ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

AMPÈRE

Dynamique. Sur la théorie des forces centrales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 22 (1831-1832), p. 1-30
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1831-1832__22__1_0>

ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

DYNAMIQUE.

Sur la théorie des forces centrales ;

Par M. AMPÈRE, de l'Académie royale des sciences, etc.

I. LA théorie des forces centrales, comme la dynamique elle-même, dans son ensemble, se divise en deux questions distinctes, suivant qu'on donne les lois du mouvement, pour en déduire la cause qui le produit, ou qu'on part, au contraire, de l'expression de cette cause, supposée connue, pour en déduire, à un instant quelconque, la position du mobile et la nature de la courbe qu'il décrit. L'un et l'autre problèmes se résolvent par la même formule ; mais le premier est le plus simple, puisqu'il n'exige que l'emploi du calcul différentiel, tandis que, dans le second, les intégrations sont nécessaires. Déjà dans un précédent article (*), nous avons établi les bases de la théorie des forces centrales :

(*) *Annales*, tom. XX, pag. 37.

la note actuelle est destinée à compléter l'article cité. Nous y considérerons le mouvement d'un corps attiré vers un point fixe par une force qui décroît en raison inverse d'une puissance n de la distance, et nous donnerons l'analyse complète des trois hypothèses $n=2$, $n=-1$, $n=3$.

II. Nous supposons le mobile M, dont la masse est prise pour unité, attiré par la force $\frac{\mu}{r^n}$ vers le point fixe O, où nous plaçons l'origine des coordonnées polaire ; en sorte que la droite $OM=r$ fait avec l'axe fixe OX un angle ω. Les quantités ω, r déterminent la position du mobile dans le plan où il se meut ; lequel plan n'est autre que celui qui passe à la fois par le centre O et par la droite quelconque suivant laquelle est dirigée la vitesse initiale.

Cela posé, l'aire décrite dans l'instant dt par le point m, c'est-à-dire, le triangle dont la surface est $\frac{r^2 d\omega}{2}$, et qui est compris entre deux rayons vecteurs OM, OM′, infiniment voisins, menés aux positions de ce point qui répondent aux temps t, $t+dt$, cette aire, dis-je, est proportionnelle à dt par un théorème connu ; on peut la représenter par le produit $\frac{cdt}{2}$ de dt par la constante $\frac{c}{2}$. On a ainsi l'égalité

$$(1) \qquad r^2 d\omega = cdt \,.$$

On sait, d'autre part, que l'expression en différentielles de la force centrale a été mise par M. Binet sous la forme

$$(2) \qquad R=\frac{c^2}{r^2}\left\{\frac{1}{r}+\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\omega^2}\right\}. \qquad (*)$$

(*) Voy. l'article cité, pag. 54.

Lorsque l'on connaît la courbe parcourue par le point M, et l'équation de cette courbe $\frac{1}{r}=\varphi(\omega)$, il est facile de trouver R et d'arriver à la loi que suit l'attraction quand la distance du point M au centre augmente ou diminue. C'est ainsi qu'on démontre, en s'appuyant sur une des lois de Képler, que l'attraction universelle décroît en raison inverse du quarré de la distance. Nous ne reviendrons pas sur ce sujet dont nous avons traité d'une manière suffisamment étendue dans l'article cité. Nous considérerons présentement la question inverse. Ici R est une fonction donnée de r et l'on veut connaître la dépendance réciproque des quantités r, ω, t, c'est-à-dire, avec la nature de la courbe décrite, la loi continuelle de la vîtesse et le lieu du point M, pour un temps t pris à volonté. Nous ferons plus tard l'hypothèse particulière $R=\frac{\mu}{r^n}$; mais, dans les premiers calculs, on peut laisser R quelconque.

III. D'abord en faisant $r=\frac{1}{z}$, l'équation (2) devient

$$R=c^2z^2\left(z+\frac{d^2z}{d\omega^2}\right),$$

ou bien

$$\frac{R}{z^2}-c^2z=c^2\frac{d^2z}{d\omega^2}.$$

Multipliant par $2dz$ et intégrant, en observant que $2dz\frac{d^2z}{d\omega^2}=d\left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2$, on obtient

$$2\int\frac{Rdz}{z^2}-c^2z^2+c'=c^2\left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2;$$

c' étant la constante arbitraire. Cette équation donne, à son tour,

$$d\omega = \frac{-c\,dz}{\sqrt{2\int \frac{R\,dz}{z^2} - c^2z^2 + c'}}\ ;$$

et il suffit d'intégrer de nouveau les deux membres pour avoir ω.

IV. Les quantités c, c' dépendent des conditions du mouvement initial, ou plutôt des conditions du mouvement à une époque donnée quelconque, prise pour origine des temps. Ainsi nous admettons que v_0 est la vîtesse qui répond à une position déterminée de M, pour laquelle on suppose à r la valeur particulière r_0, et nous représentons par θ l'angle que fait la direction de la vîtesse v_0 avec ce dernier rayon vecteur. v_0, r_0 et θ étant connus, on en déduit c, c'. En effet, on peut décomposer la vîtesse v_0 dans les deux vîtesses partielles $v_0 \text{Sin}.\theta$, $v_0 \text{Cos}.\theta$, dont la seconde est dans le sens du rayon vecteur, tandis que l'autre lui est perpendiculaire. Donc $v_0 dt \text{Sin}.\theta$, $v_0 dt \text{Cos}.\theta$ sont les espaces infiniment petits que le mobile, dans l'instant dt, parcourt suivant ces deux directions ; et comme ces espaces sont aussi exprimés respectivement par $r_0 d\omega_0$ et dr_0, on en conclut

$$r_0 d\omega_0 = v_0 dt \text{Sin}.\theta\ ,$$

$$dr_0 = v_0 dt \text{Cos}.\theta\ .$$

Il est facile de comprendre qu'on met r_0, $d\omega_0$, dr_0 parce que ces quantités se rapportent à une position particulière du point M, et qu'on laisse pourtant dt, au lieu de mettre dt_0, parce que t étant la variable indépendante, sa différentielle est constante, d'où $dt = dt_0$.

En combinant avec l'équation (1) la première des deux égalités qu'on vient d'écrire, on a cette valeur de c

$$c = v_0 r_0 \text{Sin}.\theta$$

De plus, c' est donné par l'équation intégrale

$$c'=c^2z^2+c^2\left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2-2\int\frac{Rdz}{z^2}\ ;$$

laquelle, à cause de

$$z=\frac{1}{r}\ ,\quad \frac{dz}{d\omega}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\omega^2}=-\frac{d}{cdt}\ ,\ \int\frac{Rdz}{z^2}=-\int Rr\ ;$$

devient

$$c'=\frac{c^2}{r^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+2\int Rdr\ ,$$

qui est vraie pour toutes les valeurs de t, et qui subsiste, par conséquent, à l'extrémité du rayon r_0. Faisant donc $r=r_0$, et mettant pour c sa valeur, il vient

$$c'=v^2{}_0\text{Sin.}^2\theta+v_0{}^2\text{Cos.}^2\theta+2\int_0 Rdr\ ;$$

ou, plus simplement,

$$c'=v^2{}_0+2\int_0 Rdr\ .$$

Ainsi, voilà c et c' exprimés en v_0, r_0 et θ. Il est inutile d'avertir que la notation $\int_0 Rdr$ exprime l'intégrale $\int Rdr$ dans laquelle on a fait $r=r_0$.

V. Tout cela a lieu quelque soit R. Quand $R=\frac{\mu}{r}=\mu z^n$, on a

$$\int Rdr=-\int R\frac{dz}{z^2}=-\frac{\mu z^{n-1}}{n-1}=-\frac{\mu}{(n-1)r^{n-1}}\ ;$$

ainsi

$$(3)\qquad d\omega=\frac{-cdz}{\sqrt{\frac{\quad}{n-1}-c^2z^2+c'}}\ ;$$

équation où

$$c = v_0 r_0 \mathrm{Sin}.\theta \quad ,$$

$$c' = v^2_0 - \frac{2\mu}{(n-1)r_0^{n-1}} \quad .$$

L'intégration qu'on doit effectuer pour avoir ω n'est pas possible en général. Nous nous contenterons d'examiner les trois cas très-distincts $n=2$, $n=-1$, $n=3$, dont le premier est celui de la nature.

VI. En posant $n=2$, l'équation (3) devient

$$d\omega = -\frac{cdz}{\sqrt{2\mu z - c^2z^2 + c'}} = -\frac{cdz}{\sqrt{\frac{\mu^2}{c^2} + c' - \left(cz - \frac{\mu}{c}\right)^2}} \; ;$$

on en tire

$$\omega = \text{Arc Cos.} = \frac{cz - \frac{\mu}{c}}{\sqrt{c' + \frac{\mu^2}{c^2}}} + c'' \; .$$

On peut, sans nuire à la généralité de cette équation, annuler c'', car cela revient à choisir d'une manière convenable la direction de la droite fixe OX. Il viendra alors

$$r = \frac{1}{z} = \frac{c}{\frac{\mu}{c} + \sqrt{c' + \frac{\mu^2}{c^2}}.\mathrm{Cos}.\omega} \; ;$$

équation d'une section conique quelconque, dont le foyer est au point fixe O d'attraction. Cette équation est en coordonnées polaires ; mais on ramenera les coordonnées rectangulaires x et y, si l'on fait $x = r\mathrm{Cos}.\omega$, $y = r\mathrm{Sin}.\omega$. D'abord, $\mathrm{Cos}.\omega$ étant égal à $\frac{x}{r}$, on a

$$r=\frac{c}{\frac{\mu}{c}+\frac{x}{r}\sqrt{c'+\frac{\mu}{c^2}}}.$$

De là résulte

$$r=\frac{c^2}{\mu}-x\sqrt{1+\frac{c^2c'}{\mu^2}};$$

d'où l'on voit nettement, puisque le second membre est une fonction rationnelle de l'abscisse, que le point O est un foyer de la courbe. A présent, comme $r=\sqrt{x^2+y^2}$, il vient

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{c^2}{\mu}-x\sqrt{1+\frac{c^2c'}{\mu^2}}.$$

Faisant disparaître le premier radical par l'élévation des deux membres au quarré, on donnera à l'équation la forme suivante :

$$My^2+Nx^2+Px=Q;$$

elle deviendra, en effet,

$$\mu^2y^2-c^2c'x^2+2c^2\sqrt{\mu^2+c^2c'}.x=c^4;$$

de sorte qu'on aura

$$M=\mu^2, \quad N=-c^2c', \quad P=2c^2\sqrt{\mu^2+c^2c'}, \quad Q=c^4;$$

et la section conique sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que le coefficient N sera positif, nul ou négatif.

Or, comme ce coefficient dépend de c', il faut se rappeler qu'on a, par les équations (4),

$$c^2=v^2_0r^2_0\text{Sin.}^2\theta, \qquad c'=v^2_0-\frac{2\mu}{r_0},$$

à cause de $n=2$. Donc

1.° N est négatif et la courbe hyperbolique soit quand on a $\mu < 0$, ce qui répond à une force centrale répulsive, soit quand μ est positif, mais plus petit que $\frac{v^2_0 r_0}{2}$. Il faut donc que le rapport $\frac{\mu}{r^2_0}$, qui est la valeur initiale de la force centrale, soit plus petit que la moitié du quotient $\frac{v^2_0}{r_0}$, quotient qui exprime la forte centrifuge produite par la vîtesse v_0 sur un cercle dont le rayon est égal à r_0 ;

2.° N est zéro, et la courbe parabolique, lorsque $\frac{\mu}{r^2_0} = \frac{v^2_0}{2r_0}$; la valeur initiale de la force centrale est alors exactement moitié de la force centrifuge dont nous venons de parler, et l'action du point fixe est essentiellement attractive ;

3.° Enfin N est positif, et la courbe elliptique, quand la force centrifuge $\frac{v^2_0}{2r_0}$ est à son tour au-dessous de $\frac{\mu}{r^2_0}$. Quant à l'angle θ, il ne fait rien au genre de la courbe et n'influe que sur ses dimensions.

Ainsi, en résumé, on a trois cas divers. La courbe est

Infinie, avec des asymptotes, quand $v^2_0 > \frac{2\mu}{r_0}$,

Infinie, sans asymptotes, quand $v^2_0 = \frac{2\mu}{r_0}$;

Finie et limitée, quand $v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$.

V. Nous avons déjà retrouvé deux des lois de Képler, savoir:

1.° *Les planètes se meuvent dans des courbes planes, et leurs rayons vecteurs decrivent, autour du soleil, des aires proportionnelles aux temps.* Cette loi résulte de l'équation $r^2 du = c dt$.

2.° *Les orbites planetaires sont des ellipses dont le soleil occupe* *un foyer.* Nous venons de prouver que la courbe est une section conique. Si les planètes décrivent des ellipses, c'est que la condition $v^2_0 < \frac{2\mu}{r_0}$ est satisfaite pour elles. Mais rien ne prouve qu'il n'y ait pas des comètes décrivant des paraboles ou des hyperboles.

Reste à prouver que

3.° *Les quarrés des temps des révolutions des planètes autour du soleil sont comme les cubes des grands axes de leurs orbites.*

Pour cela nommons T le temps employé à faire une révolution complète, et A l'aire totale de l'ellipse. L'aire parcourue dans le temps dt sera donc $\frac{Adt}{T}$; et, comme on l'a représentée ailleurs par $\frac{cdt}{2}$, il résulte de ce rapprochement $c = \frac{2A}{T}$. Pour calculer A, il faut connaître les demi-axes a et b de l'ellipse. Il faut donc recourir à l'équation

$$r = \frac{c^2}{\mu} - x\sqrt{1 + \frac{c^2 c'}{\mu^2}} \;,$$

où c' est négatif à cause de $c' = v^2_0 - \frac{2\mu}{r_0}$ et de la condition $v^2_0 < \frac{2\mu}{r_0}$ nécessaire dans l'ellipse. Mais on sait, d'autre part, que le rayon vecteur, en fonction de l'abscisse x' ou $x + \sqrt{a^2 - b^2}$, comptée du centre, est

$$r = a - \frac{x'\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \;;$$

donc

$$r = a - \frac{a^2 - b^2}{a} - \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \;,$$

ce qui revient à

$$r = \frac{b^2 - x\sqrt{a^2 - b^2}}{a} .$$

On obtient, par la comparaison de ces deux valeurs de r,

$$\frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{c^2 c'}{\mu^2}} .$$

On tire de la première équation

$$b = c\sqrt{\frac{a}{\mu}} ;$$

donc

$$A = \varpi ab = \varpi c\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} ;$$

et comme nous avons trouvé

$$c = \frac{2A}{T} ,$$

nous en conclurons

$$T = 2\varpi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} .$$

Pour une autre planète où le demi-grand axe a se change en a' et le temps T en T', on a de même

$$T' = 2\varpi\sqrt{\frac{a'^3}{\mu}} .$$

Ainsi

$$T^2 : T'^2 : : a^3 : a'^3 ;$$

c'est-à-dire que les quarrés des temps des révolutions des planètes sont comme les cubes des grands axes, conformément à la loi citée de Képler.

VI. L'équation

$$\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{c^2c'}{\mu^2}}\ ,$$

contient, dans son premier membre, l'excentricité de l'ellipse que l'on désigne ordinairement par e. On a, de la sorte,

$$e=\sqrt{1+\frac{c^2c'}{\mu^2}}\ ;$$

donc

$$\mu=\frac{c\sqrt{-c'}}{\sqrt{1-e^2}}\ ;$$

tandis que, par l'autre égalité $b=c\sqrt{\frac{a}{\mu}}$, on trouve

$$\mu=\frac{c^2}{a(1-e^2)}\ .$$

Ces deux valeurs de μ devant être identiques, il faut poser

$$\frac{\sqrt{-c'}}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{c}{a(1-e^2)}\ .$$

Ainsi

$$c'=-\frac{c^2}{a^2(1-e^2)}=-\frac{c^2}{b^2}=-\frac{4\pi^2a^2}{T^2}\ .$$

Cette valeur de c' jointe à celles-ci

$$c=\frac{2A}{T}=\frac{2\pi ab}{T}\ ,\qquad \mu=\frac{4\pi^2a^3}{T^2}\ ,$$

déterminent les deux constantes c, c' et l'attraction μ à la distance 1 lorsque l'on connaît les deux demi-axes de l'ellipse et le temps T d'une révolution.

VII. Nous allons examiner, en second lieu, l'hypothèse $n=-1$. Ainsi la force centrale R est proportionnelle à la distance et représentée par μr. L'équation (3) devient donc

$$d\omega=-\frac{cdz}{\sqrt{c'-\frac{\mu}{z^2}-c^2z^2}}\ ,$$

ou

$$d\omega=-\frac{zdz}{\sqrt{\frac{c'z^2}{c^2}-\frac{\mu}{c^2}-z^4}}\ ;$$

ce qui peut s'écrire ainsi

$$d\omega=\tfrac{1}{2}\,\frac{-2zdz}{\sqrt{\frac{c'^2}{4c^4}-\frac{\mu}{c^2}-\left(\frac{c'}{2c}-z^2\right)^2}}\ .$$

En intégrant et nommant c'' la constante arbitraire, on trouve

$$\omega=\tfrac{1}{2}\,\text{Arc.Sin.}=\frac{\frac{c'}{2c^2}-z^2}{\sqrt{\frac{c'^2}{4c^4}-\frac{\mu}{c^2}}}+c''\ ;$$

donc

$$\frac{c'}{2c^2}-z^2=\sqrt{\frac{c'^2}{4c^4}-\frac{\mu^2}{c^2}}\ \text{Sin.}2(\omega-c'')\ .$$

Si l'on remplaçait z par $\frac{1}{r}$, on aurait l'équation de la courbe en coordonnées polaires, et il serait aisé de reconnaître l'équation d'une section conique ayant un centre coïncidant avec le point O. Mais on peut également trouver une relation entre les coordonnées x, y, rapportées à deux axes rectangulaires, ayant leur origine au point fixe. On disposera pour cela l'axe des x de manière qu'on ait

$$x = r\text{Cos.}(\omega - c'') \quad , \quad y = r\text{Sin.}(\omega - c'') \ ;$$

c'est-à-dire qu'on dirigera la droite OX de telle sorte qu'elle fasse avec celle d'où partent les arcs ω un angle c''. Cela admis, on aura

$$z^2 = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{x^2+y^2}\ ,\ \text{Sin.}2(\omega - c'') = 2\text{Sin.}(\omega - c'')\text{Cos.}(\omega - c'') = \frac{2xy}{y^2+y^2}\ ;$$

et, par conséquent, l'équation de la courbe sera

$$\frac{c'}{2c^2}(x^2+y^2) - 2xy\sqrt{\frac{c'^2}{4c^4} - \frac{\mu}{c^2}} = 1\ .$$

Elle représente évidemment une section conique rapportée à son centre; savoir: une ellipse quand μ est positif, c'est-àdire, quand la force centrale est attractive, et une hyperbole quand μ est négatif et la force centrale répulsive. La courbe a son centre à l'origine parce que x et y n'entrent pas au premier degré dans l'équation. A cause de l'égalité des coefficiens de x^2 et y^2 elle est rapportée à deux axes placés symétriquement de part et d'autre de l'axe principal, et formant avec celui-ci des angles égaux à la moitié d'un droit. Quand $\mu = \frac{c'^2}{4c}$ le terme en xy disparaît, et l'ellipse devient un cercle dont le rayon est $\frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{c'}}$. Dans tous les cas, les équations (4), en y faisant $n = -1$, déterminent c et c' par les conditions initiales du mouvement, et la constante c'' se calcule au moyen de la valeur ω_0 de ω qui répond à $r=r_0$. Il suffit de faire, à la fois, $\omega=\omega_0$, $r=r_0$, dans l'intégrale en ω, r qui est l'équation polaire de la trajectoire.

VIII. Passons à l'hypothèse beaucoup plus compliquée $n=3$; c'est-à-dire, supposons la force centrale en raison inverse du cube des distances et ayant pour expression $\frac{\mu}{r^3}$. L'équation (3) devient alors

$$d\omega=-\frac{cdz}{\sqrt{(\mu-c^2)z^2+c'}} .$$

Mais, comme on peut prendre le radical avec le double signe $\pm$, nous supposerons que $d\omega$ est positif. Il est clair d'ailleurs qu'on peut, à volonté, changer le signe de $d\omega$, en comptant les angles ω à partir du prolongement de la droite de laquelle on les comptait d'abord. En conséquence l'équation qu'il s'agira d'intégrer sera

$$d\omega=\frac{cdz}{\sqrt{(\mu-c^2)z^2+c'}} :$$

et on trouvera que les équations (4) donnent

$$c=v_0r_0\text{Sin.}\theta , \qquad c'=v^2_0-\frac{\mu}{r^2_0} .$$

Telles sont les bases de la discussion détaillée dans laquelle nous allons entrer sur les cinq cas que le problème peut offrir.

IX. *Premier cas.* Tant que μ est plus petit que $c^2=v^2_0r^2_0\text{Sin.}^2\theta$, ce qui le rend, à *fortiori*, plus petit que $v^2_0r^2_0$, le coefficient de z^2, savoir $\mu-c^2$ est négatif, mais la valeur de c' est positive, puisqu'elle peut se mettre sous la forme $\frac{v^2_0r^2_0-\mu}{r^2_0}$. Alors on a

$$d\omega = \frac{c}{\sqrt{c^2-\mu}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{c^2-\mu}{c'}}\,dz}{\sqrt{1+\frac{c^2-\mu}{c'}z^2}} \;;$$

et l'on obtient, par l'intégration;

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{c^2-\mu}} \text{Arc.}\left(\text{Sin.} = \sqrt{\frac{c^2-\mu}{c'}}\, z\right) \;;$$

et, par conséquent,

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{c^2-\mu}} \text{Arc.}\left(\text{Sin.} = \sqrt{\frac{c^2-\mu}{c'}}\;\frac{1}{r}\right) \,.$$

En n'ajoutant pas de constante, les ω seront comptés de la droite pour laquelle on a $z=0$ et $r=\infty$. C'est la supposition que nous admettons ici. On tire ensuite de la valeur de ω celle de r, savoir :

$$r = \frac{\sqrt{\frac{c^2-\mu}{c'}}}{\text{Sin.}\frac{\sqrt{c^2-\mu}}{c}\omega} = \sqrt{\frac{c^2-\mu}{c'}}\;\text{Coséc.}\;\frac{\sqrt{c^2-\mu}}{c}\omega \,.$$

Soient fait

$$\frac{\sqrt{c^2-\mu}}{c} = p \,, \qquad \sqrt{\frac{c^2-\mu}{c'}} = k \;;$$

la constante p sera toujours moindre que l'unité, pour des valeurs positives de μ, et la valeur de r deviendra

$$r = \frac{k}{\text{Sin.}p\omega} = k\,\text{Coséc.}\,p\omega \,.$$

Il s'agit de construire cette équation.

Soit OB (fig. 1) la droite à partir de laquelle se comptent les angles, qui répond, d'après ce que l'on a vu, à $\omega=0$, $r=\infty$. Cette valeur infinie de r donne lieu de chercher s'il n'y a pas une asymptote de la courbe parallèle à OB. Or, si l'on mène la droite OG, normale à OB et d'une longueur égale à $\frac{k}{p}$, puis qu'on tire par le point G une parallèle GH à OB, la ligne GH sera l'asymptote en question. Pour s'en convaincre il faut prendre un point M sur la courbe, abaisser la perpendiculaire MP sur OG, et faire voir qu'à mesure que l'angle $\text{MOB}=\omega$ diminue et se rapproche de zéro, le rapport $\frac{\text{OP}}{\text{OG}}$, qui est toujours au-dessous de l'unité, se rapproche indéfiniment de 1 qui en est la limite, en sorte qu'il est rigoureusement 1 pour $\omega=0$.

Or, on a, par l'équation de la courbe,

$$\text{OM}=r=\frac{k}{\text{Sin}.p\omega},$$

et, par conséquent,

$$\text{OP}=\frac{k\text{Sin}.\omega}{\text{Sin}.p\omega}.$$

Quand ω est infiniment petit, le second membre devient $\frac{k\omega}{p\omega}$ $=\frac{k}{p}=\text{OG}$, qui est ainsi la limite de la longueur OP. D'ailleurs, avant de s'évanouir, ω prend de petites valeurs pour lesquelles on peut supposer,

$$\text{Sin}.\omega=\omega-\frac{\omega^3}{5}, \qquad \text{Sin}.p\omega=p\omega-\frac{p^3\omega^3}{6};$$

et comme p est moindre que l'unité, en restant dans l'hypothèse de μ positif, à laquelle cette figure s'applique, le rapport $\frac{\text{Sin}\,\omega}{\text{Sin}.p\omega}$

est aussi plus petit que $\frac{1}{p}$, et par suite $\frac{k\text{Sin}.\varpi}{\text{Sin}.p\varpi}$ est moindre que $\frac{k}{p}$. On voit par là que la droite GH est, en effet, une asymptote de la courbe qui a vraiment l'aspect qu'indique la figure.

X. Le *minimum* des valeurs de r répond à l'angle ω=BOD $=\frac{\varpi}{2p}$; elle est OD=k. Au point D la tangente est normale au rayon vecteur. Il est naturel de compter les angles à partir de la droite OD. Or, il suffit pour cela de nommer ces angles ω' et de poser $\omega=\frac{\varpi}{2p}\pm\omega'$. Voici donc l'équation nouvelle de la courbe

$$r=\frac{k}{\text{Sin.}\left(\frac{\varpi}{2}\pm p\omega'\right)}=\frac{k}{\text{Cos}.p\omega'}=k\text{Séc}.p\omega'.$$

On voit que la valeur de r ne dépend pas du signe de ω'. Par conséquent, la courbe est symétrique de part et d'autre de OD. Deux droites inclinées également des deux côtés de cet axe répondent à des rayons vecteurs égaux, et si l'on prolonge l'asymptote GH, jusqu'au point T où elle rencontre la direction OD, puis qu'on fasse l'angle OTG'=OTG, il est manifeste que TG' sera une seconde asymptote ; ce qu'on vérifierait en observant que r devient infini pour $\omega=\frac{\varpi}{p}$. Ceci prouve de plus que $2\varpi-\frac{\varpi}{p}=\varpi\left(2-\frac{1}{p}\right)$, quantité toujours moindre que 2ϖ, est l'expression de l'angle GTG'.

On a pour valeur de p, $p=\sqrt{1-\frac{\mu}{c^2}}$. Si $\mu=\frac{5}{9}$, $p=\frac{2}{3}$; donc GTG'$=\frac{\varpi}{2}$; de sorte que les deux asymptotes forment entre elles un angle droit. Elles sont parallèles si $\mu=\frac{3}{4}c^2$. Enfin, pour $\mu>\frac{3}{4}c^2$, la trajectoire se coupe elle-même, en formant d'autant plus de nœuds que μ est plus grand.

XI. Au reste, la courbe représentée par l'équation

$$r=\frac{k}{\text{Cos}\,p\omega'}=k\text{Séc}.p\omega',$$

peut être algébrique ou transcendante, en coordonnées rectangulaires. Elle sera évidemment algébrique si p est une fraction rationnelle. Soit, par exemple, $\mu=\frac{3}{4}c^2$, $p=\frac{1}{2}$; donc

$$r=\frac{k}{\text{Cos}.\frac{1}{2}\omega'}=\frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{1+\text{Cos}.\omega'}}.$$

On passe des coordonnées polaires r, ω' aux coordonnées rectangulaires qui ont la même origine, et où OD est l'axe des x, en posant

$$x=r\text{Cos}.\omega', \quad y=r\text{Sin}.\omega';$$

ce qui donne, pour l'équation transformée,

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}};$$

d'où il est aisé de déduire

$$y^4+(x^2-4k^2)y^2=4k^2(x^2-k^2),$$

équation du quatrième degré mais facile à construire, parce qu'elle est résoluble comme équation du second degré, soit par rapport à x, soit par rapport à y^2.

La valeur de y est

$$y=\pm\sqrt{\frac{4k^2-x^2}{2}\pm\frac{x}{2}\sqrt{x^2+8k^2}};$$

elle fait retrouver les deux asymptotes ; car, pour x infini, elle donne $y=\pm 2k$. Ce sont, en effet, les valeurs de y qui correspondent aux deux asymptotes parallèles à l'axe des x, à une distance de chaque côté de cet axe $\frac{k}{p}$ qui, quand $p=\frac{1}{2}$, est égale à $2k$.

En prenant le radical $\sqrt{x^2+8k^2}$ avec le signe $-$, on a une branche de courbe fermée, pour $x=\pm k$, et qui ne donne y réelle que pour des valeurs de x comprises entre les limites $+k$ et $-k$. Pour $x=0$, on a pour ces branches $y=k\sqrt{2}<2k$ et $y=-k\sqrt{2}$. Ces valeurs répondent clairement à deux points doubles. La partie fermée vient de ce que l'équation ne contenant que des puissances paires de x, reste la même lorsqu'on y change x en $-x$. C'est le résultat de la rencontre de deux courbes à branches infinies. La forme totale de cette courbe est donc telle que la représente la figure 2.

On trouverait, par une discussion semblable, que, pour la valeur $\mu=\frac{5}{9}c^2$, la forme de la courbe est celle qu'indique la figure 3.^{me}

XII. Reprenons l'équation générale

$$d\omega=\frac{cdz}{\sqrt{(\mu-c^2)z^2+c'}};$$

et voyons comment on en déduit le temps employé à parcourir un arc de la courbe.

Pour cela il faut restituer $\frac{1}{r}$ au lieu de z; d'où l'on a

$$d\omega=-\frac{cdr}{r^2\sqrt{\frac{\mu-c^2}{r^2}+c'}}.$$

D'ailleurs, par le principe des aires, $d\omega=\frac{cdt}{r^2}$; donc

$$dt = -\frac{1}{c'} \cdot \frac{c'rdr}{\sqrt{\mu - c^2 + c'r^2}} .$$

Si l'on intègre entre les limites $r=r_1$ et $r=r_2$ on aura, par conséquent,

$$t = \frac{\sqrt{\mu - c^2 + c'r_1^2} - \sqrt{\mu - c^2 + c'r_2^2}}{c'} .$$

Cette valeur est générale ; elle convient à une hypothèse quelconque sur μ, aussi bien qu'à la supposition $\mu < c^2$ adoptée jusqu'ici. Pour $\mu = c^2$ elle se simplifie beaucoup et donne

$$t = \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{c'}} .$$

Alors le temps t est constamment proportionnel à la différence des rayons vecteurs menés de l'origine O aux extrémités de l'arc parcouru pendant ce temps par le point mobile. Nous reviendrons au reste, tout à l'heure, sur l'hypothèse $\mu = c^2$. Il nous reste, pour le présent, à faire observer que, bien qu'on ait, dans ce qui précède, regardé μ comme positif, c'est dans ce premier cas de $\mu < c^2$ que rentre celui de μ négatif. Seulement la courbe, qui se construit toujours de même, tourne alors sa convexité du côté du centre O. Il est aisé de s'assurer que cette circonstance tient à ce qu'en changeant μ en $-\mu$, p devient $\frac{\sqrt{c^2+\mu}}{c}$, et surpasse toujours l'unité.

Enfin si l'on veut, pour différentes valeurs de μ et conséquemment de p, comparer entre elles les trajectoires de différens points matériels dont les asymptotes et par suite la direction, à partir de l'infini, soient les mêmes, il faut y introduire (fig. 1.re) $OG = \frac{k}{p}$, qui a la même valeur pour toutes les courbes, au lieu que la longueur $OD=k$ varie de l'une à l'autre. On fera donc $\frac{k}{p}=b$, alors $k=pb$, et

$$r=\frac{pb}{\mathrm{Sin}\,p\omega}.$$

XIII. *Deuxième cas.* Cette forme d'équation est très-appropriée au deuxième cas où $\mu=c^2$. Elle montre manifestement comment cette hypothèse se lie à la précédente. En effet, à mesure que $c^2-\mu$ diminue et se rapproche de zéro, le nombre $p=\frac{\sqrt{c^2-\mu}}{c}$ diminue de son côté et devient infiniment petit. On a donc à la limite $\mathrm{Sin}.p\omega=p\omega$, et

$$r=\frac{b}{\omega}.$$

C'est l'équation de la spirale hyperbolique dont l'asymptote est toujours éloignée du centre de la distance b, comme pour toutes les courbes comprises quel que soit p, dans l'équation générale

$$r=\frac{bp}{\mathrm{Sin}.p\omega}.$$

La spirale hyperbolique fait une infinité de circonvolutions avant qu'on ait $r=0$; et, en tenant compte des valeurs négatives de ω, on trouve une autre branche de même asymptote, dont la combinaison avec la première engendre une infinité de nœuds.

Néanmoins la formule

$$t=\frac{r_1-r_2}{\sqrt{c^2}},$$

que nous avons trouvée dans le numéro précédent pour exprimer le temps employé à parcourir un arc de la courbe, donne, quand on fait $r_2=0$, quel que soit r_1, une valeur finie $\frac{r_1}{\sqrt{c'}}$. Donc le temps nécessaire pour parvenir au centre, d'un point quelconque de la trajectoire, en parcourant un arc infini, est limité et proportionnel au rayon vecteur du point de départ.

XIV. *Troisième cas.* Lorsque μ devient plus grand que $c^2=v^2_0 r^2_0 \operatorname{Sin}.^2\theta$, et que pourtant il reste au-dessous de $v^2_0 r^2_0$ la valeur de c', savoir :

$$c'=\frac{v^2_0 r^2_0-\mu}{r^2_0};$$

est positive, tandis que celle de $c^2-\mu$ est négative.

En mettant alors la valeurs de $d\omega$ sous la forme

$$d\omega=\frac{c}{\sqrt{\mu-c^2}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{z^2+\frac{c'}{\mu-c^2}}},$$

et posant

$$\frac{\sqrt{\mu-c^2}}{c}=p, \qquad \frac{\mu-c^2}{c'}=k^2;$$

on aura

$$p\,d\omega=\frac{dz}{\sqrt{z^2+\frac{1}{k^2}}}.$$

Intégrant et nommant $\mathrm{l}c''$ la constante arbitraire, il viendra

$$p\omega+\mathrm{l}c''=\mathrm{l}\left(z+\sqrt{z^2+\frac{1}{k^2}}\right).$$

En désignant par e la base des logarithmes népériens et passant des logarithmes aux exponentiels, on trouve

$$z+\sqrt{z^2+\frac{1}{k^2}}=c''e^{p\varpi}\ ;$$

et à cause de

$$z-\sqrt{z^2+\frac{1}{k^2}}=-\frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{z+\sqrt{z^2+\frac{1}{k^2}}}\ ;$$

on a aussi

$$z-\sqrt{z+\frac{1}{k^2}}=-\frac{1}{k^2c''}e^{-p\varpi}\ .$$

En ajoutant ces deux équations et divisant par 2, il vient

$$z=\frac{c''e^{p\varpi}}{2}-\frac{e^{-p\varpi}}{2c''k^2}\ .$$

Si l'on veut, comme précédemment, compter les ω de la droite pour laquelle $r=\infty$ et $z=0$, z et ω étant nuls ensemble, on a

$$c''=\frac{1}{k}\ ;$$

d'où résulte

$$z=\frac{e^{p\varpi}-e^{-p\varpi}}{2k}\ ,$$

et, par conséquent,

$$r=\frac{2k}{e^{p\varpi}-e^{-p\varpi}}\ .$$

Voici la construction géométrique de cette valeur de r.

Soit OB (fig. 4) la droite à partir de laquelle on compte les angles, répondant conséquemment aux valeurs $\omega=0$, $r=\infty$; une parallèle GH à OB, à la distance $OG = \frac{k}{p}$ est l'asymptote de la courbe. En effet, si l'on prend un point M sur cette courbe, et qu'on mène la normale MP à OG, le pied P de la normale s'approchera indéfiniment du point G qui en est la limite et pour lequel MP et r deviennent infinis. En effet,

$$OP = r\,\text{Sin.}\,\omega = \frac{2k\,\text{Sin.}\,\omega}{e^{p\omega} - e^{-p\omega}} \;;$$

or, en développant en séries les sinus et les exponentiels, et prenant ω très-petit, la valeur de OP se réduit à

$$OP = \frac{k\left(1 + \frac{\omega^2}{6}\right)}{p\left(1 + \frac{p^2\omega^2}{6}\right)} \,.$$

Or, cette valeur est inférieure à $\frac{k}{p}$; mais elle s'en approche indéfiniment à mesure que ω tend vers zéro; de sorte que, quand ω est rigoureusement nul, OP ne diffère plus de OG.

Ainsi la droite GH est bien une asymptote de la courbe, et dans ce cas, comme dans le premier, il est curieux de comparer les trajectoires qui diffèrent par la valeur de μ, mais dont l'asymptote est la même. On posera pour cela $\frac{k}{p}$ égale à une constante b, d'où $k = bp$, et l'on aura la valeur suivante de r

$$r = \frac{2bp}{e^{p\omega} - e^{-p\omega}} = \frac{b}{\omega\left(1 + \frac{p^2\omega^2}{6} + \ldots\right)} \;;$$

ce qui redonne l'équation $r = \frac{b}{\omega}$ de la spirale hyperbolique quand rentrant dans l'hypothèse déjà discutée de $\mu=c^2$, on fait $p=0$.

XV. *Quatrième cas.* Si μ devient égal à $v^2{}_0 r^2{}_0$, c' s'annule et $\mu-c^2$ est positif. On discuterait aisément ce cas en remontant aux équations fondamentales et y introduisant les hypothèses précédentes, mais comme notre but principal est de montrer la liaison successive des cas divers, nous préférons reprendre l'équation

$$z=\frac{c''e^{p\omega}}{2}-\frac{e^{-p\omega}}{2c''k^2},$$

et y poser $c'=0$, d'où $h=\sqrt{\frac{\mu-c^2}{c'}}=\infty$. La valeur de z se simplifie donc et se réduit à

$$z=\frac{c''e^{p\omega}}{2};$$

donc

$$r=\frac{2e^{-p\omega}}{c''}=c'''e^{-p\omega},$$

en écrivant c''' pour $\frac{2}{c''}$. C'est là ce que donnerait la considération immédiate de l'équation différentielle (3). Il n'y a plus ici d'asymptote, puisque r ne peut devenir infini que pour $\omega=-\infty$. La constante c''' est la longueur du rayon vecteur qui répond à $\omega=0$; et comme on peut donner à ω des valeurs négatives, il en résulte que la courbe qui n'est autre que la *spirale logarithmique*, est composée de deux parties, l'une en dedans et l'autre en dehors du cercle décrit autour de l'origine avec le rayon c''', et qui se continuent sans interruption.

Le temps employé à parcourir un arc de la courbe peut s'obtenir indifféremment en faisant $c'=0$ dans l'équation

$$dt = -\frac{r dr}{\sqrt{\mu - c^2 + c'r}},$$

du numéro XII et intégrant soit en faisant $c' = 0$ dans la valeur

$$t = \frac{\sqrt{\mu - c^2 + c' r^2_1} - \sqrt{\mu - c^2 + c' r^2_2}}{c'},$$

obtenue au même numéro. Cette valeur, à la vérité, se présente alors sous la forme $\frac{0}{0}$; mais si l'on observe que la multiplication des deux termes de la fraction par

$$\sqrt{\mu - c^2 + c' r^2_1} + \sqrt{\mu - c^2 + c' r^2_2},$$

donne

$$t = \frac{c'(r^2_1 - r^2_2)}{c'\left(\sqrt{\mu - c^2 + c' r^2_1} + \sqrt{\mu - c^2 + c' r^2_2}\right)};$$

on pourra supprimer le facteur commun c', puis faisant ensuite $c' = 0$, on trouvera cette expression exacte

$$t = \frac{r^2_1 - r^2_2}{2\sqrt{\mu - c^2}},$$

laquelle reste finie lorsqu'on pose $r_2 = 0$; en sorte que le temps employé pour arriver au centre, en partant d'un point de la courbe qui répond au rayon vecteur r_1, est

$$\frac{r^2_1}{2\sqrt{\mu - c^2}}.$$

Ainsi ce temps est fini et proportionnel au quarré du rayon vecteur du point de départ, ce qui n'a rien de surprenant, car l'arc, bien qu'il fasse une infinité de circonvolutions, n'en est pas moins d'une longueur finie et proportionnelle au rayon r_1, comme on le voit en calculant cet arc par les formules connues.

XVI. *Cinquième cas.* Si μ est plus grand que $v^2{}_0 r^2{}_0$, la valeur de c' est négative. En changeant c' en $-c'$, on a

$$d\omega = \frac{c}{\sqrt{\mu - c^2}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \frac{c'}{\mu - c^2}}};$$

et en faisant toujours

$$\frac{\sqrt{\mu - c^2}}{c} = p, \qquad \frac{\mu - c^2}{c'} = k^2;$$

on trouve

$$p\,d\omega = \frac{dz}{\sqrt{z^2 - \frac{1}{k^2}}};$$

Intégrant et mettant lc'' pour constante arbitraire, il vient

$$p\omega + lc'' = l\left(z + \sqrt{z^2 - \frac{1}{k^2}}\right),$$

d'où

$$z + \sqrt{z^2 + \frac{1}{k^2}} = c'' e^{p\omega}.$$

A cause de

$$z - \sqrt{z^2 + \frac{2}{k^2}} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{z + \sqrt{z^2 + \frac{1}{k^2}}};$$

on tire aussi

$$z-\sqrt{z^2-\frac{1}{k^2}}=\frac{e^{-p\omega}}{c''k^2} ;$$

Par conséquent en ajoutant ces deux dernières égalités, puis remplaçant z par $\frac{1}{r}$ et prenant la valeur de r, on a l'équation de la courbe

$$r=\frac{2}{c''e^{p\omega}+\frac{1}{c''k^2}e^{-p\omega}} ;$$

et l'on doit observer que l'hypothèse $k=\infty$ nous ramène à la spirale logarithmique. Cette supposition exclue, on voit qu'aucune valeur de ω ne peut rendre r infini ; mais comme la différentielle du dénominateur, savoir :

$$\left(c''pe^{p\omega}-\frac{p}{c'k^2}e^{-p\omega}\right)d\omega ,$$

est égale à zéro pour la valeur de ω donnée par l'équation

$$e^{2p\omega}=\frac{1}{c''^2k^2} ;$$

il en résulte qu'il y a un *maximum* de r pour le même angle ω. Si l'on tire le rayon vecteur correspondant que nous appelerons OD, on pourra le prendre pour l'axe à partir duquel se comptent les ω. Il suffit, pour exprimer cette condition, de faire $\omega=0$ dans la dernière équation. Cela donne $c''=\frac{1}{k}$, et l'on obtient, pour l'équation de la courbe,

$$r=\frac{2k}{e^{p\omega}+e^{-p\omega}} ,$$

où le maximum $r=k$ a lieu effectivement pour $\omega=0$. D'ailleurs r ne devient nul que pour des valeurs de ω infiniment grandes, et de plus r reste le même quand on change simplement le signe de ω. On voit ainsi que la courbe est composée de deux branches égales symétriquement disposées par rapport à l'axe OD, et qu'elle fait une infinité de circonvolutions autour du centre d'attraction, de sorte que les nœuds se trouvent tous sur l'axe OD.

Le temps employé à parcourir l'arc compris entre les rayons vecteurs r_1, r_2 se déduit de la formule générale du n.° XII. Il suffit d'y changer c' en $-c'$, pour nous conformer à l'hypothèse actuelle. On a, par conséquent,

$$t=\frac{\sqrt{\mu-c^2-c'r^2_2}-\sqrt{\mu-c^2-c'r^2_1}}{c'}\ .$$

Si l'on veut compter les temps à partir du point D où $r_1=k=\sqrt{\frac{\mu-c^2}{c'}}$, on aura simplement

$$t=\frac{\sqrt{\mu-c^2-c'r^2_2}}{c'}\ .$$

En faisant, dans cette formule, $r_2=0$ on aura le temps $\frac{T}{2}$ de la demi-révolution. Donc $T=\frac{2\sqrt{\mu-c^2}}{c'}=\frac{2k^2}{cp}$ est la formule qui donne le temps de la révolution entière. On en déduit la valeur de $c=\frac{2k^2}{pT}$; mais on a aussi $c=\frac{2A}{T}$, comme on l'a vu ailleurs, A étant toute l'aire décrite en y comprenant les portions qui sont parcourues plusieurs fois. Ainsi $\frac{2k^2}{pT}=\frac{2A}{T}$, d'où A $\frac{k^2}{r}$, ce qui fournit une expression très-simple de A.

XVII. Au lieu d'examiner cinq cas distincts, comme nous venons de le faire, on peut considérer trois genres de courbes, et alors la valeur de θ n'influe plus sur le genre de la courbe, mais seulement sur ses dimensions. La première classe, qui comprend les trois premiers cas, a lieu quand μ, négatif ou positif, est $< v^2_0 r^2_0$, ou pour $\frac{\mu}{r^3_0} < \frac{v^2_0}{r_0}$, c'est-à-dire, quand la valeur initiale de la force centrale est plus petite que la force centrifuge produite par la vitesse v_0 sur un cercle du rayon r_0. La seconde classe a lieu pour $\frac{\mu}{r^3_0} = \frac{v^2_0}{r_0}$, c'est-à-dire, quand les forces sont égales. Enfin si la force centrifuge est la plus petite, c'est-à-dire, si l'on a $\frac{\mu}{r^3_0} > \frac{v^2_0}{r_0}$, on obtient la troisième classe.

Ainsi on a une courbe

Infinie, avec des asymptotes, quand $v^2_0 > \frac{\mu}{r^2_0}$;

Infinie, sans asymptotes, quand $v^2_0 = \frac{\mu}{r^2_0}$;

Finie et limitée, quand $v^2_0 < \frac{\mu}{r^2_0}$.

Mais, comme on l'a vu par la discussion précédente, le premier genre se subdivise en trois espèces, suivant la valeur de θ; et la première est la seule où le centre d'attraction ne soit pas un point asymptotique de la courbe. Nous n'avons confondu ces trois espèces en un seul genre, dans ce résumé, que pour établir un rapprochement entre les résultats des hypothèses, d'ailleurs bien différentes $n=2$, $n=3$.