ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

CAMILLE PAGLIANI

Solution du deuxième problème

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 86-88
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__86_1>

Solution du deuxième problème ;

Par M. Camille Pagliani, cadet au corps royal des Pionniers, à Modène.

Soient A, B, C, D les quatre points donnés dans l'espace, O le centre de la sphère cherchée, r son rayon, α, β, γ, δ, les angles générateurs des cônes circonscrits ayant leurs sommets aux quatre points donnés ; on aura évidemment

$$r=\text{OA}\,\text{Sin.}\alpha=\text{OB}\,\text{Sin.}\beta=\text{OC}\,\text{Sin.}\gamma=\text{OD}\,\text{Sin.}\delta\ ;$$

d'où

$$\frac{\text{OA}}{\text{Cosec.}\alpha}=\frac{\text{OB}}{\text{Cosec.}\beta}=\frac{\text{OC}}{\text{Cosec.}\gamma}=\frac{\text{OD}}{\text{Cosec.}\delta}\ ;$$

de sorte que la question se réduit à trouver un point O, dont les distances aux quatre points donnés soient respectivement proportionnelles aux cosécantes des quatre angles donnés.

Or, on sait que, si sur la distance entre les centres de similitude directe et inverse de deux cercles, prise pour diamètre, on décrit un troisième cercle, sa circonférence sera le lieu géométrique de tous les points du plan des deux premiers dont les distances à leurs centres seront respectivement proportionnelles à leurs rayons ; et ce sera aussi le lieu géométrique de tous les points de leur plan d'où on les verra sous des angles égaux ; d'où il résulte évidemment que le lieu géométrique de tous les points de l'espace dont les distances aux centres de deux sphères données sont respectivement proportionnelles à leurs rayons, ou, ce qui revient au même, le lieu géométrique de tous les points de l'espace desquels on peut voir ces deux sphères sous un même angle est une troisième sphère ayant pour diamètre la distance entre les centres de similitude directe et inverse des deux premières.

En conséquence, la solution du problème proposé se réduit à ce qui suit : Des points donnés A, B, C, D, pris successivement pour centres et avec des rayons arbitraires, mais respectivement proportionnels aux cosécantes des angles donnés α, β, γ, δ, soient décrites quatre sphères ; soient décrites ensuite trois autres sphères ayant respectivement pour diamètres les distances entre les centres de similitude directe et inverse des sphères dont les centres sont D et A, D et B, D et C ; ces trois dernières se couperont en deux points, centres d'autant de sphères résolvant le problème proposé.

Les centres de ces deux sphères étant ainsi déterminés, rien ne sera plus facile que d'en assigner les rayons respectifs; car, pour chacune, en joignant son centre au point D, par exemple, par une droite et menant par ce même point D une autre droite faisant avec celle-là un angle égal à δ, la perpendiculaire abaissée de ce centre sur cette dernière droite sera le rayon cherché.

Si les angles donnés α, β, γ, δ, étaient égaux entre eux, les trois sphères qui, par leur intersection, déterminent le centre de la sphère cherchée se réduiraient à des plans perpendiculaires sur les milieux des trois droites DA, DB, DC; ce centre serait donc le même que le centre de la sphère passant par les quatre points A, B, C, D; ce qui est d'ailleurs évident.

En considérant que l'on peut raisonner sur les trois autres points comme nous l'avons fait sur le point D, on conclura de tout ceci le théorème suivant:

THÉORÈME II. Des sommets d'un tétraèdre donné, pris pour centres, soient décrites quatre sphères, ayant leurs rayons respectivement proportionnels aux cosécantes de quatre angles donnés α, β, γ, δ. *Si, sur les distances entre les centres de similitude directe et inverse de ces sphères, considérées deux à deux, prises pour diamètres, on décrit successivement six autres sphères, ces dernières se couperont toutes aux deux mêmes points, centre de deux nouvelles sphères telles que les cônes circonscrits qui auront leurs sommets aux quatre sommets du tétraedre, auront leurs angles générateurs respectivement égaux aux quatre angles donnés* α, β, γ, δ.

On peut dire aussi plus brièvement:

Le centre de la sphère qui est vue de quatre points de l'espace, sous quatre angles donnés, est le point duquel on verrait, sous le même angle, quatre autres sphères qui auraient pour centres les points donnés, et dont les rayons seraient respectivement proportionnels aux cosécantes des moitiés des angles donnés.