ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

A. MOSTOWSKI

L'espace des modèles d'une théorie formalisée et quelques-unes de ses applications

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 7, série *Mathématiques*, n° 1 (1962), p. 107-116

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__7_1_107_0>

L'ESPACE DES MODÈLES D'UNE THÉORIE FORMALISÉE ET QUELQUES-UNES DE SES APPLICATIONS

A. MOSTOWSKI
Varsovie

1/ La topologie, comme l'algèbre abstraite, fut créée pour étudier les propriétés des objets mathématiques concrets. Il est bien connu qu'elle s'est ensuite développée en un schème très général applicable aux domaines bien différents de la théorie des objets mathématiques particuliers qui furent étudiés au commencement. En particulier, le schème général de la topologie peut être appliqué à la logique mathématique, et plus précisément, à certaines questions de la théorie des modèles. Les mêmes questions sont aussi traitées par des méthodes algébriques et il faut avouer que le succès de ces méthodes fut beaucoup plus marqué que celui des méthodes topologiques. Néanmoins on a trouvé quelques résultats assez intéressants en appliquant l'appareil formel de la topologie et ces résultats dont quelques-uns sont d'origine assez récente seront le sujet de ma conférence d'aujourd'hui.

Nous allons nous occuper de trois problèmes assez généraux ; ces problèmes ne sont pas liés d'ailleurs que par la méthode topologique que nous allons appliquer dans leurs solutions. Dans tous ces problèmes il s'agira d'une théorie formelle T, de ses formules, de la relation de déductibilité des formules, des modèles de T et de la relation de satisfaction des formules dans un modèle. Ces notions seront précisées dans le paragraphe 2.

PROBLEME A. (problème logique de la compacité). Si chaque sous-ensemble fini d'un ensemble E de formules possède un modèle, est-ce-que l'ensemble E tout entier en possède un ?

PROBLEME B. (problème de la complétude des règles de démonstration). Si F est une formule telle que chaque modèle d'un ensemble E de formules est un modèle de F, est-ce-que F peut être déduit de E par les règles de démonstration admises dans T ?

PROBLEME C. (problème de la définissabilité des ensembles d'entiers dans les modèle de T). Admettons que T contient des signes $\underline{0}$, $\underline{0}'$, $\underline{0}''$ ... nommés les chiffres. On dit qu'un ensemble N d'entiers est définissable dans un modèle M de T s'il existe une formule $F(x, y_1, \dots, y_k)$ et k éléments $a_1, \dots, a_k$ de M tels que $n \in N$ si et seulement si $a_1, \dots, a_k$ satisfont la formule $F(\underline{0}^{(n)}, y_1, \dots, y_k)$ dans M. Problème : quels sont les ensembles définissables dans tous les modèles de T ?

Les trois problèmes seront discutés en premier lieu pour des théories basées sur la logique bivalente ordinaire, mais nous allons aussi faire quelques remarques sur les généralisations des résultats pour quelques logiques multivalentes.

Avant d'aborder ces problèmes il nous faudra préciser la terminologie.

2/ Une théorie formelle T est constituée par sa langue et par la notion de conséquence. Nous admettons que la langue de toutes les théories qui seront discutées plus loin contient au moins la langue du calcul restreint des prédicats avec identité. Donc les formules atomiques $R_j(t_1, \dots, t_n)$ et $t_i = t_j$ appartiennent à la langue de T, ainsi que toutes les formules qu'on peut obtenir en partant des formules atomiques à l'aide des opérateurs propositionnels $\vee$, &, $\equiv$, $\supset$, $\neg$ et des quantificateurs (Ex_j) et (x_j). Les lettres $x_1, x_2, \dots$ sont ici des variables d'individu et les lettres $t_1, t_2, \dots$ dénotent les termes, c. à d. les expressions qu'on obtient en partant des variables et des constantes d'individu en appliquant dans un ordre quelconque les foncteurs de T. Les lettres $R_1, R_2, \dots$ sont des prédicats de T, c. à d. des signes qui dénotent des relations primitives de la théorie.

Nous dirons que T est basée sur la langue restreinte s'il n'y a dans T d'autres formules que celles décrites plus haut. Dans le cas contraire nous dirons que T est basée sur la langue généralisée. Nous ne considérerons d'ailleurs qu'un type de langue généralisée. Outre les symboles de la langue restreinte cette langue généralisée contient des quantificateurs nouveaux $(Q^z x_j)$ dont le rôle syntactique est le même que celui des quantificateurs ordinaires. La définition de ces quantificateurs sera donnée au paragraphe 7.

Une formule est dite ouverte si elle ne contient pas de quantificateurs, fermée si elle n'a pas de variables libres.

La relation de déductibilité dans une théorie basée sur la langue restreinte est définie comme d'habitude. L'ensemble des formules déductibles des formules qui appartiennent à un ensemble E sera désigné par $Cn(E)$. La relation de déductibilité dans une théorie basée sur une langue généralisée sera définie au paragraphe 7.

Une réalisation de T dans un ensemble D est définie comme une application des foncteurs de T sur une famille de fonctions (dites interprétations des foncteurs de T) et une application des prédicats de T sur une famille de relations (dites interprétations des prédicats de T). Nous admettons que chaque foncteur a le même nombre d'arguments que son interprétation et de même pour les prédicats. La relation qui interprète le prédicat = sera toujours la relation d'identité. On remarquera encore qu'une relation n'est autre chose qu'une fonction dont les valeurs appartiennent à un ensemble à deux éléments 0 (faux) et 1 (vrai).

L'ensemble des réalisations de T dans D sera dénotée par $\mathcal{R}(D)$.

Chaque réalisation M divise les formules closes en deux classes : celles qui sont vraies dans M et celles qui y sont fausses. Plus généralement si $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de D, alors la suite finie $a_1, \ldots, a_n$ divise en deux classes l'ensemble des formules F ayant exactement n variables libres. L'une de ces classes se compose des formules F qui sont satisfaites dans M par $a_1, \ldots, a_n$, ce que nous noterons désormais par la formule $\models_M F[a_1, \ldots, a_n]$; l'autre classe se compose des formules pour lesquelles $\models_M \neg F[a_1, \ldots, a_n]$. Une définition précise de ces notions est bien connue pour des théories basées sur la langue restreinte. Nous donnerons au paragraphe 7 quelques indications concernant les définitions pour des théories basées sur la langue généralisée.

Nous admettons que les conséquences des formules vraies dans M y sont vraies également.

Une réalisation dans laquelle toutes les formules démontrables dans T sont vraies sera dite un modèle de T et leur ensemble sera désigné par $\mathfrak{M}(D)$.

Jusqu'au paragraphe 7 nous admettons que T est basée sur la langue restreinte. Nous allons maintenant discuter les diverses topologies qu'on peut introduire dans l'ensemble $\mathcal{R}(D)$.

3/ Topologie (t) de Tichonoff.

Une base des entourages dans cette topologie se compose des ensembles $U_{F,a_1,\ldots,a_n}$ où $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de D et où F est une formule ouverte avec n variables libres. On définit cet ensemble par l'équivalence :

$$M \in U_{F,a_1,\ldots,a_1} \Longleftrightarrow \models_M F[a_1, \ldots, a_n].$$

L'ensemble $\mathcal{R}(D)$ devient alors un espace de Hausdorff compact. La vérification des axiomes de Hausdorff est immédiate et la bicompacité résulte facilement du théorème classique de Tichonoff. L'espace $\mathcal{R}(D)$ est notamment identique à un produit d'espaces à deux éléments : si les prédicats $R_1, R_2, \ldots$ ont $r_1, r_2, \ldots$ arguments, alors $\mathcal{R}(D)$ est homéomorphe à l'espace des suites $f_1, f_2, \ldots$ où f_i est une application de D^{r_i} dans l'ensemble $\{0, 1\}$.

Les ensembles fermés dans la topologie (t) sont des ensembles $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{R}(D)$ dont les éléments M satisfont à un nombre arbitraire de conditions de la forme $\models_M F[a_1, \ldots, a_n]$, où F est une formule ouverte. Donc les ensembles fermés sont des classes UC_Δ selon la notation de Tarski [13].

Les ensembles ouverts et fermés sont les ensembles $U_{F,a_1,\ldots,a_n}$ et seulement ces ensembles.

La topologie (t) sur $\mathcal{R}(D)$ induit une topologie sur l'ensemble $\mathfrak{M}(D)$ des modèles de T. Si $\mathfrak{M}(D)$ est fermé dans $\mathcal{R}(D)$, alors $\mathfrak{M}(D)$ est un espace compact. Il s'ensuit que si l'ensemble des théorèmes de T a la forme $Cn(A)$ où A est un ensemble de formules ouvertes (c. à d. si T peut être axiomatisée par des formules ouvertes) alors $\mathfrak{M}(D)$ est compact.

La topologie (t) permet de résoudre affirmativement le problème logique de compacité (problème A) dans le cas où T est axiomatisable par des formules ouvertes et où E ne contient que des formules ouvertes : si chaque sous-ensemble fini de E a un modèle sur D, alors l'ensemble E tout entier possède lui aussi un modèle sur D.

Pour résoudre le problème dans le cas d'une théorie arbitraire on applique le processus connu sous le nom d'élimination des quantificateurs. On adjoint à T une infinité de foncteurs nouveaux et on arrive à une théorie T^* qui jouit des propriétés suivantes :

1°/ A chaque formule F de T correspond une formule F^* de T^* avec les mêmes variables libres telle que $F^* \equiv F$ est un théorème de T^*.

2°/ Chaque réalisation M de T sur D peut être complétée en une réalisation M^* de T^* sur le même ensemble D par l'addition des interprétations convenables des foncteurs de T^* qui ne sont pas des foncteurs de T ; pour chaque formule F de T avec k variables libres les conditions $\models_M F[a_1, \ldots, a_k]$ et $\models_{M^*} F^*[a_1, \ldots, a_k]$ sont équivalentes pour une suite arbitraire $a_1, \ldots, a_n$ d'éléments de D.

On voit aisément de 1°/ et 2°/ que la solution positive du problème A pour la théorie T^* implique la solution positive de ce problème pour la théorie T. Or, le problème A pour la théorie T^* est résolu affirmativement par le théorème sur les théories ouvertes mentionné tout à l'heure.

4/ La topologie (t) pour les théories basées sur des logiques multivalentes.

Remplaçons dans la définition de la réalisation donnée au paragraphe 2 l'ensemble $\{0, 1\}$ des valeurs logiques par un ensemble quelconque V dont les éléments seront nommés les valeurs logiques généralisées. Pour définir les valeurs d'une formule nous devons avoir une interprétation des symboles propositionnels et des quantificateurs. Supposons donc qu'on a fait correspondre à chaque opérateur propositionnel une fonction dont les arguments sont en même nombre que les arguments de l'opérateur et dont les arguments et les valeurs appartiennent à V. Supposons encore qu'on a fait correspondre à chaque quantificateur une fonction des sous-ensembles de V à valeurs dans V. L'ensemble V et les interprétations des opérateurs propositionnels et des quantificateurs déterminent une logique multivalente. Une telle logique étant donnée, nous pouvons faire correspondre à chaque réalisation M de T, à chaque formule F de T n'ayant que k variables libres et à chaque suite $a_1, \ldots, a_k$ d'éléments de D une valeur logique $Val_M F[a_1, \ldots, a_k]$; la condition $\models_M F[a_1, \ldots, a_k]$ définie pour la logique ordinaire doit ici s'écrire comme $Val_M F[a_1, \ldots, a_k] = 1$.

Le problème A pour une théorie basée sur une logique multivalente s'exprime comme suit : si, pour chaque n, il y a une réalisation M_n telle que $Val_{M_n} F_j [a_{j1}, \ldots, a_{jk_j}] = v_j$ pour $j \leqslant n$, est-ce-qu'il existe une réalisation M telle que $Val_M F[a_{j1}, \ldots, a_{jk_j}] = v_j$ pour chaque j ?

Sous des hypothèses convenablement choisies on peut résoudre ce problème à l'aide des méthodes topologiques.

Admettons que V soit un espace topologique compact et que les interprétations des opérateurs propositionnels soient continues dans V. On introduit une topologie dans l'ensemble $\mathcal{R}(D)$ de toutes les réalisations en prennant comme une base des ensembles ouverts les ensembles $U_{F, a_1, \ldots, a_n, Q}$, où $F, a_1, \ldots, a_n$ ont le même sens qu'auparavant et où Q est un entourage dans V ; ces ensembles sont définis par l'équivalence :

$$M \in U_{F, a_1, \ldots, a_n, Q} \Longleftrightarrow Val_M F[a_1, \ldots, a_n] \in Q .$$

L'ensemble $\mathcal{R}(D)$ muni de cette topologie devient un espace compact de Hausdorff.

Cette remarque qui est une conséquence immédiate du théorème de Tichonoff permet de résoudre le problème A dans le cas spécial où toutes les formules $F_1, F_2, \ldots$ dont se compose l'ensemble E ne contiennent que des variables libres. Dans le cas général les hypothèses que nous avons fait jusqu'à présent sont probablement trop faibles pour que la réponse soit affirmative dans tous les cas.

Chang et Keisler [2] ont trouvé des hypothèses assez générales et très intéressantes qui impliquent la solution positive du problème. Ils supposent notamment que V est un espace uniforme et que les quantificateurs sont interprétés comme des fonctions uniformément continues. Une telle fonction jouit par définition de la propriété suivante : si $f(X) = v$ alors pour tout entourage Q de v il existe un entourage P de la diagonale dans $V \times V$ tel que pour tout $X' \subseteq P[X]$ on a $f(X') \in Q$. (La notation $X' \subseteq P[X]$ signifie comme d'habitude que pour chaque x' dans X' il existe un x dans X tel que $(x', x) \in P$).

Comme ont montré Chang et Keisler la théorie des produits réduits due à Łoś, Scott et autres auteurs peut être généralisée au cas d'une logique multivalente pourvu qu'elle satisfasse aux conditions que nous venons d'énoncer. Ils ont donc obtenu une solution positive du problème A pour des formules tout à fait arbitraires. Leur théorème s'exprime comme suit : Si $F_1, F_2, \ldots$ sont des formules closes et si, pour chaque n, il existe une réalisation M_n sur D_n pour laquelle $Val_M\ F_j = v_j$, $j = 1, \ , \dots, n$, alors il existe un ensemble D et une réalisation M sur D telle que $Val_M\ F_j = v_j$ pour chaque j.

Au lieu de généraliser la théorie des produits réduits on peut généraliser la théorie d'élimination des quantificateurs. On arrive ainsi au théorème suivant : si $F_1, F_2, \dots$ est une suite de formules non nécessairement closes et s'il existe une suite de réalisations M_n sur un même ensemble D, si enfin $Val_{M_n}\ F_j\ [a_{j1}, \dots, a_{jk_j}] = v_j$ pour $j \leqslant n$, alors il existe une réalisation M sur l'ensemble D telle que $Val_M\ F_j\ [a_{j1}, \dots, a_{jk_j}] = v_j$ pour chaque j. La démonstration de ce théorème sera publiée dans [8].

Les hypothèses topologiques de Chang et Kaisler permettent, comme nous voyons sur ces exemples, de généraliser un grand nombre de résultats connus dans le cas classique au cas plus général de la logique multivalente.

5/ La topologie (s).

Dans ce paragraphe nous ne parlerons que des théories basées sur la logique bivalente. Nous définirons une nouvelle topologie, dite topologie (s), sur $\mathcal{R}(D)$.

Les entourages dans la topologie (s) sont des ensembles $U_{F, a_1, \dots, a_n}$ définis exactement comme dans le paragraphe 3 avec la seule différence que F peut être une formule quelconque et pas nécessairement une formule ouverte.

L'ensemble $\mathcal{R}(D)$ est un espace de Hausdorff ; l'ensemble $\mathfrak{M}(D)$ est un sous-ensemble fermé sans aucune restriction sur la théorie T.

Dans le cas général on ne connait pas exactement la structure topologique de l'espace $\mathcal{R}(D)$ muni de la topologie (s). Dans le cas spécial où D est un ensemble dénombrable on a le théorème suivant : $\mathfrak{M}(D)$ est un ensemble G_δ absolu (c. à d. un G_δ dans un espace complet) de la seconde catégorie.

La démonstration de ce théorème est basée d'une part sur les théorèmes bien connus de Stone sur la représentation des algèbres de Boole et d'autre part sur un lemme de Rasiowa et Sikorski [9] d'après lequel si B est une algèbre de Boole, $a_0 \neq 0$ et $a_i = \sup_n a_i$ pour $i = 1, 2, \dots,$ alors il existe un filtre maximal $\underline{f}$ de B tel que $a_0 \notin \underline{f}$ et $a_i / \underline{f} = \sup_n (a_{i_n} / \underline{f})$ pour $i = 1, 2, \dots$

Enrichissons la langue de T par une infinité de constantes d'individu $c_1, c_2, \dots$ et soit D_0 un ensemble dénombrable, $D_0 = \{a_1, a_2, \dots\}$. Dans toutes les réalisations que nous allons considérer la constante c_j sera interprétée comme a_j.

Soit B l'algèbre de Boole formée des formules closes de T, deux formules équivalentes dans T étant identifiées l'une à l'autre. A chaque $M \in \mathfrak{M}(D_0)$ nous faisons correspondre un ultrafiltre $\{M\} = \{F : \models_M F\}$ de l'algèbre B. L'ultrafiltre $\{M\}$ est un élément de l'espace S de Stone associé à B et l'application $M \longrightarrow \{M\}$ de $\mathfrak{M}(D)$ dans S est biunivoque et continue. Le lemme de Rasiowa et Sikorski montre que les filtres M sont précisément les ultrafiltres de B qui conservent les sommes et les produits qui correspondent aux quantificateurs. L'ensemble de ces filtres étant, comme on démontre sans peine, un G_δ de la seconde catégorie dans S, le théorème se trouve démontré.

La solution positive du problème B résulte tout de suite de la caractérisation topologique de l'ensemble $\mathfrak{M}(D)$. Si T n'est pas contradictoire, alors $\mathfrak{M}(D_0)$ n'est pas vide (l'ensemble vide étant de la première catégorie). Il s'en suit qu'une formule qui ne se laisse pas démontrer dans T peut être falsifiée dans un modèle de T. Or ce théorème est précisément la solution du problème B.

La topologie (s) peut évidemment être définie aussi pour des théories basées sur une logique multivalente mais la structure de l'espace $\mathcal{R}(D)$ muni de cette topologie est inconnue, même dans le cas d'un ensemble D dénombrable.

6/ Sous-ensembles compacts et universels de $\mathfrak{M}(D_0)$.

L'espace $\mathfrak{M}(D_0)$ n'est pas en général compact. En voici un exemple : Soit T une théorie non-contradictoire. Enrichissons sa langue par un prédicat A à un argument et soit G la formule $(Ex_1)\ A(x_1)$ et F_n la formule $(x_{n+1})\ [A(x_{n+1}) \supset (x_1 \neq x_{n+1})\ \&\ (x_2 \neq x_{n+1})\ \&\ \dots\ \&\ (x_n \neq x_{n+1})]$. Les ensembles $U_{G \& F_n, a_1, \dots, a_n}$ sont alors fermés et non vides et leur suite est décroissante ; or l'intersection de tous ces ensembles est vide.

Sikorski [12] a démontré que l'espace $\mathfrak{M}(D_0)$ est compact si et seulement si la théorie T peut être axiomatisée par des formules ouvertes.

Dans le cas général l'espace $\mathfrak{M}(D)$ est très incommode si l'on veut faire des passages à la limite. Beth [1] a montré le premier comment on peut éviter cette difficulté. Il a construit notamment un sous-ensemble compact de $\mathfrak{M}(D)$ qui contient chaque modèle M à un isomorphisme près. Beth n'a pas exigé que le signe = soit interprété par la relation d'identité, ce qui lui a permis de démontrer son théorème pour D arbitraire. Si l'on exige - comme nous le faisons dans cet exposé - que le prédicat = soit interprété par l'identité, on ne peut démontrer que le théorème plus faible que nous allons maintenant discuter [3] :

Admettons que l'ensemble D soit dénombrables et que les formules $(x_1, \ldots, x_n)\ (Ex_{n+1})\ [(x_1 \neq x_{n+1})\ \&\ \ldots\ \&\ (x_n \neq x_{n+1})]$ soient des théorèmes de T pour $n = 1, 2, \ldots$; alors l'espace $\mathfrak{M}(D)$ muni de la topologie (s) contient un sous-ensemble compact X tel que chaque modèle M de $\mathfrak{M}(D)$ est isomorphe à un modèle M' qui appartient à X.

Pour démontrer ce théorème nous adjoignons à T des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ et formons la théorie T^* par le processus de l'élimination des quantificateurs. Remplaçons dans T^* le prédicat = par un prédicat binaire P. Soit $D^* = \{t_1, t_2, \ldots\}$ l'ensemble de termes de T^* et soit $\mathfrak{M}(D^*)$ l'espace des modèles de T^* sur D^* muni de la topologie (t). L'espace $\mathfrak{M}(D^*)$ est donc compact. Cet espace résout le problème que s'est posé Beth parce que P n'est pas en général interprété dans les modèles $M^* \in \mathfrak{M}(D^*)$ par la relation d'identité mais par une relation d'équivalence $\simeq_{M^*}$ différente de la relation d'identité.

Pour obtenir l'ensemble X nous définirons une application continue de $\mathfrak{M}(D^*)$ dans $\mathfrak{M}(D)$.

Soit $M^* \in \mathfrak{M}(D^*)$ et soit f_{M^*} une application de D^* sur $D = \{a_1, a_2, \ldots\}$ définie par induction : $f_{M^*}(t_1) = a_1$; $f_{M^*}(t_k)$ = le premier élément de D différent de $f_{M^*}(j)$ pour $j = 1, 2, \ldots, k-1$ si $\models_{M^*} \neg P[t_k, t_j]$ pour $j = 1, 2, \ldots, k-1$; $f_{M^*}(t_k) = f_{M^*}(t_{j_0})$ si j_0 est le plus petit entier $< k$ pour lequel $\models_{M^*} P[t_k, t_{j_0}]$.

L'application f_{M^*} nous permet d'introduire dans D une structure du modèle M isomorphe avec $M^*/\simeq_{M^*}$. L'ensemble X de tous les modèles obtenus par cette méthode jouit de toutes les propriétés voulues. En particulier le fait que X est compact résulte de la continuité de l'application $M^* \longrightarrow M$ (ici M^* parcourt l'espace $\mathfrak{M}(D^*)$ muni de la topologie (t) et M l'espace $\mathfrak{M}(D)$ muni de la topologie (s)).

La construction de l'application f_{M^*} que nous venons d'esquisser est due à M. Ehrenfeucht. M. Ehrenfeucht a aussi remarqué que l'espace $\mathfrak{M}(D)$ est une somme (au sens de la théorie des ensembles) de sous ensembles homéomorphes à X (donc compacts) qui sont, comme X, des ensembles universels. En effet, si πM est un modèle obtenu de M par une permutation π de M, alors l'application $M \longrightarrow \pi M$ est un homéomorphisme et $\mathfrak{M}(D)$ se décompose en une somme $\bigcup_{\pi} \{\pi M : M \in X\}$.

Le théorème que nous venons de démontrer peut être appliqué dans tous les cas où on a besoin d'un passage à la limite : si M_n est une suite des modèles sur D et $\models_{M_j} F_j[a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jk_j}]$ pour $j \leqslant n$, alors il existe, d'après ce théorème, un modèle limite M sur D tel que $\models_M F_j[a_{j1}, \ldots a_{jk_j}]$ pour tout j. En particulier nous obtenons tout de suite une solution nouvelle du problème A.

Des passages à la limite analogues peuvent être aussi obtenus à l'aide des produits réduits dans le cas où toutes les formules F_j sont closes. Il y a cependant une différence essentielle entre les résultats qu'on obtient par la méthode des produits réduits et par notre méthode : tandis que dans le théorème démontré tout à l'heure, tous les modèles M_n appartenaient au même espace $\mathfrak{M}(D)$ et déterminaient un modèle limite M dans le même espace $\mathfrak{M}(D)$, la méthode des produits réduits n'exige pas que les M_n soient tous dans le même espace $\mathfrak{M}(D)$ et ne donne pas le modèle limite dans cet espace. Les passages à la limite effectués par les deux méthodes ne sont donc pas comparables.

Un grand nombre de problèmes se rattache au théorème sur l'ensemble compact et universel des modèles. Le plus intéressant et le plus difficile est le problème de savoir si ce théorème est valable pour un ensemble D non dénombrable. La démonstration de M. Ehrenfeucht ne s'applique pas dans ce cas parce que sa démonstration de la continuité de l'application $M^* \longrightarrow M$ serait en défaut si D n'était pas dénombrable.

Un autre problème qui n'est résolu que partiellement concerne la relativisation de la classe des modèles [7]. Admettons par exemple que T contient un prédicat R binaire et soit K une classe de relations binaires définies sur D. Un modèle M sera dit un K-modèle si R est interprété dans M par une relation de K. Soit $\mathfrak{M}_K(D)$ l'ensemble de tous les K-modèles sur D muni de la topologie (s). Nous demandons maintenant quelles conditions doit satisfaire K pour qu'il existe un ensemble compact universel X_K de K-modèles. On a les résultats suivants :

Un ensemble compact universel existe si D est dénombrable et si la classe K est définie par l'équivalence $R \in K \Longleftrightarrow (ES_1, \ldots, S_n) \prod_{i=1}^{\infty} A_i(S_1, \ldots, S_n, R)$ où les A_i sont des formules du premier ordre avec identité.

Si D est dénombrable et si un ensemble compact universel X_K existe, alors la classe $S_\infty(K)$ dont les éléments sont des sous-relations $R' \subseteq R$ ayant un champ infini est une classe UC_δ^*, c. à d. elle se laisse caractériser par une suite finie ou infinie de conditions $(x_1, \ldots, x_n) E_i(x_1, \ldots, x_n)$, où les formules E_i ne contiennent pas de quantificateurs.

Le premier théorème montre par exemple que X_K existe si K est la classe des ordres qui ne sont pas des bons ordres et le second que X_K n'existe pas si K est la classe des bons ordres.

Pour terminer ce paragraphe remarquons que l'existence d'un ensemble compact et universel peut aussi être démontrée pour des théories basées sur les logiques multivalentes pourvu que ces logiques satisfassent aux conditions de Chang et Keisler [8].

7/ La topologie (ω).

Dans ce paragraphe nous admettons que la langue des théories qui vont être discutées contient des quantificateurs différents des quantificateurs (Ex_j) et (x_j). Le cas le plus simple est celui où l'on n'a qu'un seul quantificateur nouveau (Sx_j) qui est une abréviation de la phrase : il existe au plus un nombre fini de x_j tels que ...

La notion de conséquence pour des formules contenant ce quantificateur est définie à l'aide de la règle (ω). Pour l'exprimer nous introduirons quelques formules auxiliaires. Soit F une formule qui contient la variable libre x_j. Posons :

$$(C_n\, x_j) F \;:\; (Ex_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}) \prod_{\substack{h,m=1 \\ h \neq m}}^{n} [F(x_{k+h}) \;\&\; (x_{k+h} \neq x_{k+m})],$$

$$(D_n\, x_j) F \;:\; (C_n\, x_j) F \;\&\; \neg\, (C_{n+1}\, x_j) F$$

(k est ici un indice assez élevé pour qu'aucune des variables x_{k+j} ne soit liée dans F). La formule $(C_n\, x_j)F$ dit qu'il existe au moins n éléments x_j tels que F et la formule $(D_n\, x_j)$ qu'il en existe exactement n.

L'ensemble $Cn_\omega(X)$ des conséquences de X est maintenant défini comme le plus petit ensemble de formules qui contient l'ensemble X, tous les axiomes de la logique ordinaire, les axiomes de la forme $(D_n\, x_j) F \supset (Sx_j) F$, $n = 0, 1, \ldots$ et qui est clos par rapport aux règles de raisonnement de la logique ordinaire ainsi que par rapport à la règle (ω) : Si $(C_n\, x_j)\, F \in Cn_\omega(X)$ pour $n = 1, 2, \ldots$, alors $\neg\, (Sx_j)\, F \in Cn_\omega(X)$.

La notion sémantique de satisfaction se définit comme pour la langue restreinte, la formule $(Sx_j) F$ étant satisfaite par les éléments $a_1, \ldots, a_k$ si et seulement si l'ensemble des éléments b tels que la formule F est satisfaite par $b, a_1, \ldots, a_k$ est fini.

Il est à remarquer que la notion de la réalisation ne fut pas changée quoique la langue de la théorie fut généralisée. Cela nous permet d'introduire une topologie nouvelle, dite topologie (ω), dans l'ensemble $\mathcal{R}(D)$. Les entourages dans la topologie (ω) sont définis comme étant les ensembles $U_{F, a_1, \ldots, a_l}$, où F est une formule arbitraire de la langue généralisée n'ayant que k variables libres.

Si D est dénombrable, alors la structure de l'espace $\mathfrak{M}(D)$ muni de la topologie (ω) est la même que dans le cas de la topologie (S) : $\mathfrak{M}(D)$ est un G_δ de la seconde catégorie dans un espace complet [5]. La démonstration est presque identique à la démonstration esquissée au paragraphe 5. On considère l'algèbre B des formules closes de la langue généralisée enrichie par des constantes c_1, c_2, ... Si $F \equiv G$ est un théorème de T (c. à. d. si cette formule appartient à $Cn_\omega(X)$ où X est l'ensemble des axiomes de T), alors F et G seront identifiées dans B. L'espace $\mathfrak{M}(D)$ se laisse plonger dans l'espace de Stone de l'algèbre B en faisant correspondre à tout M de $\mathfrak{M}(D)$ le filtre $\underline{f}_M = \{F : \models_M F\}$. Il est sous-entendu que c_j est interprété dans chaque M comme a_j où $D = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Les filtres $\underline{f}_M$ se laissent caractériser comme des ultrafiltres de B qui satisfont aux deux conditions suivantes :

si $(Ex_j)\, F(x_j) \in \underline{f}_M$, alors il existe un k tel que $F(c_k) \in \underline{f}_M$,

si $(Sx_j)\, F(x_j) \in \underline{f}_M$, alors il existe un k tel que $(D_k\, x_j)\, F(x_j) \in \underline{f}_M$.

Autrement dit les filtres f_M sont précisément des ultrafiltres de B qui conservent les sommes dénombrables $(Ex_j)\ F(x_j) = \sum_k F(c_k)$ et $(Sx_j)\ F(x_j) = \sum_k (D_k x_j)\ F(x_j)$. L'ensemble de ces filtres est donc de la première catégorie. La démonstration que cet ensemble est un G_δ est immédiate.

Comme un ensemble de la seconde catégorie n'est pas vide nous obtenons immédiatement la solution du problème B pour des théories basées sur la langue généralisée.

On obtient les mêmes résultats si l'on suppose que la langue considérée contient un nombre au plus dénombrable de quantificateurs $(Q^Z x_j)$ définis comme étant les abréviations des phrases : le nombre des éléments x_j tels que ... est fini et appartient à Z. Les axiomes pour ces quantificateurs sont les suivants :

$$(D_n x_j)\ F(x_j) \supset (Q^Z x_j)\ F(x_j) \qquad \text{pour } n \in Z$$

et la règle qui correspond à la règle (ω) s'exprime comme il suit :

$$\frac{\neg (D_{n_1} x_j)\ F(x_j),\ \ldots,\ \neg (D_{n_k} x_j)\ F(x_j),\ \ldots}{\neg (Q^Z x_j)\ F(x_j)}$$

où $Z = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$.

Si D est dénombrable, l'espace $\mathfrak{M}(D)$ muni de la topologie dans laquelle les entourages sont définis comme les ensembles $U_{F, a_1, \ldots, a_k}$, F étant une formule quelconque de la langue généralisée, est de nouveau un G_δ absolu de la seconde catégorie. Nous obtenons donc la solution du problème B pour des théories basées sur cette langue.

Le nombre de tous les quantificateurs $(Q^Z x_j)$ est évidemment non dénombrable. Si on les adjoint tous à la langue d'une théorie, on peut définir une nouvelle topologie de $\mathcal{R}(D)$. Infortunément la structure de l'espace $\mathcal{R}(D)$ ainsi obtenu n'est pas connue, même si D est dénombrable. On sait seulement que $\mathcal{R}(D)$ muni de cette topologie n'est pas séparable. Les méthodes topologiques connues jusqu'à présent ne permettent donc pas de résoudre par exemple le problème B pour des théories dans lesquelles tous les quantificateurs $(Q^Z x_j)$ sont permis. On peut cependant démontrer par une voie directe qui utilise les méthodes de Schütte [10] que le problème B a une solution positive aussi dans ce cas. Reste ouvert le problème de savoir si on peut tirer de cette solution des informations sur la structure topologique de $\mathfrak{M}(D)$.

Le problème A et le théorème sur l'ensemble compact universel ne sont pas en général valable si la langue contient au moins un quantificateur $(Q^Z x_j)$ avec Z infini.

Il existe évidemment un grand nombre d'extensions de la langue restreinte essentiellement différentes de l'extension assez faible à l'aide des quantificateurs $(Q^Z x_j)$. Une extension particulièrement intéressante est due à Tarski [14] qui forme son ainsi dite logique faible du second degré en adjoignant à la langue élémentaire des variables pour des suites finies d'élements et aussi deux foncteurs dont l'un désigne l'opération de formation d'une suite à un élément et l'autre l'opération de concaténation des suites. Nous pouvons répéter nos constructions antérieures pour cette langue et nous obtenons le même résultat sur la nature topologique de l'espace $\mathfrak{M}(D)$ muni de la topologie déterminée par des formules de la logique faible du second ordre.

Il convient de remarquer que pour certaines théories axiomatisées par des formules élémentaires l'extension de la langue par l'adjonction du quantificateur (Sx_j) est équivalente à l'adjonction des variables pour les suites finies et des deux opérateurs mentionés ci-dessus.

Tel est le cas pour l'arithmétique des entiers basée sur les axiomes de Peano, pour la théorie axiomatique des ensembles etc. D'autre part la théorie axiomatique des corps algébriquement fermés basée sur la logique faible du second ordre est complètement différente de la même théorie basée sur la langue obtenue à partir de la langue restreinte par l'adjonction du quantificateur (Sx_j) ; en effet l'adjonction de ce quantificateur ne donne aucune extension de la classe des théorèmes de la théorie élémentaire des corps algébriquement fermés. Ce phénomène semble mériter une discussion plus approfondie.

La logique forte du second degré permet de définir encore une topologie (n) dans $\mathfrak{M}(D)$. Cette topologie est évidemment séparable mais sa caractérisation plus exacte n'est pas connue.

8/ Définissabilité d'ensembles dans les modèles d'une théorie.

Dans ce paragraphe nous allons montrer comment on applique la topologie (s) ou bien la topologie (ω) de l'espace $\mathfrak{M}(D)$ pour résoudre le problème C [5].

Soit N un ensemble d'entiers. On dit que N est représentable dans T s'il existe une formule F de cette théorie n'ayant qu'une variable libre et telle que $F(\underline{0}^{(n)})$ est un théorème de T si $n \in N$ et si $\neg F(\underline{0}^{(n)})$ est un théorème de T si $n \notin N$. Notre but principal est la comparaison de deux classes d'ensembles : celle des ensembles représentables et celle des ensembles définissables dans chaque modèle de T sur un ensemble dénombrable D.

Soit $\mathcal{D}_N$ l'ensemble des modèles $M \in \mathfrak{M}(D)$ dans lesquels N est définissable : $\mathcal{D}_N = \bigcup_F \bigcap_n \{M : n \in N \Longleftrightarrow \models_M F(\underline{0}^{(n)})\}$; la sommation s'étend ici à toutes les formules F qui ont au moins une variable libre x_k et $F(\underline{0}^{(n)})$ résulte de F par la substitution de $\underline{0}^{(n)}$ pour cette variable ; les variables x_j qui sont libres dans F et différentes de x_k sont interprétées dans M comme a_j. L'ensemble $X_F = \{M : n \in N \Longleftrightarrow \models_M F(\underline{0}^{(n)})\}$ est fermé et ouvert dans l'espace $\mathfrak{M}(D)$ muni de la topologie (s) ou (ω) suivant le cas. Il s'en suit que $\mathcal{D}_N$ est un ensemble F_σ. On a le théorème suivant :

Si $\mathcal{D}_N$ n'est pas un ensemble de la première catégorie, alors il existe une extension non-contradictoire T' de T obtenue par l'adjonction d'un nombre fini de constantes d'individu et d'un nombre fini d'axiomes, telle que N est représentable dans T'.

En effet, un au moins des ensembles X_F n'est pas un ensemble frontière, il contient donc un entourage non vide, soit $U_{G, a_1, \ldots, a_k}$. Nous pouvons admettre que $F(\underline{0}^{(n)})$ et G ont les mêmes variables libres $x_1, \ldots, x_k$. Adjoignons à T des constantes $c_1, \ldots, c_k$ et l'axiome $G(c_1, \ldots, c_k)$. L'extension T' ainsi obtenue n'est pas contradictoire, parce que l'entourage $U_{G, a_1, \ldots, a_k}$ n'est pas vide. L'ensemble N est représenté dans T' par la formule $F(x, c_1, \ldots, c_k)$. En effet, si $n \in N$ et $\models_M G$, alors $M \in U_{G, a_1, \ldots, a_k}$, donc $M \in X_F$ et par conséquent $\models_M F(\underline{0}^{(n)})$. Le modèle M étant arbitraire, nous en concluons d'après le théorème sur la complétude (solution positive du problème B) que $G \supset F(\underline{0}^{(n)})$ est un théorème de T, donc $F(\underline{0}^{(n)}, c_1, \ldots, c_k)$ est un théorème de T'. D'une façon analogue on montre que $\neg F(\underline{0}^{(n)}, c_1, \ldots, c_k)$ est un théorème de T' si $n \notin N$.

Si T est basée sur la langue restreinte et si l'ensemble de ses théorèmes est récursivement énumérable, alors tout ensemble d'entiers représentable dans T ou bien dans une extension finie de T est récursif. Donc dans ce cas les ensembles définissables dans tous les modèles de T (ou même les ensembles définissables dans tous les modèles d'un sous-ensemble de la seconde catégorie de $\mathfrak{M}(D)$) sont récursifs. Si T est basée sur la langue généralisée obtenue par l'adjonction du quantificateur (Sx_j) (ou bien des quantificateurs $(Q^{Z_1} x_j)$, $(Q^{Z_2} x_j)$, ...) alors les ensembles définissables dans tous les modèles de T sont hyper-arithmétiques (ou bien hyper-arithmétiques par rapport à $Z_1, Z_2, \ldots$).

En général il n'est pas vrai que chaque ensemble récursif (ou bien hyper-arithmétique) est définissable dans chaque modèle de T. Ceci est bien le cas si T est p. ex. la théorie axiomatique des ensembles. Si T est l'arithmétique des entiers avec les axiomes de Peano et si T est basée sur la langue restreinte, alors les ensembles définissables dans tous les modèles de T sont exactement les ensembles récursifs. Si l'on passe à la langue généralisée en adjoignant le quantificateur (Sx_j), alors la classe des ensembles définissables dans tous les modèles de T est proprement contenue dans la classe des ensembles hyper-arithmétiques. Je n'ai pas réussi à trouver un exemple d'une théorie T telle que la classe des ensembles définissables dans tous ses modèles serait identique avec la classe de tous les ensembles hyper-arithmétiques si T est basée sur la langue généralisée, et serait proprement contenue dans la classe des ensembles récursifs si T est basée sur la langue restreinte.

9/ Remarques sur les modèles de la théorie des ensembles.

Soit T la théorie des ensembles avec les axiomes de Zermelo-Fraenkel. Les modèles les plus intéressants de T sont les modèles bien fondés, c. à d. tels qu'il n'y a pas des suites infinies décroissantes d'éléments : $\ldots a_n \in a_{n-1} \in \ldots \in a_1$. Soit $\mathfrak{F}(D)$ l'ensemble de ces modèles. Les propriétés des modèles $M \in \mathfrak{F}(D)$ sont analogues à celles des β-modèles de l'arithmétique du second ordre (voir [6]). L'ensemble $\mathfrak{F}(D)$ est évidemment un complémentaire analytique dans l'espace $\mathfrak{M}(D)$ muni de la topologie (s).

On n'a pas réussi à préciser la nature topologique de l'ensemble $\mathfrak{F}(D)$ ni à appliquer les méthodes topologiques à l'étude de cette famille de modèles. En particulier le problème C (c. à d. le problème de la caractérisation des ensembles définissables dans tous les modèles bien fondés) reste ouvert.

On peut obtenir quelques résultats sur les ensembles définissables en admettant dans T l'axiome de constructibilité de Gödel [4] ; nous dénoterons par T^* la théorie obtenue de T par l'adjonction de cet axiome.

Soit F la fonction définie par Gödel [4], p. 37. Il est bien connu qu'il y a des nombres ordinaux $\xi < \Omega$ tels que $F'\xi$ est un modèle (bien fondé) de T^*. Soit ξ_α la suite transfinie formée de tous ces nombres. Avec cette notation on a le théorème suivant : un ensemble N d'entiers est définissable dans tous les modèles de T^* si et seulement si $N \in F'\xi_0$.

Le nombre ξ_0 est très grand ; en particulier il surpasse tous les nombres $\prod_1^1$, c. à d. les nombres α pour lesquels il existe une relation récursive R telle que α est le type d'ordre de la relation $(\varphi)\ (En)\ R\,(x, y, \overline{\varphi}(n))$. D'autre part si σ est le plus petit nombre qui n'appartient pas à $\prod_2^1 \cap \sum_2^1$ (voir [11]), alors $\xi_0 < \sigma$ et même $\sigma = \lim_{\alpha < \sigma} \xi_\alpha$.

Nous ne poursuivrons pas ce sujet ici parce qu'il n'est pas lié avec les méthodes topologiques dont nous nous occupons ici.

10/ Les topologies déterminées par des formules non-élémentaires ; remarques finales.

Nous obtenons une classe très vaste de topologies de $\mathcal{R}(D)$ en admettant comme entourages les ensembles $U_{F, a_1, \ldots, a_k}$ où F est une formule non-élémentaire.

Soit par exemple P l'ensemble des formules F qui ont la forme $(EX_1, \ldots, X_s)\ A\,(X_1, \ldots, X_s, R_n, \ldots, R_n, x_1, \ldots, x_p)$ où $X_1, \ldots, X_s$ sont des variables du type d'un ensemble ou du type d'une relation et où A est une formule du premier ordre avec les variables libres indiquées, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ étant des prédicats de la théorie. La topologie déterminée par les entourages $U_{F, a_1, \ldots, a_p}$ où F parcourt P sera notée par (p). L'ensemble des relations qui ne sont pas de bonnes ordinations est un exemple d'un ensemble ouvert dans cette topologie.

Le lemme de Craig montre que les ensembles simultanément fermés et ouverts dans la topologie (p) sont précisément les entourages dans la topologie (s). Comme il existe des ensembles ouverts (dans la topologie (p)) qui ne contiennent aucun ensemble fermé et ouvert, il s'ensuit que les topologies (p) et (s) ne sont pas équivalentes. L'exemple d'un ensemble jouissant de la propriété énoncée tout à l'heure est fourni par l'ensemble des relations d'ordre total isolé avec un élément premier, sans un élément dernier et qui ne sont pas des bons ordres.

En remplaçant P par l'ensemble des formules $(X_1, \ldots, X_s)\ A$ on obtient une topologie (q) qui, elle aussi, est différente de (s). J'ignore si les topologies (p) et (q) sont équivalentes.

On définit d'une façon analogue toute une échelle de topologies de plus en plus fines sur $\mathfrak{M}(D)$ en prenant pour P l'ensemble des formules de plus en plus compliquées. Cette suite de topologies converge vers la topologie (n) mentionnée à la fin du paragraphe 7. Ces topologies ne furent jamais appliquées aux problèmes logiques. Il est difficile de prévoir si elles trouveront des applications mais il est certain qu'elle forment un objet intéressant de recherche.

J'ai essayé de donner dans mon exposé une revue des théorèmes logiques dont les démonstrations font usage des notions topologiques. Comme on a vu il y a un nombre, d'ailleurs assez limité, de théorèmes de cette sorte. La méthode topologique dans la logique joue donc un rôle assez modeste. Elle semble avoir une importance dans l'étude des logiques multivalentes où l'usage des notions topologiques permet de délimiter des classes assez régulières de ces logiques. En dépit de ces réserves il me semble que l'usage de la topologie en logique est intéressant au point de vue méthodique comme un exemple assez frappant de la flexibilité de la méthode axiomatique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E.W. BETH - *The Foundations of Mathematics*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North Holland Publ. Comp., Amsterdam 1959.

[2] C.C. CHANG et H.J. KEISLER - Model theories with truth values in a uniform space. *Bulletin of the American Mathematical Society 68* (1962), pp. 107-109.

[3] A. EHRENFEUCHT et A. MOSTOWSKİ - A compact space of models of first order theories. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, classe des sci. math., phys., et astr. 9* (1961), pp. 369-373.

[4] K. GODEL - *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory.* Annals of Mathematics Studies 3, Princeton 1940.

[5] A. GRZEGORCZYK, A. MOSTOWSKI et CZ. RYLL-NARDZEWSKI - Definability of sets in models of axiomatic theories. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, classe des sci. math., phys. et astr. 9,* (1961), pp. 163-167.

[6] A. MOSTOWSKI - Formal system of analysis based on an infinitistic rule of proof. *Infinitistic Methods. Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics.* Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa et Pergamon Press, London, 1961.

[7] A. MOSTOWSKI - A problem in the theory of models. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, classe des sci. math., phys., et astr. 10* (1962), pp. 121-126.

[8] A. MOSTOWSKI - The Hilbert Epsilon Function in Many Valued Logies. A paraître.

[9] H. RASIOWA et R. SIKORSKI - A proof of the completeness theorem of Gödel. *Fundamenta Mathematicae 37* (1950), pp. 193-200.

[10] K. SCHÜTTE - *Beweistheorie.* Springer 1960.

[11] J.R. SHOENFIELD - *The Problem of Predicativity. Essays in the Foundations of Mathematics.* Magnes Press. Jerusalem 1961.

[12] R. SIKORSKI - A topological characterization of open theories. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, classe des sci. math., phys, et astr. 9* (1961), pp. 259-260.

[13] A. TARSKI - Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics. *Proccedings of the International Congress of Mathematicians 1950*, vol. 1, pp. 705-720.

[14] A. TARSKI - Some model-theoretical results concerning weak second order logic. *Notices of the American Mathematical Society 5* (1958), abstract 550-6.