ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

J. LIOUVILLE

Analyse appliquée. Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 133-181
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__133_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1830-1831, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANALYSE APPLIQUÉE.

Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur ;

Par M. J. Liouville, élève ingénieur des ponts et chaussées.

I. Le mémoire que l'on va lire est extrait des paragraphes 1, 2 et 4 des *Recherches sur la théorie physico-mathématique de la chaleur* que j'ai présentées à l'Institut, en février dernier. Je donne les moyens de tenir compte de la variation du pouvoir rayonnant aux divers points d'une barre échauffée. Je considère comme arbitrairement différentes, d'un point à l'autre d'une substance donnée, sa conductibilité et sa chaleur spécifique. Ces questions jusqu'ici n'avaient été traitées par aucun géomètre ; elles semblent offrir des difficultés presque insurmontables, lorsqu'on suppose aux corps leurs trois dimensions. Si l'on fait abstraction de deux d'entre elles, le problème est complètement résolu par mon travail.

Soit une barre métallique AB, plongée dans un milieu entretenu à la température 0° ; les extrémités de cette barre sont assujéties à des conditions quelconques ; elles ont, par exemple, des températures constantes. On la suppose d'ailleurs assez mince pour que les divers points d'une même section perpendiculaire à l'axe aient toujours, au même instant, la même température. De la nature de cette barre dépend sa conductibilité, que nous regardons comme invariable, le métal étant homogène. Quant au pouvoir rayonnant il dépend du poli des divers points de la barre, et nous supposons qu'il varie proportionnellement à une fonction quelconque de l'abscisse.

Le cas le plus simple est celui où l'on propose de déterminer l'état permanent des températures, auquel le corps ne peut arriver, en rigueur, qu'après un temps infini. Le mouvement de la chaleur est représentée alors par une équation linéaire du second ordre entre la température u et sa fluxion seconde $\frac{d^2u}{dx^2}$, prise par rapport à l'abscisse x. A cause de la fonction arbitraire relative au rayonnement, l'équation dont nous parlons est la plus générale de son espèce. Il s'agit d'en trouver l'intégrale complète.

L'un des moyens que nous employons consiste à substituer à la courbe qui représente le pouvoir rayonnant, en fonction de l'abscisse, un polygone inscrit qui en diffère aussi peu qu'on veut. Le second, à développer la valeur de u en une suite infinie, dont nous montrons généralement la convergence. L'un et l'autre se plient aisément aux calculs numériques, et partant sont susceptibles d'applications. Nous avons employé le premier, dès l'année 1829, dans un mémoire qui ne traitait que du mouvement permanent, et que nous avons reproduit dans nos recherches de 1830.

Dans tous les cas, l'équation du problème étant linéaire et du second ordre, il suffit d'en connaître une intégrale particulière pour en trouver l'intégrale complète; ou, pour traduire physiquement cette propriété mathématique, on traitera généralement la question du mouvement permanent de la chaleur dans une barre, si l'on résout par l'expérience cette même question, en assujétissant les extrémités de cette barre à des conditions particulières.

Les difficultés d'analyse s'accroissent déjà beaucoup lorsque c'est le mouvement linéaire et varié de la chaleur qu'on veut mesurer. La température devenant alors une fonction de l'abscisse x et du temps t, dépend alors d'une équation aux différences partielles à deux variables indépendantes. Heureusement la seconde d'entre elles n'y entre qu'implicitement, ce qui permet d'employer les méthodes ordinaires. On développe la valeur de u en une série d'exponentiels qui contiennent, en exposant, le temps t, multiplié par diverses quantités successives, que je désigne, en général, par $-m$, et que l'on détermine ensuite. Chacune des exponentielles a pour coefficient une fonction de l'abscisse. L'équation qui donne la valeur de chacun de ces coefficiens est linéaire et du second ordre. Elle a la même forme que celle qui a été précédemment traitée; les mêmes méthodes lui sont applicables; et c'est ainsi que le mouvement varié se ramène au cas plus simple du mouvement permanent.

Toutefois il reste à déterminer les valeurs des constantes arbitraires, en nombre infini, introduites par l'intégration de ces équations diverses, et qui dépendent de l'état initial de la barre, comme l'équation qui donne les valeurs de m dépend des conditions relatives à ses extrémités. La forme de cette dernière équation rend cette détermination très-simple. Ici se présentent des calculs analogues à ceux qu'on trouve dans les ouvrages de MM. Fourier et Poisson, et la possibilité de représenter une fonction quelconque, entre des limites données, par une série dont les termes sont les intégrales d'une équation linéaire du second ordre. Déjà l'on avait développé une fonction quelconque en série de sinus et de cosinus, et en suites infinies formées de ces quantités qui se présentent dans les recherches relatives à l'attraction des sphéroïdes; mais je ne sache pas que jusqu'ici on ait fait un semblable usage des fonctions transcendantes que notre analyse nous a fournies.

La quantité générale m, qui entre comme facteur du temps, dépend d'une équation dont toutes les racines sont réelles et positives. Elles ne sont pas négatives, car alors la température croîtrait indéfiniment avec le temps, et il est clair que cela ne peut arriver ici. Si elles étaient imaginaires, les mouvemens libres de la chaleur seraient assujétis à des oscillations, ce qui est impossible sans l'action de causes périodiques extérieures. Cette démonstration directe et générale est de M. Fourier. Toutefois nous avons prouvé, par un moyen particulier, dans la question qui nous occupe, la réalité des racines de l'équation déterminée, afin de mieux établir l'accord des élémens analytiques dont se forme la théorie.

Jusqu'ici nous avons supposé constantes et la conductibilité et la chaleur spécifique de la barre. Cependant si sa matière était hétérogène, ces deux quantités varieraient avec les coordonnées de chaque point. Par un heureux hasard, la méthode qui tient compte de la variation du pouvoir rayonnant s'étend à la résolution du nouveau problème dont nous parlons. Cette extension de notre méthode n'offre aucune difficulté. Elle se trouve détaillée dans les derniers paragraphes de notre mémoire.

II. Dans les divers mémoires qui ont été publiés sur la théorie de la chaleur, les géomètres ont négligé de tenir compte de la variation du pouvoir rayonnant d'un point à l'autre de la surface du corps en expérience. L'examen des effets produits par cette variation sera le sujet de nos premières recherches. Considérant d'abord le cas simple d'une barre métallique parvenue à un état permanent, et assez mince pour que les divers points d'une même section transversale puissent être regardés comme ayant, à chaque instant, une température commune, j'essaye ensuite de traiter, par la même méthode et dans le même but, des questions plus élevées.

Soit AB une barre métallique, homogène, mais inégalement polie, dont les extrémités A, B sont constamment entretenues aux températures θ, θ' ; en un point m quelconque de cette barre, dont la distance à l'origine A est représentée par x, la température est assujétie à l'équation

$$K\omega \frac{d^2u}{dx^2} = \gamma\varepsilon u \; ;$$

lorsque l'on considère la barre arrivée à un état permanent, dans un milieu dont la température est prise pour le zéro de l'échelle thermométrique. Je tire cette équation du premier mémoire de M. Poisson, sur la théorie de la chaleur: ω est l'aire, ε le contour d'une section perpendiculaire à l'axe. Le coefficient K mesure la conductibilité de la barre. Nous supposons qu'en tous ses points il a la même valeur, ainsi que ω et ε. Le coefficient γ mesure le pouvoir rayonnant de la surface extérieure: il varie d'un point à l'autre, à cause de l'inégalité du poli des différens points de cette surface. Nous le représentons par la fonction déterminée $\mathrm{f}(x)$; et de la sorte l'équation ci-dessus devient

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\varepsilon \mathrm{f}(x)}{K\omega} u;$$

Pour résoudre le problème que nous nous proposons, il faut intégrer cette équation et déterminer les deux constantes de son intégrale par cette double condition qu'à $x=0$ réponde $u=\theta$, et qu'à $x=\mathrm{AB}=l$ réponde $u=\theta'$,

III. Nous observerons d'abord que l'équation (1) étant linéaire et du second ordre, est intégrable, chaque fois qu'une intégrale particulière en est connue. Cette remarque, faite depuis long-temps, répond à une propriété du mouvement linéaire permanent de la chaleur. Supposons, en effet, la barre AB placée dans un milieu entretenu à 0°, et ses extrémités ayant des températures constantes quelconques. Déterminons, par l'expérience, la loi des températures permanentes. Qu'elle soit, si l'on veut, représentée par l'équation $u=\mathrm{F}(x)$. De cette loi, et sans connaître le pouvoir rayonnant dont dépend $\mathrm{f}(x)$, on tire la valeur de la quantité u, dans un cas quelconque. En effet, par la manière même dont on l'obtient, la fonction $\mathrm{F}(x)$ satisfait à la condition

$$\frac{\mathrm{d}^2.\mathrm{F}(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\varepsilon \mathrm{f}(x)}{K\omega}.\mathrm{F}(x);$$

Soit v une nouvelle variable. Posons $u = vF(x)$; il en résultera

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2v}{dx^2}F(x) + 2\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dF(x)}{dx} + v\frac{d^2F(x)}{dx^2} .$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle deviendra

$$\frac{d^2v}{dx^2}F(x) + 2\frac{dv}{dx}\frac{dF(x)}{dx} + v\frac{d^2F(x)}{dx^2} = v.\frac{f(x)}{K\omega}.F(x) ;$$

et se réduira à

$$\frac{d^2v}{dx^2}F(x) + 2\frac{dv}{dx}\frac{dF(x)}{dx} = 0 ;$$

On a donc, sur-le-champ,

$$v = C\int\frac{dx}{F^2(x)} + C' ;$$

où C et C' sont les constantes arbitraires. Multipliant par $F(x)$ la valeur de v, on obtient la valeur de u ; savoir :

$$u = F(x)\left\{C\int\frac{dx}{F^2(x)} + C'\right\} .$$

Ainsi donc, comme nous l'avons dit, *le problème général du mouvement linéaire et permanent de la chaleur se traite sans difficulté, quand on sait le resoudre pour un état particulier des extremités de la barre.*

IV. Mais, si l'on ne connaît pas $F(x)$, et que le pouvoir rayonnant $f(x)$, au contraire, soit déterminé par un moyen quelconque, il faudra recourir à des calculs d'une autre nature. Une considération qui se présente d'abord nous dirigera dans la marche que nous devons prendre. Nous admettrons que la fonction

$f(x)$ a été obtenue par interpolation, en mesurant, par exemple, sa valeur au point A, au point B et aux $n-1$ points intermédiaires également espacés entre eux de la quantité $\frac{l}{n}$. Soient b', b'' les valeurs de $f(x)$ à deux de ces points consécutifs, dont les abscisses sont x', x''; faute de données plus positives, on pourra supposer que

$$f(x)=\frac{b'x''-b''x'}{x''-x'}+\frac{b''-b'}{x''-x'}x \ .$$

La barre se trouvera ainsi partagée en portions d'égale longueur, pour lesquelles la valeur de $f(x)$ et l'équation (1) seront différentes, ce qui nécessitera de nouvelles conditions pour la détermination des nouvelles constantes arbitraires qu'introduira l'intégration de ces équations diverses. Ces conditions consistent évidemment en ce qu'aux divers points de partage de la barre, les valeurs de u et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ doivent être les mêmes, soit qu'on les déduise de l'équation qui se rapporte à la partie antérieure au point de division dont il s'agit, ou qu'on les déduise de l'équation qui se rapporte à la portion située au-delà.

Je distinguerai par les numéros 1, 2, 3, ... μ, ... n les n parties égales dans lesquelles la barre a été divisée. Je nommerai u_μ la température de la partie μ, et $p_\mu+q_\mu x$ la valeur correspondante de $\frac{\varepsilon f(x)}{K\omega}$. De la sorte j'aurai ces n équations indéfinies

$$\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}x^2}=(p_1+q_1x)u_1 \ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}x^2}=(p_2+q_2x)u_2 \ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

$$\frac{d^2u_\mu}{dx^2}=(p_\mu+q_\mu x)u_\mu\ ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

$$\frac{d^2u_n}{dx^2}=(p_n+q_n x)u_n\ ;$$

l'intégration de ces équations introduira $2n$ constantes que l'on déterminera par ces $2n$ conditions :

$$u_1=\theta\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ \text{pour}\ x=0\ ,$$

$$u_1=u_2\ ,\quad \frac{du_1}{dx}=\frac{du_2}{dx}\ ,\ \text{pour}\ x=\frac{l}{n}\ ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

$$u_{n-1}=u_n\ ,\quad \frac{du_{n-1}}{dx}=\frac{du_n}{dx}\ ,\ \text{pour}\ x=(n-1)\frac{l}{n}\ ;$$

$$u_n=\theta'\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ \text{pour}\ x=l\ .$$

V. Toute la question ainsi ramenée à trouver l'intégrale complète de l'équation générale

$$(2)\qquad \frac{d^2u_\mu}{dx^2}=(p_\mu+q_\mu x)u_\mu\ ;$$

se trouve réduite à un problème purement analytique, dont on parvient, sans beaucoup de peine, à obtenir la solution. Et d'abord, en posant

$$p_\mu+q_\mu x=zq_\mu^{\frac{2}{3}}\ ,$$

l'équation (2) se change en

$$(3) \qquad \frac{d^2 u_\mu}{dz^2} = z . u_\mu \; .$$

Sous cette forme, on reconnaît 1.° que l'équation (3) rentre dans un des cas de l'équation de Riccati qui, jusqu'à présent, ont échappé à toutes les méthodes, et qui vraisemblablement ne seront jamais résolus; 2.° qu'il faut renoncer, par conséquent, à exprimer la valeur de u_μ autrement que par des séries convergentes ou par le secours de quadratures définies.

VI. L'équation (3) étant linéaire et du second ordre, il nous suffira d'en chercher deux intégrales particulières pour arriver à son intégrale complète. L'une et l'autre se déduiront du développement de u_μ en série, suivant les puissances croissantes de z. Considérons la suite infinie

$$1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \frac{z^9}{2.3.5.6.8.9} + \ldots\ldots ,$$

dont la loi régulière est facile à saisir. La différentielle seconde de cette quantité est

$$z\left(1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \frac{z^9}{2.3.5.6.8.9} + \ldots\ldots\right) ;$$

de sorte qu'en posant

$$u_\mu = 1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \frac{z^9}{2.3.5.6.8.9} + \ldots\ldots ;$$

on satisfera à l'équation (3).

Toutefois la conclusion pourrait être inexacte, si la série dont il est question cessait d'être convergente. Nous allons faire voir que cela n'a jamais lieu quelque grand nombre que l'on substitue à la place de z. Soient P, P' deux coefficiens consécutifs qui répondent dans la série aux puissances $n-2$ et $n+1$ de x. Le rapport de ces deux termes sera $\frac{P'}{P}=\frac{z^3}{n(n+1)}$. Quelque grand nombre qu'on prenne pour z, en assignant à n une valeur assez considérable, il sera toujours possible de rendre P plus grand que P' ; et, au-delà de cette valeur de n, le rapport $\frac{P'}{P}$ ira sans cesse en décroissant avec rapidité jusqu'à devenir nul. On arrivera donc, en considérant la série que nous prenons pour valeur de u_μ à un terme P, tel que, si l'on forme la progression géométrique $P(1+\rho+\rho^2+\ldots\ldots)$, où la raison est moindre que l'unité, et dont la somme est finie, le reste de la série sera moindre que cette somme $\frac{P}{1-\rho}$.

La valeur de u_μ se trouve donc ainsi exprimée par une série convergente, dans tous les cas possibles, servira à en calculer la valeur avec tel degré d'approximation que l'on voudra. Cette série a en outre l'avantage de s'exprimer élégamment, sous forme finie, par le secours d'une intégrale définie.

VII. Pour démontrer avec facilité cette proposition, j'écris la valeur de u_μ sous la forme

$$1+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{4z^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{4.7z^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}+\ldots\ldots;$$

ou bien

$$1+\frac{1.z^3}{1.2.3}+\frac{1(1+3)z^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{1(1+3)(1+3.2)z^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}+\ldots\ldots;$$

de sorte qu'en général on peut représenter ainsi deux termes consécutifs.

$$\frac{1[1+3][1+3.2][1+3.3]\ldots\ldots\ldots.[1+3(n-1)]}{1.2.3.4\ldots\ldots.3n}z^{3n},$$

$$\frac{1[1+3][1+3.2][1+3.3]\ldots\ldots[1+3(n-1)][1+3n]}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ \ 4\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3n.(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\, z^{3n+3}.$$

Les numérateurs des fractions qui multiplient z^{3n}, z^{3n+3} étant représentés par P_n, P_{n+1}, sont assujétis à l'équation $P_{n+1}=P_n(1+3n)$. La méthode indiquée par Laplace, dans sa *Théorie analytique des probabilités*, pour intégrer les équations aux différences finies étant ici applicable, on en déduit

$$P_n=C\int_0^\infty \alpha^{-\frac{1}{3}}.e^{-\frac{\alpha}{3}}.\alpha^{n-1}.d\alpha\ ;$$

C designant la constante arbitraire et e la base des logarithmes de Néper. Ainsi, la valeur de u_μ peut être transformée en une série telle que la suivante :

$$C\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}}.\alpha^{-\frac{2}{3}}.d\alpha\left(1+\frac{\alpha z^3}{1.2.3}+\frac{\alpha^2 z^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{\alpha^3 z^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}+\ldots\right).$$

La série comprise entre les parenthèses a pour différentielle troisième, par rapport à z,

$$\alpha\left(1+\frac{\alpha z^3}{1.2.3}+\frac{\alpha^2 z^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{\alpha^3 z^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}+\ldots\ldots\right);$$

de sorte qu'en la représentant par λ, elle satisfait à l'équation $\frac{d^3\lambda}{dz^3}=\alpha\lambda$, d'où résulte

$$\lambda=C_1 e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+C_2 e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+C_3 e^{\rho^2 z\sqrt[3]{\alpha}}\ ;$$

C_1, C_2, C_3 désignant des constantes, et 1, ρ, ρ^2 étant les trois racines cubiques de l'unité ; et comme il est évident que, pour $z=0$, on doit avoir $\lambda=1$, $\frac{d\lambda}{dz}=0$, $\frac{d^2\lambda}{dz^2}=0$, on trouvera sans peine, en se rappelant que $1+\rho+\rho^2=0$,

$$\lambda=\tfrac{1}{3}\left(e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+e^{\rho^2 z\sqrt[3]{\alpha}}\right).$$

Par conséquent,

$$u_\mu=\frac{C}{3}\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}}.x^{-\frac{1}{3}}\left(e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+e^{\rho^2 z\sqrt[3]{\alpha}}\right)dx\,;$$

VIII. En différentiant deux fois de suite, par rapport à z, la série suivante

$$z+\frac{z^4}{3.4}+\frac{z^7}{3.4.6.7}+\frac{z^{10}}{3.4.6.7.9.10}+\ldots.;$$

on obtient ce résultat

$$z\left(z+\frac{z^4}{3.4}+\frac{z^7}{3.4.6.7}+\frac{z^{10}}{3.4.6.7.9.10}+\ldots\ldots\right):$$

En posant donc

$$u_\mu=z+\frac{z^4}{3.4}+\frac{z^7}{3.4.6.7}+\frac{z^{10}}{3.4.6.7.9.10}+\ldots\ldots;$$

on satisfera de nouveau à l'équation (3), dont nous avons ainsi une nouvelle intégrale particulière. Les raisonnemens de l'art. VI, étant applicables à cette intégrale, montrent en premier lieu, que la série qui en exprime le développement est toujours convergente et peut servir à en calculer la valeur avec tel degré d'approximation que l'on désirera. Une marche analogue à celle de l'art. VII donne ensuite les moyens de l'écrire sous forme finie, par le secours des quadratures définies.

Pour cela, il suffit de mettre la valeur de u_μ sous la forme

$$z+\frac{2z^4}{1.2.3.4}+\frac{2(2+3)z^{4+3}}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{2(2+3)(2+3.2)z^{4+3.2}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}+\ldots\ldots;$$

de sorte qu'en général on puisse représenter ainsi deux termes consécutifs

$$\frac{2[2+3][2+3.2][2+3.3]\ldots\ldots[2+3(n-1)]}{1.2.3.4\ldots\ldots[4+3(n-1)]}z^{4+3(n-1)},$$

$$\frac{2[2+3][2+3.2][2+3.3]\ldots\ldots[2+3(n-1)][2+3n]}{1.2.3.4\ldots[4+3(n-1)][4+3n-2][4+3n-1][4+3n]}z^{4+3n}.$$

Les numérateurs des fractions qui multiplient $z^{4+3(n-1)}$ et z^{4+3n} étant dénommés P_{n-1}, P_n sont assujétis à la condition

$$P_n=(2+3n)P_{n-1},$$

de laquelle on déduit, par la méthode de Laplace,

$$P_n=C\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}}.\alpha^{\frac{2}{3}}.\alpha^n.d\alpha.$$

Il nous vient donc

$$u_\mu=C\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}}.\alpha^{-\frac{1}{3}}.\left(z+\frac{\alpha z^4}{1.2.3.4}+\frac{\alpha^2 z^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots\ldots\right)d\alpha.$$

Mais, si l'on pose

$$\lambda=z+\frac{\alpha z^4}{1.2.3.4}+\frac{\alpha^2 z^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots\ldots;$$

on trouvera

$$\frac{d^3\lambda}{dz^3}=\alpha\lambda;$$

d'où on déduira, par l'intégration,

$$\lambda=C_1e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+C_2e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+C_3e^{\rho^2 z\sqrt[3]{\alpha}};$$

C_1, C_2, C_3 désignant des constantes, et 1, ρ, ρ^2 les trois racines cubiques de l'unité. Les constantes se déterminent en observant que, pour $z=0$, on a $\lambda=0$, $\frac{d\lambda}{dz}=1$, $\frac{d^2\lambda}{dz^2}=0$; on trouve ainsi

$$C_1=\tfrac{1}{3}\alpha^{-\frac{1}{3}}, \quad C_2=\frac{\rho^2}{3}\alpha^{-\frac{1}{3}}, \quad C_3=\frac{\rho}{3}.\alpha^{-\frac{1}{3}};$$

d'où résulte

$$\lambda=\frac{\alpha^{-\frac{1}{3}}}{3}\left(e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+\rho^2 e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+\rho e^{\rho^2 z\sqrt[3]{\alpha}}\right);$$

et, par conséquent,

$$u_\mu=\frac{C}{3}\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}}.\alpha^{-\frac{2}{3}}\left(e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+\rho^2 e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+\rho e^{\rho^2 z\sqrt[3]{\alpha}}\right):$$

IX. Ayant ainsi découvert aux art. VII et VIII deux intégrales particulières de l'équation (3), l'intégrale complète de cette équation va s'obtenir en faisant la somme des produits de ces deux intégrales par des constantes arbitraires. On pourra donc prendre pour valeur complète de u_μ celle que donne l'égalité

$$u_\mu=A_\mu\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}}\alpha.^{-\frac{2}{3}}\left(e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+e^{\rho^2 z\sqrt[3]{\alpha}}\right)d\alpha$$

$$+B_\mu\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}}.\alpha^{-\frac{2}{3}}\left(e^{z\sqrt[3]{\alpha}}+\rho^2 e^{\rho z\sqrt[3]{\alpha}}+\rho e^{\rho^2 z\sqrt[3]{\alpha}}\right)d\alpha;$$

ou bien encore celle-ci

$$u_\mu = A_\mu \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}} . \alpha^{-\frac{2}{3}} \left(e^{z\sqrt[3]{\alpha}} + 2e^{-\frac{z\sqrt[3]{\alpha}}{2}} .\text{Cos.}\, \frac{z\sqrt{3}\sqrt[3]{\alpha}}{2} \right) d\alpha$$

$$+ B_\mu \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}} . \alpha^{-\frac{2}{3}} \left[e^{z\sqrt[3]{\alpha}} - e^{-\frac{z\sqrt[3]{\alpha}}{2}} . \left(\text{Cos.}\, \frac{z\sqrt{3}\sqrt[3]{\alpha}}{2} - \sqrt{3}.\text{Sin.}\, \frac{z\sqrt{3}\sqrt[3]{\alpha}}{2} \right) \right],$$

qui est l'équivalent de la première, de laquelle elle se déduit en remplaçant ρ et ρ^2 respectivement par $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, puis substituant aux exponentiels imaginaires les fonctions circulaires équivalentes.

X. Reprenons présentement l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^2 u_\mu}{dx^2} = (p_\mu + q_\mu x) u_\mu ;$$

et rappelons-nous qu'en posant $p_\mu + q_\mu x = z q^{\frac{2}{3}}_\mu$, nous l'avons transformée en

$$(3) \qquad \frac{d^2 u_\mu}{dx^2} = z . u_\mu ;$$

L'intégrale de l'équation (2) est, par conséquent;

$$u_\mu = A_\mu \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}} . \alpha^{-\frac{2}{3}} \left[e^{\frac{p_\mu + q_\mu x}{q^{\frac{2}{3}}_\mu} \sqrt[3]{\alpha}} + 2e^{-\frac{p_\mu + q_\mu x}{2q^{\frac{2}{3}}_\mu} \sqrt[3]{\alpha}} .\text{Cos.}\, \frac{p_\mu + q_\mu x}{2q^{\frac{2}{3}}_\mu} \sqrt{3}\sqrt[3]{\alpha} \right] d\alpha$$

$$+ B_\mu \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{3}} . \alpha^{-\frac{2}{3}} \left[e^{\frac{p_\mu + q_\mu x}{q^{\frac{2}{3}}_\mu} \sqrt[3]{\alpha}} - e^{-\frac{p_\mu + q_\mu x}{2q^{\frac{2}{3}}_\mu} \sqrt[3]{3}} \left(\text{Cos.}\, \frac{p_\mu + q_\mu x}{2q^{\frac{2}{3}}_\mu} \sqrt{3}\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt{3}\text{Sin.}\, \frac{p_\mu + q_\mu x}{2q^{\frac{2}{3}}_\mu} \sqrt{3}\sqrt[3]{\alpha} \right) \right] d\alpha ;$$

Cette intégrale résout la question proposée, ou du moins, en vertu de l'art. IV, elle réduit le problème à la résolution de $2n$ équations du premier degré, qui doivent déterminer les constantes arbitraires.

La résolution de ces équations est de la plus grande simplicité. On part des deux secondes

$$u_1 = u_2 \,, \quad \frac{du_1}{dx} = \frac{du_2}{dx} \,, \quad \text{pour} \quad x = \frac{l}{n} \,.$$

Elles contiennent quatre constantes A_1, B_1, A_2, B_2, et servent également à déterminer les deux dernières au moyen des deux premières. Les deux suivantes

$$u_2 = u_3 \,, \quad \frac{du_2}{dx} = \frac{du_3}{dx} \,, \quad \text{pour} \quad x = 2\frac{l}{n} \,,$$

donnent A_3, B_3 en A_2, B_2, d'où ensuite en A_1, B_1, et ainsi des autres jusqu'aux deux avant-dernières

$$u_{n-1} = u_n \,, \quad \frac{du_{n-1}}{dx} = \frac{du_n}{dx} \,, \quad \text{pour} \quad x = (n-1)\frac{l}{n} \,.$$

Celles-ci fournissant A_n, B_n, on substitue les dernières valeurs dans l'égalité $u_n = \theta'$, pour $x = l$, qui dès lors ne contient plus que A_1, B_1, et qui, jointe à la première $u_1 = \theta$, pour $x = 0$, fait connaître ces deux constantes dont toutes les autres dépendent.

La question se réduit à trouver $A_{\mu+1}$, $B_{\mu+1}$, en fonction de A_μ, B_μ par le secours des équations

$$u_\mu = u_{\mu+1} \,; \quad \frac{du_\mu}{dx} = \frac{du_{\mu+1}}{dx} \,, \quad \text{pour} \quad x = \mu\frac{l}{n} \,;$$

En désignant par U_μ et V_μ les deux valeurs particulières de u_μ obtenues aux art. VII et VIII, on a, comme à l'art. X,

$$u_\mu = A_\mu U_\mu + B_\mu V_\mu ,$$

et

$$\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}x} = A_\mu \frac{\mathrm{d}U_\mu}{\mathrm{d}x} + B_\mu \frac{\mathrm{d}V_\mu}{\mathrm{d}x} ;$$

$$u_{\mu+1} = A_{\mu+1} U_{\mu+1} + B_{\mu+1} V_{\mu+1} ;$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{\mu+1}}{\mathrm{d}x} = A_{\mu+1} \frac{\mathrm{d}U_{\mu+1}}{\mathrm{d}x} + B_{\mu+1} \frac{\mathrm{d}V_{\mu+1}}{\mathrm{d}x} .$$

Soit fait $x=\mu \frac{l}{n}$, et nommons

$$(U_\mu),\ (V_\mu),\ \left(\frac{\mathrm{d}U_\mu}{\mathrm{d}x}\right),\ \left(\frac{\mathrm{d}V_\mu}{\mathrm{d}x}\right),\ (U_{\mu+1}),\ (V_{\mu+1}),\ \left(\frac{\mathrm{d}U_{\mu+1}}{\mathrm{d}x}\right),\ \left(\frac{\mathrm{d}V_{\mu+1}}{\mathrm{d}x}\right),$$

les valeurs correspondantes des quantités comprises entre les parenthèses. Les équations de condition seront

$$A_\mu (U_\mu) + B_\mu (V_\mu) = A_{\mu+1} (U_{\mu+1}) + B_{\mu+1} (V_{\mu+1}) ,$$

$$A_\mu \left(\frac{\mathrm{d}U_\mu}{\mathrm{d}x}\right) + B_\mu \left(\frac{\mathrm{d}V_\mu}{\mathrm{d}x}\right) = A_{\mu+1} \left(\frac{\mathrm{d}U_{\mu+1}}{\mathrm{d}x}\right) + B_{\mu+1} \left(\frac{\mathrm{d}V_{\mu+1}}{\mathrm{d}x}\right) .$$

On tire de là les valeurs de $A_{\mu+1}$, $B_{\mu+1}$; en A_μ, B_μ. Le dénominateur commun de ces valeurs est

$$(U_{\mu+1}) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}V_{\mu+1}}{\mathrm{d}x}\right) - (V_{\mu+1}) \left(\frac{\mathrm{d}U_{\mu+1}}{\mathrm{d}x}\right) .$$

Or, il est remarquable que ce dénominateur est constamment égal à $q^{\frac{1}{2}}{}_{\mu+1}$. Cela résulte des équations

$$\frac{d^2U_{\mu+1}}{dx^2}=(p_{\mu+1}+q_{\mu+1}x)U_{\mu+1};$$

$$\frac{d^2V_{\mu+1}}{dx^2}=(p_{\mu+1}+q_{\mu+1}x)V_{\mu+1};$$

qui ont lieu par la nature même des quantités $U_{\mu+1}$; $V_{\mu+1}$; et dont on déduit

$$U_{\mu+1}\frac{d^2V_{\mu+1}}{dx^2}-V_{\mu+1}\frac{d^2U_{\mu+1}}{dx^2}=0;$$

Intégrant on a

$$U_{\mu+1}\frac{dV_{\mu+1}}{dx}-V_{\mu+1}\frac{dU_{\mu+1}}{dx}=\text{Const.};$$

Pour déterminer la constante du second membre, on remonte aux valeurs

$$U_{\mu+1}=1+\frac{(p_{\mu+1}+q_{\mu+1}.x)^3}{2.3q^2_{\mu+1}}+\ldots\ldots;$$

$$V_{\mu+1}=\frac{p_{\mu+1}+q_{\mu+1}.x}{q^{\frac{1}{3}}_{\mu+1}}+\ldots\ldots;$$

et l'on voit, sans peine, que l'égalité devant subsister pour toutes les valeurs possibles de

$$\frac{p_{\mu+1}+q_{\mu+1}.x}{q^{\frac{1}{3}}_{\mu+1}},$$

la valeur de la constante est $q^{\frac{1}{3}}_{\mu+1}$. Donc,

$$(U_{\mu+1})\left(\frac{\mathrm{d}V_{\mu+1}}{\mathrm{d}x}\right)-(V_{\mu+1})\left(\frac{\mathrm{d}U_{\mu+1}}{\mathrm{d}x}\right)=q^{\frac{1}{3}}_{\mu+1};$$

ce qu'il fallait prouver.

XI. La même analyse s'étendrait au cas où les extrémités de la barre, au lieu d'être entretenues à des températures constantes, rayonneraient librement dans l'espace. Elle réduirait, comme tout à l'heure, les difficultés du problème à celle de résoudre $2n$ équations du premier degré. Elle s'étendrait également à la détermination du mouvement de la chaleur dans une armille; problème qui, dans le fond, ne diffère pas de celui que nous venons de résoudre. La réduction des formules en nombres sera facile, dans tous les cas, ce qui est le caractère essentiel d'une méthode pratique. Soit, pour en donner un exemple, $AB=l=2$ mètres; la valeur de $\frac{\varepsilon f(x)}{K\omega}$, aux extrémités de la barre, représentée par 1, et à son milieu par 0. Enfin que les points A, B soient entretenus à des températures constantes de 10°.

De $x=0$ à $x=1$, on a $p_\mu=1$, $q_\mu=-1$, et, par suite,

$$\frac{p_\mu+q_\mu x}{q^{\frac{2}{3}}_\mu}=z=1-x.$$

De $x=1$ à $x=2$, on a, au contraire, $\frac{p_\mu+q_\mu x}{q^{\frac{2}{3}}_\mu}=z=x-1$.

Substituant ces valeurs dans nos formules, pour en déduire les températures u et les flux de chaleur aux divers points de la barre, on formera le tableau suivant:

$$x=0^{m},00\ ,\quad u=10^{\circ},00\ ,\quad \frac{du}{dx}=-0,53\ ;$$

$$x=0,25\ ,\quad u=9,13\ ,\quad \frac{du}{dx}=-0,24\ ;$$

$$x=0,50\ ,\quad u=8,71\ ,\quad \frac{du}{dx}=-0,12\ ;$$

$$x=0,75\ ,\quad u=8,56\ ,\quad \frac{du}{dx}=-0,03\ ;$$

$$x=1,00\ ,\quad u=8,53\ ,\quad \frac{du}{dx}=\mp 0,00\ ;$$

$$x=1,25\ ,\quad u=8,56\ ,\quad \frac{du}{dx}=+0,03\ ;$$

$$x=1,50\ ,\quad u=8,71\ ,\quad \frac{du}{dx}=+0,12\ ;$$

$$x=1,75\ ,\quad u=9,13\ ,\quad \frac{du}{dx}=+0,24\ ;$$

$$x=2,00\ ,\quad u=10,00\ ,\quad \frac{du}{dx}=+0,53\ .$$

La formule générale est

$$u=\frac{10.u_x}{1,172}\ ;$$

dans laquelle

$$u_x = 1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \ldots\ldots ;$$

z étant égal à $1-x$ de $x=0$ à $x=1$, et à $x-1$ de $x=1$ à $x=2$.

XII. Il n'entre pas dans notre plan de nous étendre davantage sur ces détails qui ne présentent aucune difficulté ; mais nous croyons devoir placer ici l'exposé rapide de quelques réflexions analytiques propres à éclaircir ce qui précède. Les développemens dans lesquels on vient d'entrer donnent, en résumé, une méthode générale pour intégrer, par approximation, l'équation linéaire du second ordre. L'approximation est poussée aussi loin qu'on veut. En augmentant à volonté le nombre des équations du premier degré, auxquelles se ramène la détermination des constantes, on s'approche indéfiniment de la valeur exacte cherchée. Une telle méthode paraît suffisante, dans l'état actuel de l'analyse, vu la difficulté de résoudre exactement la question.

Si l'on veut toutefois, on peut la traiter d'une manière plus directe. En considérant l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\varepsilon . f(x)}{K\omega} u ,$$

on obtient, sans difficulté, une suite infinie qui y satisfait, et dont la convergence peut être prouvée dans le cas du problème qui nous occupe. Je compose la valeur de u d'une suite de termes u_0, u_1, u_2, ... qui seront déterminés plus tard.

Ainsi je fais

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots$$

Les quantités u_0, u_1, u_2, ... devront être telles qu'on ait

$$\frac{d^2u_0}{dx^2}+\frac{d^2u_1}{dx^2}+\frac{d^2u_2}{dx^2}+\ldots\ldots=\frac{\varepsilon\,f(x)}{K\omega}\,(u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots)\ ;$$

or, cette équation est satisfaite si l'on pose, ce qui est permis,

$$\frac{d^2u_0}{dx^2}=0\ ,\quad \frac{d^2u_1}{dx^2}=\frac{\varepsilon f(x)}{K\omega}u_0\ ,\quad \frac{d^2u_2}{dx^2}=\frac{\varepsilon f(x)}{K\omega}u_1\ ,\ \ldots\ldots\ ;$$

d'où on tire, en nommant A, B, deux constantes arbitraires

$$u_0=A+Bx\ ;$$

$$u_1=\int_0^x dx\int_0^x (A+Bx)\,\frac{\varepsilon}{K\omega}\,f(x)dx\ ;$$

$$u_2=\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx\int_0^x dx\int_0^x (A+Bx)\,\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\,f(x)dx\ ;$$

. . . . ;

La somme de ces quantités sera la valeur de u et l'intégrale l'équation proposée si toutefois la suite infinie, fournie par cette somme, est une suite convergente ; circonstance dont il est facile de s'assurer, comme on va le voir. On considère séparément les deux séries

$$A\left\{1+\frac{\varepsilon}{K\omega}\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx+\ldots\right\};$$

$$B\left\{x+\frac{\varepsilon}{K\omega}\int_0^x dx\int_0^x xf(x)dx+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx\int_0^x dx\int_0^x xf(x)dx+\ldots\right\};$$

qui répondent aux deux constantes arbitraires. La fonction $\mathrm{f}(x)$ représente (entre les limites $x=0$, $x=l$) le pouvoir rayonnant de la surface de la barre. C'est une quantité essentiellement positive, qui, pour une ou plusieurs valeurs de x, peut être nulle, mais jamais infinie. Sa plus grande valeur correspond à un point quelconque de la barre; c'est une quantité finie positive M qui, substituée à la place de $\mathrm{f}(x)$, dans chacun des termes des deux séries précédentes, donnera nécessairement des valeurs plus grandes que celles de ces mêmes termes.

Or, en faisant $\mathrm{f}(x)=M$, les deux suites en question deviennent

$$A\left\{1+\frac{\varepsilon}{K\omega}\cdot\frac{Mx^2}{1.2}+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\cdot\frac{M^2x^4}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\right\};$$

$$B\left\{x+\frac{\varepsilon}{K\omega}\cdot\frac{Mx^3}{1.2.3}+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\cdot\frac{M^2x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\ldots\right\}.$$

Ces deux suites sont évidemment convergentes. En s'arrêtant à des termes de plus en plus éloignés, les restes nécessaires pour en compléter la valeur décroissent rapidement. Donc, *à fortiori*, cela a lieu pour les deux suites qui composent la valeur de v. On trouverait même aisément le moyen de calculer le degré d'approximation qu'on obtiendrait, en s'arrêtant à un terme désigné.

Au reste, il n'est pas nécessaire que $\mathrm{f}(x)$ soit toujours une quantité positive de $x=0$ à $x=l$; $\mathrm{f}(x)$ peut avoir des valeurs tantôt positives et tantôt négatives; il suffit que jamais ces valeurs ne soient infinies. Alors, dans l'analyse qui précède, on appelle M la plus grande d'entre elles, abstraction faite du signe. Le raisonnement portera uniquement sur les nombres et sera également rigoureux. Ainsi donc, toutes les fois qu'entre des limites fixes, la fonction connue $\mathrm{f}(x)$ ne passera point par l'infini, quelle qu'en soit d'ailleurs la nature, l'intégrale de l'équation $\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{\varepsilon\mathrm{f}(x)}{K\omega}$.

u sera exprimable en série, comme nous venons de le voir. Nous insistons sur ce point sur lequel il nous sera utile de nous appuyer, lorsqu'il s'agira du mouvement varié.

XIII. Reprenons la valeur de u composée des deux séries

$$A\left\{1+\frac{\varepsilon}{K\omega}\int_0^x \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\int_0^x \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x+\ldots\ldots\right\},$$

$$B\left\{x+\frac{\varepsilon}{K\omega}\int_0^x \mathrm{d}x\int_0^x x\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\int_0^x \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}x\int_0^x x\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x+\ldots\ldots\right\}.$$

Elle convergera d'autant plus rapidemment vers sa limite, que le rayon de la barre sera plus grand ainsi que sa conductibilité. Elle représentera exactement toutes les circonstances du mouvement linéaire permanent de la chaleur. Supposons, par exemple, que la température soit nulle à l'extrémité de la barre ou pour $x=0$, et l'unité pour $x=l$; la constante A sera nulle et la constante B aura pour valeur

$$B=\frac{1}{l+\frac{\varepsilon}{K\omega}\int_0^l \mathrm{d}x\int_0^x x\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\int_0^l \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}x\mathrm{f}(x)\int_0^x \mathrm{d}x\int^x x\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x+\ldots\ldots};$$

d'où résulte

$$u=\frac{x+\frac{\varepsilon}{K\omega}\int_0^x \mathrm{d}x\int_0^x x\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\int_0^x \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}x\int^x x\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x+\ldots\ldots}{l+\frac{\varepsilon}{K\omega}\int_0^l \mathrm{d}x\int^x x\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon^2}{K^2\omega^2}\int_0^l \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}x\int^x x\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x+\ldots\ldots}.$$

Admettons que, du point A au point B, la fonction $\mathrm{f}(x)$ soit toujours croissante ; on voit que la température partira de 0°, pour arriver à la valeur 1°, au-dessous de laquelle elle restera toujours dans l'intervalle de $x=0$ à $x=l$. Cette valeur croîtra, dans les premiers instans, proportionnellement à l'abscisse, c'est-à-dire, comme les ordonnées d'une droite ; ensuite comme les ordonnées d'une courbe parabolique d'un ordre indéfini. Les accroissemens de température, d'abord très-petite, seront d'autant plus sensibles, qu'on s'approchera davantage de la limite B. On pourrait aisément en calculer les expressions numériques, comme nous l'avons fait voir sur un autre exemple. Les résultats compris de l'art. II à l'art. XI sont de notre mémoire de 1829 ; ceux des art. XII et XIII n'ont été présentés à l'Institut qu'en 1830 ; il en est de même des suivans.

XIV. Nous nous occuperons présentement du mouvement varié de la chaleur, dans une barre homogène inégalement polie.

Nous avons une barre AB, dont les extrémités A et B sont constamment aux températures θ et θ'. Cette barre est placée dans un milieu entretenu à 0°. On désigne par c la chaleur spécifique, par k la conductibilité, l'une et l'autre regardées comme invariables ; ω est l'aire et ε le contour de la section, supposée partout la même. Le coefficient γ représente le pouvoir rayonnant, dont la valeur est une fonction quelconque de l'abscisse, à cause de l'inégalité du poli des différens points du métal.

En un point quelconque m, dont la distance à l'origine O est représentée par x, la température u est représentée par l'équation

$$c\omega\frac{du}{dt}=K\omega\frac{d^2u}{dx^2}-\gamma\varepsilon u\ ,$$

que je prends dans le premier mémoire de M. Poisson, sur la chaleur. Divisant les deux membres par $c\omega$, on a

$$\frac{du}{dt}=\frac{K}{c}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{\gamma\varepsilon}{c\omega}u\ .$$

Le coefficient $\frac{k}{c}$ dépend tout à la fois de la chaleur spécifique de la barre et de sa conductibilité. C'est un nombre donné a^2. La quantité $\frac{\gamma s}{c\omega}$ est au contraire variable avec l'abscisse x, et c'est par la fonction $f(x)$ que nous la supposerons représentée. L'équation du problème devient ainsi

$$\text{(a)} \qquad \frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2} - uf(x) \; .$$

Cette équation étant intégrée, les arbitraires que contiendra son intégrale se détermineront par ces conditions : 1.° que les températures soient constamment θ, θ' aux extrémités de la barre. Soient $OA = l$, $OB = l'$, et l'on aura ces deux équations définies : $u = \theta$ pour $x = l$, et $u = \theta'$ pour $x = l'$; 2.° que, pour $t = 0$, à l'origine des temps, les températures de $x = l$ à $x = l'$ soient données par une fonction $F(x)$ connue entre ces limites.

Pour intégrer l'équation (a), je fais usage de la méthode qui consiste à former l'intégrale complète d'un nombre infini d'intégrales particulières. Je développe en série la valeur de u, suivant les puissances de l'exponentielle e^{-t}, et nommant u_0, u_1, u_2, ... u_n, ... des fonctions de x qui seront ci-après déterminées, je pose

$$u = u_0 + u_1 e^{-m_1 t} + u_2 e^{-m_2 t} + u_3 e^{-m_3 t} + \ldots\ldots + u_n e^{-m_n t} + \ldots\ldots ;$$

ou, par abréviation,

$$u = \Sigma u_m e^{-mt} \; .$$

Il vient, en différentiant cette valeur de u, par rapport à t, et ensuite par rapport à x,

$$\frac{du}{dt} = -\Sigma u_m . m e^{-mt} \, , \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} = \Sigma e^{-mt} . \frac{d^2 u_m}{dx^2} \; ;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (a), on obtient cette égalité

$$-\Sigma m u_m e^{-mt} = a^2 \Sigma e^{-mt} \frac{d^2 u_m}{dx^2} - f(x) \Sigma u_m e^{-mt} ,$$

qui, devant être satisfaite quel que soit t, donne cette équation générale

$$\text{(b)} \qquad -m u_m = a^2 \frac{d^2 u_m}{dx^2} - u_m f(x) ;$$

pour déterminer u_m, et, par suite, u_0, u_1, u_2, ..., lorsqu'on connaîtra les valeurs de m.

L'équation (b) est une équation linéaire du second ordre, de même forme que celle qui a été étudiée dans la question du mouvement permanent. Son intégrale, qui comprend deux constantes arbitraires, peut s'obtenir dans tous les cas, au moins par approximation. Je nommerai $\varphi(x, m)$, $\psi(x, m)$ deux intégrales particulières qui y satisfassent ; A_m, B_m deux constantes arbitraires. La valeur de u_m s'écrira ainsi :

$$u_m = A_m \varphi(x, m) + B_m \psi(x, m) ;$$

et l'on aura, pour la valeur de u,

$$u = \Sigma \{ A_m \varphi(x, m) + B_m \psi(x, m) \} e^{-mt} ;$$

XV. Les diverses valeurs de m se déduisent des deux équations définies

$$u = \theta , \quad \text{pour} \quad x = l ,$$

$$u = \theta' , \quad \text{pour} \quad x = l' ,$$

déjà indiquées dans le précédent article. En effet, elles reviennent à

$$\Sigma \{ A_m \varphi(l, m) + B_m \psi(l, m) \} e^{-mt} = 0 ,$$

$$\Sigma \{ A_m \varphi(l', m) + B_m \psi(l', m) \} e^{-mt} = 0 .$$

Elles doivent subsister pour toute valeur positive de t ; d'où on conclut sans peine qu'une des valeurs de l'exposant m doit être zéro, et qu'à cet exposant répondent les deux équations

$$A_0\varphi(l,0)+B_0\psi(l,0)=\theta\ , \qquad A_0\varphi(l',0)+B_0\psi(l',0)=\theta'\ ,$$

qui donnent aisément

$$A_0=\frac{\theta\psi(l',0)-\theta'\psi(l,0)}{\varphi(l,0)\psi(l',0)-\varphi(l',0)\psi(l,0)}\ , \quad B_0=\frac{\theta'\varphi(l',0)-\theta\varphi(l,0)}{\varphi(l,0)\psi(l',0)-\varphi(l',0)\psi(l,0)}\ ;$$

et déterminent complètement le premier terme u_0 de la valeur de u, lequel représente le mouvement de la chaleur dans une barre parvenue à un état permanent. Toutes les autres valeurs de m sont données par les équations

$$A_m\varphi(l,m)+B_m\psi(l,m)=0\ , \qquad A_m\varphi(l',m)+B_m\psi(l',m)=0\ .$$

Éliminant A_m et B_m, il vient:

$$\text{(c)} \qquad \varphi(l,m)\psi(l',m)-\varphi(l',m)\psi(l,m)=0\ ;$$

égalité où tout est connu, excepté m, et qui détermine (en y joignant la valeur de $m=0$) toutes les valeurs dont cette variable est susceptible. Une des quantités A_m, B_m est donnée de plus en fonction de l'autre. La valeur B_m est, par exemple, $-A_m\dfrac{\varphi(l,m)}{\psi(l,m)}$; et, si l'on substitue cette expression dans la valeur de u, on trouve

$$u=u_0+\Sigma A_m.\ \frac{\varphi(x,m)\psi(l,m)-\psi(x,m)\varphi(l,m)}{\psi(l,m)}\ ;$$

le temps t étant arbitraire.

XVI. Que l'on fasse à présent $t=0$, u deviendra $\text{F}(x)$; représentant donc par $\Phi(x)$ la différence $\text{F}(x)-u_0$ également connue, on devra satisfaire à l'égalité

$$\text{(d)} \qquad \Phi(x)=\Sigma\,\frac{A_m}{\psi(l,m)}\left\{\varphi(x,m)\psi(l,m)-\psi(x,m)\varphi(l,m)\right\}\ ,$$

qui pourtant ne subsistera qu'entre les limites $x=l$ et $x=l'$.

La fonction $\Phi(x)$ peut être discontinue. La possibilité de la développer en une série semblable à celle du second membre ne saurait être révoquée en doute ; sans cela le problème du mouvement de la chaleur, dans une barre inégalement polie, serait inaccessible à l'analyse. L'équation (d) résulte de raisonnemens rigoureux; et il ne reste plus qu'à déterminer convenablement la valeur de A_m. Or, sa détermination repose sur ce que la quantité $\varphi(x,m)\psi(l,m)-\psi(x,m)\varphi(l,m)$, que je représente par V_m, doit satisfaire à l'équation (b), en sorte qu'on a

$$-mV_m=a^2\frac{d^2V_m}{dx^2}-V_m f(x) .$$

Soit, en effet, m' une seconde valeur de m, et l'on aura également

$$-m'V_{m'}=a^2\frac{d^2V_{m'}}{dx^2}-V_{m'}f(x) .$$

Eliminant donc $f(x)$ entre ces deux équations, on trouvera

$$(m-m')V_mV_{m'}=a^2\left(V_m\frac{d^2V_{m'}}{dx^2}-V_{m'}\frac{d^2V_m}{dx^2}\right) ;$$

d'où, intégrant par rapport à x et divisant par $m-m'$,

$$\int V_mV_{m'}dx=\frac{a^2}{m-m'}\left(V_m\frac{dV_{m'}}{dx}-V_{m'}\frac{dV_m}{dx}\right)+\text{Const.}$$

Or, si l'on prend cette intégrale depuis $x=l$ jusqu'à $x=l'$, le second membre sera nul, tant que la différence $m-m'$ ne le sera pas ; ce qui résulte de ce que, à ces limites, les quantités V_m, $V_{m'}$ sont nulles elles-mêmes. En effet, on a, pour $x=l$

$$V_m=\varphi(l,m)\psi(l,m)-\psi(l,m)\varphi(l,m)=0 ,$$

$$V_{m'}=\varphi(l,m')\psi(l,m')-\psi(l,m')\varphi(l,m')=0 ;$$

et pour $x=l'$,

$$V_m = \varphi(l', m)\psi(l', m) - \psi(l', m)\varphi(l', m) = 0 ;$$

$$V_{m'} = \varphi(l', m')\psi(l', m') - \psi(l', m')\varphi(l', m') = 0 ,$$

en vertu de l'équation (c) qui détermine les valeurs de m et de m'. Ainsi l'on a $\int_l^{l'} V_m V_{m'} dx = 0$, lorsque les racines m et m' diffèrent entre elles. Mais si $m = m'$, le second membre se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Sa vraie valeur est alors une quantité finie bien facile à trouver directement ou à déterminer par les règles ordinaires. On différentie, par rapport à m, le numérateur

$$a^2\left(V_m \frac{dV_{m'}}{dx^2} - V_{m'} \frac{dV_m}{dx^2}\right),$$

puis le dénominateur $m - m'$. Ce dernier donne l'unité pour résultat ; le premier conduit à

$$a^2\left(\frac{dV_m}{dm} \cdot \frac{dV_{m'}}{dx} - V_{m'} \frac{d^2V_m}{dx\,dm}\right).$$

$V_{m'}$ est nul aux deux limites $x = l$, $x = l'$. Soit donc représenté par H, H' la quantité $a^2 \frac{dV_m}{dm} \frac{dV_{m'}}{dx}$ à ces valeurs extrêmes, et c'est la différence $H' - H = v_m$ qui sera le nombre cherché. Ainsi l'on aura

$$\int_l^{l'} V_m^2 dx = v_m .$$

XVII. Revenons présentement à l'équation (d), c'est-à-dire à l'équation

$$\Phi(x) = \Sigma \frac{A_m}{\psi(l, m)} \{\varphi(x, m)\psi(l, m) - \psi(x, m)\varphi(l, m)\} .$$

J'y change x en α, ce qui est permis ; je multiplie ces deux membres par

$$\{\varphi(\alpha, m)\psi(l, m)-\psi(\alpha, m)\varphi(l, m)\}d\alpha\ ;$$

et j'intègre ensuite entre les limites $\alpha=l$, $\alpha=l'$. Le premier membre devient égal à une intégrale définie

$$\int_{l}^{l'}\{\varphi(\alpha, m)\psi(l, m)-\psi(\alpha, m)\varphi(l, m)\}\Phi(\alpha)d\alpha\ .$$

Le second membre, en vertu des principes de l'art. XVI, se réduit à un seul terme, savoir : $\frac{A_m v_m}{\psi(l, m)}$; en sorte que

$$A_m=\frac{\psi(l, m)}{v_m}\int_{l}^{l'}\{\varphi(\alpha, m)\psi(l, m)-\psi(\alpha, m)\varphi(l, m)\}\Phi(\alpha)d\alpha\ ;$$

et l'équation suivante :

$$u=u_0+\Sigma\frac{e^{-mt}}{v_m}\{\varphi(x,m)\psi(l,m)-\psi(x,m)\varphi(l,m)\}\int_{l}^{l'}\{\varphi(\alpha,m)\psi(l,m)-\psi(\alpha,m)\varphi(l,m)\}\Phi(\alpha)d\alpha$$

ne contenant plus que des quantités connues, donne la valeur de u, pour un instant quelconque, en tel point qu'on veut de la barre, et résout, dans toute sa généralité le problème qui nous occupe. Cette valeur est composée de deux parties ; la première indépendante du temps, représente l'état permanent auquel la barre arrive enfin ; la seconde, dépendante à la fois du point et de l'instant que l'on considère, et tendant vers zéro à mesure que le temps augmente, répond à l'état variable. Ainsi, il y a dans la barre deux flux de chaleur bien distincts, qui suivent des lois différentes et qui, d'après leurs signes, s'ajoutent ou se retranchent pour former le flux total.

Lorsque la valeur de t est devenue très-considérable, l'exponentielle e^{-mt} est très-petite ; et si l'on considère les quantités $e^{-m_1 t}$, $e^{-m_2 t}$, ..., qu'on déduit de la première par les hypothèses $m=m_1$, $m=m_2$, ..., on voit qu'elles décroissent très rapidement à mesure que m augmente. On peut donc, à une certaine époque, se borner à la première exponentielle, dans la valeur de u. On obtient alors

$$u = u_0 + \frac{e^{-m_1 t}}{\rho_{m_1}} \left\{ \varphi(x, m_1)\psi(l, m_1) - \psi(x, m_1)\varphi(l, m_1) \right\} \int_l^{l'} \left\{ \varphi(\alpha, m_1)\psi(l, m_1) - \psi(\alpha, m_1)\varphi(l, m_1) \right\} \Phi(\alpha) d\alpha.$$

Dans cet état de la barre, qui précède immédiatement l'état permanent, les différences $u - u_0$ décroissent avec le temps, comme les termes d'une progression géométrique, ce qui est une propriété générale des lois du refroidissement.

XVIII. Si la barre est limitée dans les deux sens, les deux longueurs l et l' sont représentées par des nombres donnés. Si elle s'étend à l'infini du côté B, on a $l' = \infty$. Enfin on doit poser $l = -\infty$, $l' = +\infty$, dans l'hypothèse où la ligne AB est indéfinie dans les deux sens. C'est afin de pouvoir comprendre ce dernier cas dans notre formule que nous avons pris l'origine O des abscisses dans une position tout à fait arbitraire, par rapport aux points A et B; mais, en particularisant le lieu du point O, il est possible de simplifier beaucoup les calculs que nous avons indiqués dans les précédens articles. Cela est surtout utile pour la démonstration de divers théorèmes qui complètent la solution que nous avons donnée du problème qui fait le sujet de cet écrit, et qu'à la rigueur on peut regarder comme indispensables.

Nous ferons voir 1.° que l'équation d'où résultent les valeurs de m a toutes ses racines réelles et positives; 2.° nous prouverons que la série qui forme la valeur de u est une série convergente, ce qui est nécessaire pour compléter la solution.

Les démonstrations de ces deux principes se déduisent de la méthode que nous avons exposée aux articles XII et XIII, pour l'intégration de l'équation linéaire du second ordre. Elles sont très-propres à faire connaître les avantages de ce procédé que nous avons omis dans le mémoire présenté, en 1829, à l'Académie des sciences.

XIX. Nous supposons qu'on a fait coïncider l'origine O avec l'extrémité A de la barre. La longueur l sera alors nulle, et la longueur AB deviendra l'. L'équation indéfinie sera toujours

$$\frac{du}{dt}=a^2\frac{d^2u}{dx^2}-uf(x)\;.$$

En posant

$$u=\Sigma u_m e^{-mt}\;;$$

u_m satisfera toujours à l'équation

$$-mu_m=a^2\frac{d^2u_m}{dx^2}-u_m f(x)\;;$$

On représentera encore par $\varphi(x,m)$, $\psi(x,m)$ deux intégrales particulières, en sorte que

$$u_m=A_m\varphi(x,m)+B_m\psi(x,m)\;;$$

puis on aura

$$u=\Sigma e^{-mt}.\{A_m\varphi(x,m)+B_m\psi(x,m)\}\;.$$

Observons présentement que l'équation qui donne u_m peut se mettre sous cette forme

$$\frac{d^2u_m}{dx^2}=u_m.\frac{f(x)-m}{a^2}\;;$$

et, par les principes de l'art. XII, on pourra poser

$$\varphi(x,m)=1+\frac{1}{a^2}\int_0^x dx\int_0^x[f(x)-m]dx+\frac{1}{a^4}\int_0^x dx\int_0^x[f(x)-m]dx\int_0^x dx\int_0^x[f(x)-m]dx+\ldots\ldots\;;$$

$$\psi(x,m)=x+\frac{1}{a^2}\int_0^x dx\int_0^x x[f(x)-m]dx+\frac{1}{a^4}\int_0^x dx\int_0^x[f(x)-m]dx\int_0^x dx\int_0^x x[f(x)-m]dx+\ldots\ldots\;.$$

Prenant alors les équations définies, $u=\theta$, pour $x=l=0$; $u=\theta'$, pour $x=l'$; elles donnent

$$\Sigma e^{-mt}.\{A_m\varphi(0,m)+B_m\psi(0,m)\}=\theta,\quad \Sigma e^{-mt}\{A_m\varphi(l',m)+B_m\psi(l',m)\}=\theta'.$$

Or, on a

$$\varphi(0,m)=1\ ,\quad \psi(0,m)=0\ ;$$

les équations précédentes se réduisent donc à

$$\Sigma e^{-mt}.A_m=\theta\ ,\quad \Sigma e^{-mt}.\{A_m\varphi(l',m)+B_m\psi(l',m)\}=\theta'\ ;$$

Elles doivent subsister quel que soit t, en sorte qu'il y a une valeur de m égale à zéro, à laquelle répondent les coefficiens

$$A_0=\theta\ ,\quad B_0=\frac{\theta'-\theta\varphi(l',0)}{\psi(l',0)}\ ,$$

ce qui détermine complètement le premier terme u_0 de la température. Les autres valeurs de m sont en nombre infini. A ces valeurs répondent les égalités

$$A_m=0\ ,\quad A_m\varphi(l',m)+B_m\psi(l',m)=0\ ;$$

lesquelles se réduisent à $\psi(l',m)=0$. Ainsi donc c'est l'équation $\psi(l',m)=0$, ou

$$l'+\frac{1}{a^2}\int_0^{l'}dx\int_0^x[f(x)-m]x\,dx+\frac{1}{a^4}\int_0^{l'}dx\int_0^x[f(x)-m]dx\int_0^x dx\int_0^x[f(x)-m]x\,dx+\ldots\ldots=0\ ;$$

qui détermine tous les nombres que m représente. C'est cette équation qu'il faut discuter et dont il s'agit de trouver les racines.

XX. Je poserai

$$y=l'+\frac{1}{a^2}\int_0^{l'}dx\int_0^x[f(x)-m]xdx+\frac{1}{a^4}\int_0^{l'}dx\int_0^x[f(x)-m]dx\int_0^x dx\int_0^x[f(x)-m]xdx+\ldots$$

Je construirai la courbe représentée par cette égalité, où m est l'abscisse et y l'ordonnée. Cette courbe coupera l'axe des m en un nombre infini de points, pour lesquels on aura $y=0$. C'est à ces points que répondent les valeurs que nous voulons considérer.

Or, la fonction $f(x)$ est donnée de $x=0$ à $x=l'$. C'est une quantité toujours positive, dont la plus grande et la plus petite valeurs sont des nombres finis M, N. Ainsi la quantité m croissant, à partir de zéro, finira par dépasser $f(x)$. A cette époque, les divers termes de la valeur de y, qui d'abord étaient tous positifs, deviendront alternativement positifs et négatifs. Il en sera de même de l'ordonnée y; et c'est ainsi que l'équation $y=0$ possède un nombre infini de racines réelles. Voyons de quelle manière ces diverses quantités dépendent de m, et comment elles croissent et décroissent avec cette abscisse.

Par un choix convenable d'unités, on peut toujours faire en sorte que $l'=1$ et $a^2=1$. Nous adopterons ces valeurs qui simplifient un peu les raisonnemens. Maintenant observons que y ne peut être nul, tant que $f(x)-m$ est positif. Prenons donc $m>f(x)$, et voyons ce qui résulte de cette hypothèse. Nous poserons

$$p_0=1\ ,$$

$$p_1=-\int_0^1 dx\int_0^x x[f(x)-m]dx\ ,$$

$$p_2=+\int_0^1 dx\int_0^x[f(x)-m]dx\int_0^x dx\int_0^x x[f(x)-m]dx\ ,$$

$$p_3=-\int_0^1 dx\int_0^x[f(x)-m]dx\int_0^x dx\int_0^x[f(x)-m]dx\int_0^x dx\int_0^x x[f(x)-m]dx\ ,$$

. . . . , on aura, par suite :

$$y=p_0-p_1+p_2-p_3+\ldots\ldots$$

Si la valeur moyenne de m—f(x) est au-dessous de l'unité, les termes p_1, p_2, p_3 ...... tendent à diminuer, à mesure que l'indice augmente, 1.° à cause de l'introduction du nouveau facteur m—f(x) ; 2.° à cause de la double intégration ajoutée en passant de l'un quelconque d'entre eux au suivant. En adoptant donc cette hypothèse, on a

$$p_1<p_0\ ,\quad p_3<p_2\ ,\quad p_5<p_4\ ,\ \ldots\ldots;$$

et par conséquent $y>0$.

Soit à présent m—f(x) supérieur à l'unité. L'introduction du facteur m—f(x) d'un terme p_n au suivant p_{n+1} tend à augmenter ce dernier que la double intégration diminue ; et, comme l'effet de cette diminution se produit d'autant mieux que n est plus grand, on voit que les nombres successifs p_0, p_1, p_2, p_3, ... iront d'abord croissant avec les indices, atteindront un maximum puis décroîtront indéfiniment.

Cette idée a besoin d'être développée. On en sent sur-le-champ la justesse en regardant la fonction f(x) comme une constante égale à P ; car on a, dans cette hypothèse,

$$p_0=1\ ,\quad p_1=\frac{m-P}{1.2.3}\ ,\quad p_2=\frac{(m-P)^2}{1.2.3.4.5}\ ,\quad p_3=\frac{(m-P)^3}{1.2.3.4.5.6.7}\ ,\ \ldots;$$

Et les rapports

$$\frac{p_1}{p_0}\ ,\quad \frac{p_2}{p_1}\ ,\quad \frac{p_3}{p_2}\ ,\quad \frac{p_4}{p_3}\ ,\ \ldots\ldots$$

sont

$$\frac{m-P}{2.3}\ ,\quad \frac{m-P}{4.5}\ ,\quad \frac{m-P}{6.7}\ ,\quad \frac{m-P}{8.9}\ ,\ \ldots\ldots;$$

Pour toutes ces fractions, le numérateur est invariable ; le dénominateur va croissant avec rapidité et finit par lui devenir égal ou supérieur. Donc aussi les termes p_0, p_1, p_2, p_3, ..., quel que soit $m-P$, ne pourront pas toujours croître avec leurs indices. Ils atteindront un maximum, puis décroîtront, l'indice continuant à augmenter. Le maximum sera seulement d'autant plus éloigné de p_0 que $m-P$ sera un nombre plus considérable.

Ce que nous venons d'expliquer, en supposant $f(x)=P$, est évidemment général. Cela compris, on conçoit déjà comment la valeur de y peut être alternativement positive et négative, et par conséquent nulle.

XXI. Si $f(x)$ était constant, qu'on eût $f(x)=P$, les valeurs successives de p_0, p_1, p_2, p_3, ... seraient celles que nous venons d'écrire, et l'on obtiendrait

$$y'=1-\frac{m-P}{1.2.3}+\frac{(m-P)^2}{1.2.3.4.5}-\frac{(m-P)^3}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots\ldots$$

Multipliant et divisant le second membre par $\sqrt{m-P}$, puis observant que $m-P$ est égal à $(\sqrt{m-P})^2$, on a

$$y'=\frac{1}{\sqrt{m-P}}\left\{\frac{\sqrt{m-P}}{1}-\frac{(\sqrt{m-P})^3}{1.2.3}+\frac{(\sqrt{m-P})^5}{1.2.3.4.5}-\ldots\ldots\right\}.$$

Ainsi

$$y'=\frac{\operatorname{Sin}.\sqrt{m-P}}{\sqrt{m-P}}.$$

Or, par la décomposition du sinus en une infinité de facteurs, on sait que l'équation $\operatorname{Sin}.\sqrt{m-P}=0$ a toutes ses racines réelles et positives. Ces racines sont données par l'égalité $m=P+n^2\varpi^2$, dans laquelle ϖ est, à l'ordinaire, le rapport de la circonférence au diamètre, et n un nombre entier qui peut prendre toutes les valeurs de $n=0$ à $n=\infty$. Donc aussi l'équation $y'=0$ a toutes ses racines réelles, positives et fournies par la formule $m=P+n^2\varpi^2$, dans laquelle on doit faire varier le nombre entier n depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$. La valeur de $n=0$ ne répond plus alors à $y'=0$; mais à $y'=1$.

Quand $f(x)$ n'est pas un nombre donné, mais une fonction variable, entre les limites M et N, on conçoit une valeur moyenne représentée par P_m et telle que, si l'on pose $f(x)=P_m$, on trouvera exactement la valeur de y. En adoptant cette idée, on obtient

$$y=1-\frac{(m-P_m)}{1.2\,3}+\frac{(m-P_m)^3}{1.2.3.4.5}-\frac{(m-P_m)^5}{1.2.3.4\,5.6\,7}+\ldots\ldots$$

La quantité P_m n'est pas absolument constante. C'est une fonction de m qui peut changer en même temps que cette abscisse; mais ses variations ne sont point arbitraires; elle ne peut pas croître indéfiniment, puisque la fonction $f(x)$ est comprise entre deux limites finies M et N. Cela admis, on met l'expression de y sous la forme suivante:

$$y=\frac{\operatorname{Sin}\sqrt{m-P_m}}{\sqrt{m-P_m}};$$

et les racines m se trouvent données par la formule $m=P_m+n^2\varpi^2$, où le nombre entier n varie de l'unité à l'infini. Cette dernière égalité est toujours possible. Soit, par exemple, $n=1$; je dis qu'on peut avoir $m=P_m+n^2\varpi^2$, et le même genre de démonstration sera applicable à une valeur quelconque de m. En effet, le second membre est renfermé entre des limites désignées, puisque cela a lieu pour P_m et que ϖ^2 est constant. Le premier, au contraire, est absolument quelconque. Donc il existe un nombre m_1 tel que, si l'on fait $m=m_1$, cette équation sera satisfaite et aussi l'équation $y=0$.

Donc enfin l'équation $y=0$, dans le cas le plus général, a toutes ses racines réelles et positives, ce qu'on savait déjà, par le théorème de l'article I.er

L'analyse que nous venons d'employer conduit également à les calculer : nous n'insisterons pas sur ce point ; des considérations de ce genre n'ont aucune difficulté. Lorsque les racines sont petites, on les obtient par la méthode des approximations successives ; lorsqu'elles sont très-grandes, le nombre n^2 est très-grand lui-même ; on néglige P_m et l'on a cette valeur très-approchée $m=n^2\varpi^2$; où n est un nombre entier quelconque, mais suffisamment considérable.

XXII. A la fin de l'article XII, on a prouvé que la série qui exprime $\psi(x,m)$ est une serie convergente. Nous ne reviendrons pas sur cette proposition qu'on peut démontrer par plus d'un moyen. De plus, quand les valeurs de m sont très-grandes, on peut prouver que $\psi(x,m)$ est une très-petite quantité quel que soit x. En effet, on a

$$\psi(x,m)=x+\frac{1}{a^2}\int_0^x dx\int_0^x[f(x)-m]x\,dx+\frac{1}{a^4}\int_0^x dx\int_0^x[f(x)-m]dx\int_0^x dx\int_0^x[f(x)-m]x\,dx+\ldots$$

Si m est très-grand, négligeons $f(x)$ par rapport à m ; il viendra

$$\psi(x,m)=x-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{mx^3}{1.2.3}+\frac{1}{a^4}\cdot\frac{m^2x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots=\frac{a\,\mathrm{Sin}.\,\frac{x\sqrt{m}}{a}}{\sqrt{m}}.$$

Or, $\dfrac{a\,\mathrm{Sin}.\,\frac{x\sqrt{m}}{a}}{\sqrt{m}}$ décroît indéfiniment à mesure que m augmente.

XXIII. Je vais présentement démontrer la convergence de la suite qui exprime la valeur de u. Il faut reprendre l'expression

$$u=\Sigma e^{-mt}[A_m\varphi(x,m)+B_m\psi(x,m)],$$

mettre à part le terme u_0, qui répond à $m=0$, et puis se rappeler qu'à l'article XIX on a fait voir que $A_m=0$, $\psi(l',m)=0$ pour les autres valeurs de m. Il reste dès lors

$$u=u_0+\Sigma B_m e^{-mt}\psi(x,m) \; ;$$

le signe Σ s'étendant aux valeurs de m données par $\psi(l',m)=0$.

Pour $t=0$, u devient $F(x)$. On pose (art. XVI) $F(x)-u_0 = F(x)$. Puis l'on a $\Phi(x)=\Sigma B_m\psi(x,m)$, d'où l'on déduit, par la méthode déjà exposée (art. XVI, XVII),

$$B_m=\frac{\int^{l'}_0\Phi(x)\psi(x,m)dx}{\int^{l'}_0\psi(x,m)^2dx} \; .$$

Or, quand il s'agit de prouver la convergence de la série $\Sigma B_m e^{-mt}\psi(x,m)$, il est permis d'abord de ne considérer que les termes de la suite infinie où m est très-considérable ; ensuite de faire $t=0$; car, si la série est convergente, t étant nul, à *fortiori* le sera-t-elle à un instant quelconque différent.

Posons

$$m=\frac{a^2n^2\pi^2}{l'^2} \; ;$$

n désignant un nombre entier très-grand. Partons d'une valeur $n=n'$, puis faisons

$$n=n'+1 \; , \quad n=n'+2 \; , \quad n=n'+3 \; , \; \ldots\ldots\ldots \; ;$$

c'est à ces diverses valeurs de n que répondront les grandes racines de l'équation $\psi(l',m)=0$. Cela résulte de ce que, pour ces grandes racines, on a, ainsi qu'on l'a vu à l'art. XXII,

$$\psi(l',m)=\frac{a\,\mathrm{Sin.}\,\frac{l'\sqrt{m}}{a}}{\sqrt{m}} \; ,$$

et de ce que $\text{Sin.}\,\frac{l'\sqrt{m}}{a}$ devient nul toutes les fois que

$$m = \frac{a^2 n^2 \varpi^2}{l'^2};$$

Nous aurons, dans la même hypothèse,

$$\int_0^{l'} \psi(\alpha,m)^2 d\alpha = \int_0^{l'} \frac{a^2 \text{Sin.}\,\frac{2\alpha\sqrt{m}}{a}}{m} d\alpha = \frac{a^2 l'}{m};$$

Ainsi,

$$\Sigma B_m \psi(x,m).\Sigma \frac{\text{Sin.}\,\frac{x\sqrt{m}}{a}}{l'} \int_0^{l'} \Phi(\alpha).\text{Sin.}\,\frac{\alpha\sqrt{m}}{a}.d\alpha;$$

Or, la série du second membre est du nombre de celles qui ont été discutées en détail par MM. Fourier et Poisson. Et, en effet, elle se rapporte au cas où $f(x)=0$, où le pouvoir rayonnant est nul, et constant par conséquent. La convergence de la série, dans le cas général, se trouve donc ainsi ramenée au cas particulier où $f(x)$ est invariable, sur lequel il ne peut rester aucun doute, après les mémoires des auteurs cités.

XXIV. Il nous reste à supposer variables, suivant une fonction quelconque de l'abscisse, la conductibilité et la chaleur spécifique. Si l'on a bien compris ce qui précède, on ne trouvera aucune difficulté dans cette question nouvelle, ce qui nous permettra d'en exposer rapidement les résultats. Supposons d'abord une barre AB, telle que $AB=l$, arrivée à l'état permanent. Nommons k la conductibilité, variable en fonction de l'abscisse $Am=x$ de m, comptée à partir du point A. Soit de plus ω l'aire, ε le contour de la section transversale, l'une et l'autre constantes, et γ le pouvoir rayonnant de la surface extérieure, exprimé en fonction de x; on aura cette équation indéfinie

$$(a) \qquad \omega \frac{d^2.ku}{dx^2} = \gamma\varepsilon.u \ ,$$

où u désigne la température au point où l'abscisse est x, et qui suppose le milieu ambiant entretenu à 0°. En posant

$$u = \frac{v}{k} \ , \qquad \frac{\varepsilon\gamma}{k\omega} = f(x) \ ,$$

cette équation peut s'écrire ainsi

$$(b) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = v f(x) \ .$$

Les constantes de l'intégrale se détermineront, par exemple, en admettant qu'aux extrémités A, B de la barre, les températures sont θ, θ'. Or, l'équation différentielle (b) est de même forme que celle relative à la première question du mémoire. Elle se traitera donc comme nous avons traité celle-là, et le nouveau problème sera résolu par les mêmes procédés que nous avons appliqués à l'autre.

Considérons deux barres de même longueur, mais de matières diverses. Admettons que, dans ces deux barres, ε et ω soient les mêmes, ainsi que la fonction de l'abscisse qui exprime le rapport du pouvoir rayonnant à la conductibilité. L'équation (b) sera la même pour l'un et pour l'autre. Si de plus on entretient leurs extrémités à des températures qui diffèrent de la première barre à la seconde, et en raison inverse de leurs conductibilités à ces limites données, les valeurs de v, pour ces deux points, seront égales de part et d'autre, et dès lors elles resteront les mêmes pour tous les autres points homologues des deux barres.

Mais on a $u=\frac{v}{k}$. Soient u', u'' les valeurs de u pour deux points des barres ayant la même abscisse x, et k', k'' les conductibilités. Puisque v est le même pour l'une et l'autre, on a $u' : u'' :: k'' : k'$; c'est-à-dire que les températures sont en raison inverse des conductibilités.

XXV. Considérons présentement le mouvement varié de la chaleur dans une barre hétérogène. En désignant par c la chaleur spécifique, nous aurons l'équation

$$(c) \qquad c\omega.\frac{du}{dt}=\omega\frac{d^2.ku}{dx^2}-\gamma\varepsilon.u \ .$$

Les équations définies seront, par exemple, $u=\theta$ pour $x=0$, $u=\theta'$ pour $x=l$, et $u=F(x)$ pour $t=0$, de $x=0$ à $x=l$. En posant $ku=v$, puis se rappelant que c, k, γ sont des fonctions quelconques de x, et faisant, en conséquence,

$$\frac{k}{c}=f(x) \ , \qquad \frac{\gamma\varepsilon}{c\omega}=f_1(x) \ ;$$

l'équation (c) se transformera dans celle-ci :

$$(d) \qquad \frac{dv}{dt}=\frac{d^2v}{dx^2}f(x)-vf_1(x) \ .$$

Pour intégrer l'équation (d) on formera, comme à l'art. XIV, l'intégrale générale d'un nombre infini d'intégrales particulières. Soit

$$\Sigma v_m e^{-mt}=v \ ,$$

la substitution donnera

$$-\Sigma v_m e^{-mt}m=f(x)\Sigma e^{-mt}\frac{d^2v_m}{dx^2}-f_1(x)\Sigma e^{-mt}v_m \ ;$$

équation qui, devant être satisfaite quel que soit t, donne cette expression générale

$$(e)\qquad -mv_m = f(x)\frac{d^2v_m}{dx^2} - v_m f_1(x)\ ;$$

Cette équation linéaire est d'une forme qui nous est bien connue. Soient $\varphi(x,m)$, $\psi(x,m)$ deux intégrales particulières ; et, comme à l'art. XIV, soit posé

$$v_m = A_m\varphi(x,m) + B_m\psi(x,m)\ ;$$

d'où

$$v = \Sigma e^{-mt}[A_m\varphi(x,m) + B_m\psi(x,m)]\ ;$$

Pour déterminer les valeurs de m, il faut recourir aux équations définies

$$u=\theta \text{ pour } x=0\ ,\qquad u=\theta' \text{ pour } x=l\ ,$$

et se rappeler en même temps que

$$u=\frac{v}{k}=\frac{1}{k}\Sigma e^{-mt}[A_m\varphi(x,m)+B_m\psi(x,m)]\ ;$$

En effet, ces conditions donnent, en nommant k_0, k_1, les valeurs de k, pour les deux abscisses 0, l

$$\frac{1}{k_0}\Sigma e^{-mt}[A_m\varphi(0,m)+B_m\psi(0,m)]=\theta\ ,$$

$$\frac{1}{k_1}\Sigma e^{-mt}[A_m\varphi(l,m)+B_m\psi(l,m)]=\theta'\ ;$$

Ces conditions se simplifient à cause des valeurs de $\varphi(x,m)$ et de $\psi(x,m)$. En effet, l'équation (e) peut s'écrire ainsi

$$\frac{d^2\varphi_m}{dx^2}=\varphi_m\cdot\frac{f_1(x)-m}{f(x)} \;;$$

On pourra donc poser

$$\varphi(x,m)=1+\int_0^x dx\int_0^x dx\,\frac{f_1(x)-m}{f(x)}+\int_0^x dx\int_0^x dx.\,\frac{f_1(x)-m}{f(x)}\int_0^x dx\int_0^x dx\,\frac{f_1(x)-m}{f(x)}+\ldots$$

$$\psi(x,m)=x+\int_0^x dx\int_0^x x\,\frac{f_1(x)-m}{f(x)}.dx+\int_0^x dx\int_0^x \frac{f_1(x)-m}{f(x)}\,dx\int_0^x dx\int_0^x x\,\frac{f_1(x)-m}{f(x)}\,dx+\ldots$$

De là résulte

$$\varphi(0,m)=1 \;, \qquad \psi(0,m)=0 \;;$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{k_0}\Sigma A_m e^{-mt}=\theta \;, \qquad \frac{1}{k_1}\Sigma e^{-mt}[A_m\varphi(l,m)+B_m\psi(l,m)]=\theta' \;;$$

Ces égalités doivent subsister pour toutes les valeurs positives de t. On en conclut sans peine qu'une des valeurs de l'exposant m doit être zéro, et qu'à cet exposant répondent les valeurs

$$A_0=\theta k_0 \;, \qquad B_0=\frac{\theta' k_1-\theta k_1\varphi(l,0)}{\psi(l,0)} \;,$$

qui déterminent le premier terme u_0 de la valeur de u, lequel représente l'état permanent de la barre. Les coefficiens qui répondent aux autres valeurs de m doivent être égalés à zéro, et l'on a, en général,

$$A_m=0 \;, \qquad A_m\varphi(l,m)+B_m\psi(l,m)=0 \;;$$

ce qui donne, à la fois,

$$A_m=0\ ,\quad \psi(l,m)=0\ .$$

Tout est connu dans cette dernière équation, excepté la variable m ; et ses racines détermineront les nombres m_1, m_2, m_3, ... qui entrent en exposants de e^{-t}, dans le développement de u en série. La valeur de A_m est nulle ; celle de B_m est seule inconnue, et l'on a

$$u=u_0+\frac{1}{k}\Sigma B_m e^{-mt}\psi(x,m)\ ;$$

XXVI. Que l'on fasse à présent $t=0$, u deviendra une fonction connue $\mathrm{F}(x)$. Représentons par $\Phi(x)$ la différence $\mathrm{F}(x)-u_0$ également connue ; on devra satisfaire à cette égalité

$$\Phi(x)=\Sigma B_m\psi(x,m)\ ,$$

qui pourtant ne subsiste que de $x=0$ à $x=l$. Ici, comme à l'art. XVI, la fonction $\Phi(x)$ peut être discontinue. L'équation que je viens d'écrire est la conséquence de raisonnemens rigoureux. Il est hors de doute que $\Phi(x)$ puisse se développer en une série ayant la forme de celle comprise dans le second membre. Il nous reste à déterminer convenablement B_m.

Cette détermination diffère un peu de celle de l'art. XVI, mais on y parvient toutefois par des principes semblables. On pose $\psi(x,m)=\chi_m$, et l'on observe que χ_m satisfait à l'équation

$$-m\chi_m=\mathrm{f}(x)\frac{\mathrm{d}^2\chi_m}{\mathrm{d}x^2}-\chi_m\mathrm{f}_1(x)\ .$$

Pour une seconde valeur m' de m, on a de même une équation

$$-m'\chi_{m'}=\mathrm{f}(x)\frac{\mathrm{d}^2\chi_m}{\mathrm{d}x^2}-\chi_{m'}\mathrm{f}_1(x)\ .$$

Cela posé, l'intégrale qu'on cherche à calculer est

$$\int_0^l \frac{\chi_m \chi_{m'} \mathrm{d}x}{\mathrm{f}(x)} ,$$

et non pas $\int_0^l \chi_m \chi_{m'} \mathrm{d}x$, comme à l'art. XVI. On élimine $\mathrm{f}_1(x)$ entre les deux égalités qui précèdent. Cela donne

$$(m-m')\chi_m \chi_{m'} = \mathrm{f}(x) \left\{ \chi_m \frac{\mathrm{d}^2\chi_{m'}}{\mathrm{d}x^2} - \chi_{m'} \frac{\mathrm{d}^2\varphi_m}{\mathrm{d}x^2} \right\} .$$

Divisant par $(m-m')\mathrm{f}(x)$, puis intégrant par rapport à x, on en déduit

$$\int \frac{\chi_m \chi_{m'} \mathrm{d}x}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{m-m'} \left\{ \chi_m \frac{\mathrm{d}\chi_{m'}}{\mathrm{d}x} - \chi_{m'} \frac{\mathrm{d}\chi_m}{\mathrm{d}x} \right\} + \text{Const.}$$

Or, si l'on prend cette intégrale de $x=0$ à $x=l$, le second membre sera nul, tant que $m-m'$ ne sera pas zéro. Cela résulte de ce qu'à ces limites les quantités χ_m et $\chi_{m'}$ sont nulles elles-même, ce qu'on vérifie aisément en observant qu'on a les équations

$$\psi(l,m)=0 ; \qquad \psi(0,m)=0 ;$$

Ainsi donc $\int_0^l \chi_m \chi_{m'} \mathrm{d}x = 0$, tant que les racines m, m' diffèrent entre elles. Mais, si $m=m'$, le second membre se réduit à une valeur finie, déterminable par les règles ordinaires, puisqu'il prend la forme $\frac{0}{0}$.

XXVII. Revenons présentement à l'équation

$$\Phi(x) = \Sigma B_m \psi(x,m) ;$$

J'y change x en α, ce qui est permis. Je multiplie les deux membres par $\psi(x,m)$ et j'intègre entre les limites $\alpha=0$, $\alpha=l$. Le premier membre devient égal à une intégrale définie

$$\int_0^l \Phi(\alpha)\psi(\alpha,m)d\alpha \ .$$

Le second membre, en vertu des principes de l'art. XXVI, devient

$$B_m.\int_0^l \psi(\alpha,m)^2 d\alpha \ .$$

Il se réduit au seul terme qui contient le coefficient B_m, et l'on a l'égalité

$$B_m=\frac{\int_0^l \Phi(\alpha)\psi(\alpha,m)d\alpha}{\int_0^l \psi(\alpha,m)^2 d\alpha} \ .$$

On a donc cette valeur de u,

$$u=u_0+\frac{1}{k}\Sigma\ \frac{e^{-mt}}{\int_0^l \psi(\alpha,m)^2 d\alpha}.\psi(x,m)\int_0^l \Phi(\alpha)\psi(\alpha,m)d\alpha \ ;$$

laquelle ne contient plus que des quantités connues et donne la température en un point quelconque de la barre, et pour une valeur arbitraire de t. On prouverait, comme à l'art. XX, que les valeurs de m sont toutes réelles et positives.

XXVIII. Ce mémoire, très-succint, n'est qu'un extrait de mes recherches sur la théorie de la chaleur. Je n'y ai point parlé de l'application de mes calculs à la sphère, ce qui est important pour le problème des températures terrestres, ni du cas où la barre rayonne librement à ses extrémités. J'ai passé rapidement sur les points secondaires. Plus tard je reviendrai sur ces questions, et je chercherai à résoudre les mêmes questions, en supposant aux corps leurs trois dimensions. Quant à l'art. V de mes recherches de 1830, lequel se rapportait aux questions primitives de la chaleur. il forme, à dire vrai, un mémoire à part, que je n'ai pas dû transcrire ici (*).

(*) Je crois devoir m'excuser, vis-à-vis du lecteur, de lui livrer un mémoire aussi maussadement, je puis même dire, aussi inintelligiblement rédigé. Mais, au moment où je comptais m'occuper paisiblement de préparer ma livraison, il me fallut, à mon très-grand regret, prendre les rênes d'une administration qui, fort pénible dans tous les temps, surtout dès le début, le devenait beaucoup plus encore par l'effet des circonstances dans lesquelles nous nous trouvons. Par suite d'un déménagement auquel il m'était impossible de présider, mes papiers se trouvèrent enfouis sous des monceaux de livres que je n'avais pas le temps de remuer. Ce mémoire se présenta à moi, je crus trouver dans le double titre d'ingénieur et d'ancien élève de l'Ecole polytechnique une garantie suffisante du talent de rédaction de l'auteur, et j'envoyai de suite l'ouvrage à l'impression. L'auteur m'a bien transmis postérieurement quelques corrections, mais, outre qu'elles n'auraient pas sensiblement amélioré le mémoire, il était imprimé quand elles me sont parvenues.

Je ne prétends contester aucunement la capacité mathématique de M. Liouville; mais à quoi sert cette capacité, si elle n'est accompagnée de l'art de disposer, de l'art de se faire lire, entendre et goûter. Malheureusement il n'est aujourd'hui que trop de jeunes gens, de beaucoup de mérite d'ailleurs, qui regardent comme un accessoire presque indifférent ce que je regarde moi comme le mérite essentiel, le mérite par excellence, au défaut duquel tout le reste c'est absolument rien.

Je désire bien vivement que M. Liouville se venge prochainement des reproches un peu sévères peut-être que, bien à regret, sans doute, je me trouve contraint de lui adresser aujourd'hui, en publiant quelque mémoire que l'on puisse lire à peu près comme on lit un roman; mais la vérité est que je le désire beaucoup plus que je ne l'espère. Une longue expérience m'a prouvé que le mal dont il est atteint est un mal à peu près incurable.

J. D. G.