq \nu} g(X_n)$$

Remarque.

On prendra garde que la σ -algèbre $\theta_\nu^{-1}(\mathcal{A})$ de parties de $\{\nu < \infty\}$ formée des évènements postérieurs à ν n'est pas égale à la classe :

$$\{A : A \cap \{\nu = n\} \in \mathcal{A}_n^\circ \text{ pour tout } n \geq 0\}$$

Les considérations précédentes peuvent s'étendre par un artifice au cas où la matrice P est sous-markovienne sans être markovienne. En ajoutant en effet un état, soit e , à l'espace E et en définissant la matrice markovienne P' sur $E + \{e\}$ par :

$$\begin{aligned}
P'(i, j) &= P(i, j), & P'(i, e) &= 1_e - P 1_e(i), \\
P'(e, j) &= 0, & P'(e, e) &= 1
\end{aligned}$$

où $i, j \in E$. On voit facilement que pour tout $n > 0$, la restriction à E de $(P')^n$ vaut P^n (plus généralement $(P')^n$ et P^n sont liées par les mêmes relations que P' et P) ; cela permet de ramener toute question concernant les matrices $(P')^n$ en une question concernant les matrices P^n . On remarquera aussi que l'état e est un état absorbant pour les fonctions aléatoires de Markov de matrice de transition P' , au sens où $P_i [X_n = e \text{ si } n \geq v_{\{e\}}] = 1$.

II - ÉTUDE DU CAS TRANSIENT

Soit P une matrice sous-markovienne définie sur un espace dénombrable E et telle que :

$$G = \sum_{n \geq 0} P^n < \infty$$

On sait que cette condition de finitude de la matrice G équivaut à l'absence d'états récurrents. On appelle G la matrice potentiel ; il est clair qu'elle vérifie les relations :

$$I + P G = G = I + G P$$

1 - DECOMPOSITION DE RIESZ DES FONCTIONS SUR-HARMONIQUES -

Les définitions et les résultats de ce paragraphe n'utiliseront pas l'hypothèse $P 1 \leq 1$; pour cette raison, tout ce qui sera dit ci-dessous des fonctions s'appliquera par transposition aux mesures.

Une fonction réelle f définie sur E est dite *harmonique* (resp. *sur-harmonique*) si elle vérifie :

$$0 \leq f < \infty \quad \text{et} \quad P f = f \quad (\text{resp. } P f \leq f)$$

On appelle *potentiel de la fonction* positive u , la fonction $G u$ lorsque celle-ci est finie partout ; en particulier toute fonction positive de support fini possède un potentiel. (Notre convention de ne considérer que des potentiels finis est essentielle pour la validité des résultats qui vont suivre).

Tout potentiel $G u$ définit une fonction sur-harmonique puisque $P(G u) = G u - u \leq G u$. Inversement on a le résultat fondamental suivant :

DECOMPOSITION DE RIESZ -

Toute fonction sur-harmonique f se décompose d'une et d'une seule manière en la somme d'un potentiel et d'une fonction harmonique : $f = G u + f'$; on a d'ailleurs nécessairement $u = f - P f$ et $f' = \lim_{n \uparrow \infty} \downarrow P^n f$ dans cette décomposition.

Démonstration.

Posons $u = f - P f \geq 0$; on a alors $\sum_{m < n} P^m u = f - P^n f$. Lorsque $n \uparrow \infty$, le premier membre croît vers $G u$ tout en restant majoré par f ; la fonction $G u$ est donc finie et on a : $G u = f - f'$ si on pose $f' = \lim_{n \uparrow \infty} \downarrow P^n f \geq 0$. De plus la fonction f' est harmonique puisque :

$$P f' = P \left(\lim_{n \uparrow \infty} \downarrow P^n f \right) = \lim_{n \uparrow \infty} \downarrow P^{n+1} f = f'$$

Pour démontrer l'unicité de cette décomposition, remarquons que l'égalité $f = G u^* + f'^*$ ou u^* est une fonction positive et f'^* une fonction harmonique, entraîne que $P f = P G u^* + P f'^* = G u^* - u^* + f'^*$ et donc que $u^* = f - P f = u$. On a alors évidemment aussi : $f' = f - G u^* = f - G u = f'$.

COROLLAIRE 1 -

Toute fonction sur-harmonique f majorée par un potentiel est elle-même un potentiel ; toute fonction harmonique majorée par un potentiel est identiquement nulle.

Démonstration.

Si la fonction sur-harmonique f est telle que $f \leq G v < \infty$ pour une fonction positive v , on a :

$$P^n f \leq P^n G v = \sum_{m \geq n} P^m v \downarrow 0 \quad (n \uparrow \infty)$$

La décomposition de Riesz montre alors que $f = G[f - P f]$. Si f est même harmonique, on trouve ainsi que $f = G O = 0$.

COROLLAIRE 2 -

(Principe de l'enveloppe inférieure) - L'enveloppe inférieure d'une famille de potentiels est elle-même un potentiel.

Cette enveloppe inférieure est manifestement sur-harmonique et d'après le corollaire 1 ne peut-être alors qu'un potentiel.

COROLLAIRE 3 -

Deux fonctions positives ayant le même potentiel sont égales.

Cela résulte immédiatement de l'unicité de la décomposition de Riesz (ou par un calcul direct de $u = G u - P G u$).

COROLLAIRE 4 -

Dans l'espace vectoriel des fonctions réelles sur E, l'ensemble C des fonctions sur-harmoniques est un cône convexe pointé, saillant qui est réticulé pour son ordre propre.

(On rappelle dans la démonstration ci-dessous la signification des termes précédents).

Démonstration.

Il est clair que toute combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions sur-harmoniques est encore sur-harmonique ; ces fonctions forment donc un cône convexe de sommet O, soit C. De plus O est sur-harmonique (= C est pointé) et le cône C ne contient aucune droite (= C est saillant) car f et $-f$ ne peuvent être à la fois sur-harmoniques que si $f = 0$.

A tout cône convexe pointé saillant C de l'espace vectoriel des fonctions réelles sur E on associe la relation d'ordre sur cet espace (et en particulier sur C) définie par : $f \underset{C}{\leq} f'$ si $f' - f \in C$; cette relation d'ordre est compatible avec la structure vectorielle de l'espace au sens où $f \underset{C}{\leq} f' \implies f + g \underset{C}{\leq} f' + g$ et $cf \underset{C}{\leq} cf'$ quelle que soit la fonction g et quel que soit la constante $c \geq 0$.

Dans le cas du cône C des fonctions sur-harmoniques, montrons que sur C cette relation d'ordre équivaut à la relation suivante : si f et f' sont sur-harmoniques, on a $f \underset{C}{\leq} f'$ si et seulement si $u \leq u'$ et $h \leq h'$ (sur E) où $f = G u + h$ et $f' = G u' + h'$ sont les décompositions de Riesz de f et f' .

En effet, on a $f \underset{C}{\leq} f'$ par définition si $f' - f \geq 0$ sur E et si $P(f' - f) \underset{C}{\leq} f' - f$; or, si $f = G u + h$ et $f' = G u' + h'$ sont les décompositions de Riesz de f et f' , on a :

$$(f' - f) - P(f' - f) = (f' - P f') - (f - P f) = u' - u, \\ \lim \downarrow P^n(f' - f) = \lim \downarrow P^n f - \lim \downarrow P^n f' = h' - h$$

et donc $u' \geq u$, $h' \geq h$ sur E. Inversement si $u \leq u'$ et $h \leq h'$, sur E, on a :

$$f' - f = G(u' - u) + (h' - h)$$

ce qui montre que $f' - f$ est la somme d'un potentiel d'une fonction positive et d'une fonction harmonique, donc que $f' - f \in C$.

On notera que la relation d'ordre $f \underset{C}{\leq} f'$ est plus forte que la relation d'ordre $f \leq f'$ sur E (il ne suffit pas que la fonction sur-harmonique f soit majorée sur E par la fonction sur-harmonique f' pour que $f' - f$ soit sur-harmonique). On vérifiera néanmoins facilement que si la fonction f est harmonique, les relations $f \underset{C}{\leq} f'$ et $f \leq f'$ sur E sont équivalentes pour toute fonction sur-harmonique f' .

Le cône convexe pointé, saillant C est dit réticulé pour son ordre propre, si deux éléments quelconques f et f' de ce cône admettent une borne supérieure, notée $f \vee f'$ et une borne inférieure, notée $f \wedge f'$, pour l'ordre défini ci-dessus. Par définition la fonction $f \vee f'$ est donc la fonction de C définie lorsqu'elle existe par :

$$g - f \in C, g - f' \in C \iff g - (f \vee f') \in C \quad \text{pour tout } g \in C ;$$

On voit immédiatement que cette fonction est unique dès qu'elle existe. La fonction $f \wedge f'$ est

définie d'une manière analogue. L'existence de $f \vee f'$ entraîne d'ailleurs celle de $f \wedge f'$; on le voit en établissant la validité de la formule : $f \vee f' + f \wedge f' = f + f'$.

Dans le cas du cône C des fonctions sur-harmoniques, montrons d'abord que la formule suivante définit la borne supérieure dans C de 2 fonctions harmoniques h et h' :

$$h \vee h' = \lim_{n \uparrow \infty} P^n[\max(h, h')]$$

Remarquons en effet que l'inégalité $P[\max(h, h')] \geq \max(Ph, Ph') = \max(h, h')$ entraîne que la suite $P^n[\max(h, h')]$ croît avec n ; la limite h'' de cette suite est finie puisque $P^n[\max(h, h')] \leq P^n(h+h') = h+h'$, et définit une fonction harmonique majorant évidemment h et h' sur E . Par suite $h'' \underset{c}{\geq} h$ et $h'' \underset{c}{\geq} h'$. Inversement si $g \in C$ majore h et h' sur E ($\iff g \underset{c}{\geq} h$ et $g \underset{c}{\geq} h'$), on a sur E : $g \underset{c}{\geq} \max(h, h')$ et par conséquent :

$$g \underset{c}{\geq} \lim_{n \downarrow} P^n g \underset{c}{\geq} \lim_{n \downarrow} P^n [\max(h, h')] = h''$$

il en résulte que $g \underset{c}{\geq} h''$. On a démontré ainsi que $h'' = h \vee h'$.

Montrons enfin que la borne supérieure dans C de 2 fonctions sur-harmoniques f et f' est donnée par la formule :

$$f \vee f' = G[\max(u, u')] + h \vee h'$$

si $f = Gu + h$ et $f' = Gu' + h'$ désignent les décompositions de Riesz de f et f' . En effet si $g = Gv + k$ est une fonction sur-harmonique, il résulte de ce qui précède que les 2 relations $g \underset{c}{\geq} f$, et $g \underset{c}{\geq} f'$ équivalent à : $v \underset{c}{\geq} u$, $k \underset{c}{\geq} h$, $v \underset{c}{\geq} u'$ et $k \underset{c}{\geq} h'$ sur E , c'est-à-dire à $v \underset{c}{\geq} \max(u, u')$ et $k \underset{c}{\geq} h \vee h'$.

2 - REPRESENTATION INTEGRALE DES FONCTIONS HARMONIQUES -

Soit μ une mesure de probabilité sur E dont le potentiel μG soit strictement positif sur E . Cette dernière condition est automatiquement réalisée

a) lorsque la mesure μ est elle-même strictement positive sur E , puisque $\mu G \geq \mu$;

b) lorsque $\mu = \varepsilon_i$ et l'état i est un "centre" pour le processus au sens où $\sup_{n \geq 0} P^n(i, j) > 0$ pour tout $j \in E$ (tout état peut être atteint à partir de i avec une probabilité positive).

Remarque.

Si on se donne une mesure de probabilité μ telle que μG ne soit pas strictement positif, la théorie qui suit est néanmoins applicable à condition de restreindre l'espace E au sous-espace $E_\mu = \{\mu G > 0\}$; il est facile de voir que si $i \in E_\mu$, $P(i, \cdot)$ est concentrée sur E_μ et il s'en suit que $P^n(i, \cdot)$ et $G(i, \cdot)$ sont identiques lorsque $i \in E_\mu$, à la même puissance, resp. au potentiel de la restriction à E_μ de P , soit $\{P(i, j) ; i, j \in E_\mu\}$.

Nous allons donner dans ce paragraphe, à l'aide de théorèmes de Choquet, une représentation intégrale du cône C_μ des fonctions sur-harmoniques f sur E , intégrables par rapport à μ ($\sum_E \mu(i) f(i) < \infty$). Ce cône C est un sous-cône convexe pointé, saillant, réticulé pour son ordre propre du cône C des fonctions sur-harmoniques ; dans le cas où il est possible de choisir μ à support fini, on a même $C_\mu = C$.

Nous désignerons par C_μ^1 le sous-ensemble convexe des fonctions sur-harmoniques telles que $\sum_E \mu(i) f(i) \leq 1$. Le lemme de Fatou permet de montrer facilement que cet ensemble est compact pour la topologie de la convergence ponctuelle sur E ; il est évidemment aussi métrisable pour cette topologie.

Intéressons-nous alors aux éléments extrémaux de C_μ^1 (ce qui équivaut à s'intéresser aux génératrices extrémales de C_μ). Il est d'abord clair que 0 est extrémal dans C_μ^1 et que tout autre élément extrémal f est tel que $\sum_E \mu(i) f(i) = 1$ (si $\sum_E \mu(i) f(i) = \rho < 1$, on a $f = \rho \left(\frac{1}{\rho} f\right) + (1 - \rho) 0$ dans C_μ^1 et f ne peut être extrémal sans être nul). Montrons ensuite que pour tout $j \in E$ le potentiel :

$$K(., j) = G(., j) \frac{1}{\mu G(j)}$$

est extrémal dans C_μ^1 . Si f_ρ ($\rho = 1, 2$) sont 2 fonctions dans C_μ^1 telles que $\frac{1}{2}(f_1 + f_2) = K(., j)$, il résulte d'abord des inégalités $f_\rho \leq 2K(., j)$ que les f_ρ sont des potentiels, soient $f_\rho = G u_\rho$ où $u_\rho \geq 0$ ($\rho = 1, 2$). On a alors $G \left[\frac{1}{2}(u_1 + u_2) \right] = K(., j)$ ce qui entraîne que $\frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \varepsilon_j \frac{1}{\mu G(j)}$ et n'est possible que si $u_\rho = c_\rho \varepsilon_j$ pour 2 constantes $c_\rho > 0$ telles que $\frac{1}{2}(c_1 + c_2) = \frac{1}{\mu G(j)}$. Mais comme $\sum_{\varepsilon} \mu(i) f_\rho(i) \leq 1$, on a $\mu G(j) c_\rho \leq 1$ ($\rho = 1, 2$); étant donnée la valeur de $c_1 + c_2$ cela entraîne que $c_\rho = \frac{1}{\mu G(j)}$ et donc que $f_1 = f_2 = K(., j)$.

Désignons alors par $K(., s)$ ($s \in S$) les autres éléments extrémaux de C_μ^1 . D'après une remarque précédente :

$$\sum_{\varepsilon} \mu(i) K(i, s) = 1 \quad (s \in S)$$

Il est facile de montrer que les fonctions $K(., s)$ sont harmoniques ($s \in S$). En effet comme $K(., s)$ est extrémal, un des 2 termes de la décomposition de Riesz $K(., s) = G u + h$ doit s'annuler et ce ne peut être h puisque $K(., s)$ serait alors égale à la combinaison convexe $\sum_{\varepsilon} K(., j) [\mu G(j) u(j)]$ des $K(., j)$.

Sur $E + S'$, considérons la moins fine des topologies qui induise sur E la topologie discrète et qui rende continues les fonctions $K(i, .)$ (dont l'argument varie dans $E + S$) ($i \in E$). Autrement dit, on a : $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si et seulement si :

- a) (lorsque $x \in E$) $x_n = x$ lorsque n est suffisamment grand,
- b) (lorsque $x \in S$) on a $\lim_{n \rightarrow \infty} K(i, x_n) = K(i, x)$ pour tout $i \in E$.

(On peut remarquer, en utilisant un résultat classique de convergence dans les espaces L^1 et le fait que $\sum_{\varepsilon} \mu(i) K(i, .) = 1$ sur $E + S$, que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ entraîne la convergence forte :

$$\sum_{\varepsilon} \mu(i) |K(i, x) - K(i, x_n)| \longrightarrow 0 \quad (n \nearrow \infty.)$$

Notons que la topologie induite sur S par la topologie précédente est encore identique à celle induite de $C_\mu^{(1)}$ par l'application $s \longrightarrow K(., s)$. Choquet a montré que $C_\mu^{(1)}$ étant un convexe compact métrisable, l'ensemble de ses points extrémaux est un ensemble G_δ dans $C_\mu^{(1)}$; on voit donc que l'ensemble S identifié à son image par $s \longrightarrow K(., s)$ est encore un G_δ dans $C_\mu^{(1)}$, ce qui dote S en particulier d'une structure mesurable.

Le théorème de représentation intégrale de Choquet (voir [2]) montre dans le cas du cône C_μ que à tout élément $f \in C_\mu$ est associé une mesure positive bornée *unique* sur $E + S$, soit ν_f , telle que :

$$f = \int_{E+S} K(., x) \nu_f(dx)$$

Si on décompose l'intégrale précédente en une somme sur E et une intégrale sur S ; on retrouve la décomposition de Riesz de f (puisque $K(., s)$ ($s \in S$) et donc aussi $\int_S K(., s) \nu_f(ds)$ sont harmoniques). L'intérêt du résultat précédent réside donc dans la représentation de toute fonction harmonique comme "potentiel d'une mesure portée par S " :

A toute fonction harmonique h μ -intégrable est associée une mesure positive bornée unique sur S , soit ν_h telle que :

$$h = \int_S K(., s) \nu_h(ds)$$

De plus $\sum_E \mu(i) h(i) = \int_S v_h(ds)$. Réciproquement si v_h est une mesure positive bornée sur S la formule précédente définit une fonction harmonique μ -intégrable sur E .

3 - PROBABILITES D'ATTEINTE ET DE RETOUR -

1/ Dans ce paragraphe et dans le suivant, nous nous proposons d'étudier les rapports entre la fonction aléatoire de Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ et un sous-ensemble A fixé de l'espace des états. Introduisons à cet effet les temps aléatoires v_A et v'_A égaux respectivement au premier instant $n \geq 0$ et au premier instant $n > 0$ tels que $X_n \in A$; il est clair que pour les trajectoires telles que $X_0 \notin A$, les instants v_A et v'_A sont tous les deux égaux au temps d'atteinte de A tandis que pour les trajectoires telles que $X_0 \in A$, v_A vaut 0 et v'_A est égal au temps de retour à l'ensemble A . On convient de poser $v_A = \infty$ lorsque $X_n \notin A$ ($n \geq 0$) et $v'_A = \infty$ lorsque $X \notin A$ ($n > 0$).

Les formules suivantes définissent deux matrices positives importantes qui sont finies puisque la matrice $I_{A^c} P$ est transiente :

$$\begin{aligned} {}^A H &= \left\{ \sum_{n \geq 0} (I_{A^c} P)^n \right\} I_A \\ \Pi_A &= I_A P \left\{ \sum_{n \geq 0} (I_{A^c} P)^n \right\} I_A = I_A \left\{ \sum_{n \geq 0} (P I_{A^c})^n \right\} P I_A \end{aligned}$$

Remarquons immédiatement que les résultats suivants relatifs à des fonctions et aux opérateurs ${}^A H$ et Π_A se transposent sans difficulté en résultats relatifs à des mesures et aux opérateurs H^A et Π_A si on pose :

$$H^A = I_A \left\{ \sum_{n \geq 0} (P I_{A^c})^n \right\}$$

PROPOSITION 1 -

Pour toute fonction positive f , on a :

$$\begin{aligned} {}^A H f(i) &= E_i [f(X_{v_A})] \quad (= f(i) \text{ si } i \in A) \\ \Pi_A f(i) &= \begin{cases} E_i [f(X_{v'_A})] & \text{si } i \in A, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier :

$$\begin{aligned} {}^A H(i, j) &= P_i [X_{v_A} = j], \\ \Pi_A(i, j) &= \begin{cases} P_i (X_{v'_A} = j) & \text{si } i \in A, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration.

On voit facilement que pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} &P_i [X_m \notin A \text{ (} 0 \leq m < n \text{), } X_n = j] \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} (I_{A^c} P)(i, i_1) (I_{A^c} P)(i_1, i_2) \dots (I_{A^c} P)(i_{n-1}, j) \\ &= (I_{A^c} P)^n(i, j) \end{aligned}$$

Par suite, on a :

$$P_i [v_A = n, X_n = j] = (I_{A^c} P)^n I_A(i, j)$$

et la formule concernant ${}^A H$ s'obtient par sommation sur n ($n \geq 0$).

Semblablement, on a pour tout $n \geq 1$:

$$P_i [X_m \notin A \ (1 \leq m < n), X_n = j] = P (I_{A^c} P)^{n-1} (i, j)$$

et par suite, si $i \in A$:

$$P_i [v'_A = n, X_n = j] = I_A P (I_{A^c} P)^{n-1} I_A (i, j)$$

La formule concernant Π_A s'obtient par sommation sur n ($n \geq 1$).

2/ Etablissons ensuite que les matrices ${}^A H$ et Π_A sont liées par la relation :

$${}^A H - P {}^A H = I_A - \Pi_A$$

A cet effet, remarquons que la définition de ${}^A H$ entraîne que : ${}^A H = I_A + (I_{A^c} P) {}^A H$ et par suite que : ${}^A H - P {}^A H = I_A - I_A P {}^A H$; or par définition, on a $\Pi_A = I_A P {}^A H$ et la formule est démontrée.

Par définition, X_{ν_A} est l'état de la fonction aléatoire $\{X_m, m \geq 0\}$ à l'instant où elle atteint A . Par suite, $X_{\nu_A} \circ \theta_n$ est l'état de la fonction aléatoire au premier instant $m \geq n$ auquel $X_m \in A$; en particulier $X_{\nu_A} \circ \theta_1 = X_{\nu'_A}$. La propriété de Markov appliquée à la variable X_{ν_A} montre alors que :

$$P_i [X_{\nu_A} \circ \theta_n = j] = (P^n {}^A H)(i, j) ;$$

En particulier, on voit que :

$$P {}^A H (i, j) = P_i (X_{\nu'_A} = j) = {}^A H (i, j) \text{ si } i \in A^c, = \Pi_A (i, j) \text{ si } i \in A$$

et on réétablit ainsi la formule ci-dessus liant ${}^A H$ et Π_A , puisque ${}^A H(i, j) = I_A (i, j)$ si $i \in A$.

D'après ce qui précède, on a aussi :

$$P^n {}^A H 1 (i) = P_i [X_m \in A \text{ pour un } m \geq n] ;$$

il s'en suit que la suite de fonctions $P^n ({}^A H 1)$ décroît en n , c'est-à-dire que la fonction ${}^A H 1$ est sur-harmonique, et que la composante harmonique, soit h_A , de la décomposition de Riesz de ${}^A H 1$ vaut :

$$h_A (i) = \lim_n \downarrow P^n {}^A H 1 (i) = P_i [X_m \in A \text{ pour une infinité de } m]$$

Si on pose d'autre part $u_A = {}^A H 1 - P ({}^A H 1)$, il résulte de la formule établie ci-dessus que :

$$u_A (i) = l_A(i) - \Pi_A 1(i),$$

donc que :

$$u_A (i) = P_i (X_m \notin A \text{ pour tout } m > 0) \text{ si } i \in A, = 0 \text{ sinon}$$

On a donc obtenu le résultat suivant.

PROPOSITION 2 -

La probabilité d'atteinte ${}^A H 1$ d'un ensemble A est une fonction sur-harmonique égale à la somme du potentiel $G u_A$ de la probabilité u_A de non-retour à A et de la fonction harmonique h_A égale à la probabilité d'un nombre infini de visites à A .

Définition.

Un ensemble A pour lequel $h_A \equiv 0$ est dit transient.

Tout ensemble d'états A tel que $G 1_A < \infty$ sur E est transient ; en particulier tout ensemble fini est transient. En effet, $G 1_A (i)$ est égal à l'espérance $E_i \left[\sum_{n \geq 0} 1_A(X_n) \right]$ du nombre de visites à A ; par suite $G 1_A (i) < \infty \implies h_A(i) = 0$

PROPOSITION 3 -

La formule suivante est valable pour tout ensemble transient A :

$${}^A H = G (I_A - \Pi_A)$$

Démonstration.

La formule ${}^A H - P {}^A H = I_A - \Pi_A$ entraîne que :

$${}^A H - P^n {}^A H = \sum_{m < n} P^m (I_A - \Pi_A)$$

Lorsque A est transient, on a $\lim_n \downarrow P^n {}^A H 1 = 0$ et par suite $\lim_n P^n {}^A H = 0$; on en déduit la formule de la proposition puisque $\sum_m P^m I_A$ est finie.

3/ On appelle *Problème de Dirichlet relatif à l'ensemble B* le problème consistant à trouver les fonctions positives h harmoniques sur B (c'est-à-dire telles que Ph = h sur B) et égales sur B^c à une fonction positive donnée f.

PROPOSITION 4 -

Pour toute fonction $f \geq 0$, la fonction ${}^A H f$ est la plus petite fonction positive égale à f sur A et harmonique sur A^c (solution du problème de Dirichlet relatif à A^c).

Démonstration.

En vertu de ce qui précède, il ne reste plus qu'à montrer la minimalité de ${}^A H f$. Nous utiliserons à cet effet le lemme ci-dessous qui montre que si h est harmonique sur A^c on a : $h \geq {}^A H h$; alors si $h = f$ sur A, comme ${}^A H h$ ne dépend de h que par ses valeurs sur A, on a aussi ${}^A H h = {}^A H f$ et donc $h \geq {}^A H f$.

LEMME 5 -

Si la fonction positive h est telle que $h \geq Ph$ sur A^c, on a : $h \geq {}^A H h$.

Démonstration.

L'hypothèse entraîne que : $h \geq I_{A^c} P h + I_A h$; la décomposition de Riesz de la fonction $I_{A^c} P$ - sur-harmonique h montre que :

$$h \geq \sum_{n \geq 0} (I_A P)^n \cdot (h - I_{A^c} P h) \geq \sum_{n \geq 0} (I_{A^c} P)^n I_A h = {}^A H h$$

4/ Nous terminerons ce paragraphe en établissant le lemme suivant qui nous sera utile par la suite.

LEMME 6 -

Pour toute fonction sur-harmonique h, on a :

$$\Pi_A h \leq I_A h$$

et il s'en suit que la fonction ${}^A H h$ est sur-harmonique. Si de plus l'ensemble A est transient, la fonction ${}^A H h$ est un potentiel.

Démonstration.

Comme h est sur-harmonique, on a : $P I_A h = P h - P I_{A^c} h \leq h - P I_{A^c} h$. La décomposition de Riesz montre alors que :

$$h \geq \sum_{n \geq 0} (P I_{A^c})^n P I_A h$$

et donc que $I_A H \geq \Pi_A h$. On a ensuite ${}^A H h - P {}^A H h = I_A h - \Pi_A h \geq 0$ ce qui montre que ${}^A H h$ est sur-

harmonique ; si l'ensemble A est transient, la proposition 3 montre que ${}^A H h$ est le potentiel de $I_A h - \Pi_A h$.

COROLLAIRE -

Pour toute fonction sur-harmonique h, l'ensemble de potentiels $\{{}^A H h, A \text{ fini}\}$ est filtrant croissant et admet h comme enveloppe supérieure.

Démonstration.

Pour tout A fini, donc transient, ${}^A H h$ est un potentiel. Si $A \subset B$, le lemme appliqué à ${}^B H h$ montre que ${}^A H h = {}^A H ({}^B H h) \leq {}^B H h$. D'autre part, il est clair que $\lim_{A \uparrow} P_i (v_A = 0) = 1$ et par suite que $\lim_{A \uparrow} {}^A H h = h$.

4 - PRINCIPES DE LA THEORIE DU POTENTIEL -

Soit G_A la matrice potentiel associée à la restriction de P à A^c :

$$G_A = I_{A^c} \sum_{n \geq 0} (P I_{A^c})^n = \sum_{n \geq 0} (I_{A^c} P)^n \cdot I_{A^c}$$

PROPOSITION 7 -

Pour toute fonction positive f définie sur E, on a :

$$G_A f(i) = E_i \left[\sum_{n < v_A} f(X_n) \right]$$

et :

$$H^A f(i) = \begin{cases} E_i \left[\sum_{n < v_A} f(X_n) \right] & \text{si } i \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration.

D'après la 1ère formule de la démonstration de la proposition du § 3, on a :

$$P_i (v_A > n, X_n = j) = (I_{A^c} P)^n I_{A^c}(i, j)$$

En sommant sur n, on obtient la formule suivante équivalente à celle de la proposition concernant G_A :

$$E_i \left[\sum_{n < v_A} 1_{\{j\}}(X_n) \right] = G_A(i, j)$$

Semblablement on voit que :

$$P_i (v_A' > n, X_n = j) = (P I_{A^c})^n(i, j)$$

La formule concernant H^A s'obtient par sommation sur n.

L'étude de ce paragraphe est basée toute entière sur le résultat suivant :

PROPOSITION 8 -

Les matrices ${}^A H$, H^A et G_A vérifient les formules suivantes :

$$\begin{aligned} G_A - G_A P &= I - {}^A H, \\ G_A - P G_A &= I - H^A, \\ {}^A H G &= G - G_A = G H^A. \end{aligned}$$

Démonstration.

La formule de définition de G_A implique que : $G_A = I_{A^c} + G_A P I_{A^c}$ et par suite que :

$$G_A - G_A P = I_{A^c} - G_A P I_A ;$$

mais on a :

$$G_A P I_A = \left\{ \sum_{n \geq 1} (I_{A^c} P)^n \right\} I_A = {}^A H - I_A$$

et donc aussi :

$$G_A - G_A P = I - {}^A H.$$

On en déduit que :

$$G_A - G_A P^n = (I - {}^A H) \left(\sum_{n < n} P^n \right)$$

et, comme $G_A P^n \leq G P^n \downarrow 0$ ($n \uparrow \infty$), il vient, lorsque $n \uparrow \infty$: $G_A = G - {}^A H G$. Les formules $G_A - P G_A = I - H^A$ et $G - G_A = G H^A$ résultent alors des formules précédentes par transposition.

On peut donner des dernières formules de la proposition une démonstration probabiliste intéressante. En remarquant d'abord que d'après la propriété forte de Markov, on a :

$$E_i \left[\sum_{n \geq \nu_A} f(X_n) \right] = \sum_{j \in E} {}^A H(i, j) E \left[\sum_{n \geq 0} f(X_n) \right] = {}^A H G(i, j)$$

on obtient la formule $G = G_A + {}^A H G$ simplement en prenant l'espérance E_i des 3 termes de l'identité évidente :

$$\sum_{n \geq 0} f(X_n) = \sum_{n < \nu_A} f(X_n) + \sum_{n \geq \nu_A} f(X_n)$$

Désignons ensuite par ν_A^k ($k \geq 1$) les instants successifs de visites de la fonction aléatoire $\{X_n, n \geq 0\}$ à l'ensemble A (on pose $\nu_A^k(\omega) = +\infty$ si le nombre de $X_n(\omega)$ dans A est inférieur à k). On voit facilement que :

$$\nu_A^{k+1} - \nu_A^k = \nu_A^1 \circ \theta_{\nu_A^k} \text{ sur } \{\nu_A^k < \infty\};$$

on en déduit que :

$$\sum_{\nu_A^k \leq n < \nu_A^{k+1}} f(X_n) = \left[\sum_{n < \nu_A^k} f(X_n) \right] \circ \theta_{\nu_A^k}$$

et, en utilisant la propriété forte de Markov appliquée au temps d'arrêt ν_A^k , que :

$$E_i \left[\sum_{\nu_A^k \leq n < \nu_A^{k+1}} f(X_n) \right] = \sum_{j \in E} P_i(X_{\nu_A^k} = j) H^A f(j) = E_i \left[H^A f(X_{\nu_A^k}) \right]$$

La formule de décomposition évidente :

$$\sum_{n \geq 0} f(X_n) = \sum_{n < \nu_A} f(X_n) + \sum_{k \geq 1} \left[\sum_{\nu_A^k \leq n < \nu_A^{k+1}} f(X_n) \right]$$

devient en passant aux espérances E_i :

$$G f(i) = G_A f(i) + \sum_{k \geq 1} E_i [H^A f(X_{\nu_A^k})]$$

Il reste alors à remarquer que l'on a :

$$\sum_{k \geq 1} H^A f(X_{\nu_A^k}) = \sum_{n \geq 0} H^A f(X_n)$$

puisque la fonction $H^A f$ s'annule en dehors de A , pour que l'on ait démontré que :

$$G f = G_A f + G (H^A f)$$

PRINCIPE COMPLET DU MAXIMUM -

Si u est une fonction positive et si h est une fonction sur-harmonique l'inégalité $G u \leq h$ est valable partout dès qu'elle l'est sur le support de u .

Démonstration.

Si la fonction positive u est portée par A , on a $u = H^A u$ et par suite, en vertu de la proposition : $G u = G H^A u = {}^A H G u$; il suffit alors que $G u \leq h$ sur A pour que ${}^A H G u \leq {}^A H h$ et donc pour que $G u \leq {}^A H h$. Enfin si h est sur-harmonique, on a ${}^A H h \leq h$ en vertu du lemme du § 3.

COROLLAIRE 1 - (Principe du maximum).

Si u est une fonction positive portée par l'ensemble A , on a :

$$\sup_E [G u] = \sup_A [G u]$$

Il suffit d'appliquer le principe précédent à la fonction h égale à la constante $\sup_A G u$, lorsque cette constante est finie.

Le cas particulier du principe complet du maximum que l'on obtient lorsque h est un potentiel est appelé le *principe de domination* ; ce dernier implique la validité du résultat suivant qui généralise le corollaire 3 du § 1.

COROLLAIRE 2 -

Si u et v sont 2 fonctions positives portées par A et si leurs potentiels sont égaux sur A , (et finis partout) ces 2 fonctions sont égales.

En appliquant le principe précédent à la fonction u (resp. v) et au potentiel $G v$ (resp. $G u$) on trouve que $G u \leq G v$ (resp. $G v \leq G u$) partout ; mais on ne peut avoir $G u = G v$ sans que $u = v$.

PROPOSITION 9 -

Etant donné un ensemble A ; pour qu'il existe une fonction positive u portée par A et telle que $G u = 1$ sur A , il faut et il suffit que A soit transient. Dans ce cas, la fonction u est unique et vaut $u_A = 1_A - \Pi_A 1$.

Démonstration.

Si A est transient, la fonction positive $u_A = 1_A - \Pi_A 1$ est portée par A et a un potentiel $G u_A$ égal à ${}^A H 1$ (= 1 sur A). Inversement si u est une fonction positive portée par A et si $G u = 1$ sur A , montrons que A est transient et que $u = u_A$ ce qui achèvera la démonstration. Comme $G u = 1$ sur A , on a ${}^A H 1 = {}^A H G u = G u - G_A u$ et comme $u = 0$ sur A^c , on a $G_A u = 0$; par suite ${}^A H 1 = G u$. Cela entraîne que la composante harmonique de ${}^A H 1$ est nulle, c'est-à-dire que A est transient, et aussi que $G u_A = G u$, donc que $u_A = u$.

PRINCIPE DU BALAYAGE -

Si g est une mesure positive ayant un potentiel fini, la mesure $g {}^A H$ est l'unique mesure portée par A telle que $(g {}^A H) G = g G$ sur A . On a de plus $(g {}^A H) G \leq g G$ partout.

Démonstration.

La mesure $g {}^A H$ est évidemment portée par A et on a : $(g {}^A H) G = g G - g G_A$; les propriétés du potentiel de $g {}^A H$ résulte alors de ce que $g G_A$ est positive et nulle sur A . Pour démontrer l'unicité de $g {}^A H$, considérons une mesure $g' \geq 0$ telle que $g' G = g G$ sur A ; alors : $g' G H^A = g G H^A$ et par suite $(g' {}^A H) G = (g {}^A H) G$, ce qui entraîne que $g' {}^A H = g {}^A H$; si la mesure g' est de plus portée par A , on a $g' {}^A H = g'$ et donc $g' = g {}^A H$.

COROLLAIRE -

La borne inférieure des potentiels $g' G$ de mesures positives g' portées par A , tels que $g' G \geq g G$ sur A vaut $(g {}^A H) G$.

Démonstration.

Les hypothèses sur g' entraînent que : $g' G H^A \geq g G H^A$ et que $g' = g' {}^A H$; il s'en suit que : $g' G = g' {}^A H G H^A \geq g G H^A \geq (g {}^A H) G$. Le corollaire est alors démontré puisque $g {}^A H$ est elle-même une mesure positive portée par A dont le potentiel majore celui de g sur A .

Dans tout ce paragraphe nous ne considérerons que des processus vérifiant l'hypothèse supplémentaire suivante de symétrie :

HYPOTHESE -

Il existe une mesure positive α de support E telle que :

$$\alpha(i) P(i, j) = \alpha(j) P(j, i) \quad (i, j \in E) ;$$

Remarquons immédiatement que la mesure α est nécessairement sur-harmonique, puisque la relation précédente donne par sommation sur i : $\alpha P(j) = \alpha(j) P1(j) \leq \alpha(j)$, la mesure α est même harmonique si P est markovienne. (Evidemment l'hypothèse précédente exige beaucoup plus que la sur-harmonicité de α !). Notons aussi que l'hypothèse précédente entraîne plus généralement que pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\alpha(i) P^n(i, j) = \alpha(j) P^n(j, i) \quad (i, j \in E) ;$$

on le vérifiera facilement en procédant par récurrence sur n .

a) Représentation d'un processus symétrique.

Considérons alors l'espace $l^{(2)}(\alpha)$ des fonctions de carré α -sommable, qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(f, g) = \sum_i \alpha(i) f(i) g(i)$$

PROPOSITION 10 -

Sous l'hypothèse de symétrie ci-dessus, l'opérateur P défini sur $l^{(2)}(\alpha)$ par $f \rightarrow Pf$ est un opérateur linéaire symétrique borné de norme ≤ 1 .

Démonstration.

Montrons d'abord que P est un opérateur linéaire borné de norme ≤ 1 sur $l^{(2)}(\alpha)$ dès que α est une mesure sur-harmonique de support E . Pour toute fonction f définie sur E , l'inégalité de Schwarz montre que la série $\sum_j P(i, j) f(j)$ est absolument convergente dès que la série (à termes positifs) $\sum_j P(i, j) f^2(j)$ converge ; plus précisément, on a :

$$\left(\sum_j P(i, j) f(j) \right)^2 \leq \left[\sum_j P(i, j) f^2(j) \right] \left[\sum_j P(i, j) \right] \leq \sum_j P(i, j) f^2(j)$$

c'est-à-dire : $[Pf(i)]^2 \leq Pf^2(i)$.

Mais si α est une mesure sur-harmonique de support E et si $f \in l^{(2)}(\alpha)$, l'inégalité :

$$\sum_i \alpha(i) P f^2(i) \leq \sum_i \alpha(i) f^2(i) < \infty$$

entraîne que $P f^2 < \infty$ sur E , donc que $P f$ existe et vérifie :

$$\sum_i \alpha(i) [Pf(i)]^2 \leq \sum_i \alpha(i) f^2(i)$$

Si la mesure α est non seulement une mesure sur-harmonique, mais vérifie aussi l'hypothèse de symétrie ci-dessus, l'opérateur P est symétrique sur $l^{(2)}(\alpha)$ puisque :

$$\begin{aligned} (f, P g) &= \sum_{i,j} \alpha(i) P(i, j) f(i) g(j) \\ &= \sum_{i,j} \alpha(j) P(j, i) f(i) g(j) = (P f, g) \end{aligned}$$

On sait que tout opérateur symétrique P de norme ≤ 1 défini sur un espace de Hilbert, possède une représentation de la forme :

$$P^n = \int_{[-1, +1]} x^n E(dx) \quad (n \geq 0)$$

où $\{E(dx)\}$ est une résolution de l'unité de l'espace de Hilbert. Dans le cas qui nous intéresse, on obtient, en introduisant les mesures $\mu_{ij}(dx) = \langle \varepsilon_i, E(dx) \varepsilon_j \rangle$ ($i, j \in E$), la représentation suivante des matrices P :

$$\alpha(i) P^n(i, j) = \int_{[-1, +1]} x^n \mu_{ij}(dx) \quad (n \geq 0 ; i, j \in E).$$

La famille $\{\mu_{ij}(\cdot) ; i, j \in E\}$ de mesures sur $[-1, +1]$ est symétrique en (i, j) et définie positive au sens où $\sum_{i,j} c_i c_j \mu_{ij}(\cdot)$ est une mesure positive pour tout choix de $\{c_i, i \in E\}$ tel que $\{i : c_i \neq 0\}$ soit fini. On a en effet :

$$\sum_{i,j} c_i c_j \mu_{ij}(dx) = \|E(dx) \left(\sum_i c_i \varepsilon_i \right)\|^2.$$

En particulier, les mesures μ_{ii} ($i \in E$) sont positives (Ces propriétés se déduisent immédiatement de la définition des μ_{ij}).

Remarquons que la représentation précédente des matrices P^n est unique pour la simple raison que toute mesure portée par $[-1, +1]$ est biunivoquement déterminée par la connaissance de ses moments (D'après Weierstrass, le sous-espace vectoriel de l'espace $C[-1, +1]$ des fonctions continues sur $[-1, +1]$ engendré par la suite $\{x^n, n \geq 0\}$ est dense dans $C[-1, +1]$).

La relation $P^n P = P^{n+1}$ ($n \geq 0$) entraîne alors que les mesures $\mu_{ij}(\cdot)$ vérifient :

$$\sum_j \mu_{ij}(dx) P_{jk} = x \cdot \mu_{ik}(dx) \quad (i, k \in E)$$

Exemple.

Toute matrice P définie sur l'ensemble N des entiers non négatifs telle que :

$$P(i, j) = 0 \quad \text{si } |i - j| > 1, \quad P(i, j) > 0 \quad \text{si } |i - j| = 1, \quad P(i, i) \geq 0$$

(matrice de Jacobi) vérifie l'hypothèse de symétrie de ce paragraphe. La mesure α est univoquement déterminée par P (à un facteur multiplicatif près) puisque la condition :

$$\alpha(i) P(i, i+1) = \alpha(i+1) P(i+1, i) \quad (i \in N)$$

à laquelle se réduit ici l'hypothèse de symétrie, est vérifiée si et seulement si :

$$\alpha(i) = \alpha(0) \frac{P(0, 1) P(1, 2) \dots P(i-1, i)}{P(i, i-1) P(i-1, i-2) \dots P(1, 0)}$$

La structure particulière de la matrice P permet alors de définir par récurrence une suite de polynômes $\{Q_k, k \in N\}$ suivant :

$$Q_0(x) \equiv 1, \quad \sum_j Q_j(x) P_{j,k} = x Q_k(x) \quad (k \in N),$$

la relation précédente définissant Q_{k+1} .

On voit facilement que Q_k est un polynôme de degré k . Montrons alors que les mesures μ_{ij} introduites ci-dessus sont données par la formule :

$$\mu_{ij}(dx) = Q_i(x) Q_j(x) \mu(dx) \quad (i, j \in N)$$

où on a posé $\mu = \mu_{00}$. En effet, en tenant compte toujours de la structure de P , la relation de ré-

currence vérifiée par les mesures μ_{ij} montre que pour tout i : $\mu_{ij}(dx) = Q_j(x) \cdot \mu_{i0}(dx)$; de plus, en tenant compte de la symétrie en (i, j) des μ_{ij} , on a :

$$\mu_{i0}(dx) = \mu_{0i}(dx) = Q_i(x) \cdot \mu_{00}(dx).$$

On a ainsi obtenu la représentation suivante des matrices P^n :

$$\alpha(i) P^n(i, j) = \int_{[-1, +1]} x^n Q_i(x) Q_j(x) \mu(dx)$$

qui ne fait plus intervenir qu'une seule mesure positive μ .

b) Energie.

LEMME 11 -

La matrice symétrique $\Gamma(i, j) = \alpha(i) G(i, j) = \alpha(j) G(j, i)$ associée à une matrice sous-markovienne transiente P satisfaisant à l'hypothèse de symétrie du début, est nécessairement définie positive.

Démonstration.

D'après les formules du paragraphe précédent, on a :

$$\Gamma(i, j) = \sum_{n \geq 0} \int_{-1}^{+1} x^n \mu_{ij}(dx) = \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_{ij}(dx)}{1-x} ;$$

l'hypothèse que P est transiente entraîne que l'intégrale du dernier membre converge et en particulier que $\mu_{ij}(\{1\}) = 0$. Comme la fonction $1/(1-x)$ est strictement positive sur $[-1, +1]$ et comme pour tout choix de $c_i \in \mathbb{R}$ tel que $\{i : c_i \neq 0\}$ soit fini mais non vide, la mesure $\sum_{i,j} c_i c_j \mu_{ij}(\cdot)$ portée par $[-1, +1]$ est positive et non nulle, on a sous les mêmes hypothèses $\sum_{i,j} c_i c_j \Gamma(i, j) > 0$.

Le lemme précédent permet de munir l'espace vectoriel \mathcal{H} des fonctions sur E à supports finis d'une structure d'espace préhilbertien séparé par l'intermédiaire du produit scalaire (énergie mutuelle) :

$$\langle\langle f, f' \rangle\rangle = \sum_{i,j} \Gamma(i, j) f(i) f'(j)$$

Si \mathcal{H}_A désigne le sous-espace vectoriel de dimension finie de \mathcal{H} formé des fonctions sur E à supports dans l'ensemble fini A et si $\text{proj}_{\mathcal{H}_A}(\cdot)$ désigne l'opérateur de projection orthogonale sur \mathcal{H}_A , on a la formule remarquable suivante, valable pour tout $f \in \mathcal{H}$:

$$\text{proj}_{\mathcal{H}_A}(f) = H^\wedge f = \frac{(f \cdot \alpha)^\wedge H}{\alpha}$$

Les opérateurs H^\wedge et H^\wedge du balayage apparaissent ainsi comme un opérateur de projection dans l'espace \mathcal{H} .

Démonstration.

Par définition de H^\wedge , $H^\wedge f \in \mathcal{H}_A$ quel que soit f . De plus quel que soit $j \in A$ on a :

$$G(H^\wedge f)(j) = G f(j),$$

ou ce qui est équivalent :

$$\langle\langle \varepsilon_j, H^\wedge f \rangle\rangle = \langle\langle \varepsilon_j, f \rangle\rangle \quad (j \in A)$$

Cela suffit à démontrer que $H^\wedge f = \text{proj}_{\mathcal{H}_A}(f)$. Par transposition on obtient la seconde formule.

Le produit scalaire énergie permet de caractériser aussi simplement la fonction u considérée dans la proposition du § 4.

PROPOSITION 12 -

Soit A un potentiel fini non vide de E ; soit u_A la fonction probabilité de non retour à A et soit $c_A = \sum_A \alpha_i u_A(i)$. Alors sur l'ensemble de toutes les fonctions g de \mathcal{H}_A qui vérifient $\sum_A \alpha_i g_i = 1$, la quantité $\|g\|^2$ a pour valeur minimum $1/c_A$ et ce minimum est atteint par l'unique fonction $(1/c_A)u_A$.

Démonstration.

La fonction u_A appartient à \mathcal{H}_A et est perpendiculaire à l'hyperplan :

$$\{g : g \in \mathcal{H}_A, \sum \alpha_i g_i = 0\} \text{ de } \mathcal{H}_A,$$

puisque :

$$(g, u_A) = \sum_A \alpha_i g_i G u_A(i) = \sum_A \alpha_i g_i \quad \text{si } g \in \mathcal{H}_A.$$

Il s'en suit que la fonction $\frac{1}{c_A} u_A$ rend $\|g\|^2$ minimum sur $\{g : g \in \mathcal{H}_A, \sum \alpha_i g_i = 1\}$. De plus on a, d'après la formule précédente :

$$\left\| \frac{1}{c_A} u_A \right\|^2 = \frac{1}{c_A^2} \quad (u_A, u_A) = \frac{1}{c_A^2} \sum \alpha_i u_A(i) = \frac{1}{c_A}$$

6 - THEOREME DE CONVERGENCE A LA FRONTIERE -

Le but de ce paragraphe est essentiellement d'établir le théorème suivant dû à Doob ; la démonstration de ce théorème fait intervenir deux notions ayant un intérêt propre 1) l'inversion du temps dans les chaînes aléatoires, 2) la relativisation d'un processus markovien.

Nous nous appuyerons fortement dans la suite sur les résultats du paragraphe 2 relatifs à la représentation intégrale des fonctions harmoniques, dont nous reprenons les notations.

THEOREME -

Soit P une matrice markovienne transiente définie sur un espace dénombrable E et soit ν_1 la mesure de probabilité définie sur la frontière S et intervenant dans la représentation intégrale de la fonction harmonique 1. Alors la limite :

$$X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$$

existe au sens presque sûr sur $E + S$; la variable aléatoire X_∞ prend ses valeurs p.s. dans S et on a :

$$P_\mu [X_\infty \in ds] = \nu_1(ds), \quad P_\mu (X_\infty \in ds | X_n = i) = K(i, s) \nu_1(ds) \quad (i \in E, n \geq 0)$$

(Remarque - La démonstration de ce théorème n'utilise que l'existence d'une représentation intégrale sur S de la fonction harmonique 1 ; elle donne donc une seconde démonstration de l'unicité de cette représentation puisque toute mesure ν sur S telle que $1 = \int K(\cdot, s) \nu(ds)$ est, d'après ce que nous allons montrer, nécessairement la loi de répartition de $X_\infty = \lim_n X_n$).

Nous commencerons par démontrer le cas particulier de ce théorème où la fonction harmonique 1 est extrémale (c'est-à-dire où la mesure ν_1 est concentrée en un seul point s_1 de la frontière S) ; on a dans ce cas l'énoncé suivant :

COROLLAIRE -

Soit P une matrice markovienne transiente définie sur un espace dénombrable E et telle que la fonction harmonique 1 soit extrémale. On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K(i, X_n) = 1 \quad \text{au sens p.s., pour tout } i \in E.$$

Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ la fonction aléatoire markovienne sur E de matrice de transition P et de loi

initiale μ . Pour tout ensemble transient A , désignons par τ_A le dernier instant $n \geq 0$ (s'il existe) tel que $X_n \in A$; comme A est transient, la variable τ_A est définie presque sûrement sur l'ensemble $\sup\{X_n \in A\}$. Considérons alors la fonction aléatoire $\{X_n^{(A)}, n \geq 0\}$ définie par inversion du temps à l'instant τ_A à partir de $\{X_n, n \geq 0\}$; d'une manière précise, définissons une fonction aléatoire $\{X_n^{(A)}, n \geq 0\}$ à valeurs dans $E + \{e\}$ par la formule :

$$X_n^{(A)} = \begin{cases} X_{\tau_A - n} & \text{si } n \leq \tau_A, \\ e & \text{si } n > \tau_A \text{ ou si } \tau_A \text{ n'est pas défini.} \end{cases}$$

On a alors le résultat intéressant suivant dû à Hunt :

PROPOSITION 13 -

Les fonctions aléatoires $\{X_n^{(A)}, n \geq 0\}$ définies ci-dessus et à valeurs dans $E + \{e\}$ pour tout ensemble transient A , sont des fonctions aléatoires markoviennes de matrice de transition stationnaire indépendante de A . La restriction à E de cette matrice est donnée par :

$$P'(i, j) = \frac{\mu G(j)}{\mu G(i)} P(j, i)$$

La restriction à E de la loi initiale de ces fonctions aléatoires est donnée par :

$$P_\mu [X_0^{(A)} = i] = \mu G(i) \cdot u_A(i) \quad (i \in E)$$

Par conséquent, pour tout $i \in E$ et tout ensemble transient A , la fonction aléatoire réelle :

$$Y_n = \begin{cases} K(i, X_{\tau_A - n}) & \text{si } n \leq \tau_A, \\ 0 & \text{si } \tau_A > n \text{ ou si } \tau_A \text{ n'est pas définie.} \end{cases}$$

est une sur-martingale positive.

Démonstration.

La première partie de la proposition résulte du calcul suivant, valable lorsque $i_0, \dots, i_N \in E$.

$$\begin{aligned} & P_\mu [X_{\tau_A - n} = i_n \quad (0 \leq n \leq N)] \\ &= \sum_{p \geq N} P_\mu [\tau_A = p, X_{p-n} = i_n \quad (0 \leq n \leq N)] \\ &= \sum_{p \geq N} P_\mu [X_{(p-N)+m} = i_{N-m} \quad (0 \leq m \leq N); X_p \in A; X_q \notin A \quad (q > p)] \\ &= \sum_{p \geq N} \mu P^{p-N}(i_N) \cdot P(i_N, i_{N-1}) \dots P(i_1, i_0) P_{i_0} [X_0 \in A, X_q \notin A \quad (q > 0)] \\ &= \mu G(i_N) P(i_N, i_{N-1}) \dots P(i_1, i_0) u_A(i_0) \\ &= [\mu G(i_0) u_A(i_0)] \cdot \left[P(i_1, i_0) \frac{\mu G(i_1)}{\mu G(i_0)} \right] \dots \left[P(i_N, i_{N-1}) \frac{\mu G(i_N)}{\mu G(i_{N-1})} \right] \end{aligned}$$

La seconde partie de la proposition s'en déduit facilement; en effet :

$$\begin{aligned} & E [Y_{n+1} | X'_0, \dots, X'_n] \\ &= \sum_E K(i, j) P [X'_{n+1} = j | X'_0, \dots, X'_n] \\ &= \sum_E K(i, j) \frac{\mu G(j)}{\mu G(X'_n)} P(j, X'_n) \\ &= \frac{G P(i, X'_n)}{\mu G(X'_n)} \leq K(i, X'_n) = Y_n \end{aligned}$$

Démonstration du théorème lorsque l est harmonique extrémale.

Appliquons à la sur-martingale positive $\{Y_n, n \geq 0\}$ construite dans la proposition précédente l'inégalité classique suivante :

$$(b - a) E (\gamma_{a,b}^\uparrow) \leq E (Y_0)$$

où $\gamma_{a,b}^\uparrow$ désigne le nombre aléatoire de fois que la sur-martingale positive $\{Y_n, n \geq 0\}$ franchit l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ dans le sens ascendant. On voit facilement que ce nombre $\gamma_{a,b}^\uparrow$ est identique au nombre $\beta_{a,b}(A)$ de fois que la fonction aléatoire $\{K(i, X_n), n \geq 0\}$ franchit l'intervalle $[a, b]$ dans le sens descendant pendant l'intervalle de temps aléatoire $[0, \tau_A]$ (intervalle vide si τ_A n'est pas défini) ; on a donc :

$$\begin{aligned} (b - a) E [\beta_{a,b}(A)] &\leq E [K(i, X_{\tau_A})] \\ &= \sum_E K(i, j) \mu G(j) u_A(j) \\ &= G u_A(i) \end{aligned}$$

Lorsque $A \uparrow E$ suivant le filtre des ensembles transients, $\tau_A \uparrow +\infty$ presque sûrement et par suite $\beta_{a,b}(A) \uparrow \beta_{a,b}$, où $\beta_{a,b}$ désigne le nombre de fois que la fonction aléatoire $\{K(i, X_n), n \geq 0\}$ franchit l'intervalle $[a, b]$ dans le sens descendant ; de plus, $\lim_{A \uparrow E} G u_A = 1$ puisque $G u_A = 1$ sur A , ≤ 1 sur E lorsque A est transient. On en déduit que :

$$(b - a) E (\beta_{a,b}) \leq 1$$

et donc que $\beta_{a,b} < \infty$ presque sûrement. Cette propriété étant exacte pour tout couple a, b ($0 \leq a < b < \infty$), on voit que les limites suivantes existent pour tout $i \in E$, sauf pour un ensemble négligeable N de trajectoires :

$$Z(i, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} K(i, X_n(\omega)) \quad (i \in E, \omega \notin N)$$

Comme $\tau_A \uparrow \infty$, on a évidemment aussi :

$$Z(i, \omega) = \lim_{A \uparrow E} K(i, X_{\tau_A}(\omega)) \quad (i \in E, \omega \notin N)$$

Etablissons ensuite les propriétés suivantes de la limite Z :

a) pour tout $i \in E$, $Z(i, \cdot)$ est une variable aléatoire presque sûrement bornée et positive telle que $E [Z(i, \cdot)] = 1$,

b) pour tout $\omega \notin N$, $Z(\cdot, \omega)$ vérifie les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum P(i, j) Z(j, \omega) &\leq Z(i, \omega), \\ \sum \mu(j) Z(j, \omega) &\leq 1 \end{aligned}$$

Pour tout $i \in E$, il résulte de l'hypothèse $\mu G(i) > 0$ qu'il existe un $n \geq 0$ tel que $\mu P^n(i) > 0$; l'inégalité $P^n G \leq G$ entraîne alors que :

$$\mu P^n(i) \cdot G(i, j) \leq \mu P^n G(j) \leq \mu G(j)$$

et par suite que :

$$\sup_{j \in E} K(i, j) \leq [\mu P^n(i)]^{-1} < \infty.$$

Il en résulte immédiatement que $Z(i, \cdot) \leq [\mu P^n(i)]^{-1}$ sur N^c ; il est clair que $Z(i, \cdot)$ est positive et par suite :

$$E [Z(i, \cdot)] = \lim_{A \uparrow E} E [K(i, X_{\tau_A})] = \lim_{A \uparrow E} G u_A(i) = 1$$

D'autre part les inégalités (b) sont vérifiées par $K(\cdot, X_n(\omega))$ pour tout $n \geq 0$, $\omega \in \Omega$; en vertu du lemme de Fatou, elles le sont encore par $Z(\cdot, \omega)$ si $\omega \notin N$.

Les propriétés de (b) ci-dessus expriment que $Z(\cdot, \omega)$ appartient au convexe C_μ^1 considéré au paragraphe 2, si $\omega \notin N$. Si la fonction harmonique 1 est extrémale, la propriété (a) :

$$1 = \int_{\Omega} Z(i, \omega) P(d\omega) \quad (i \in E)$$

ne peut être réalisée que si $Z(\cdot, \omega)$ est égale à 1 pour presque tout ω . On a donc démontré dans ce cas particulier que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K(i, X_n) = 1 \quad \text{au sens presque sûr} \quad (i \in E).$$

Il reste alors à poser $X_\infty = s_1$ où s_1 désigne le point de S tel que $K(\cdot, s_1) = 1$, pour que l'on ait : $\lim_{n \rightarrow \infty} K(i, X_n) = K(i, X_\infty)$ presque sûrement et par suite, en vertu de la définition de la topologie de $E + S$, pour que l'on ait : $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_\infty$ presque sûrement.

Le théorème est ainsi démontré dans le cas où la fonction harmonique 1 est extrémale. Pour le démontrer dans le cas général, introduisons le *procédé de relativisation* dû à Brelot et Feller.

Etant donnée sur E une matrice positive P et une fonction $h \geq 0$ vérifiant $Ph = h$, on définit sur le sous-ensemble $E^{(h)} = \{h > 0\}$ de E , la matrice markovienne $P^{(h)}$ relativisée de P , par la formule :

$$P^{(h)}(i, j) = P(i, j) \frac{h(j)}{h(i)} \quad (i, j \in E^{(h)})$$

On remarquera immédiatement que les puissances des matrices $P^{(h)}$ et P sont liées par une relation du même type soit :

$$[P^{(h)}]^n(i, j) = P^n(i, j) \frac{h(j)}{h(i)} \quad (n \geq 0 ; i, j \in E^{(h)})$$

Si μ est alors une mesure positive sur E telle que $\sum_E \mu(i) h(i) = 1$, considérons la fonction aléatoire de Markov $\{X_n^{(h)}, n \geq 0\}$ à valeurs dans E , de loi initiale $\{\mu(i) h(i), i \in E\}$ et de matrice de transition $P^{(h)}$; la loi de probabilité $P_\mu^{(h)}(\cdot)$ de cette fonction aléatoire est donc déterminée sur (Ω, \mathcal{A}) par :

$$\begin{aligned} P_\mu^{(h)} [X_n^{(h)} = i_n (0 \leq n \leq N)] &= [\mu(i_0) h(i_0)] \left[P(i_0, i_1) \frac{h(i_1)}{h(i_0)} \right] \dots \left[P(i_{N-1}, i_N) \frac{h(i_N)}{h(i_{N-1})} \right] \\ &= \mu(i_0) P(i_0, i_1) \dots P(i_{N-1}, i_N) h(i_N) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que μ soit une probabilité sur E et que P soit une matrice markovienne sur E (les considérations précédentes ne nécessitant pas ces hypothèses, permettent donc d'attacher des fonctions aléatoires markoviennes à une matrice positive dès que celle-ci possède des fonctions harmoniques). La formule de représentation intégrale de la fonction harmonique 1 :

$$1 = \int K(i, s) \nu_1(ds) \quad (i \in E)$$

entraîne alors que l'on a, en écrivant $P_\mu^{(s)}$ au lieu de $P_\mu^{(K(\cdot, s))}$:

$$P_\mu(A) = \int P_\mu^{(s)}(A) \nu_1(ds)$$

pour tout événement A de l'espace (Ω, \mathcal{A}) des trajectoires. Pour le voir, il suffit de remarquer que lorsque A est de la forme particulière $A = \{X_n = i_n (0 \leq n \leq N)\}$, la fonction $P_\mu^{(s)}(A)$ de s (dont la valeur est donnée ci-dessus) est continue et donc mesurable et possède une ν_1 -intégrale égale à $P_\mu(A)$; le cas d'un événement A général se traite alors par les méthodes de prolongement habituelles de la théorie de la mesure.

La formule précédente permet de ramener la démonstration du théorème à la démonstration de la formule :

$$P_\mu^{(s)} \left(\left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = s \right\} \right) = 1 \quad (s \in S)$$

Ce dernier résultat implique en effet que pour tout borélien S_0 de S , on a :

$$P_\mu (\lim X_0 \text{ existe et } \in S_0) \\ = \int P_\mu^{(s)} (\lim X_n \text{ existe et } \in S_0) \nu_1 (ds) = \nu_1 (S_0)$$

D'autre part, pour démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = s$ presque sûrement pour $P_\mu^{(s)}$, il suffit d'appliquer le cas particulier (déjà démontré) du théorème à la matrice $P^{(s)}$ ($= P^{[K(\cdot, s)]}$) et au processus associé.

En effet, comme $P^{(s)} g = g$ équivaut à $P [g, K(\cdot, s)] = g K(\cdot, s)$, on voit facilement que 1 est une fonction harmonique extrémale pour $P^{(s)}$; le cas particulier du théorème est donc applicable. Comme la matrice potentiel $G^{(s)}$ associée à $P^{(s)}$ vaut :

$$G^{(s)} (i, j) = G (i, j) \frac{K (j, s)}{K (i, s)}$$

on a aussi :

$$K^{(s)} (i, j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{G^{(s)} (i, j)}{\sum_l \mu (l) K (l, s) G^{(s)} (l, j)} = \frac{G (i, j)}{\mu G (j) \cdot K (i, s)} = \frac{K (i, j)}{K (i, s)}$$

on voit donc que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K (i, X_n) = K (i, s) \lim_{n \rightarrow \infty} K^{(s)} (i, X_n) = K (i, s) \quad \text{p.s. } P_\mu^{(s)} \quad (i \in E)$$

En vertu de la définition de la topologie de $E + S$, cela équivaut à :

$$P_\mu^{(s)} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = s \right] = 1$$

Pour achever la démonstration du théorème il ne reste plus qu'à établir la validité de la formule donnant la loi de probabilité de X_∞ conditionnelle en X_n ($=$ conditionnelle en X_0, \dots, X_n). A cet effet, montrons que pour tout $n \geq 0$ et tout événement A , on a :

$$P_\mu (A/X_n = i) = \int P_\mu^{(s)} (A/X_n = i) K (i, s) \nu_1 (ds) \quad (i \in E, \mu P^n (i) > 0).$$

Comme $P_\mu (X_n = i) = \mu P^n (i)$ et $P_\mu^{(s)} (X_n = i) = \mu P^n (i) \cdot K (i, s)$, on a en effet :

$$P_\mu (A/X_n = i) \cdot \mu P^n (i) = P_\mu (A \{X_n = i\}) \\ = \int P_\mu^{(s)} (A \{X_n = i\}) \nu_1 (ds) \\ = \int P_\mu^{(s)} (A/X_n = i) K (i, s) \nu_1 (ds) \cdot \mu P^n (i)$$

On déduit de la formule ci-dessus que :

$$P_\mu (X_\infty \in S_0/X_n = i) = \int P_\mu^{(s)} (X_\infty \in S_0) \cdot K (i, s) \nu_1 (ds) \\ = \int_{S_0} K (i, s) \nu_1 (ds)$$

Le théorème est ainsi complètement démontré.

COROLLAIRE -

Pour tout ensemble filtrant croissant $\{A_\alpha\}$ de parties transientes de E convergeant vers E , et pour tout $i \in E$, le filtre des mesures positives $\{G (i, \cdot) u_{A_\alpha} (\cdot)\}$ converge faiblement vers la mesure de probabilité $\{K (i, \cdot) \nu_1 (\cdot)\}$ concentrée sur S au sens où pour toute fonction continue et bornée h définie sur $E + S$, on a :

$$\sum_E G (i, j) u_{A_\alpha} (j) h (j) \longrightarrow \int_S K (i, s) h (s) \nu_1 (ds)$$

Démonstration.

Comme $X_{\tau_A} \rightarrow X_\infty$ presque sûrement suivant $\{A_n\}$, il est clair que $h(X_{\tau_A}) \rightarrow h(X_\infty)$ presque sûrement dans les mêmes conditions si h est continue sur $E + S$; si h est de plus bornée, on a alors : $E_i[h(X_{\tau_A})] \rightarrow E[h(X_\infty)]$, ce qui équivaut à la convergence ci-dessus en vertu des formules trouvées précédemment pour les lois de répartition de X_{τ_A} et de X_∞ .

PROPOSITION 14 -

Pour toute fonction sur-harmonique f , la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} f(X_n)$ existe au sens presque sûr. Pour tout potentiel Gv , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Gv(X_n) = 0 \quad \text{presque sûrement}$$

tandis que pour toute fonction harmonique h , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(X_n) = u(X_\infty) \quad \text{presque sûrement}$$

à condition de désigner par u la dérivée de la mesure v_h de représentation de h par rapport à la mesure v_1 de représentation de 1 ($v_h = u \cdot v_1 + v_h'$ où $v_1 \perp v_h'$).

Démonstration.

La fonction aléatoire $\{f(X_n), n \geq 0\}$ est une sur-martingale positive dès que la fonction f est sur-harmonique ; on a en effet :

$$E_i[f(X_{n+1}) | X_0 \dots X_n] = P f(X_n) \leq f(X_n) \quad (n \geq 0)$$

Il s'en suit déjà que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(X_n)$ existe au sens presque sûr. Lorsque f est un potentiel, soit $f = Gv$, on a :

$$E_i[Gv(X_n)] = P^n Gv(i) \downarrow 0 \quad (n \uparrow \infty, i \in E)$$

le lemme de Fatou implique alors que la limite presque sûre de $Gv(X_n)$ est nulle.

Lorsque h est une fonction harmonique dont la mesure v_h de représentation intégrale est absolument continue par rapport à v_1 , c'est-à-dire lorsque :

$$h(i) = \int K(i, s) u(s) v_1(ds)$$

pour une fonction $u \in L^1_+(S, v_1)$ on a, d'après le théorème précédent :

$$\begin{aligned} E[u(X_\infty) | X_0, \dots, X_n] &= \int_S u(s) P[X_\infty \in ds | X_n] \\ &= \int_S u(s) K(X_n, s) v_1(ds) = h(X_n) \end{aligned}$$

Il s'en suit, par le théorème des martingales. que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{p.s. } h(X_n) = u(X_\infty)$$

Lorsque h est une fonction harmonique dont la mesure v_h de représentation intégrale est étrangère à v_1 , la fonction sur-harmonique $\inf(h, 1)$ est un potentiel. En effet la composante harmonique de la représentation de Riesz de $\inf(h, 1)$ est à la fois inférieure à h et à 1 et possède par suite une mesure de représentation inférieure à v_h et à v_1 ; comme 0 est l'unique mesure positive jouissant de cette propriété, $\inf(h, 1)$ est un potentiel. La première partie de la démonstration montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{p.s. } \inf(h(X_n), 1) = 0$, ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{p.s. } h(X_n) = 0$.

Une variable aléatoire réelle Z définie sur (Ω, \mathcal{A}) est dite *stationnaire* si elle est telle que $Z \circ \theta = Z$ presque sûrement (P_μ) ; en particulier un événement est dit stationnaire si sa fonction indicatrice 1_A est stationnaire, c'est-à-dire si $\theta^1(A) = A$ presque sûrement (P_μ). On convient d'identifier deux variables aléatoires réelles stationnaires (en particulier deux événements station-

naires) égales presque sûrement (P_μ). La proposition précédente permet de déterminer toutes les variables aléatoires réelles stationnaires P_μ -intégrables ; on en déduit en effet le résultat suivant :

COROLLAIRE -

Le sous-cône de $L^1_\star(P_\mu)$ formé des (classes d'équivalence de) variables aléatoires réelles stationnaires positives et (P_μ)-intégrables est isomorphe au cône $L^1_+(S, \nu_1)$ par la bijection $u \longleftrightarrow u(X_\infty)$. En particulier les (classes d'équivalence (P_μ)-)événements invariants correspondent biunivoquement aux classes d'équivalence (ν_1) des ensembles boréliens de S .

Démonstration.

Il résulte d'abord de :

$$X_\infty \circ \theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{p.s. } X_n \circ \theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{p.s. } X_{n+1} = X_\infty$$

que $u(X_\infty)$ est une variable aléatoire réelle stationnaire pour toute fonction réelle positive ν_1 -intégrable u définie sur S ; comme de plus $E_\mu[u(X_\infty)] = \int_S u(s) \nu_1(ds)$, il est clair que $u \longrightarrow u(X_\infty)$ définit une application positive linéaire et isométrique de $L^1(\nu_1)$ dans le sous-espace de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P_\mu)$ des variables aléatoires réelles stationnaires.

Inversement si Z est une variable aléatoire réelle stationnaire positive on a :

$$E_\mu(Z | X_{n+p} = i) = E_\mu(Z \circ \theta^p | X_n \circ \theta^p = i) = E_\mu(Z | X_n = i) \quad (n, p \geq 0)$$

(la 2ème égalité étant une conséquence de la stationnarité des probabilités de transition) ; il existe donc une fonction h positive, indépendante de n , telle que $E_\mu(Z | X_n = i) = h(i)$. La stationnarité de Z , soit $Z = Z \circ \theta^p$ ($p \geq 0$) implique que Z est une variable aléatoire réelle \mathcal{A}_∞^p -mesurable pour tout $p \geq 0$; la propriété de Markov entraîne donc que :

$$E_\mu[Z | X_0, \dots, X_n] = E_\mu[Z | X_n] = h(X_n)$$

et il résulte alors du théorème des martingales que :

$$\lim_n h(X_n) = Z \text{ presque sûrement } (P_\mu).$$

Mais $\{h(X_n), n \geq 0\}$ ne peut être une martingale positive P_μ -intégrable, sans que h soit une fonction harmonique μ -intégrable ; si u désigne la ν_1 -dérivée de la mesure de représentation ν_h de h sur S , la proposition précédente montre que :

$$\lim_n h(X_n) = u(X_\infty) \quad (\text{p.s.})$$

et donc finalement que $Z = u(X_\infty)$.

A toute partie A de l'espace E des états, associons l'événement $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n \in A\}$; cet événement est stationnaire comme on le voit facilement et par suite de la forme $\{X_\infty \in S_A\}$ pour une partie borélienne S_A de S , en vertu du corollaire précédent. On a donc en désignant (comme au paragraphe 3) par h_A la composante harmonique de la fonction $^A H 1$:

$$\begin{aligned} h_A(i) &= P_i[\limsup_n \{X_n \in A\}] \\ &= P_i(X_\infty \in S_A) \\ &= \int_{S_A} K(i, s) \nu_1(ds) \end{aligned}$$

L'ensemble A est transient si et seulement si $S_A = 0[\nu_1]$.

Convenons d'appeler *régulière* une partie A de E telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \{X \in A\}$ existe au sens presque sûr $[P_\mu]$ et de considérer comme équivalents deux ensembles réguliers A et A' tels que $A \Delta A'$

soit transient ; cette deuxième définition est naturelle puisque $\lim_n \{X_n \in A\}$ et $\lim_n \{X_n \in A'\}$ ne sont presque sûrement égaux que si et seulement si $A \Delta A'$ est transient. D'après ce qui précède, on a :

$$\lim_n \{X_n \in A\} = \{X_\infty \in S_A\}$$

Inversement si S' est un ensemble borélien de S , les ensembles d'états $A_\theta = \left\{ \int_S K(\cdot, s) \nu_1(ds) > \theta \right\}$ sont tels, lorsque $0 < \theta < 1$, que :

$$\lim \{X_n \in A_\theta\} = \{X_\infty \in S'\}$$

puisque :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S K(X_n, s) \nu_1(ds) = 1_{S'}(X_\infty) \quad \text{presque sûrement ;}$$

autrement dit les A_θ ($0 < \theta < 1$) sont réguliers, équivalents et tels que $S_{A_\theta} = S'$.

En résumé, la donnée d'un événement stationnaire (à une P_μ -équivalence près), la donnée d'une partie borélienne de S (à une ν_1 -équivalence près), la donnée d'un ensemble régulier (à un ensemble transient près), sont autant de données équivalentes.

7 - APPLICATION AUX PROMENADES ALEATOIRES -

1/ On appelle promenade aléatoire n-dimensionnelle une chaîne de Markov sur l'espace d'états Z^n dont la matrice de transition P soit de la forme $P(i, j) = p(j - i)$ pour une probabilité p sur Z^n . Il est facile de vérifier que pour toute fonction aléatoire de Markov associée à une telle matrice, la suite des différences successives $(X_{n+1} - X_n; n \geq 0)$ est une suite de variables aléatoires dans Z^n indépendantes et équidistribuées suivant p . Nous supposons en outre que la condition de support suivante est vérifiée par p : le plus petit sous-groupe de Z^n contenant le support $\{i : p(i) > 0\}$ de p est égal à Z^n ; cette condition, comme il est facile de le montrer, ne nuit pas essentiellement à la généralité.

PROPOSITION 15 -

Les fonctions harmoniques extrémales associées à la promenade aléatoire de loi p sur Z sont les fonctions exponentielles $h(i) = \exp(u, i)$ correspondant aux vecteurs $u \in R^n$ tels que $\sum_i p(i) \exp(u, i) = 1$.

Ce résultat montre donc que la frontière de sortie S associée à la promenade aléatoire est en correspondance biunivoque avec la "courbe" convexe $\{u : \sum p(i) \exp(u, i) = 1\}$ de R^n ; on pourra donc identifier S avec cette courbe et il est également facile de montrer à partir des définitions que la topologie définie sur S est identique à la topologie induite par la topologie euclidienne de R^n .

Démonstration.

Si h est harmonique, il en est encore de même de $h(k + \cdot)$ pour tout $k \in Z^n$, puisque :

$$\sum_j p(j - i) h(k + j) = \sum_l p(l - i - k) h(l) = h(k + i)$$

Si $h(o) = 1$ et si h est harmonique extrémale, il résulte alors de l'égalité :

$$h(i) = \sum_k p(-k) h(k+i) = \sum_{\{k: h(k) > 0\}} (p(-k) h(k)) \frac{h(k+i)}{h(k)}$$

qui exprime h comme une combinaison convexe de fonctions harmoniques $\frac{h(k+i)}{h(k)}$ égales à 1 en 0, que l'on a :

$$\frac{h(k+i)}{h(k)} = h(i) \quad \text{si } p(-k) h(k) > 0$$

Il est facile d'en déduire, grâce à l'hypothèse faite sur le support de p , que la fonction h est exponentielle, soit $h(i) = \exp(u, i)$ où $u \in R^n$. De plus on doit avoir :

$$\sum_i p(i) \exp(u \cdot i) = \exp(u \cdot o) = 1.$$

Montrons inversement que $\exp(u \cdot i)$ est une fonction harmonique extrémale dès que $\sum_i p(i) \exp(u \cdot i) = 1$. A cet effet il suffira déjà de démontrer que 1 est une telle fonction ; on en déduira alors le résultat général en considérant la loi $p(i) \exp(u \cdot i)$, la fonction 1 étant harmonique extrémale pour $\{p(i) \exp(u \cdot i)\}$ si et seulement si $\exp(u \cdot i)$ est harmonique extrémale pour p .

Si $1 = h_1 + (1 - h_1)$ est une décomposition de 1 en la somme de deux fonctions harmoniques, $\{h_1(X_n), n \geq 0\}$ est une martingale bornée ; en vertu du théorème des martingales cette martingale converge presque sûrement et on a :

$$h_1(X_n) = E(Z | X_n) \quad \text{si } Z = \lim_{n \rightarrow \infty} h_1(X_n)$$

Mais $\{X_n, n \geq 0\}$ étant une promenade aléatoire, la limite Z est nécessairement égale presque sûrement à une constante et il en résulte que h_1 est constante, ce qui suffit à démontrer que 1 est extrémale.

2/ Pour une promenade aléatoire transiente, la matrice potentiel G est de la forme :

$$G(i, j) = g(j - i) \quad \text{où} \quad g(i) = \sum_{m \geq 0} p^{m*}(i) < \infty \quad (i \in \mathbb{Z}^n)$$

Le théorème de convergence du paragraphe 6 montre alors que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{p. s.} \frac{g(X_n - i)}{g(X_n)} = 1 \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}^n$$

Remarquons que ce théorème peut se démontrer aussi directement dans certains cas particuliers. Ainsi si $n = 1$ et si $0 < E X < \infty$, le théorème du renouvellement montre que $\lim_{i \rightarrow \infty} g(i) = \frac{1}{EX}$ tandis qu'il est clair que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{p. s.} X_n = +\infty$; le résultat précédent en découle immédiatement si $EX < \infty$; par contre si $EX = \infty$, cette méthode directe ne donne plus de résultat.

3/ A toute matrice markovienne P d'une promenade aléatoire sur \mathbb{Z}^n , associons la matrice markovienne P' sur \mathbb{Z} définie par :

$$P'[(m, i); (n, j)] = \begin{cases} P(i, j) = p(j - i) & \text{si } n = m + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que P' est la matrice de transition d'une promenade aléatoire sur \mathbb{Z}^{n+1} et que cette matrice est transiente ; on a plus précisément :

$$G'[(m, i); (n, j)] = \begin{cases} P^{(n-m)*}(j - i) & \text{si } n \geq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera que si $\{X_n, n \geq 0\}$ est une promenade aléatoire sur \mathbb{Z}^n d'état initial i et de matrice de transition P , la fonction aléatoire $\{(n, X_n) ; n \geq 0\}$ définie sur \mathbb{Z}^{n+1} est une promenade aléatoire sur \mathbb{Z}^{n+1} d'état initial $(0, i)$ et de matrice de transition P' .

En s'appuyant sur la proposition, il est facile de montrer que les fonctions harmoniques extrémales associées à P' sont les fonctions de la forme :

$$h[(n, i)] = \exp(u \cdot i) [\varphi(u)]^{-n}$$

où u parcourt le convexe de $\mathbb{R}^n : U = \left\{ \varphi(u) \equiv \sum_i p(i) \exp(u \cdot i) < \infty \right\}$

Comme 1 est harmonique extrémale pour P' , on a aussi le théorème de convergence suivant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{p.s.} \frac{p^{(n-m)*}(X_n - i)}{p^*(X_n)} = 1 \quad (i \in \mathbb{Z}^n, m \in \mathbb{Z})$$

Remarquons en terminant qu'il est facile d'établir ce résultat directement. Il suffira de l'établir lorsque $m = 1$ et $p(i) > 0$, comme on le voit facilement par des considérations arithmétiques élémentaires. Mais on a alors :

$$P(X_1 = i | X_n = j) = \frac{P_1(X_1 = i, X_n - X_1 = j - i)}{P(X_n = j)} = p(i) \frac{p^{(n-1)*}(j - i)}{p^*(j)} ;$$

comme $P(X_1 = i | X_n)$ tend presque sûrement vers $P(X_1 = i)$ lorsque $n \rightarrow \infty$ en vertu du théorème des martingales, on voit ainsi que :

$$\frac{p^{(n-1)*}(X_n - i)}{p^*(X)} \rightarrow 1 \quad \text{si } p(i) > 0$$

III - ÉTUDE DU CAS RECURRENT

Dans tout ce chapitre, on considère une matrice markovienne P définie sur l'espace dénombrable E telle que $\sum_{n \geq 0} P^n \equiv \infty$ sur $E \times E$; on sait que l'hypothèse équivaut à la récurrence de la chaîne associée à P . (Les théorèmes de convergence du paragraphe 1 seront établis sous l'hypothèse supplémentaire de l'apériodicité de P).

LEMME 1 -

Toute fonction sur-harmonique est nécessairement constante.

Démonstration.

Si f est une fonction sur-harmonique, c'est-à-dire vérifie $0 \leq P f \leq f$, l'inégalité :

$$\left(\sum_{m < n} P^m \right) (f - P f) \leq f < \infty \quad \text{et l'hypothèse} \quad \sum_n P^n \equiv \infty$$

entraînent facilement que $f - P f = 0$ c'est-à-dire que f est harmonique. (Remarquons que ce raisonnement montre aussi qu'il n'existe pas de matrice sous-markovienne telle que $\sum_n P^n \equiv \infty$ qui ne soit markovienne).

Toute fonction harmonique non identiquement nulle est d'autre part strictement positive ; en effet, les relations $0 \leq f = P^n f$ ($n \geq 1$) et $f(i) = 0$ pour un i fixé entraînent que $f(j) = 0$ pour tout j , puisque pour tout j il existe au moins un $n \geq 1$ tel que $P^n(i, j) > 0$. Soient alors f une fonction harmonique et a une constante > 0 . La fonction $\min(f, a)$ est sur-harmonique, donc harmonique d'après la première partie de la démonstration ; la fonction $(f - a)^+ = f - \min(f, a)$ est donc encore harmonique. D'après ce qui vient d'être dit, cela entraîne que ou bien $f > a$ sur E , ou bien $f \leq a$ sur E ; cette propriété ne peut avoir lieu pour toute constante a , sans que f ne soit constante.

COROLLAIRE 1 -

Toute fonction bornée inférieurement ou supérieurement f (de signe quelconque) telle que $P f = f$ est nécessairement constante.

COROLLAIRE 2 -

Les matrices positives ${}^A H = \sum_{n \geq 0} (I_A c P)^n I_A$ et $\Pi_A = I_A P \sum_{n \geq 0} (I_A c P)^n I_A$ vérifient ${}^A H 1 = 1$ et $\Pi_A 1 = 1$ pour tout ensemble non vide A d'états.

Démonstration.

Ce résultat exprime que toute chaîne de Markov d'état initial i (resp. $i \in A$) atteint (resp. retourne dans) l'ensemble A avec une probabilité égale à 1 ; il résulte donc immédiatement des propriétés de récurrence de la chaîne.

Alternativement en remarquant que $P ({}^A H 1) = {}^A H 1 - (I_A - \Pi_A) 1 \leq {}^A H 1$ [cf page 48] on déduit du lemme précédent que la fonction sur-harmonique ${}^A H 1$ (qui est majorée par 1) est constante et donc égale à 1 puisque ${}^A H 1 = 1$ sur A ; donc $I_A - \Pi_A 1 = 0$.

LEMME 2 -

Il existe une mesure strictement positive (mais non nécessairement bornée) unique à une constante multiplicative près, soit α , vérifiant l'égalité $\alpha P = \alpha$. Les matrices positives et finies :

$$H^A = I_A \sum_{n \geq 0} (P I_A c)^n \quad \text{et} \quad \Pi_A$$

vérifient les relations $\alpha H^A = \alpha$ et $\alpha \Pi_A = \alpha 1_A$ pour tout ensemble non vide A d'états.

Montrons d'abord que les matrices $\sum_{n \geq 0} (P I_{A^c})^n$ et donc H^A sont finies. Comme pour tout état j il existe un $m \geq 0$ tel que $(I_{A^c} P)^m 1_A(j) > 0$ puisque :

$$\sum_{m \geq 0} (I_{A^c} P)^m 1_A(j) = {}^A H 1(j) > 0$$

il nous suffira de remarquer à cet effet que :

$$\sum_j \sum_{n \geq 0} (P I_{A^c})^n(i, j) (I_{A^c} P)^n 1_A(j) \leq P {}^A H 1 < \infty.$$

Les matrices H^A vérifient alors la relation $H^A P = H^A + \Pi_A - I_A$ [cf page 48] ; en particulier si A se réduit à un seul état, soit $A = \{i\}$, on trouve que $H^{\{i\}} P = H^{\{i\}}$ puisque $\Pi_{\{i\}} = I_{\{i\}}$. La mesure positive $\alpha^{(i)} = H^{\{i\}}(i, \cdot)$ est donc invariante par P ; elle n'est pas identiquement nulle puisque $\alpha^{(i)}(i) = 1$ et on déduit alors facilement de $\alpha^{(i)} P = \alpha^{(i)}$ qu'elle est strictement positive sur E . L'existence d'une mesure α est ainsi démontrée.

Si α est une mesure strictement positive invariante par P , la formule :

$$P^*(i, j) = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} P(j, i)$$

définit une matrice markovienne telle que $\sum_{n \geq 0} (P^*)^n \equiv \infty$ sur $E \times E$. La formule $P^*(f/\alpha) = f P/\alpha$ que l'on déduit de cette définition et le lemme 1 appliqué à P , montrent que pour toute mesure positive f telle que $fP \leq f$ est nécessairement proportionnelle à α ; ce résultat implique en particulier l'unicité de la mesure invariante α à une constante multiplicative près. Les matrices ${}^A H^*$ et Π_A^* construites à partir de P^* comme ${}^A H$ et Π_A le sont à partir de P sont aussi données par :

$${}^A H^*(i, j) = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} H^A(j, i) \quad \Pi_A^*(i, j) = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \Pi_A(j, i)$$

comme on le vérifie aisément ; le corollaire 2 du lemme 1 appliqué à ${}^A H^*$ et Π_A^* montre donc que $\alpha H^A = \alpha$ et que $\alpha \Pi_A = \alpha 1_A$.

1 - THEOREMES DE CONVERGENCE -

Le théorème suivant est dû à Chung au moins dans le cas où l'ensemble d'états A qui y est considéré se réduit à un seul état. Le paragraphe présent est consacré à la démonstration de ce théorème et de quelques autres résultats de convergence du même type.

THEOREME 3 -

Pour toute matrice markovienne récurrente et apériodique P et pour tout sous-ensemble non vide A de E , la convergence suivante a lieu en chaque point de $E \times E$:

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_0^n [P^n - {}^A H P^n - P^n H^A + {}^A H P^n H^A] = G_A$$

En particulier lorsque $A = \{k\}$, on obtient que :

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_0^n \left[P^n(i, j) - P^n(k, j) - P^n(i, k) \frac{\alpha_j}{\alpha_k} + P^n(k, k) \frac{\alpha_j}{\alpha_k} \right] = G_{(k)}(i, j)$$

Remarque.

On voit facilement que $(P^n - {}^A H P^n - P^n H^A + {}^A H P^n H^A)$ et G_A sont nuls en dehors de $A^c \times A^c$; le théorème précédent est donc trivial en dehors de $A^c \times A^c$.

La démonstration du théorème est basée sur le lemme suivant dû à Chung qui sera encore utile dans la suite :

LEMME 4 -

Pour toute matrice sous-markovienne P et quels que soient $N > 0$ et le sous-ensemble non vide A de E, on a :

$$\begin{aligned}
 - G_A(i, i) \frac{\alpha_j}{\alpha_i} &\leq \sum_0^N (P^n - {}^A H P^n)(i, j) \leq G_A(i, j) \leq G_A(i, i) \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \\
 - G_A(j, j) &\leq \sum_0^N (P^n - P^n H^A)(i, j) \leq G_A(i, j) \leq G_A(j, j)
 \end{aligned}$$

Démonstration.

De la formule ${}^A H - I = G_A (P - I)$, résulte que :

$$\sum_0^N (P^n - {}^A H P^n) = G_A (I - P^{N+1})$$

et donc que :

$$- G_A P^{N+1} \leq \sum_0^N (P^n - {}^A H P^n) \leq G_A$$

Mais $G_A(i, j) \leq G_A(i, i) \frac{\alpha_j}{\alpha_i}$ [formule duale de $G_A(i, j) \leq G_A(j, j)$] et par suite $G_A P^{N+1}(i, j) \leq G_A(i, i) \frac{\alpha_j}{\alpha_i}$.

La première ligne du lemme est ainsi démontrée, la seconde se démontre dualement.

Un second résultat nécessaire à la démonstration du théorème, au moins lorsque A n'est pas fini, est la proposition suivante, due à Orey. On y désigne par $l^{(1)}$ l'espace des fonctions réelles sommables définies sur E ; cet espace vectoriel est un espace de Banach pour la norme $\|f\| = \sum_E |f_i|$.

PROPOSITION 5 -

Pour toute matrice markovienne récurrente apériodique P et pour tout $f \in l^{(1)}$ tel que $\langle f, 1 \rangle = 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f P^n\|_{l^1} = 0$$

Démonstration.

Il revient au même de démontrer que si g et f sont deux lois de probabilité sur E on a la convergence $\|f P^n - g P^n\| \rightarrow 0$ dans $l^{(1)}$.

Soit i_0 un état arbitrairement fixé dans E et soit $M = \{n : f P^n(i_0) \leq g P^n(i_0)\}$. Si $\{T_n, n \geq 1\}$ désigne une suite de variables aléatoires entières > 0 indépendantes et ayant la même loi de probabilité, soit F, que le temps de retour à l'état i_0 , considérons la fonction de l'entier a à valeurs dans $[0, 1]$ définie par :

$$p(a) = P \left[a + \sum_1^n T_m \in M \quad \text{pour une infinité de } n \right]$$

Il est facile de vérifier que $p(a) = \sum_b p(a+b) F(b)$; comme la chaîne de Markov considérée est apériodique, c'est-à-dire comme p.g.c.d. $\{b : F(b) > 0\} = 1$ l'équation précédente entraîne que $p(\cdot)$ est constante. D'autre part, comme l'événement dont $p(a)$ est la probabilité dépend symétriquement des variables T_m , la loi (0, 1) montre que $p(a) = 0$ ou 1 pour tout a. Ainsi ou bien $p(\cdot) \equiv 1$, ou bien $p(\cdot) \equiv 0$. En échangeant éventuellement le rôle de f et g (c'est-à-dire en remplaçant M par un ensemble contenant M^c), nous pourrions supposer finalement que $p \equiv 1$.

Désignons alors par E_n l'événement : $E_n = \{(m, X_m) \in M \times \{i_0\} \text{ pour un } m \leq n \text{ au moins}\}$; ce qui précède entraîne que $P_f(E_n) \uparrow 1$ ($n \uparrow \infty$). On peut écrire d'autre part pour tout état initial i que :

$$\begin{aligned}
P_i [X_n = j ; E_n] &= \sum_{0 \leq m \leq n} P_i [X_n = j ; (m, X_m) \in M \times \{i_0\} ; (l, X_l) \notin M \times \{i_0\} \quad \text{si } m < l \leq n] \\
&= \sum_{\substack{0 \leq m \leq n \\ m \in \mathbb{N}}} P^m (i, i_0) P_{i_0} [X_{n-m} = j ; (m+l, X_l) \notin M \times \{i_0\} \quad \text{si } 0 < l < n-m]
\end{aligned}$$

et on en déduit que :

$$\begin{aligned}
P_f [X_n = j ; E_n] &= \sum_{\substack{0 \leq m \leq n \\ m \in \mathbb{N}}} f P^m (i_0) P_{i_0} [X_{n-m} = j ; (m+l, X_l) \notin M \times \{i_0\} \quad \text{si } 0 < l < n-m] \\
&\leq \sum_{\substack{0 \leq m \leq n \\ m \in \mathbb{N}}} g P^m (i_0) P_{i_0} [X_{n-m} = j ; (m+l, X_l) \notin M \times \{i_0\} \quad \text{si } 0 < l < n-m] \\
&= P_g [X_n = j ; E_n]
\end{aligned}$$

donc que :

$$\begin{aligned}
f P^n (j) &= P_f [(X_n = j) ; E_n] + P_f (X_n = j ; E_n^c) \\
&\leq g P^n (j) + P_f (X_n = j ; E_n^c)
\end{aligned}$$

En tenant compte enfin de ce que $\sum_i f P^n (i) = \sum_i g P^n (i)$, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\sum_i |f P^n (i) - g P^n (i)| &= 2 \sum_i [f P^n (i) - g P^n (i)]^+ \\
&\leq 2 P_f (E_n^c) \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

Démonstration du théorème.

On va commencer par établir la validité de la formule suivante :

$$\sum_0^N (P^n - P^n H^A) = \sum_0^N I_{A^c} (P I_{A^c})^n - \sum_{m \geq 0} \left\{ \sum_{(N-m+1)^+}^N P^n \right\} I_A (P I_{A^c})^m \quad (N > 0)$$

A cet effet, il suffit de soustraire les 2 formules ci-dessous, dont la première a une signification intuitive et se démontre aisément par récurrence et dont la deuxième résulte des définitions :

$$\begin{aligned}
P^n &= I_{A^c} (P I_{A^c})^n + \sum_{m \leq n} P^{n-m} I_A (P I_{A^c})^m \\
P^n H^A &= \sum_{m \geq 0} P^n I_A (P I_{A^c})^m ;
\end{aligned}$$

on obtient ainsi :

$$\sum_0^N (P^n - P^n H^A) = \sum_0^N I_{A^c} (P I_{A^c})^n + \sum_{m=0}^N \left(\sum_0^{N-m} P^l \right) I_A (P I_{A^c})^m - \sum_{m \geq 0} \left(\sum_0^N P^n \right) I_A (P I_{A^c})^m$$

et on en déduit immédiatement la formule ci-dessus.

En tenant compte de ce que ${}^A H I_{A^c} \equiv 0$, on voit que la formule précédente entraîne que :

$$\sum_0^N ({}^A H P^n - {}^A H P^n H^A) = - \sum_{m \geq 0} \left\{ \sum_{(N-m+1)^+}^N {}^A H P^n \right\} I_A (P I_{A^c})^m$$

et donc que :

$$\begin{aligned} & \sum_0^N (P^n - P^n H^A - {}^A H P^n + {}^A H P^n H^A) \\ &= \sum_0^N I_{A^c} (P I_{A^c})^n - \sum_{m > 0} \left\{ \sum_{(N-m+1)^+}^N (P^n - {}^A H P^n) \right\} I_A (P I_{A^c})^m \end{aligned}$$

Comme le premier terme du deuxième membre \uparrow vers G_A lorsque $N \uparrow \infty$, il ne reste plus qu'à montrer que le deuxième terme tend vers zéro.

Comme $\varepsilon_i - \varepsilon_i {}^A H$ appartient à $l^{(1)}$ et vérifie $\langle \varepsilon_i - \varepsilon_i {}^A H, 1 \rangle = 0$, la proposition 3 montre que pour tout m fixé :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(N-m+1)^+}^N (P^n - {}^A H P^n) = 0$$

De plus :

$$\left| \sum_{(N-m+1)^+}^N (P^n - {}^A H P^n)(i, j) \right| \leq \left| \sum_0^N (P^n - {}^A H P^n)(i, j) \right| + \left| \sum_0^{(N-m)^+} (P^n - {}^A H P^n)(i, j) \right| \leq 2 G_A(i, i) \frac{\alpha_j}{\alpha_i}$$

d'après le lemme et comme :

$$\sum_{m > 0} \sum_j 2 G_A(i, i) \frac{\alpha_j}{\alpha_i} [I_A (P I_{A^c})^m]_{j,k} = 2 G_A(i, i) \frac{\alpha_k}{\alpha_i} < \infty$$

le théorème de convergence bornée entraîne que :

$$\sum_{m \geq 0} \left\{ \sum_{(N-m+1)^+}^N (P^n - {}^A H P^n) \right\} I_A (P I_{A^c})^m \longrightarrow 0 \quad (N \uparrow \infty)$$

ce qui achève la démonstration.

Dans le cas où la mesure α est bornée (cas dit récurrent positif), le raisonnement de la démonstration précédente permet de montrer le résultat beaucoup plus fort suivant :

PROPOSITION 6 -

Lorsque la mesure α est bornée et, ce qui est alors toujours possible, normalisée par la condition $\langle \alpha, 1 \rangle = 1$, on a pour tout sous-ensemble A non vide de E :

$$\begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_0^N (P^n - {}^A H P^n) = G_A - G_A 1 \otimes \alpha \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_0^N (P^n - P^n H^A) = G_A - 1 \otimes \alpha G_A \end{cases}$$

En particulier lorsque $A = \{k\}$ on obtient que :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_0^N (P^n_{(i,j)} - P^n_{(k,j)}) &= G_k(i, j) - G_k 1(i) \cdot \alpha_j \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_0^N (P^n_{(i,j)} - P^n_{(i,k)} \frac{\alpha_j}{\alpha_k}) &= G_k(i, j) - \alpha G_k(j) \end{aligned}$$

Démonstration.

On a établi dans la démonstration du théorème précédent que :

$$\sum_0^N (P^n - P^n H^A) = \sum_0^N I_{A^c} (P I_A)^n - \sum_{m \geq 0} \left\{ \sum_{(N-m+1)^+}^N P^n \right\} I_A (P I_{A^c})$$

Dans cette formule, le terme $\sum_{(N-m+1)^+}^N P^n$ converge lorsque $N \rightarrow \infty$ vers $1 \otimes \alpha$ en vertu d'un théorème ergodique classique ($m \geq 0$ fixé) ; de plus il est majoré par $m \cdot \frac{\alpha_j}{\alpha_i}$, ainsi qu'on le voit facilement en remarquant que $\alpha_j = \alpha P^n(j) \geq \alpha(i) P^n(i, j)$. Nous allons montrer que :

$$\sum_{m \geq 0} m \alpha I_A (P I_{A^c})^m = \alpha G_A < \infty ;$$

il s'en suivra, par application du théorème de convergence bornée, que lorsque $N \rightarrow \infty$:

$$\sum_{m \geq 0} \left\{ \sum_{(N-m+1)^+}^N P^n \right\} I_A (P I_{A^c})^m \rightarrow 1 \otimes \alpha G_A$$

ce qui établira la deuxième formule de la proposition.

Or, la formule :

$$P^n = I_{A^c} (P I_{A^c})^n + \sum_{m \leq n} P^{n-m} I_A (P I_{A^c})^m$$

considérée dans la démonstration du théorème précédent, entraîne que :

$$\alpha = \alpha I_{A^c} (P I_{A^c})^n + \sum_{m \leq n} \alpha I_A (P I_{A^c})^m$$

Comme :

$$\alpha = \alpha H^A = \sum_{m \geq 0} \alpha I_A (P I_{A^c})^m$$

on en déduit par soustraction :

$$\sum_{m > n} \alpha I_A (P I_{A^c})^m = \alpha I_{A^c} (P I_{A^c})^n$$

En additionnant par rapport à n , on aboutit à la formule cherchée :

$$\sum_{m \geq 0} m \cdot \alpha I_A (P I_{A^c})^m = \alpha G_A$$

Comme $G(i, j) \leq G(j, j) < \infty$ et comme α est une probabilité, on a :

$$\alpha G_A(j) \leq G_A(j, j) < \infty.$$

Les résultats de ce paragraphe ont conduit Kemeny et Snell à poser la définition suivante :

Définition.

Une chaîne est dite normale si les limites suivantes existent pour tout couple d'états $i, j \in E$:

$$B_{(i,j)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_0^N \left(P_{i,i}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_i} - P_{(i,j)}^n \right),$$

$$C_{(i,j)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_0^N \left(P_{(j,j)}^n - P_{(i,j)}^n \right).$$

La proposition 4 montre déjà que toute chaîne pour laquelle α est bornée est normale ; les matrices B et C sont données dans ce cas par :

$$B(i, j) = \alpha G_i(j), \quad C(i, j) = G_j 1(i) \cdot \alpha_j.$$

(Orey a montré qu'il existait des chaînes non normales.)

PROPOSITION 7 -

Les matrices B et C associées à une chaîne normale sont non-négatives et s'annulent sur la diagonale $\{i = j\}$ de $E \times E$. De plus pour tout sous-ensemble fini A de E, on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_0^N (P^n - {}^A H P^n) = G_A - {}^A \lambda \otimes \alpha ; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} G_A P^N = {}^A \lambda \otimes \alpha ;$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_0^N (P^n - P^n H^A) = G_A - 1 \otimes \lambda^A ; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P^N G_A = 1 \otimes \lambda^A ;$$

pour 2 vecteurs positifs ${}^A \lambda$ et λ^A portés par A^c .

Inversement pour qu'une chaîne soit normale il suffit que l'une des conditions suivantes soient vérifiées :

a) pour un état k fixé, les limites suivantes existent :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_0^N (P^n - {}^{(k)} H P^n) \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_0^N [P^n - P^n H^{(k)}]$$

b) pour un état k fixé, les limites suivantes existent :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} G_{(k)} P^N \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P^N G_{(k)}$$

c) pour un état k fixé, les limites suivantes existent quel que soit l'état j :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} H^{(j,k)} P^N \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P^N {}^{(j,k)} H$$

Démonstration.

a) Il résulte de : $P^n(i, j) = \sum_0^n P_i(v_j = m) P^{n-m}(j, j)$ que l'on a :

$$\sum_0^N P^n(i, j) = \sum_0^N P_i(v_j \leq N - n) P^n(j, j) \leq \sum_0^N P^n(j, j) ;$$

la matrice C est donc nécessairement ≥ 0 et il est clair que $C(i, i) = 0$ pour tout i.

b) La formule $G_A P - G_A = {}^A H - I$ entraîne que :

$$\sum_0^N (P^n - {}^A H P^n) = G_A - G_A P^{N+1}$$

Par suite les limites :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_0^N (P^n - {}^A H P^n) \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} G_A P^N$$

existent toutes les deux ou n'existent ni l'une ni l'autre. Comme la limite, soit L, de $G_A P^N$ vérifie, lorsqu'elle existe, $LP \leq L$ en vertu du lemme de Fatou, elle est nécessairement de la forme ${}^A \lambda \otimes \alpha$ où ${}^A \lambda$ est un vecteur ≥ 0 , porté par A^c ; la limite de $\sum_0^N (P^n - {}^A H P^n)$ lorsque $N \rightarrow \infty$ est alors de la forme $G_A - {}^A \lambda \otimes \alpha$.

L'hypothèse de normalité entraîne d'autre part que la limite de $\sum_0^N P^n f$ existe pour tout vecteur f à support fini tel que $\sum_i \alpha_i f_i = 0$; un tel vecteur peut en effet s'écrire $f = \sum_k f_k \left(\varepsilon_k - \varepsilon_i \frac{\alpha_k}{\alpha_i} \right)$ et on a donc $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_0^N P^n f = -B f$. Ce résultat est applicable au vecteur $H^A \varepsilon_j - \varepsilon_j$ (quels que soient l'état j et l'ensemble A fini non vide) et montre que $\sum_0^N (P^n H^A - P^n)$ converge lorsque $N \rightarrow \infty$.

c) Ce qui précède montre l'équivalence des conditions (a) et (b). Comme :

$$G_k(i, j) = {}^{(j,k)} H(i, j) G_k(j, j)$$

l'équivalence des conditions (b) et (c) est facile à voir. Enfin comme :

$$\sum_0^N (P^n - \{k\} H P^n)_{(i,j)} = \sum_0^N (P_{(i,j)}^n - P_{(k,j)}^n)$$

la convergence du premier membre pour tout $i, j \in E$ et un $k \in E$, entraîne l'existence de :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_0^N (P_{(i,j)}^n - P_{(k,j)}^n) - \sum_0^N (P_{(j,j)}^n - P_{(k,j)}^n) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^N (P_{(i,j)}^n - P_{(j,j)}^n)$$

c'est-à-dire de $C_{(i,j)}$.

2 - MATRICES POTENTIEL -

Nous conviendrons de désigner par N l'espace vectoriel des vecteurs f à supports finis tels que $\langle \alpha, f \rangle = 0$; pour tout état k fixé, les vecteurs $\varepsilon_i - \varepsilon_k \frac{\alpha_i}{\alpha_k}$ ($i \in E$) engendrent N . Pour tout sous-ensemble A de E , nous désignerons aussi par N_A le sous-vectoriel de N formé des f portés par A . Dualement, N' (N'_A) désignera l'espace vectoriel des vecteurs f à supports finis ($C A$) tels que $\langle f, 1 \rangle = 0$.

Nous établirons d'abord dans ce paragraphe que les matrices considérées dans la proposition suivante ont des propriétés analogues bien qu'un peu plus faibles à celles de la matrice - G considérée dans le cas transient.

PROPOSITION 8 -

Pour toute matrice G les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) pour tout $f \in N$, on a : $G f \in l^\infty$ et $(P - I) G f = f$;
- a') pour tout $g \in N'$, on a : $g G / \alpha \in l^\infty$ et $g G (P - I) = g$;
- b) il existe deux vecteurs a et b tels que :

$$G = - G_k + a \otimes \alpha + 1 \otimes b$$

(Dans la condition (b), k est un état arbitraire fixé).

Définition.

On appellera matrice potentiel une matrice G satisfaisant aux conditions équivalentes de la proposition précédente.

Démonstration.

1/ Toute matrice G de la forme (b) vérifie (a). En effet, comme $G f = - G_k f + 1 \langle b, f \rangle$ on voit qu'il suffit déjà de vérifier que la matrice $(- G_k)$ vérifie (a). Or, on a : $0 \leq G_k(\cdot, j) \leq G_k(j, j)$ et $(P - I) G_k(\cdot, j) = \varepsilon_k \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_k} - \varepsilon_j$; il s'en suit que $G_k f \in l^\infty$ pour tout f à support fini et que $(P - I) G_k f = - f$ pour tout $f \in N$.

2/ Inversement soit G une matrice vérifiant (a) ; en vertu de ce qui précède, la matrice $G + G_k$ est alors telle que $(G + G_k) f \in l^\infty$ et $(P - I) [(G + G_k) f] = 0$ pour tout $f \in N$. Il s'en suit que $(G + G_k) f$ est constant pour tout $f \in N$. En posant :

$$(G + G_k) \left(\varepsilon_j - \varepsilon_k \frac{\alpha_j}{\alpha_k} \right) = b_j 1$$

on obtient ainsi que .

$$G(i, j) + G_k(i, j) = G(i, k) \frac{\alpha_j}{\alpha_k} + b_j$$

c'est-à-dire la formule de représentation (a) en posant $a_i = \frac{G(i, k)}{\alpha_k}$.

Remarque.

Comme $G_k(k, \cdot) = 0 = G_k(\cdot, k)$, on peut montrer par un calcul facile que la formule (b) de la proposition équivaut à la formule suivante :

$$G(i, j) - G(k, j) - G(i, k) \frac{\alpha_j}{\alpha_k} + G(k, k) \frac{\alpha_j}{\alpha_k} = -G_k(i, j)$$

Comme toutes les conditions (b) obtenues en faisant varier l'état k sont équivalentes entre elles, la formule précédente doit être vérifiée en particulier par les matrices $(-G_l)$. On pourra en déduire facilement les relations suivantes :

$$\frac{G_i(k, j)}{\alpha_j} - \frac{G_i(k, l)}{\alpha_l} = \frac{G_j(i, l) - G_j(k, l)}{\alpha_l} = \frac{G_k(i, l)}{\alpha_l} - \frac{G_k(i, j)}{\alpha_j} = \frac{G_l(k, j) - G_l(i, j)}{\alpha_j}$$

valables quels que soient les états i, j, k, l .

THEOREME 9 -

Soit G une matrice potentiel et soit A un sous-ensemble fini non-vide de l'espace E des états.

Il existe alors deux vecteurs uniques ${}^A u$ et u^A portés par A tels que :

- a) $G u^A$ et ${}^A u G / \alpha$ sont constants sur A ,
- b) $\langle \alpha, u^A \rangle = 1 = \langle {}^A u, 1 \rangle$

De plus les restrictions à A des vecteurs $G u^A$ et ${}^A u G / \alpha$ sont égales à la même constante, soit c_A , égale encore à ${}^A u G u^A$.

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} {}^A H &= G (\Pi_A - I_A) + 1 \otimes {}^A u, \\ H^A &= (\Pi_A - I_A) G + u^A \otimes \alpha, \\ -G_A &= G - {}^A H G - (G u^A - c_A 1) \otimes \alpha \\ &= G - G H^A - 1 \otimes ({}^A u G - c_A \alpha) \end{aligned}$$

En particulier, les deux premières relations se réduisent sur $A \times A$ à :

$$I_A = I_A G (\Pi_A - I_A) + 1_A \otimes {}^A u, \quad I_A = (\Pi_A - I_A) G I_A + u^A \otimes \alpha 1_A$$

et ces relations permettent déjà de déterminer biunivoquement $\Pi_A, {}^A H, H^A$ et G_A à partir de G .

Commençons par établir le résultat élémentaire suivant que nous aurons ensuite l'occasion d'utiliser à plusieurs reprises.

Lemme 10 -

Pour tout vecteur $f \in l^\infty$ tel que $(P - I) f \in N$, on a :

$$f = G (P - I) f + c 1$$

pour une constante c .

On voit en effet immédiatement que la fonction $g = f - G (P - I) f$ appartient à l^∞ et vérifie $(P - I) g = 0$, donc est constante.

Démonstration du théorème.

La formule $(P - I) {}^A H = \Pi_A - I_A$ entraîne que ${}^A H(\cdot, j)$ qui appartient manifestement à l^∞ , est tel que $(P - I) {}^A H(\cdot, j) = (\Pi_A - I_A)(\cdot, j) \in N$; il existe donc une constante que l'on notera ${}^A u(j)$ telle que :

$${}^A H = G (\Pi_A - I_A) + 1 \otimes {}^A u$$

Il est clair que ${}^A u$ est porté par A ; comme ${}^A H 1 = 1$ et comme $(\Pi_A - I_A) 1 = 0$, on a de plus $\langle {}^A u, 1 \rangle = 1$ et le vecteur ${}^A u$ ne peut être nul.

En se restreignant à $A \times A$ dans la formule précédente, on trouve que :

$$I_A = I_A G (\Pi_A - I_A) + 1_A \otimes {}^A u$$

et par suite, en multipliant à droite par $G I_A$, que :

$$I_A G I_A = I_A G (\Pi_A - I_A) G I_A + 1_A \otimes ({}^A u G I_A)$$

En rapprochant cette formule de la formule duale qu'on démontrerait de même, on trouve qu'il existe une constante c_A telle que :

$${}^A u (G I_A) / \alpha 1_A = c_A 1_A = (I_A G) u^A$$

et donc telle aussi que :

$$I_A G I_A = I_A G (\Pi_A - I_A) G I_A + c_A 1_A \otimes \alpha 1_A$$

La première partie de la proposition est ainsi démontrée à l'unicité près des vecteurs ${}^A u$ et ${}^A u$, puisqu'il est clair que ${}^A u G u^A = \langle {}^A u, c_A 1_A \rangle = c_A$.

La matrice $(\Pi_A - I_A)$ en tant qu'opérateur à droite, applique le vectoriel fini-dimensionnel des fonctions réelles à support A dans l'hyperplan N_A . Comme l'opérateur :

$$I_A G (\Pi_A - I_A) = I_A - 1_A \otimes {}^A u$$

produit de $\Pi_A - I_A$ par $I_A G$, applique ce même espace sur l'hyperplan $\{\langle {}^A u, \cdot \rangle = 0\}$, on voit, en raisonnant sur les dimensions des espaces.

1/ que $(\Pi_A - I_A)$ est nécessairement une surjection sur N_A ;

2/ que $I_A G$ applique biunivoquement N_A sur l'hyperplan $\{\langle {}^A u, \cdot \rangle = 0\}$.

Cela montre d'une part que la matrice $\Pi_A - I_A$ est univoquement déterminée par l'équation précédente et la relation $\alpha(\Pi_A - I_A) = 0$, d'autre part qu'il ne peut exister plus d'un vecteur u tel que $u G / \alpha$ soit constant sur A et que $\langle u, 1 \rangle = 1$.

Il ne reste plus alors qu'à établir la double formule de la proposition concernant G_A . Or, pour tout j , $G_A(\cdot, j)$ appartient à l^∞ et vérifie :

$$(P - I) G_A(\cdot, j) = H^A(\cdot, j) - I(\cdot, j) \in N ;$$

le lemme du début montre donc l'existence d'un vecteur v^A tel que :

$$G_A = G (H^A - I) + 1 \otimes v^A$$

et par suite tel que :

$$- G_A = G - G (\Pi_A - I_A) G - G u^A \otimes \alpha - 1 \otimes v^A$$

d'après la formule établie ci-dessus pour H^A . De plus en se restreignant à $A \times A$, on voit que $v^A = 0$ sur A . On établit dualement l'existence d'un vecteur ${}^A v$ porté par A^c et tel que :

$$- G_A = G - G (\Pi_A - I_A) G - 1 \otimes {}^A u G - {}^A v \otimes \alpha .$$

En comparant les deux formules, on obtient donc que :

$$(G u^A - {}^A v) \otimes \alpha = 1 \otimes ({}^A u G - v^A)$$

ce qui n'est possible, en tenant compte de ce que ${}^A v$ et v^A sont portés par A^c , que si :

$${}^A v = G u^A - c_A 1, \quad v^A = {}^A u G - c_A \alpha$$

En remplaçant v^A par sa valeur dans la formule ci-dessus, on obtient la formule de la proposition.

COROLLAIRE 1 -

Dans les conditions de la proposition précédente, la matrice $I_A G I_A$ sur $A \times A$ est inversible si et seulement si $c_A \neq 0$ et on a alors :

$$(I_A G I_A)^{-1} = \Pi_A - I_A + \frac{u^A \otimes u^A}{c_A}$$

Démonstration.

Nous avons démontré ci-dessus que $I_A G I_A$ applique biunivoquement N_A sur l'hyperplan $\{ \langle u^A, \cdot \rangle = 0 \}$ de l'espace des vecteurs portés par A ; pour que cette matrice soit inversible, il faut et il suffit donc que l'image de u^A qui $\notin N_A$, soit $I_A G u^A$, ne soit pas dans l'hyperplan $\{ \langle u^A, \cdot \rangle = 0 \}$. Comme $\langle u^A, I_A G u^A \rangle = c_A$, $(I_A G I_A)$ possède une inverse si et seulement si $c_A \neq 0$. De plus, si $c_A \neq 0$, on a :

$$(I_A G I_A) \left(\Pi_A - I_A + \frac{u^A \otimes u^A}{c_A} \right) = I_A G (\Pi_A - I_A) + \frac{1}{c_A} (I_A G u^A) \otimes u^A = (I_A - 1_A \otimes u^A) + 1_A \otimes u^A = I_A$$

ce qui démontre la formule du corollaire.

COROLLAIRE 2 -

Sous les hypothèses de la proposition, on a la formule :

$$- G_A = G - G H^A - {}^A H G + {}^A H G H^A$$

(On rapprochera cette formule de celle du théorème 1).

Démonstration.

On a démontré que :

$$- G_A = G - G H^A - 1 \otimes ({}^A u G - c_A \alpha)$$

En tenant compte de ce que ${}^A H I_{Ac} = 0$ et ${}^A H 1 = 1$, on obtient, en multipliant les 2 membres de la formule précédente à gauche par ${}^A H$:

$$0 = {}^A H G - {}^A H G H^A - 1 \otimes ({}^A u G - c_A \alpha)$$

En soustrayant cette formule de la précédente, on obtient celle du corollaire.

La proposition suivante montre que les résultats du théorème sont applicables notamment aux matrices B et C associées à une chaîne normale ; elle précise d'ailleurs les résultats.

PROPOSITION 11 -

Les matrices B et C associées à une chaîne normale sont des matrices potentielles et satisfont en outre aux équations :

$$B P = B + I - 1 \otimes \beta, \quad P C = C + I - \gamma \otimes \alpha$$

pour 2 vecteurs β, γ non négatifs (lorsque la mesure α est borné, on a : $\beta = \alpha$ et $\gamma = 1$)

Pour tout ensemble fini non vide A de l'espace E des états et pour toute chaîne normale, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n {}^A H = 1 \otimes {}^A v, \quad \lim H^A P^n = w^A \otimes \alpha$$

pour 2 vecteurs positifs portés par A , ${}^A v$ et w^A tels aussi que :

$${}^A H = B (\Pi_A - I_A) + 1 \otimes {}^A v, \quad {}^A H = (\Pi_A - I_A) C + w^A \otimes \alpha.$$

Ces vecteurs ${}^A v$ et w^A sont respectivement les uniques vecteurs portés par A tels que :

- 1/ ${}^A v B/\alpha$ est constant sur A et $\langle {}^A v, 1 \rangle = 1$,
- 2/ $C w^A$ est constant sur A et $\langle \alpha, w^A \rangle = 1$.

De plus on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n G_A = 1 \otimes ({}^A v B - c_A \cdot \alpha), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_A P^n = (C w^A - c_A 1) \otimes \alpha$$

et les inégalités : ${}^A v B \geq c_A \alpha$, $C w^A \geq c_A \cdot 1$ sont par suite valables sur tout E .

Démonstration.

Le lemme de Chung montre que pour tout $f \in N$, la suite $\left\{ \sum_0^n P^n f, n \geq 0 \right\}$ est une suite bornée dans $l^{(\infty)}$; l'hypothèse de normalité équivaut à la convergence de ces suites vers $(- B f)$ pour tout $f \in N$. Il s'en suit que pour toute chaîne normale et tout $f \in N$, on a :

$$B f \in l^{(\infty)} \quad \text{et} \quad (P - I) B f = \lim_N (P - I) \left(- \sum_0^n P^n f \right) = f,$$

c'est-à-dire que la matrice B satisfait à la condition (a) de la proposition. On remarquera de plus que l'équation $(P - I) B f = f$ entraîne que :

$$P^n B f = B f + \sum_{m < n} P^m f \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty, f \in N).$$

Comme dans la définition de B :

$$B_{(i, j)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n \left(P^n_{(i, i)} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} - P^n_{(i, j)} \right)$$

les sommes du second membre sont non-négatives, le lemme de Fatou implique que :

$$\begin{aligned} B P_{(i, k)} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j \sum_0^n \left(P^n_{(i, i)} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} - P^n_{(i, j)} \right) P_{(j, k)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n \left(P^n_{(i, i)} \frac{\alpha_k}{\alpha_i} - P^{n+1}_{(i, k)} \right) = B_{(i, k)} + I_{(i, k)} - \lim_{n \rightarrow \infty} P^{n+1}_{(i, k)} \end{aligned}$$

on voit que : $B P \leq B + I$. Comme on doit avoir $g B P = g B + g$ pour tout $g \in N'$ puisque B possède la propriété (a') de la proposition, la matrice $B + I - B P$ est nécessairement de la forme $1 \otimes \beta$.

Remarque.

Dans le cas où $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{n+1}$ n'est pas nulle, c'est-à-dire dans le cas où α est bornée, le raisonnement précédent montre que $B P \leq B + I - 1 \otimes \alpha$. Si α est normalisée par $\langle \alpha, 1 \rangle = 1$. En fait, comme on sait que dans ce cas $B_{(i, \cdot)} = \alpha G_i(\cdot)$, un calcul direct montre que $B P = B + I - 1 \otimes \alpha$.

Ce qui précède suffit à montrer que le théorème 8 est applicable à la matrice B et montre donc l'existence d'un vecteur ${}^A v$ unique porté par A , vérifiant la condition (1/) de la proposition et tel que ${}^A H = B (\Pi_A - I_A) + 1 \otimes {}^A v$. Comme $(\Pi_A - I_A)(\cdot, j) \in N$ pour tout ensemble A fini non vide d'états et tout j , on voit d'après une remarque du début de cette démonstration que :

$$P^n {}^A H = P^n B (\Pi_A - I_A) + 1 \otimes {}^A v \longrightarrow 1 \otimes {}^A v \quad (n \longrightarrow \infty)$$

Comme $(H^A - I) \varepsilon_j \in N$ pour tout j , l'équation : $(P - I) G_A = H^A - I$ entraîne avec l'hypothèse de normalité que :

$$(P^n - I) G_A = \left(\sum_{m < n} P^m \right) (H^A - I) \longrightarrow - B (H^A - I)$$

Mais d'après une formule précédente :

$$B (H^{\wedge} - I) = G_{\wedge} - 1 \otimes (^{\wedge}v B - c_{\wedge} \cdot \alpha)$$

et on obtient donc le dernier résultat énoncé dans la proposition :

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P^n G_{\wedge} = 1 \otimes (^{\wedge}v B - c_{\wedge} \cdot \alpha)$$

PROPOSITION 12 -

Soit G une matrice potentiel. Pour tout sous-ensemble fini non vide A de E et tout vecteur g à support fini, $u = g^{\wedge}H$ est l'unique vecteur jouissant des propriétés suivantes :

$$1/ u = 0 \text{ sur } A^c ;$$

$$2/ \langle u, 1 \rangle = \langle g, 1 \rangle ;$$

3/ il existe une constante c telle que $u G = g G + c \cdot \alpha$ sur A . (La constante c a d'ailleurs la valeur $c = \langle g, c_{\wedge} 1 - G u^{\wedge} \rangle$ où u^{\wedge} est le vecteur d'équilibre associé à la matrice G dans le théorème 8).

Démonstration.

Montrons d'abord que $g^{\wedge}H$ a les propriétés indiquées. Comme ${}^{\wedge}H I_{A^c} = 0$ et ${}^{\wedge}H 1 = 1$, les propriétés (1) et (2) sont évidentes. Des formules du théorème, on déduit que :

$$(g^{\wedge}H) G = g G (\Pi_A - I_A) G + \langle g, 1 \rangle \cdot {}^{\wedge}u G$$

$$(g G) H^{\wedge} = g G (\Pi_A - I_A) G + \langle g, G u^{\wedge} \rangle \alpha$$

et donc que :

$$(g^{\wedge}H) G = (g G) H^{\wedge} + \langle g, 1 \rangle {}^{\wedge}u G - \langle g, G u^{\wedge} \rangle \alpha$$

En remarquant que ${}^{\wedge}u G = c_{\wedge} \alpha$ sur A et que $g G H^{\wedge} = g G$ sur A , on obtient que :

$$(g^{\wedge}H) G = g G + [\langle g, 1 \rangle c_{\wedge} - \langle g, G u^{\wedge} \rangle] \alpha \text{ sur } A.$$

Inversement soit u un vecteur jouissant des propriétés (1 - 2 - 3). La propriété (3) est équivalente, compte tenu de ce que $\alpha H^{\wedge} = \alpha$, à :

$$u G H^{\wedge} = g G H^{\wedge} + c \alpha \text{ sur } E$$

donc à :

$$u G (\Pi_A - I_A) g + \langle u, G u^{\wedge} \rangle \cdot \alpha = g G (\Pi_A - I_A) G + [\langle g, G u^{\wedge} \rangle + c] \alpha$$

En tenant compte de la propriété (2) ; $\langle u, 1 \rangle = \langle g, 1 \rangle$, cette équation équivaut encore à :

$$(u^{\wedge}H) G = (g^{\wedge}H) G + c' \alpha$$

pour une constante c' . Mais $u^{\wedge}H - g^{\wedge}H$ appartient à $N_A \subset N^1$ (puisque $\langle u^{\wedge}H, 1 \rangle = \langle u, 1 \rangle = \langle g, 1 \rangle = \langle g^{\wedge}H, 1 \rangle$) et il résulte donc de $(u^{\wedge}H - g^{\wedge}H) G = c' \alpha$ que $u^{\wedge}H - g^{\wedge}H = c' \alpha (P - I) = 0$. Enfin si u est porté par A , on a : $u = u^{\wedge}H$ et ce qui précède montre donc que $u = g^{\wedge}H$.

La proposition précédente peut être reformulée comme suit :

PRINCIPE DU BALAYAGE -

Soit G une matrice potentiel. Pour tout sous-ensemble non vide A de E tel que $c_{\wedge} \neq 0$ et toute fonction g à support fini, il existe alors une fonction g_{\wedge} unique qui est portée par A et vérifie $g_{\wedge} G = g G$ sur A .

La fonction g_{\wedge} est donnée par :

$$g_{\wedge} = g \left\{ {}^{\wedge}H + \frac{(G u^{\wedge} - c_{\wedge} 1) \otimes {}^{\wedge}u}{c_{\wedge}} \right\}$$

et on a :

$$g_{\wedge} G = g G + g \left\{ G_{\wedge} + \frac{(G u^{\wedge} - c_{\wedge} 1) \otimes ({}^{\wedge}u G - c_{\wedge} \alpha)}{c_{\wedge}} \right\}$$

(la matrice entre $\{-\}$ de cette dernière formule est nulle en dehors de $A \times A$).

3 - THEORIE DES FRONTIERES -

Pour tout sous-ensemble non vide A de E , désignons par C^A le cône convexe pointé saillant formé par les fonctions $P I_{A^c}$ -harmoniques sommables pour la mesure αI_A , soit :

$$C^A = \left\{ h : 0 \leq h < \infty, \sum_A \alpha_i h_i < \infty \quad \text{et} \quad (P I_{A^c}) h \leq h \right\} \quad ;$$

Nous commencerons par montrer dans ce paragraphe que tous les cônes C correspondant à des sous-ensembles *finis* non vides de E sont isomorphes entre eux et admettent donc une représentation intégrale commune.

Remarque.

Il revient au même d'étudier le cône des fonctions $P I_{A^c}$ -harmoniques et celui des fonctions $I_{A^c} P$ -harmoniques. On vérifie en effet immédiatement que ces 2 cônes sont isomorphes par les applications (inverses l'une de l'autre) $g \longrightarrow I_{A^c} g$ du 1er cône sur le second et $h \longrightarrow Ph$ du 2ème cône sur le 1er.

LEMME 13 -

Une application h de E dans $[0, \infty]$ telle que $(P I_{A^c}) h \leq h$ et que $\sum_A \alpha_i h_i < \infty$ (resp. = 0) est nécessairement finie (resp. identiquement nulle) sur E .

Démonstration.

Pour tout $j \in E$ il existe au moins un entier $n > 0$ et un état $i \in A$ tel que $(P I_{A^c})^n(i, j) > 0$; on a en effet :

$$\sum_{i \in A} \sum_{n \geq 0} \alpha_i (P I_{A^c})^n(i, j) = \alpha H^A(j) = \alpha(j) > 0.$$

Il s'en suit que si h est finie (resp. nulle) sur A , on a, sous les hypothèses du lemme, $h(j) < \infty$ (resp. = 0) puisque :

$$(P I_{A^c})^n(i, j) \cdot h(j) \leq (P I_{A^c})^n h(i) \leq h(i)$$

LEMME 14 -

Quel que soit l'ensemble A non vide, il n'existe pas de fonction bornée f distincte de 0 telle que $(P I_{A^c}) f = f$.

Démonstration.

Comme l'égalité $f = (P I_{A^c}) f$ entraîne que $|f| \leq (P I_{A^c}) |f|$, on a : $|f| \leq (P I_{A^c})^n |f| \leq c \cdot (P I_{A^c})^n 1$ si $|f|$ est majorée par c . Or $\lim_{n \uparrow \infty} (P I_{A^c})^n 1 = 0$ car dans la décomposition de Riesz de la fonction 1 qui est $P I_{A^c}$ sur-harmonique, soit :

$$1 = \sum_{n \geq 0} (P I_{A^c})^n (1 - P I_{A^c}) + \lim_{n \uparrow \infty} (P I_{A^c})^n 1$$

le premier terme vaut déjà $P^A H 1 = 1$.

Etablissons alors l'isomorphie de la famille de cônes $\{C^A, A \text{ fini } \neq \emptyset\}$. Posons auparavant :

$$K^A(i, j) = \sum_{n \geq 0} (P I_{A^c})^n(i, j) (1/\alpha_j) \quad (i, j \in E).$$

PROPOSITION 15 -

Si A et A' sont deux sous-ensembles finis non vides de E , il correspond à tout élément $h \in C^A$ un élément et un seul de $C^{A'}$, soit $u^{A', A}(h)$, tel que $u^{A', A}(h) - h \in l^{(\infty)}(E)$. L'application u ainsi définie est un isomorphisme de C^A sur $C^{A'}$ pour les structures vectorielles, ordonnées et topologiques de ces cônes ; on a de plus :

$$\sum_A \alpha_i h_i = \sum \alpha_i [u^{A',A}(h)]_i$$

pour tout $h \in C^A$. Enfin, $u^{A'',A} = u^{A'',A'} \circ u^{A',A}$ si A, A', A'' sont trois sous-ensembles finis non vides de E et $u^{A',A}$ est l'identité sur C^A pour tout A .

Démonstration.

Commençons par considérer deux sous-ensembles finis non vides A et A' tels que $A \subset A'$. La double formule suivante est alors facile à établir par récurrence sur l'entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} (P I_{A^c})^n &= (P I_{A',c})^n + \sum_{m=0}^{n-1} (P I_{A',c})^m P I_{A',nA^c} (P I_{A^c})^{n-m-1} \\ &= (P I_{A',c})^n + \sum_{m=0}^{n-1} (P I_{A^c})^m P I_{A',nA^c} (P I_{A',c})^{n-m-1} \end{aligned}$$

En effet, cette formule est évidemment valable pour $n = 0$ et si elle est exacte pour la valeur n du paramètre, il suffit de multiplier à droite (resp. à gauche) les termes de la première (resp. 2ème) ligne par $P I_{A^c} = P I_{A',c} + P I_{A',nA^c}$ pour obtenir la formule pour la valeur $n + 1$.

Par sommation sur n , on déduit d'abord de ces égalités que :

$$\begin{aligned} K^A &= K^{A'} + \sum_{m \geq 0} (P I_{A',c})^m P I_{A',nA^c} K^A \\ &= K^{A'} + \sum_{m \geq 0} (P I_{A^c})^m P I_{A',nA^c} K^{A'} \end{aligned}$$

Ensuite si h est $P I_{A^c}$ -harmonique, l'inégalité $(P I_{A',c})^n h \leq (P I_{A^c})^n h = h$ montre que $(P I_{A',c})^n h$ décroît en n et la première formule du début entraîne que la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow (P I_{A',c})^n h$, qui est $P I_{A',c}$ -harmonique, vérifie l'égalité :

$$h = \lim_{n \uparrow \infty} \downarrow (P I_{A',c})^n h + \sum_{n \geq 0} (P I_{A',c})^n P I_{A',nA^c} h.$$

Semblablement si h' est $P I_{A',c}$ -harmonique, l'expression $(P I_{A^c})^n h'$ croît avec n puisque :

$$(P I_{A^c})^n h' \geq (P I_{A',c})^n h' = h'$$

et la deuxième formule du début montre que :

$$\lim_{n \uparrow \infty} \uparrow (P I_{A^c})^n h' = h' + \sum_{m \geq 0} (P I_{A^c})^m P I_{A',nA^c} h' ;$$

la limite $\lim_{n \uparrow \infty} \uparrow (P I_{A^c})^n h'$ est par suite finie et donc $P I_{A^c}$ -harmonique.

Si h est alors un élément de C^A dont la décomposition de Riesz est donnée par :

$$h = \sum_E K^A(., j) \nu(j) + h_0$$

où h_0 est $P I_{A^c}$ -harmonique, associons lui l'élément $u(h) \in C^{A'}$ défini par sa décomposition de Riesz :

$$u(h) = \sum_E K^{A'}(., j) \nu(j) + \lim_{n \uparrow \infty} \downarrow (P I_{A',c})^n h_0$$

Il est clair que u est une application linéaire et positive de C^A dans $C^{A'}$ et les formules du début montrent que :

$$h = u(h) + \sum_{m \geq 0} (P I_{A',c})^m P I_{A',nA^c} h$$

On en déduit d'abord que l'application u est continue pour les topologies sur C^A et $C^{A'}$ de la convergence ponctuelle ; le second terme du second membre de la formule précédente ne dépend en effet que des valeurs de h sur l'ensemble fini $A' \cap A^c$. En remarquant que :

$$\sum_{m \geq 0} (P I_{A,c})^m P I_{A'} = P^{A'} H 1 = 1$$

on déduit ensuite de la formule précédente que $h - u(h) \in l^\infty$ puisque :

$$0 \leq h - u(h) = \sum_{m \geq 0} (P I_{A,c})^m P I_{A', n_{A^c}} h \leq \sup_{A', n_{A^c}} h < \infty$$

L'élément $u(h)$ de $C^{A'}$ est donc l'unique élément de $C^{A'}$ tel que $u(h) - h \in l^\infty$ puisque si $f \in C^{A'}$ vérifie $f - h \in l^\infty$, on a $u(h) - f \in C^{A'} \cap l^{(\infty)}$ et par suite $u(h) - f = 0$ (lemme 2).

Semblablement si :

$$h' = \sum_E K^{A'}(., j) v(j) + h'_0$$

est la décomposition de Riesz d'un élément de $C^{A'}$, associons lui l'élément $u'(h')$ de C^A défini par sa décomposition de Riesz :

$$u'(h') = \sum_E K^A(., j) v(j) + \lim_{n \uparrow \infty} (P I_{A^c})^n h'_0$$

Il est clair que u' est une application linéaire et positive de $C^{A'}$ dans C^A et les formules du début montrent que :

$$u'(h') = h' + \sum_{m \geq 0} (P I_{A^c})^m P I_{A', n_{A^c}} h'$$

On en déduit que u' est une application continue de $C^{A'}$ dans C^A . Comme :

$$\sum_{n \geq 0} (P I_{A^c})^n(., i) \leq \sum_{n \geq 0} (P I_{A^c})^n(i, i) < \infty \quad \text{sur } E \text{ (cf page 68)}$$

Il est clair que $u'(h') - h' \in l^\infty$ pour tout $h' \in C^{A'}$. Cette deuxième propriété entraîne déjà que les applications u et u' sont inverses l'une de l'autre et par suite établissent un isomorphisme des structures vectorielles, ordonnées et topologiques de C^A et $C^{A'}$. En effet pour montrer que $u' \circ u$ se réduit à l'identité sur C^A , on remarquera que pour tout $h \in C^A$:

$$u'_0 u(h) - h = \{u'[u(h)] - u(h)\} + \{u(h) - h\} \in l^{(\infty)}$$

et par suite, en vertu du lemme 2 que $u' \circ u(h) = h$; pour une raison analogue, $u \circ u'$ est l'identité sur $C^{A'}$.

Enfin le calcul suivant montre que :

$$\sum_{A'} \alpha_i h'_i = \sum_A \alpha_i [u'(h')]_i \quad (h' \in C^{A'})$$

et donc aussi que :

$$\sum_A \alpha_i h_i = \sum_{A'} \alpha_i [u(h)]_i \quad (h \in C^A)$$

Si $h' \in C^{A'}$, on a en tenant compte de ce que $\alpha I_A \cdot \sum_{m \geq 0} (P I_{A^c})^m = \alpha H^A = \alpha$:

$$\begin{aligned} \sum_A \alpha_i [u'(h')]_i &= \sum_A \alpha_i h'_i + \alpha I_A \sum_{m \geq 0} (P I_{A^c})^m P I_{A', n_{A^c}} h' \\ &= \sum_A \alpha_i H'_i + \alpha I_{A', n_{A^c}} h' = \sum_{A'} \alpha_i h'_i \end{aligned}$$

Ce qui précède établit l'existence et les propriétés de l'isomorphisme $u^{A',A}$ de C^A sur $C^{A'}$ lorsque $A \subset A'$ et aussi lorsque $A' \subset A$. Si A et A' sont ensuite deux sous-ensembles finis non vides de E dont l'un n'est pas inclus dans l'autre, la formule :

$$u^{A',A} = u^{A',A'UA} \circ u^{A'UA,A}$$

définit manifestement un isomorphisme de C^A sur $C^{A'}$; on a, de plus :

$$u^{A',A}(h) - h = \{u^{A',A'UA} [u^{A'UA,A}(h)] - u^{A'UA,A}(h)\} + \{u^{A'UA,A}(h) - h\} \in l^{(\infty)}$$

ce qui caractérise entièrement $u^{A',A}(h)$ dans $C^{A'}$.

Enfin pour achever la démonstration de la proposition, il reste à vérifier l'identité :

$$u^{A'',A} = u^{A'',A'} \circ u^{A',A} ;$$

il suffit à cet effet de remarquer que :

$$u^{A'',A'} \circ u^{A',A}(h) - h = \{u^{A'',A'} [u^{A',A}(h)] - u^{A',A}(h)\} + \{u^{A',A}(h) - h\} \in l^{(\infty)}$$

pour voir que $u^{A'',A'} \circ u^{A',A}(h)$ ne peut être différent dans $C^{A''}$ de $u^{A'',A}(h)$.

Le Théorème de représentation intégrale du paragraphe II.2 est applicable au cône C^A des fonctions $P I_{A,c}$ sur-harmoniques intégrables pour la mesure $1_A \cdot \alpha$ (A ensemble fini non vide). De plus la proposition précédente montre que les divers cônes C^A sont isomorphes entre eux et il est clair alors que les ensembles d'éléments extrémaux des bases $\{h : h \in C^A, \sum_A \alpha_i h_i = 1\}$ de ces cônes sont encore isomorphes entre eux. Parmi ces éléments extrémaux on trouve les fonctions $K^A(., j)$ ($j \in E$) qui vérifient $u^{A',A} [K^A(., j)] = K^{A'}(., j)$; il est donc possible de noter $K^A(., s)$ ($s \in S$) les autres éléments extrémaux de ces bases en imposant à ces paramétrisations de vérifier :

$$u^{A',A} [K^A(., s)] = K^{A'}(., s) \quad (s \in S).$$

La formule $u^{A',A} [K^A(., x)] = K^{A'}(., x)$ ($x \in E + S$) que l'on a ainsi établie et les propriétés de continuité de $u^{A',A}$ impliquent que la topologie métrisable sur $E + S$ définie comme la moins fine des topologies induisant sur E la topologie discrète et rendant continues les fonctions $K^A(i, .)$ sur $E + S$ ($i \in E$) ne dépend pas de l'ensemble A choisi pour la définir. On a ainsi démontré la première partie du résultat suivant où l'ensemble A est comme toujours supposé fini et non vide :

Toute fonction $P I_{A,c}$ - sur-harmonique (resp. harmonique) f admet la représentation unique :

$$f = \int_{E+S} K^A(., x) \nu(dx)$$

où ν est une mesure positive bornée sur $E + S$ (resp. portée par S) ; de plus $\sum_A \alpha_i f_i = \int_{E+S} d\nu$. Inversement, la formule précédente définit une fonction sur-harmonique (resp. harmonique) dès que ν est une mesure positive bornée sur $E + S$ (resp. portée par S).

Enfin on a :

$$u^{A',A} \left[\int_{E+S} K^A(., x) \nu(dx) \right] = \int_{E+S} K^{A'}(., x) \nu(dx)$$

quels que soient les ensembles finis non vides A et A' .

Pour montrer la 2ème partie du résultat précédent, il suffit d'établir que :

$$\sup_{x \in E+S} \|K^A(., x) - K^{A'}(., x)\|_{l^{(\infty)}} < \infty$$

puisqu'il en résultera alors que :

$$\int K^A(., x) \nu(dx) - \int K^{A'}(., x) \nu(dx) \in l^{(\infty)}$$

pour toute mesure positive bornée ν sur $E + S$, c'est-à-dire que l'image par $u^{A',A}$ de la première intégrale est égale à la seconde. Il suffit même d'établir ce résultat lorsque $A \subset A'$. Or, dans ce cas, d'après une formule de la démonstration de la proposition précédente, il résulte de $u^{A',A} [K^A(., x)] = K^{A'}(., x)$ que :

$$\|K^\wedge(\cdot, x) - K^\wedge(\cdot, x)\|_{L(\infty)} \leq \sup_{i \in A^c \cap A^c} K^\wedge(i, x).$$

D'autre part, d'après la démonstration du lemme 1, il existe des constantes C_i ($i \in E$) telles que $h(i) \leq C_i \sum_A \alpha_j h_j$ dès que $h \in C^A$; on en déduit l'inégalité :

$$\sup_{i \in A^c \cap A^c} K^\wedge(i, x) \leq \sup_{i \in A^c \cap A^c} C_i < \infty$$

et donc une majoration de $\|K^\wedge(\cdot, x) - K^\wedge(\cdot, x)\|_{L(\infty)}$ indépendante de x ($x \in E + S$).

Remarque.

Le Théorème de représentation intégrale précédent montre que les cônes C^A et le cône $\mathfrak{M}_+(E+S)$ des mesures positives bornées sur $E + S$ sont isomorphes pour les structures vectorielles et latticielles. Cet isomorphisme sera également topologique si on munit $\mathfrak{M}_+(E + S)$ de la topologie faible induite par l'ensemble $\{K^\wedge(i, \cdot), i \in E\}$ de fonctions continues bornées. (Remarquons encore que l'espace vectoriel de fonctions continues sur $E + S$ engendré par les fonctions $(K^\wedge(i, \cdot), i \in E)$ ne dépend pas de A en vertu des formules du début de la proposition ; cela montre directement que la topologie définie ci-dessus sur $\mathfrak{M}_+(E + S)$ ne dépend pas de l'ensemble A choisi).

Les résultats qui précèdent permettent encore de donner une représentation simple des fonctions P -sur-harmoniques sur un sous-ensemble de E de complémentaire fini.

PROPOSITION 16 -

Toute fonction $f \geq 0$ vérifiant l'inégalité $Pf \leq f$ sur le complémentaire A^c d'un sous-ensemble fini A de E admet la représentation :

$$f = {}^A Hf + 1_{A^c} \int_{E+S} K^\wedge(\cdot, x) \nu(dx)$$

où ν est une mesure positive bornée sur $E + S$ qui peut-être choisie indépendamment de l'ensemble fini A (tel que $A \supset \{f < Pf\}$).

Démonstration.

La fonction f est I_{A^c} P -sur-harmonique par hypothèse et admet donc la décomposition de Riesz :

$$f = \sum_{n \geq 0} (I_{A^c} P)^n (f - I_{A^c} Pf) + f'$$

où f' est la composante I_{A^c} P -harmonique de f . La fonction Pf' est alors la composante $P I_{A^c}$ -harmonique de Pf puisque de $P(I_{A^c} P)^n f = (P I_{A^c})^n Pf$ il résulte, en faisant tendre $n \rightarrow \infty$, que :

$$Pf' = P \left[\lim_n \downarrow (I_{A^c} P)^n f \right] = \lim_n \downarrow (P I_{A^c})^n (Pf).$$

En utilisant la représentation intégrale de Pf' , on obtient que :

$$f' = 1_{A^c} \cdot Pf' = 1_{A^c} \cdot \int_S K^\wedge(\cdot, s) \nu'(ds)$$

pour une mesure positive bornée ν' sur S . Pour voir que ν' ne dépend pas de l'ensemble A mais seulement de la fonction f , il suffit de remarquer que si $A \subset B$ on a :

$$\begin{aligned} \lim_n \downarrow (P I_{B^c})^n \cdot Pf &= \lim_n \downarrow (P I_{B^c})^n \left[\lim_n \downarrow (P I_{A^c})^n Pf \right] \\ &= \lim_n \downarrow (P I_{B^c})^n \left[\int_S K^\wedge(\cdot, s) \nu'(ds) \right] \\ &= \int_S K^\wedge(\cdot, s) \nu'(ds). \end{aligned}$$

En décomposant d'autre part la fonction $f - I_{A^c} Pf$ en la somme des deux fonctions positives $1_A f$ et $1_{A^c} (f - Pf) = 1_{A^c} (f - Pf)^+$, on voit que :

$$\sum_{n \geq 0} (I_{A^c} P)^n (f - I_{A^c} P f) = \sum_{n \geq 0} (I_{A^c} P)^n 1_A f + \sum_{n \geq 0} (I_{A^c} P)^n 1_{A^c} (f - P f)^+ = {}^A H f + 1_{A^c} K^A [(f - P f)^+ \alpha]$$

En posant $v = v'$ sur S , $= (f - P f)^+ \alpha$ sur E et en additionnant les formules obtenues, on obtient la formule de la proposition ; de plus la mesure v ainsi définie ne dépend pas de A .

4 - MATRICES POTENTIEL (suite) -

Nous concluons cet exposé en appliquant la théorie des frontières développée au paragraphe précédent à l'étude d'une classe particulière de matrices potentiels. Auparavant remarquons que les formules :

$$G_A(\cdot, x) = 1_{A^c} K^A(\cdot, x) \alpha(x)$$

$$H^A(\cdot, x) = 1_A K^A(\cdot, x) \alpha(x)$$

sont valables sur E , lorsque $x \in E$, en vertu des définitions. Lorsque $x \in S$, nous les adopterons comme définitions de $G_A(\cdot, s)$ et $H^A(\cdot, s)$ ($s \in S$) à partir de $K^A(\cdot, s)$, en convenant aussi de poser $\alpha(s) = 1$ pour tout $s \in S$.

THEOREME 17 - Pour tout $x \in E + S$, la formule :

$$G(x ; i, j) = G_{\{j\}}(i, x) \frac{\alpha(j)}{\alpha(x)} \quad (i, j \in E)$$

définit une matrice potentiel $G(x)$ jouissant des propriétés supplémentaires :

- a) $G(x) \geq 0$, $G(x ; i, i) = 0 \quad (i \in E)$;
- b) $P.G(x) \leq G(x) + I$.

De plus, toutes les matrices potentiels G jouissant de ces propriétés (a - b) sont données par la formule :

$$G = \int_{E+S} G(x) v(dx)$$

où v est une mesure de probabilité arbitraire sur $E + S$ (univoquement déterminée par G). Pour que $P G = G + I$ il est nécessaire et suffisant que v soit portée par S .

Nous commencerons par démontrer le lemme suivant qui est à proprement parler un corollaire de la proposition 16 :

LEMME 18 -

Toute fonction $f \geq 0$ telle que $P f \leq f + \varepsilon_k$ (resp. $P f = f + \varepsilon_k$) pour un k fixé, est de la forme :

$$f = f(k) 1 + \int_{E+S} G(x ; \cdot, k) \mu(dx)$$

pour une probabilité μ portée par $E + S$ (resp. S) et univoquement déterminée par f .

Démonstration du lemme.

Comme $P f \leq f$ sur $\{k\}^c$ et comme $\{k\} H(i, \cdot) = 1_{\{k\}}$, il existe une mesure positive et bornée v sur $E + S$ telle que :

$$f = f(k) 1 + 1_{\{k\}^c} \int_{E+S} K^{\{k\}}(\cdot, x) v(dx).$$

Comme :

$$(P 1_{\{k\}^c}) K^{\{k\}}(\cdot, x) = K^{\{k\}}(\cdot, x) - I(\cdot, x) \frac{1}{\alpha(x)}$$

et comme $K^{\{k\}}(k, x) = 1/\alpha(k)$, il en résulte que :

$$\text{Pf}(k) = f(k) + \frac{1}{\alpha(k)} \int v(dx) - \frac{v(\{k\})}{\alpha(k)}$$

Par suite $\int_{\{x \neq k\}} v(dx) \leq \alpha(k)$; comme on peut changer la valeur de v en k sans changer f puisque $1_{\{k\}^c} K^{\{k\}}(\cdot, k) = 0$, on pourra supposer que :

$$v(\{k\}) = \alpha(k) - \int_{\{x \neq k\}} v(dx) \geq 0.$$

Il reste alors à poser $\mu = (1/\alpha(k))v$ pour obtenir la formule du lemme.

Démonstration du théorème.

Les matrices G satisfaisant aux conditions (a - b) du théorème (qu'elles soient matrices potentiel ou non) sont, d'après le lemme précédent appliqué aux fonctions $G(\cdot, k)$ ($k \in E$), les matrices admettant la représentation :

$$G(i, j) = \int_{E+S} G(x; i, j) \mu_j(dx)$$

pour des probabilités μ_j définies sur $E + S$. De plus, pour que $PG = G + I$, il faut et il suffit que les probabilités μ_j soient portées par S .

Lorsque $i \neq j$, la formule précédente peut encore s'écrire :

$$G(i, j) = \int_{E+S} K^{\{j\}}(i, x) \mu_j(dx) \cdot \alpha(j)$$

et il s'en suit que l'on a sur $\{j, j'\}^c$:

$$G\left(\frac{1}{\alpha(j)} \varepsilon_j - \frac{1}{\alpha(j')} \varepsilon_{j'}\right) = \int_{E+S} K^{\{j\}}(\cdot, x) \mu_j(dx) - \int_{E+S} K^{\{j'\}}(\cdot, x) \mu_{j'}(dx)$$

Cette formule et le résultat de la proposition 15 montrent que la matrice G vérifie la condition $Gf \in l^\infty$ pour tout $f \in N$ (espace des fonctions à support fini telles que $\langle \alpha, f \rangle = 0$) si et seulement si les mesures μ_j ne dépendent pas de j .

D'autre part, la formule :

$$(P 1_{\{k\}^c} K^{\{k\}}(\cdot, x) + I(\cdot, x) \frac{1}{\alpha(x)}) = K^{\{k\}}(\cdot, x)$$

peut se réécrire sous la forme :

$$G(x) + I - PG(x) = I(\cdot, x) \frac{1}{\alpha(x)} \otimes \alpha$$

et on en déduit que les matrices G admettant la représentation ci-dessus sont telles que :

$$(G + I - PG)(i, j) = \mu_j(i) \alpha(j).$$

Par suite, pour que la condition : $(P - I)Gf = f$ pour tout $f \in N$ soit satisfaite, il est nécessaire et suffisant que l'on ait $\mu_j(i) = \mu_{j'}(i)$ pour tout $i, j, j' \in E$, c'est-à-dire que les restrictions à E des probabilités μ_j soient indépendantes de j .

On déduit immédiatement de ce qui précède qu'une matrice G satisfaisant aux conditions (a - b) du théorème vérifie la condition (a) de la proposition 8 (c'est-à-dire est une matrice potentiel) si et seulement si dans la représentation du début les mesures μ_j sur $E + S$ ne dépendent pas de j .

Le théorème 9 est applicable aux matrices potentiels $G(x)$ définies dans le théorème précédent. La proposition ci-dessous montre que les vecteurs u_x^A introduits dans ce théorème relativement à $G(x)$ vérifient :

$$u_x^A = H^A(\cdot, x) \frac{1}{\alpha(x)}$$

$$G(x) u_x^A - c_{A,x} 1 = G_A(\cdot, x) \frac{1}{\alpha(x)}$$

PROPOSITION 19 -

Pour tout sous-ensemble fini non vide A de l'espace E des états et pour tout $x \in E + S$, on a les relations matricielles :

$$H^A = (\Pi_A - I_A) + H^A(\cdot, x) \frac{1}{\alpha(x)} \otimes \alpha,$$

$$G_A = ({}^A H - I) G(x) + G_A(\cdot, x) \frac{1}{\alpha(x)} \otimes \alpha,$$

Le vecteur $H^A(\cdot, x) \frac{1}{\alpha(x)}$ est porté par A , vérifie :

$$\langle \alpha, H^A(\cdot, x) \frac{1}{\alpha(x)} \rangle = 1$$

et est tel que :

$$G(x) \left[H^A(\cdot, x) \frac{1}{\alpha(x)} \right] = c_{A,x} 1 - G_A(\cdot, x) \frac{1}{\alpha(x)} \leq c_{A,x} 1 (= c_{A,x} 1 \text{ sur } A)$$

pour une constante $c_{A,x} \geq 0$. De plus, il n'existe pas d'autre vecteur u porté par A , tel que $\langle \alpha, u \rangle = 1$ et que $G(x) u$ soit constant sur A .

Démonstration.

Soit j un état de A . La formule :

$$K^{(j)}(i, x) = K^A(i, x) + \left\{ \sum_{n \geq 0} (P I_{A^c})^n P I_{A \cap \{j\}^c} K^{(j)} \right\} (i, x) \quad (i \in E, x \in E + S)$$

que l'on a établie dans la démonstration de la proposition 15 peut aussi s'écrire :

$$K^{(j)} = K^A + P^A H \cdot 1_{\{j\}^c} K^{(j)} \quad \text{sur } E \times (E + S),$$

ou encore, en utilisant la définition de $G(x)$:

$$G(x; i, j) + I(\cdot, j) \alpha(j) = K^A(\cdot, x) \alpha(j) + P^A H G(x; \cdot, j) \quad \text{sur } E \quad (j \in A, x \in E + S)$$

Par restriction à A , et compte-tenu de ce que $I_A P^A H = \Pi_A$ cette formule montre que l'on a :

$$G(x) + H^A - \Pi_A G(x) = H^A(\cdot, x) \frac{1}{\alpha(x)} \otimes \alpha \quad \text{sur } A \times A;$$

Or, le théorème 9 montre que le 1er membre de la formule précédente est de la forme $u_x^A \otimes \alpha$ sur $E \times E$ pour un vecteur u_x^A porté par A ; il s'en suit donc que $u_x^A = H^A(\cdot, x) \frac{1}{\alpha(x)}$ sur E et que la 1ère formule de la proposition est valable sur $E \times E$.

Par restriction à A^c , et compte-tenu de ce que $I_{A^c} P^A H = I_{A^c} {}^A H$ la formule ci-dessus montre que l'on a :

$$G(x) - {}^A H G(x) = G_A(\cdot, x) \frac{1}{\alpha(x)} \otimes \alpha \quad \text{sur } A^c \times A$$

or, le théorème 9 montre que le 1er membre de la formule précédente vaut $-G_A + (G(x) u_x^\wedge - c_{A,x} 1) \otimes \alpha$ sur $E \times E$ où le vecteur $(G(x) u_x^\wedge - c_{A,x} 1)$ s'annule sur A ; il s'en suit donc que :

$$G(x) u_x^\wedge - c_{A,x} 1 = G_A(\cdot, x) \frac{1}{\alpha(x)}$$

sur E et que la 2ème formule de la proposition est valable sur $E \times E$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. CHOQUET, J. DENY - Modèles finis en théorie du potentiel - J. Anal. Math. (1956-57) p. 77-136.
- [2] G. CHOQUET, P.A. MEYER - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques - Ann. Inst. Fourier 13 (1963) p. 139-154.
- [3] K.L. CHUNG - Probabilistic Methods in Markov Chains. 4th Symp. Berkeley (1961) p. 35-56.
- [4] K.L. CHUNG - Markov Chains with stationary transition Probabilities - Springer Verlag 1961.
- [5] J.L. DOOB - Discrete Potential Theory and Boundaries - J. Math. Mech. 8 (1959) p. 433-459.
- [6] W. FELLER - Boundaries induced by non-negative matrices - Trans Amer. Math. Soc. 83 (1956) p. 19-54.
- [7] G.A. HUNT - Markov Processes and Potentials - Illinois J. Math. 1 (1957) I p. 44-93, II p. 316-369, III 2 (1958) p. 151-213.
- [8] G.A. HUNT - Markov Chains and Potentials - Illinois J. Math. 4 (1960) p. 313-340.
- [9] J. KEMENY et L. SNELL - Potential for denumerable Markov Chains - J. Math. Anal. and Applic. 3 (1961) p. 196-260.
- [10] J. KEMENY et L. SNELL - Notes on discrete Potential Theory - J. Math. Anal. and Applic. 3 (1961) p. 117-121.
- [11] J. KEMENY et SNELL - On Markov Chains Potentials - Ann. Math. Stat. 32 (1961) p.709-715.
- [12] J. KEMENY et L. SNELL - Boundary Theory for recurrent Markov Chains - Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963) p. 495-520.
- [13] S. OREY - Sums arising in the theory of Markov Chains - Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961) p. 847-856.
- [14] S. OREY - Potential Kernels for recurrent Markov Chains (A paraître).
- [15] S. OREY - An ergodic Theorem for Markov Chains - Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeits-theorie 1 (1962) p. 174-176.
- [16] F. SPITZER - Recurrent random Walk and Logarithmic potential - Proc. 4th Berkeley Symp. 1961.
- [17] F. SPITZER - Hitting Probabilities J. Math. Mech. 11 (1962) p. 593-614.