

---

---

# ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

VALLÈS

CAMILLE PAGLIANI

PAUL MARTINELLI

**Solution des problèmes de géométrie énoncés à la pag.  
152 du présent volume**

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 20 (1829-1830), p. 305-315

[http://www.numdam.org/item?id=AMPA\\_1829-1830\\_\\_20\\_\\_305\\_1](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__305_1)

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

*Solution des problèmes de géométrie énoncés  
à la pag. 152 du présent volume ;*

Par M. VALLÈS, ingénieur des ponts et chaussées, ancien  
élève de l'École polytechnique,

Et MM. Camille PAGLIANI et Paul MARTINELLI, cadets au  
Corps royal des Pionniers, à Modène.

~~~~~

**I**L est bien connu, et il est d'ailleurs bien facile de démontrer (\*\*),  
1.° *Que le lieu de tous les points du plan de deux cercles des-  
quels on voit ces deux cercles sous des angles égaux est la cir-*

---

(\*\*) *Annales*, tom. XI, pag. 364.

conférence d'un troisième cercle, ayant pour diamètre la droite qui joint les centres de similitude directe et inverse des deux premiers ;

2.° Que si, sur les droites qui joignent les centres de similitude directe et inverse de trois cercles, situés dans un même plan et considérés deux à deux, prises pour diamètres, on décrit trois nouveaux cercles, les circonférences de ces derniers se couperont toutes trois aux deux mêmes points, seuls points du plan des trois premiers desquels ils puissent être vus sous des angles égaux ;

3.° Que le lieu des points de l'espace desquels on peut voir deux sphères données sous des angles égaux, est une troisième sphère, ayant pour diamètre la droite qui joint les centres de similitude directe et inverse des deux premières ;

4.° Que si, sur les droites qui joignent les centres de similitude directe et inverse de trois sphères, considérées deux à deux, prises pour diamètres, on décrit trois nouvelles sphères, ces dernières se couperont toutes trois suivant une même circonférence, lieu des points de l'espace desquels les trois premières sphères pourront être vues sous des angles égaux ;

5.° Qu'enfin si, sur les droites qui joignent les centres de similitude directe et inverse de quatre sphères, considérées tour à tour, deux à deux, prises pour diamètres, on décrit six nouvelles sphères, ces dernières se couperont trois à trois suivant quatre cercles passant tous par les deux seuls points de l'espace, desquels il soit possible de voir les quatre sphères données sous des angles égaux (\*).

Comme, dans la géométrie de situation, les angles circonscrits à des cercles et les surfaces coniques circonscrites à des sphères sont remplacés par des droites inscrites à ces cercles ou des cer-

(\*) Des points infiniment distans de plusieurs cercles ou de plusieurs sphères sont aussi des points desquels ces cercles et ces sphères sont vus sous des angles égaux, puisqu'on les voit de là sous des angles nuls.

cles inscrits à ces sphères ; et, comme les points qui décrivent des courbes planes ou à double courbure s'y trouvent remplacés par des droites enveloppant une même courbe, ou par des plans enveloppant une même surface développable, on voit de suite que, dans cette même géométrie de situation, les cinq propositions que nous venons de rappeler doivent avoir leurs corrélatives, que les notes qui nous ont été adressées ont pour objet d'établir ; ces notes ne présentant d'ailleurs, comparées les unes aux autres, que des différences assez légères, nous croyons faire une chose convenable en les fondant toutes dans une rédaction unique.

Soient  $C$  et  $C'$  deux cercles donnés sur un même plan et desquels  $C'$  soit le plus petit, s'ils sont inégaux. Soient  $r$  et  $r'$  leurs rayons respectifs ; soit pris le centre de  $C'$  pour origine des coordonnées rectangulaires et soit  $(a, b)$  le centre de  $C$ .

Soit

$$y = Mx + G ;$$

l'équation d'une droite mobile sur le plan de ces deux cercles, dans laquelle  $M$  et  $G$  sont deux paramètres. Si nous représentons par  $p$  et  $p'$  les longueurs des perpendiculaires abaissées sur cette droite des centres des deux cercles, nous aurons

$$p = \pm \frac{b - Ma - G}{\sqrt{1 + M^2}}, \quad p' = \pm \frac{G}{\sqrt{1 + M^2}} ;$$

Si l'on veut que les deux cercles interceptent, sur cette droite, des cordes de même longueur, il faudra que la différence des carrés des perpendiculaires  $p$  et  $p'$  soit égale à la différence des carrés des rayons  $r$  et  $r'$ , ce qui donnera

$$\frac{(b - Ma - G)^2 - G^2}{1 + M^2} = r^2 - r'^2 ,$$

ou bien

$$(b-Ma)^2 - 2G(b-Ma) = (r^2 - r'^2)(1 + M^2) ;$$

telle est donc la relation qui doit exister entre les deux paramètres  $M$  et  $G$ , pour que cette condition soit satisfaite.

Puisque, dans cette équation,  $G$  n'entre plus qu'à la première puissance, on se trouve naturellement conduit à en tirer la valeur, pour la substituer dans l'équation de la droite mobile qui, de la sorte, ne renfermera plus que le seul paramètre  $M$ . On trouve ainsi

$$2(b-Ma)(y-Mx) = (b-Ma)^2 - (r^2 - r'^2)(1 + M^2) ;$$

ou bien en développant et ordonnant

$$\{2ax - a^2 + (r^2 - r'^2)\}M^2 - 2(bx + ay - ab)M + \{2by - b^2 + (r^2 - r'^2)\} = 0 ;$$

On voit donc, à cause de l'indétermination de  $M$ , qu'il y a généralement sur le plan de deux cercles, une infinité de droites sur lesquelles ces cercles interceptent des cordes de même longueur.

Si présentement on veut savoir à quelle courbe toutes ces droites sont tangentes, il ne s'agira, comme l'on sait, que d'éliminer  $M$  entre cette équation et sa dérivée, prise uniquement par rapport à cette lettre. Or, cette dérivée est

$$\{2ax - a^2 + (r^2 - r'^2)\}M - (bx + ay - ab) = 0 ;$$

d'où, en multipliant par  $M$  et retranchant de l'équation ci-dessus,

$$(bx + ay - ab)M - \{2by - b^2 + (r^2 - r'^2)\} = 0 ;$$

et, en éliminant  $M$  entre ces deux-ci,

$$(bx+ay-ab)^2 - \{2ax-a^2+(r^2-r'^2)\}\{2by-b^2+(r^2-r'^2)\} = 0 ;$$

ou bien encore

$$(bx-ay)^2 - (2ax+2by-a^2-b^2)(r^2-r'^2) - (r^2-r'^2)^2 = 0 ;$$

équation que l'on voit appartenir à une parabole.

Pour juger plus aisément de la grandeur et de la situation de la courbe, supposons que nous ayons fait passer l'axe des  $x$  par les centres des deux cercles; alors nous aurons  $b=0$ , et  $a$  deviendra la distance entre ces centres; l'équation sera, dans ce cas,

$$[a^2y^2 = (r^2-r'^2)\{2ax-a^2+(r^2-r'^2)\}] ,$$

qu'on pourra écrire ainsi

$$y^2 = \frac{r^2-r'^2}{\frac{1}{2}a} \left( x - \frac{1}{2}a + \frac{r^2-r'^2}{2a} \right) .$$

L'équation, mise sous cette forme, nous montre que l'axe de la parabole est dirigé suivant la droite qui joint les centres des deux cercles, que son sommet se trouve sur cette droite, à une distance du centre du plus petit, exprimée par

$$\frac{1}{2}a - \frac{r^2-r'^2}{2a} ,$$

et que son paramètre a pour expression

$$\frac{r^2-r'^2}{\frac{1}{2}a} ;$$

d'où il suit que la distance de son sommet à son foyer est

$$\frac{r^2 - r'^2}{2a},$$

et qu'ainsi son foyer se trouve à la distance  $\frac{1}{2}a$  du centre du plus petit des deux cercles; c'est-à-dire, au milieu de la droite qui joint les centres de l'un et de l'autre.

Les équations des deux cercles sont, dans le cas actuel,

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2, \quad x^2 + y^2 = r'^2;$$

en retranchant ces équations l'une de l'autre, on obtiendra, pour l'équation de leur corde commune, réelle ou idéale, c'est-à-dire, de leur *axe radical*

$$2ax - a^2 + (r^2 - r'^2) = 0,$$

qui donne, pour l'intersection de cet axe radical avec la droite qui joint les centres

$$x = \frac{1}{2}a - \frac{r^2 - r'^2}{2a};$$

valeur identique avec celle que nous avons trouvé plus haut pour la position du sommet; et c'est qu'en effet la corde commune aux deux cercles est évidemment une droite sur laquelle ces deux cercles interceptent des segmens de même longueur. On voit aussi, sans qu'il soit besoin d'en faire le calcul, que toute tangente commune aux deux cercles sera aussi tangente à la parabole, puisqu'une tangente commune est une droite sur laquelle les deux cercles interceptent des segmens d'une longueur nulle.

On a donc ce théorème:

1. *La courbe que touche constamment une droite qui se meut*

*sur le plan de deux cercles, de telle sorte que ces deux cercles interceptent sur elle des cordes de même longueur, est une parabole dont l'axe passe par les centres de ces deux cercles. Cette parabole a son foyer au milieu de la droite qui joint les centres des deux cercles, et son sommet au point où cette droite est coupée par leur axe radical.*

Soient présentement trois cercles  $C, C', C''$ , tracés sur un même plan, et dont  $C''$  soit le plus petit, s'ils sont inégaux. Soient décrites deux paraboles l'une  $P$  ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de  $C'$  et  $C''$  et son sommet au point où cette droite est coupée par leur axe radical, et l'autre  $P'$ , ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de  $C$  et  $C''$  et son sommet au point où cette droite est coupée par leur radical.

D'après ce qui vient d'être dit ci-dessus, les cercles  $C'$  et  $C''$  intercepteront des cordes de même longueur sur toute tangente à la parabole  $P$ ; et les cercles  $C$  et  $C''$  intercepteront pareillement des tangentes de même longueur sur toute tangente à la parabole  $P'$ ; donc les trois cercles  $C, C', C''$  intercepteront des tangentes de même longueur sur toute tangente commune aux deux paraboles  $P$  et  $P'$ .

Mais, si l'on construit une troisième parabole  $P''$  ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de  $C$  et  $C'$ , et son sommet au point où cette droite est coupée par leur axe radical; toute droite sur laquelle les cercles  $C$  et  $C'$  intercepteront des tangentes de même longueur, et par suite toute tangente commune aux paraboles  $P$  et  $P'$  devra être tangente à cette troisième parabole. Ces trois paraboles pourront donc être touchées par une même droite sur laquelle les trois cercles intercepteront des cordes de même longueur. Il est d'ailleurs aisé de voir qu'à deux paraboles tracées sur un même plan, on ne peut mener que trois tangentes communes au plus.

On a donc ce théorème :



II. *Trois cercles étant tracés sur un même plan ; si, pour chaque couple de cercles, on décrit une parabole dont le foyer soit le milieu de la droite qui joint leurs centres, et le sommet le point où cette droite est coupée par leur axe radical ; les trois paraboles ainsi décrites auront trois tangentes communes, au plus, sur chacune desquelles les trois cercles intercepteront des cordes de même longueur.*

Du théorème I.<sup>er</sup> il est facile de conclure le suivant :

III. *Si un plan se meut dans l'espace de telle sorte que deux sphères fixes interceptent constamment sur lui deux cercles de même rayon, ce plan sera, dans son mouvement, toujours tangent à un parabolôïde de révolution dont l'axe passera par les centres des deux sphères. Ce parabolôïde aura son foyer au milieu de la droite qui joint ces centres, et son sommet au point où cette droite sera coupée par le plan radical des deux sphères.*

Soit présentement trois sphères  $S, S', S''$ , dont  $S''$  soit la plus petite si elles sont inégales. Soient construits deux parabolôïdes de révolution, l'un  $P$  ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de  $S'$  et  $S''$ , et son sommet au point où cette droite est coupée par leur plan radical, et l'autre  $P'$ , ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de  $S$  et  $S''$ , et son sommet au point où cette droite est coupée par leur plan radical.

D'après le théorème III, les deux sphères  $S'$  et  $S''$  intercepteront des cercles de même rayon sur tout plan tangent au parabolôïde  $P$  ; et les deux sphères  $S$  et  $S''$  intercepteront pareillement des cercles de même rayon sur tout plan tangent au parabolôïde  $P'$  ; donc les trois sphères  $S, S', S''$  intercepteront des cercles de même rayon sur tout plan tangent commun aux deux parabolôïdes  $P$  et  $P'$ , et par conséquent sur tout plan tangent à la surface développable circonscrite à ces deux parabolôïdes, laquelle aura trois nappes au plus.

Mais si l'on construit un troisième parabolôide de révolution  $P''$ , dont le foyer soit le milieu de la droite qui joint les centres de  $S$  et  $S'$ , et le sommet le point où cette droite est coupée par le plan radical de ces deux sphères, tout plan sur lequel  $S$  et  $S'$  intercepteront des cercles de même rayon, et par suite tout plan tangent commun aux parabolôides  $P$  et  $P'$ , ou encore tout plan tangent à la surface développable circonscrite, devra être tangent à ce troisième parabolôide; et par suite il devra être aussi tangent et à la surface développable circonscrite à  $P$  et  $P''$  et à la surface développable circonscrite à  $P'$  et  $P''$ , lesquelles devront ainsi être les mêmes que la surface développable circonscrite à  $P$  et  $P'$ ; les trois parabolôides  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$  seront donc inscriptibles à une même surface développable; et les trois sphères  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$  intercepteront sur tout plan tangent à cette dernière surface, lequel sera aussi tangent aux trois parabolôides des cercles de même rayon.

On a donc ce théorème :

*IV. Trois sphères étant données dans l'espace, si, pour chaque couple de sphère, on construit un parabolôide de révolution, ayant pour foyer le milieu de la droite qui joint leurs centres, et pour sommet le point où cette droite est coupée par leur plan radical; les trois parabolôides ainsi conditionnés seront inscriptibles à une seule et même surface développable, ayant trois nappes au plus; et les trois sphères intercepteront sur tout plan tangent à cette surface, lequel sera aussi tangent aux trois parabolôides, des cercles de même rayon (\*).*

Soient enfin  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$  quatre sphères données dans l'espace,

---

(\*) M. Paul Martinelli, qui a pris la peine de calculer l'équation de cette surface développable, l'a trouvée du sixième degré; ce qui s'accorde parfaitement avec l'existence de ses trois nappes.

dont  $S'''$  soit la plus petite, si elles sont inégales. Soient construits trois paraboloides de révolution; savoir : un paraboloïde ( $PP'''$ ) ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de  $S$  et  $S'''$ , et son sommet au point où cette droite est coupée par leur plan radical; un paraboloïde ( $P'P'''$ ) ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de  $S'$  et  $S'''$ , et son sommet au point où cette droite est coupée par leur plan radical; enfin un paraboloïde ( $P''P'''$ ) ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de  $S''$  et  $S'''$ , et son sommet au point où cette droite est coupée par leur plan radical.

D'après ce qui précède, les deux sphères  $S$  et  $S'''$  intercepteront des cercles de même rayon sur tout plan tangent au paraboloïde ( $PP'''$ ); et il en sera de même des deux sphères  $S'$  et  $S'''$ , par rapport à tout plan tangent au paraboloïde ( $P'P'''$ ), ainsi que des deux sphères  $S''$  et  $S'''$ , par rapport au paraboloïde ( $P''P'''$ ). Donc, si un même plan touche à la fois les trois paraboloides ( $PP'''$ ), ( $P'P'''$ ), ( $P''P'''$ ), les quatre sphères  $S, S', S'', S'''$  intercepteront sur ce plan des cercles de même rayon.

Mais, parce que les trois sphères  $S, S', S''$  intercepteront sur ce plan des cercles de même rayon, il devra toucher à la fois les trois paraboloides de révolution ( $P/P''$ ), ( $P/P'$ ), ( $PP'$ ) ainsi que la surface développable qui peut leur être circonscrite; donc, ce plan touchera à la fois les six paraboloides de révolution ( $PP'''$ ), ( $P'P'''$ ), ( $P''P'''$ ), ( $P/P''$ ), ( $P/P'$ ), ( $PP'$ ), ainsi que les quatre surfaces développables qui peuvent être circonscrites à ces paraboloides pris trois à trois.

On a donc ce théorème :

V. *Quatre sphères étant données dans l'espace; si, pour chaque couples de sphères, on construit un paraboloïde de révolution dont le foyer soit au milieu de la droite qui joint les centres de ces deux sphères, et dont le sommet soit au point où cette droite est coupée par leur plan radical; les paraboloides relatifs aux*

## QUESTIONS PROPOSÉES.

315

*Trois mêmes sphères seront inscriptibles à une seule et même surface développable ; les surfaces développables ainsi déterminées pourront, toutes quatre, être touchées par un seul et même plan, lequel touchera aussi les six paraboloides, et les quatre sphères intercepteront, sur un tel plan, des cercles de même rayon (\*).*

---

---

---

(\*) Il resterait à savoir combien, pour ces quatre sphères, il peut exister de pareils plans au plus.