ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Optique. Essai analytique sur le phénomène du mirage

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 1-31
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__1_0>

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

OPTIQUE.

Essai analytique sur le phénomène du mirage ;

Par M. GERGONNE.

I. DANS les cas les plus ordinaires, les couches atmosphériques de densité uniforme sont sensiblement sphériques et concentriques, et leur centre commun est le centre même de la terre. Mais lorsqu'on ne considère que la portion de l'atmosphère qui repose sur un sol peu étendu, on peut, sans erreur sensible, supposer ces couches planes et horizontales, et c'est ainsi que nous en userons constamment dans tout ce qui va suivre. Communément ces couches, comprimées par le poids de toutes celles qui leur sont supérieures, sont d'autant plus denses qu'elles sont plus basses ; et l'on démontre même fort aisément que, si elles avaient toutes la même température, leur hauteur croissant en progression par différences, leur densité décroîtrait en progression par quotiens ; mais, d'un autre côté, il est visible que ces couches doivent être d'autant plus échauffées, et, par suite, d'autant plus dilatées, toutes choses égales d'ailleurs, qu'elles sont plus voisines du sol ; voilà donc une cause de condensation et une cause de dilatation qui se contrarient, et de la combinaison desquelles il résulte que les couches inférieures doivent être plus dilatées et conséquemment moins denses, et que les couches supérieures, au contraire, doivent être moins dilatées et conséquemment plus denses qu'elles ne le seraient si la température se trouvait uniformément répartie dans toute la masse; ce qui doit rendre le décroissement de densité de bas en haut, moins rapide qu'il ne le serait dans le même cas.

On conçoit même que, dans certaines localités, dont le sol est susceptible de s'échauffer fortement dans le milieu du jour, par l'action des rayons solaires, il peut se faire que la chaleur qu'il communique aux couches atmosphériques les plus basses y produise une dilatation qui compense ou même fasse plus que compenser la densité que tend à leur faire acquérir la pression à laquelle elles sont soumises; et alors la densité de ses couches pourra fort bien être constante ou même croissante de bas en haut, jusqu'à une certaine hauteur au-delà de laquelle elle deviendra décroissante. Il ne serait même pas impossible que, dans des circonstances probablement fort rares, la densité des couches fût alternativement croissante et décroissante, de manière à présenter, le long d'une même verticale, plusieurs *maxima* et *minima* ; or, ce sont toutes ces variétés de circonstances, comme nous le verrons bientôt, qui donnent naissance à cette multiplicité d'images d'un même objet qui constitue proprement le phénomène du mirage, ainsi qu'à beaucoup d'autres phénomènes non moins piquans, dont quelques-uns, à la vérité, n'ont point encore été observés, mais que le calcul, dévançant ici l'observation, comme en tant d'autres rencontres, ne nous montre pas moins comme très-possibles.

II. Lorsqu'un milieu transparent se trouve ainsi composé de couches horizontales de densité uniforme ; les rayons émanés, dans toutes les directions d'un même point lumineux, qui s'y trouve plongé, décrivent évidemment des courbes planes, situées dans tous les plans verticaux qu'on peut concevoir par ce point, et ces rayons sont en nombre infini dans chacun de ces plans. Il n'est pas moins évident que ceux d'entre ces rayons, dont la direction initiale fait le même angle avec la verticale conduite par le point lumineux, ont exactement la même courbure et sont situés de la même manière, dans leurs plans verticaux respectifs; d'où il résulte que tous les rayons émanés de ce point sont distribués sur une série de surfaces de révolution, ayant pour axe commun la verticale conduite par le point rayonnant, point commun à toutes ces surfaces, dont ces mêmes rayons sont les méridiens. Il suffit donc d'étudier ce qui se passe dans l'un quelconque des plans verticaux conduits par ce point, pour connaître ce qui se passe dans tous les autres.

III. Considérons donc, en particulier, un quelconque de ces plans, dans lequel soient tracés, par le point rayonnant, un axe des x horizontal et un axe des y vertical. Concevons que, par chacun des points de ce dernier axe, on lui élève une perpendiculaire d'une longueur proportionnelle à la densité du milieu en ce point; les extrémités des perpendiculaires, ainsi élevées, appartiendront toutes à une certaine courbe que nous avons appelée la *caractéristique* du milieu, dans notre mémoire de 1808, parce qu'en effet elle est fort propre à en peindre aux yeux la nature. On pourra, au surplus, augmenter ou diminuer, d'une même quantité quelconque, toutes les coordonnées de cette courbe parallèles à l'axe des x, car cela reviendra simplement à admettre que l'on a augmenté ou diminué, d'une même quantité, la densité du milieu, en tous ses points; ce qui, comme l'on sait, ne saurait altérer en aucune sorte la figure des rayons lumineux (*). On pourra donc aussi faire marcher

(*) Il est pourtant essentiel de remarquer que si une augmentation ou une diminution constante quelconque dans la densité du milieu, en tous ses cette caractéristique parallèlement à elle-même, dans le sens des x; et nous profiterons à l'avenir de cette liberté pour la faire constamment passer par l'origine.

IV. Ces choses ainsi entendues, soit u la densité du milieu, à la hauteur y; cette densité sera une certaine fonction de y; de sorte qu'on pourra poser, en général,

$$u=\psi(y) \; ; \qquad (1)$$

y et u devant être nuls en même temps; et cette équation, en considérant les u comme des coordonnées parallèles aux x, sera aussi celle de la caractéristique. On aura ainsi (tom. XIX, pag. 270)

$$P=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0 \, , \qquad Q=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \; ;$$

en conséquence, les équations du mouvement d'une moléeule lumineuse seront (*ibid.*, pag. 282)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=0 \, , \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=2k^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \; ; \qquad (2)$$

---

points, ne peut changer la figure des rayons lumineux, elle est loin toutefois d'être sans influence sur l'acte de la vision. Si, en effet, le milieu devient très-dense, les humeurs dont l'œil se compose, lesquelles ne réfractent la lumière qu'à raison de l'excès de leur densité sur celle de l'air ambiant, réfracteront alors trop faiblement les rayons émanés du point lumineux qui, de la sorte, paraîtra plus voisin qu'il ne le sera réellement, et même pourra le paraître assez pour n'être vu que d'une manière confuse. Le contraire arriverait, si le milieu devenait très-rare en tous ses points. Un presbyte l'est donc d'autant plus et un myope d'autant moins que la colonne barométrique est plus élevée; et le myope lui-même devient presbyte lorsqu'il plonge dans l'eau.

k^2 ayant ici la même signification qu'à la pag. 262 du mémoire cité. On pourra d'ailleurs y joindre, comme s'y trouvant implicitement comprise (*ibid.*, pag. 273) l'équation

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=w^2+4k^2u\,, \qquad (3)$$

dans laquelle w représente toujours la vîtesse de la lumière dans le vide.

V. En multipliant par $2\mathrm{d}y$ la dernière des équations (2) elle devient

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=4k^2\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y=4k^2\mathrm{d}u\,;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=A+4k^2u\,;$$

A étant la constante arbitraire, Cela revient à

$$\mathrm{d}y^2=(A+4k^2u)\mathrm{d}t^2\,;$$

mais l'équation (3) donne

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=(w^2+4k^2u)\mathrm{d}t^2\,;$$

éliminant donc $\mathrm{d}t^2$ entre ces deux équations, nous obtiendrons, pour l'équation différentielle du rayon lumineux,

$$(w^2-A)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=A+4k^2u\,. \qquad (4)$$

Pour faire disparaître la constante A, désignons par m la tangente tabulaire de l'angle que fait la direction initiale du rayon lumineux avec l'axe des x; alors on devra avoir à la fois, $y=0$ et $\frac{dy}{dx}=m$; et puisque nous sommes convenus de faire constamment passer la caractéristique par l'origine, on aura aussi alors $u=0$. En conséquence l'équation (4) deviendra

$$m^2(\varpi^2-A)=A\ ,$$

d'où

$$A=\frac{m^2\varpi^2}{1+m^2}\ ,\qquad \varpi^2-A=\frac{\varpi^2}{1+m^2}\ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\varpi^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=m^2\varpi^2+4(1+m^2)k^2u\ ;$$

posant donc, une fois pour tout, pour abréger

$$\frac{\varpi}{2k}=\lambda\ , \qquad (5)$$

cette équation deviendra

$$\lambda^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\lambda^2m^2+(1+m^2)u\ ; \qquad (6)$$

ce qui donnera, en différentiant,

$$2\lambda^2\frac{d^2y}{dx^2}=(1+m^2)\frac{du}{dy}\ ; \qquad (7)$$

on tirera d'ailleurs de l'équation (6)

$$dx=\frac{\lambda dy}{\sqrt{\lambda^2m^2+(1+m^2)u}}\ ; \qquad (8)$$

équation séparée, dont l'intégration ne dépend plus que des quadratures.

VI. Les équations (6) et (7) mettent en évidence des relations entre la courbure de la caractéristique et celle du rayon lumineux qu'il est bon de remarquer en passant. Observons d'abord qu'une même tranche horizontale du milieu ne pouvant jamais avoir, à la fois, deux densités différentes, il s'ensuit qu'à une même valeur quelconque de y ne sauraient répondre, à la fois, plusieurs valeurs de u; ce qui revient à dire qu'une parallèle quelconque à l'axe des x, ne saurait couper la caractéristique en plus d'un point. Or, l'équation (6) prouve qu'à chaque valeur de u répondent seulement pour $\frac{dy}{dx}$, deux valeurs égales et de signes contraires; il n'en répondra donc pas davantage à chaque valeur de y; ce qui revient à dire que, si une parallèle à l'axe des x est coupée par le rayon lumineux en plusieurs points, elle le sera sous les mêmes angles en tout ces points, abstraction faite du signe qui évidemment devra être alternativement positif et négatif, et conséquemment une telle droite ne pourra couper le rayon lumineux en certains points et le toucher en d'autres; ainsi, ou le rayon lumineux coupera une telle parallèle en deux points seulement, auquel cas ce rayon sera symétrique par rapport à une certaine verticale, ou bien il serpentera continuellement autour de cette droite, et alors il se trouvera entièrement compris entre deux autres droites parallèles à celles-là, qu'il ira toucher alternativement. Cette même équation (6) prouve d'ailleurs que, tant que m n'est pas nulle, c'est-à-dire, tant que la direction initiale du rayon n'est point horizontale, sa tangente ne saurait devenir parallèle à l'axe des x que dans les régions pour lesquelles u est négative; elle prouve également que, tant que la direction initiale du rayon n'est point verticale, sa tangente ne saurait devenir perpendiculaire à l'axe des x que dans les points pour lesquels on aurait u infinie.

Puisqu'à chaque valeur de y il ne saurait répondre qu'une seule valeur de u, il n'en répondra qu'une non plus de $\frac{du}{dy}$; et l'équation (7) prouve qu'il n'en répondra également qu'une seule de $\frac{d^2y}{dx^2}$; ainsi, jamais deux branches de la courbe, affectée par un même rayon, ne pourront être tangentes l'une à l'autre. Cette même équation (7) prouve, en outre, que $\frac{du}{dy}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont constamment de même signe, qu'ils croissent et décroissent, deviennent nuls et infinis en même temps ; ce qui revient à dire qu'aux *maxima* et *minima* de densité du milieu répondent des points d'inflexion du rayon, et que la courbure de ce rayon devient infinie pour les points où la tangente à la caractéristique devient horizontale.

VII. On voit qu'au moyen de l'équation (8) la caractéristique étant donnée, on peut en conclure la nature de la courbe affectée par le rayon. On peut aussi, à l'aide de la même équation, se proposer de résoudre la question inverse, c'est-à-dire, celle où l'on demanderait quelle caractéristique, et conséquemment quelle nature de milieu, peut donner naissance à un rayon dont la nature et la situation sont données; et nous traiterons d'autant plus volontiers cette question, avant l'autre, qu'elle n'a besoin pour être résolue, que de la simple application du calcul différentiel, tandis que la résolution de la première réclame impérieusement l'emploi du calcul intégral; mais voyons auparavant, comment on peut déduire, de l'observation directe, la figure d'un rayon lumineux.

VIII. Concevons que, dans une plaine d'une certaine étendue, à peu près horizontale, on ait tracé une rigole rectiligne, assez profonde pour qu'en y introduisant de l'eau, le fond n'en soit découvert en aucun point; on aura ainsi une surface rigoureusement horizontal (*). Soient plantés, le long de cette rigole et dans un même plan vertical, une suite de jalons verticaux, susceptibles d'être plus ou moins allongés vers le haut, au moyen d'une tige à crémaillère, mue par un pignon, à peu près comme on le voit dans nos lampes à courant d'air, soit par tout autre moyen équivalent; et soit mise cette disposition à profit pour les ajuster, de telle sorte, que leurs extrémités supérieures *paraissent*, à l'œil, être toutes en ligne droite; on sera certain alors que ces extrémités sont toutes situées sur la courbe qu'affecte l'un des rayons lumineux qui partent de l'extrémité supérieure de l'un des jalons extrêmes. Soient alors mesurées exactement tant les distances entre les jalons consécutifs que la hauteur de chacun au-dessus du niveau de l'eau, on obtiendra de la sorte les coordonnées d'un plus ou moins grand nombre de points de la courbe affectée par le rayon lumineux; d'où, par les méthodes connues d'interpolation, on pourra conclure l'équation de cette courbe. Il faudra seulement, pour ramener l'origine à l'extrémité supérieure de l'un des jalons extrêmes, compter les x à partir du pied de ce jalon, et diminuer ensuite les y de toute sa hauteur.

IX. Ces choses ainsi entendues, supposons, en général, qu'en opérant de la sorte on ait trouvé, pour l'équation de la courbe décrite par le rayon,

$$y=\varphi(x)\ ; \qquad (9)$$

équation dans laquelle y doit être nulle en même temps que x; on en conclura

(*) On conçoit que, dans la présente hypothèse, où la lumière ne se meut pas en ligne droite, tous les moyens ordinaires de nivellement employés dans la vue de se procurer une telle surface, seraient tout-à-fait illusoires.

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)\,, \qquad \text{d'où} \qquad m=\varphi'(0)\ ;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (6), elle deviendra

$$\lambda^2\{\varphi'^2(x)-\varphi'^2(0)\}=\{1+\varphi'^2(0)\}u\ ;$$

d'où on tirera

$$u=\frac{\lambda^2\{\varphi'^2(x)-\varphi'^2(0)\}}{1+\varphi'^2(0)}\ ; \qquad (10)$$

mettant donc pour x, dans cette dernière formule, sa valeur en y, tirée de l'équation (9), on obtiendra ainsi la valeur de u en fonction de y, c'est-à-dire l'équation de la caractéristique.

X. Donnons des exemples de l'application de ce procédé. Supposons d'abord que l'observation ait donné, pour la figure du rayon, une droite ayant pour équation

$$y=\varphi(x)=\mu x\ ;$$

il en résultera

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)=\mu\,, \qquad \text{d'où} \qquad m=\varphi'(0)=\mu\ ;$$

substituant ces valeurs dans la formule (10), elle deviendra

$$u=\frac{\lambda^2(\mu^2-\mu^2)}{1+\mu^2}=0\,;$$

résultat qui ne renferme plus x et qui nous apprend qu'ici la caractéristique est l'axe des y ou une parallèle à cet axe ; ce qui revient à dire que les rayons de lumière non verticaux ne sauraient être rectilignes que dans un milieu de densité constante; ce qui était d'ailleurs facile à prévoir.

Supposons, pour second exemple, qu'on ait trouvé, pour la figure du rayon, une parabole ayant son axe vertical et exprimée par l'équation

$$y=\varphi(x)=\frac{2gx+x^2}{2h} \;;$$

il en résultera

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x)=\frac{g+x}{h}\;, \qquad \text{d'où} \qquad m=\varphi'(0)=\frac{g}{h}\;;$$

substituant ces valeurs dans la formule (10), elle deviendra

$$u=\frac{\lambda^2(2gx+x^2)}{g^2+h^2}\;;$$

éliminant enfin x ou, ce qui revient au même, $2gx+x^2$ de cette dernière formule, au moyen de l'équation du rayon lumineux, il viendra, pour l'équation de la caractéristique,

$$u=\frac{2\lambda hy}{g^2+h^2}\;;$$

c'est-à-dire qu'ici la caractéristique est une droite inclinée à l'axe des y; ce qui revient à dire que la densité des couches du milieu croît ou décroît proportionnellement à leur élévation au-dessus du sol. Ce n'est donc que dans un milieu ainsi constitué que les rayons lumineux peuvent être paraboliques; les résultats obtenus prouvent d'ailleurs que les paraboles tournent constamment leur convexité du côté le moins dense.

XI. Passons présentement à l'autre question, c'est-à-dire à celle où, au contraire, il s'agit de conclure de la nature du milieu la figure de la courbe tracée par le rayon lumineux. On conçoit que, pour cela, il ne sera question que de substituer pour u, dans la formule (8), sa valeur en y donnée par la définition du milieu; d'intégrer ensuite et de déterminer la constante introduite par l'intégration d'après la condition que x et y soient nuls en même temps.

XII. Supposons, pour premier exemple, que la densité du milieu soit constante; la caractéristique sera alors une parallèle à l'axe des y, à laquelle il sera toujours permis (III) de substituer l'axe des y lui-même; on aura ainsi $u=0$; au moyen de quoi l'équation (8) deviendra

$$dx=\frac{dy}{m},$$

d'où

$$x+B=\frac{y}{m};$$

ou simplement

$$y=mx; \qquad (11)$$

puisque x et y doivent être nuls en même temps. Les rayons lumineux sont donc rectilignes dans ce cas, comme on pouvait bien s'y attendre.

Supposons, pour second exemple, que la densité des couches croisse ou décroisse proportionnellement à leurs distances au plan horizontal conduit par le point rayonnant; la caractéristique sera alors une droite passant par l'origine, on pourra donc poser $u=\frac{y}{c}$; c étant une longueur constante, positive ou négative, suivant que la densité sera croissante ou décroissante vers le haut, et d'autant moindre que la variation de densité sera plus rapide. En portant cette valeur de u dans l'équation (8), elle deviendra

$$\mathrm{d}x=\lambda\sqrt{c}.\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\lambda^2m^2c+(1+m^2)y}}\;;$$

dont l'intégrale sera

$$x+B=\frac{2\lambda\sqrt{c}}{1+m^2}\sqrt{\lambda^2m^2c+(1+m^2)y}\;;$$

B étant la constante arbitraire. En exprimant donc que x et y doivent être nuls en même temps, on aura

$$B=\frac{2\lambda\sqrt{c}}{1+m^2}.\lambda m\sqrt{c}\;;$$

d'où, en substituant

$$x=-\frac{2\lambda\sqrt{c}}{1+m^2}\left\{\lambda m\sqrt{c}-\sqrt{\lambda^2m^2c+(1+m^2)y}\right\}\;;$$

En chassant le dénominateur, transposant et faisant disparaître le radical, il vient, en réduisant,

$$(1+m^2)x^2=4\lambda^2c(y-mx)\;; \qquad (12)$$

équation d'une parabole dont l'axe est vertical, dont la concavité regarde le côté vers lequel la densité va croissant, et qui a une courbure d'autant moindre que cette densité varie moins rapidement (*).

Ainsi se trouvent démontrées les réciproques des deux propositions que nous avons établies ci-dessus.

(*) Cette équation est exactement la même que celle de la trajectoire des projectiles dans le vide, et on ne doit pas en être surpris, puisqu'ici, comme là, il s'agit d'une force d'impulsion combinée avec une force accélératrice constante.

XII. Ce qui nous intéresse spécialement est de découvrir de quelle manière s'opérera la vision à travers des milieux constitués comme ceux que nous considérons ici. Pour cela, observons d'abord que, quelle que soit la fonction de y que l'on substitue pour u, dans l'équation (8), en intégrant ensuite cette équation et en déterminant la constante comme nous l'avons dit, on parviendra toujours, pour le rayon lumineux, à une équation de la forme

$$\mathrm{f}(x, y, m)=0\ ; \qquad (13)$$

de sorte que, pour chaque valeur particulière de m, c'est-à-dire, pour chaque direction initiale donnée du rayon lumineux, on pourra toujours, au moyen de cette équation, déterminer le cours entier de la courbe qu'il devra affecter.

Soit un œil plongé dans le milieu, et soit (x', y') le centre de l'ouverture de sa prunelle. Si, considérant m, dans l'équation (13), comme un paramètre indéterminé, on veut profiter de son indétermination pour assujétir le rayon parti de l'origine à passer par le point (x', y'), il faudra écrire que les coordonnées de ce point satisfont à l'équation (13) ; ce qui donnera pour déterminer m, l'équation

$$\mathrm{f}(x', y', m)=0\ . \qquad (14)$$

Pour aller du simple au composé, supposons d'abord que cette équation ne soit, par rapport à m, que du premier degré seulement, ou encore qu'étant d'un degré impair quelconque, par rapport à cette inconnue, elle ne donne jamais pour elle qu'une seule valeur réelle, quelle que puisse être d'ailleurs la situation du point (x', y'). Il s'ensuivra qu'en quelque endroit qu'un œil soit situé, sur le plan des axes, un rayon et un seul rayon émané du point lumineux, parviendra toujours au centre de sa prunelle. Le plan des axes sera donc entièrement couvert par les rayons qui s'y trouveront contenus, et ces rayons, ne se coupant pas les uns les autres, n'auront pas de courbe limite ou d'enveloppe commune.

Si, dans ce cas, on tire de l'équation (14) la valeur de m, pour la substituer dans l'équation (13), l'équation résultante en x, y, x', y', sera l'équation particulière du rayon qui parvient au centre de l'œil, lequel se trouvera ainsi parfaitement déterminé. En lui menant donc une tangente par le point (x', y'), cette tangente indiquera, par sa direction, la direction dans laquelle le point rayonnant *paraîtra* situé, pour un œil placé en (x', y') ; car on sait que les objets sont toujours vus dans la direction de la tangente menée par l'œil au rayon que lui envoyent ces mêmes objets.

Par exemple, dans le cas d'un milieu homogène, ayant trouvé (XII) pour l'équation générale des rayons lumineux

$$y = mx\,,$$

si l'on veut déterminer m de manière que l'un de ces rayons passe par le point (x', y'), il faudra écrire

$$y' = mx'\;;$$

tirant de cette équation la valeur de m, pour la substituer dans la précédente, celle-ci deviendra

$$y = \frac{y'}{x'}x\,, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}\;;$$

l'équation de la tangente menée au rayon par l'œil sera donc

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x')\,, \quad \text{ou simplement} \quad y = \frac{y'}{x'}x\;;$$

c'est-à-dire que cette tangente se confondra avec le rayon lui-même; de sorte que le point rayonnant sera vu dans sa véritable direction.

XIII. Mais c'est peu de savoir dans quelle direction ou sur quelle droite menée par l'œil, le point rayonnant semblera se trouver; et on peut désirer en outre de connaître positivement quel sera le point de cette droite qu'il *paraîtra* occuper, ou ce qu'on appelle autrement le *lieu de l'image* (*). Or, si, par le point (x', y'), on imagine une trajectoire orthogonale de tous les rayons émanés du point lumineux, il est clair que les tangentes menées à ces rayons, par les points où les coupera la trajectoire, seront des normales à cette trajectoire; d'où il suit que, pour un œil situé en (x', y'), ces rayons sembleront diverger du centre de courbure de la trajectoire en ce même point; et puisque, généralement, le lieu de l'image d'un point est l'endroit d'où paraissent diverger, à leur entrée dans l'œil, ceux des rayons émanés de ce point qui y pénètrent, on pourra établir ce théorème général :

THÉORÈME. Lorsque des rayons lumineux, de figure quelconque, émanés d'un même point, sont tous compris dans un même plan, le lieu apparent de ce point, pour un œil situé d'une manière quelconque dans ce plan, est le centre de courbure relatif au lieu de l'œil, de celle des trajectoires orthogonales de tous les rayons lumineux qui le contient.

Il suit évidemment de là que le point rayonnant ne pourra être distinctement aperçu qu'autant que la trajectoire orthogonale de tous les rayons émanés de ce point aura sa convexité tournée vers l'œil. Si, en effet, le contraire arrivait, le centre de courbure de cette courbe étant alors situé derrière le spectateur, les rayons de lumières parviendraient à son œil dans des directions convergentes; il se trouverait donc dans un cas pareil à celui où l'on est lors-

---

(*) M. Biot ne paraît pas s'être occupé de cette question; l'inspection des planches de son ouvrage pourrait même induire les personnes peu versées dans ces matières à penser que le lieu apparent d'un point lumineux est généralement sur le rayon qui parvient de ce point à l'œil, ce qui, au contraire, ne saurait arriver que dans le cas très-particulier où ce rayon est rectiligne, c'est-à dire, dans le cas où le milieu est homogène.

qu'on regarde des objets fort éloignés, en appliquant contre l'œil une lentille extrêmement convexe. Il verrait le point lumineux comme le verrait, dans les circonstances ordinaires, un spectateur excessivement myope.

XIV. Si pour faire l'application de notre théorème il était nécessaire d'obtenir d'abord l'équation de la trajectoire orthogonale des rayons lumineux, le problème pourrait souvent être d'une solution fort embarrassante, car cette trajectoire est donnée immédiatement par une équation différentielle qui peut n'être que difficilement séparable. Heureusement on n'a pas besoin de la courbe même, mais seulement de son centre de courbure répondant au point (x', y') ; et ce centre, comme on va le voir, peut être facilement obtenu par la simple application du calcul différentiel.

Soit toujours (x', y') un des points du rayon unique qui répond à une valeur donnée de m, c'est-à-dire, à une direction initiale donnée du rayon lumineux ; sa tangente en ce point, normale au même point à la trajectoire orthogonale, contiendra le centre de courbure cherché, et sa normale au même point, tangente à cette même trajectoire, pourra, dans des points très-voisins de celui-là, être prise sensiblement pour la trajectoire elle-même. Si donc on passe de ce premier rayon à un autre qui en soit très-voisin, sa tangente, au point où il sera coupé par la normale au premier en (x', y'), pourra être prise sensiblement pour une seconde normale à la trajectoire orthogonale, laquelle coupera la première en un point très-voisin du centre de courbure, et qui deviendra finalement ce point lui-même, si le nouveau rayon lumineux vient à se confondre avec le premier.

Appliquons à cette conception géométrique les procédés de l'analyse ; supposons qu'ayant résolu l'équation du rayon lumineux par rapport à y, cette équation soit alors

$$y=\mathrm{F}(x, m)=X ;$$

on aura ainsi, pour le point (x', y'),

$$y'=X', \qquad (15)$$

d'où

$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{dX'}{dx'}; \qquad (16)$$

en conséquence ; l'équation de la tangente en ce point, normale à la trajectoire au même point, et contenant ainsi le centre de courbure cherché, sera

$$y-y'=\frac{dX'}{dx'}(x-x'), \qquad (17)$$

ou encore

$$y-X'=\frac{dX'}{dx'}(x-x'); \qquad (18)$$

Supposons présentement que le point (x', y') se change en $(x'+\delta x', y'+\delta y')$; et soit $m+\delta m$ la valeur que prend m pour ce nouveau point. La variation de l'équation (17) de la tangente, dans laquelle il faudra traiter comme constantes les coordonnées x et y du centre de courbure, sera, en observant que X' est fonction de x' et m seulement, divisant par δm et réduisant,

$$-\frac{dX'}{dm}=\left\{\frac{d^2X'}{dx'dm}+\frac{d^2X'}{dx'^2}\,\frac{\delta x'}{\delta m}\right\}(x-x')$$

d'où

$$x-x'=-\frac{\dfrac{dX'}{dm}}{\dfrac{d^2X'}{dx'dm}+\dfrac{d^2X'}{dx'^2}\,\dfrac{\delta x'}{\delta m}}; \qquad (19)$$

et par suite (17)

$$y-y'=-\frac{\frac{dX'}{dx'}\;\frac{dX'}{dm}}{\frac{d^2X'}{dx'dm}+\frac{d^2X'}{dx'^2}\;\frac{\delta x'}{\delta m}}\,; \qquad (20)$$

Si présentement on prend la variation de l'équation (15), on aura, en divisant toujours par δm,

$$\frac{\delta y'}{\delta m}=\frac{dX'}{dx'}\;\frac{\delta x'}{\delta m}+\frac{dX'}{dm}\;; \qquad (21)$$

d'un autre côté, si nous supposons que le point $(x'+\delta x', y'+\delta y')$, est sur la normale au rayon lumineux en (x', y'), nous aurons

$$1+\frac{dy'}{dx'}\;\frac{\delta y'}{\delta x'}=0\,, \quad \text{ou bien (16)}, \quad 1+\frac{dX'}{dx'}\;\frac{\delta y'}{\delta x'}=0,$$

où, en multipliant par $\frac{\delta x'}{\delta m}$,

$$\frac{\delta x'}{\delta m}+\frac{dX'}{dx'}\;\frac{\delta y'}{\delta m}=0\,;$$

mettant dans cette dernière équation pour $\frac{\delta y'}{\delta m}$ sa valeur donnée par l'équation (21), elle deviendra

$$\left\{1+\left(\frac{dX'}{dx'}\right)^2\right\}\frac{\delta x'}{\delta m}+\frac{dX'}{dx'}\;\frac{dX'}{dm}=0\,;$$

tirant enfin de cette dernière la valeur de $\frac{\delta x'}{\delta m}$, pour la substituer dans les formules (19) et (20), celles-ci deviendront

$$\left.\begin{aligned}
x-x' &= \frac{\dfrac{dX'}{dm}\left\{1+\left(\dfrac{dX'}{dx'}\right)^2\right\}}{\dfrac{dX'}{dm}\,\dfrac{dX'}{dx'}\,\dfrac{d^2X'}{dx'^2}-\dfrac{d^2X'}{dx'dm}\left\{1+\left(\dfrac{dX'}{dx'}\right)^2\right\}}\,,\\
y-y' &= \frac{\dfrac{dX'}{dx'}\,\dfrac{dX'}{dm}\left\{1+\left(\dfrac{dX'}{dx'}\right)^2\right\}}{\dfrac{dX'}{dm}\,\dfrac{dX'}{dx'}\,\dfrac{d^2X'}{dx'^2}-\dfrac{dX'}{dxdm}\left\{1+\left(\dfrac{dX'}{dx'}\right)^2\right\}}\,;
\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

on déduira donc de ces formules générales, dans chaque cas particulier, les valeurs des coordonnées x, y du lieu de l'image du point lumineux, vu du point (x', y') ; valeurs dans lesquelles il faudra d'ailleurs substituer pour m sa valeur tirée de l'équation (15).

Si l'on représente par r et r' les distances réelles et apparentes de l'œil au point rayonnant, et par θ et θ' les inclinaisons à l'horizon des droites menées respectivement de l'œil à ce point et à son image, on aura

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x'^2+y'^2}\,,\\ \text{Tang.}\theta &= \frac{y'}{x'}\;; \end{aligned}\right\}(23)\qquad \left.\begin{aligned} r' &= \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\,,\\ \text{Tang.}\theta' &= \frac{y-y'}{x-x'}\;; \end{aligned}\right\}(24)$$

en substituant donc, dans ces dernières formules, pour $x-x'$ et $y-y'$ leurs valeurs (22), on aura

$$r' = \frac{-\dfrac{dX'}{dm}\left\{1+\left(\dfrac{dX'}{dx'}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{dX'}{dm}\,\dfrac{dX'}{dx'}\,\dfrac{d^2X'}{dx'^2}-\dfrac{d^2X'}{dx'dm}\left\{1+\left(\dfrac{dX'}{dx'}\right)^2\right\}}\,,\qquad \text{Tang.}\theta' = \frac{dX'}{dx'}.\quad(25)$$

La comparaison des formules (23) et (25) fera connaître si le point lumineux est vu au-dessus ou au-dessous de sa véritable place, plus près ou plus loin de l'œil qu'il ne l'est réellement

XV. Appliquons ces formules générales au cas particulier d'une densité constante, pour lequel on a (XII)

$$y'=mx'=X' ;$$

il en résultera

$$\frac{dX'}{dx'}=m , \quad \frac{dX'}{dm}=x' , \quad \frac{d^2X'}{dx'dm}=1 , \quad \frac{d^2X'}{dx'^2}=0 ;$$

et conséquemment

$$1+\left(\frac{dX'}{dx'}\right)^2=1+m^2 ;$$

à l'aide de ces résultats, les formules (22) et (25) deviendront

$$x-x'=-x' , \quad y-y'=-mx' , \quad r'=x'\sqrt{1+m^2} , \quad \text{Tang}\,\theta'=m ,$$

c'est-à-dire, en mettant pour m sa valeur $\frac{y'}{x'}$

$$x=0 , \quad y=0 , \quad r'=\sqrt{x'^2+y'^2}=r , \quad \text{Tang.}\theta'=\frac{y'}{x'}=\text{Tang.}\theta ;$$

c'est-à dire que le point rayonnant sera vu alors dans sa véritable direction et à sa véritable distance. Cela, au surplus, pourrait facilement être prévu ; et cette application particulière ne doit être envisagée, en conséquence, que comme un moyen de vérifier nos formules générales.

XVI. Si, au lieu d'un point rayonnant unique, il s'agit d'un objet d'une certaine étendue, on pourra se demander si cet objet paraîtra à l'œil dans sa véritable situation ou dans une situation renversée, et si, dans ce dernier cas, le renversement aura lieu, à la fois, du haut en bas et de l'avant à l'arrière, ou seulement dans l'une ou l'autre de ces deux directions. Pour découvrir ce qui devra surpasser sous ce rapport, supposons d'abord que le point rayonnant, au lieu d'être à l'origine, soit en (a, b) ; transposant l'origine en ce nouveau point x, y, x', y' se changeront en $x-a$, $y-b$, $x-a'$, $y-b'$, dans les formules (14) et (22). Eliminant alors m des dernières, au moyen de la première, on obtiendra x et y en fonctions de a et b ; et il s'agira d'examiner ensuite si x et a, y et b croissent et décroissent ensemble ; ou si, au contraire, x ou y ou tous les deux décroissent lorsque a ou b ou tous les deux vont croissant.

Plus généralement, pour savoir sous quel aspect s'offrira à l'œil une ligne quelconque, droite ou courbe plane, tracée dans le plan des rayons, il faudra dans l'équation de cette ligne, en a et b, mettre pour ces deux variables leurs valeurs en x et y ; et l'équation résultante, entre ces deux dernières variables, sera l'équation de la ligne demandée. On ferait l'inverse s'il s'agissait de déterminer, au contraire, quelle sera la ligne qui s'offrira sous une apparence donnée (*).

XVII. Passons présentement au cas où l'équation (14) ou (15), c'est-à-dire,

$$y'=F(x', m)=X' \qquad (15)$$

est, par rapport à m, d'un degré supérieur au premier. Alors elle donne pour m un certain nombre de valeurs ; de sorte qu'en général, dans ce cas, plusieurs rayons, émanés du point lumineux dans des directions différentes, pourront parvenir à un œil convenablement situé, qui en apercevra ainsi un plus ou moins grand nombre d'images. Mais on conçoit que, suivant la grandeur et les

---

(*) Il ne serait guère plus difficile de résoudre le problème pour une courbe à double courbure ou pour une ligne plane, droite ou courbe, non située dans un plan vertical conduit par l'œil.

signes de x' et de y', c'est-à-dire, suivant la situation de l'œil, des valeurs de m, en plus ou moins grand nombre, pourront être tantôt réelles et tantôt imaginaires; elles pourront même quelquefois, si le degré de l'équation est pair, par rapport à m, être toutes de cette dernière sorte. Les rayons émanés du point lumineux pourront donc ne pas occuper, en totalité, le plan qui les contient; ou du moins ils pourront ne pas concourir, en même nombre, en tous les points de ce plan; ces rayons pourront donc avoir une ou plusieurs courbes limites ou enveloppes communes, lesquelles diviseront le plan qui les contient en plusieurs régions, telle qu'en passant d'une région à celle qui lui sera consécutive, le nombre des rayons concourant en un même point, et par suite, le nombre des images du point rayonnant qui pourront être aperçus par un œil situé en ce point, augmentera ou diminuera d'une unité. Ce sont ces diverses enveloppes, qui peuvent fort bien d'ailleurs n'être que diverses branches d'une même courbe, que nous avons appelé les *déterminatrices* du nombre des images, dans notre mémoire de 1808 (*).

Comme d'ailleurs à chaque valeur de m il ne pourra jamais répondre qu'un rayon unique; en conservant ce symbole dans les calculs, on ne déduira des formules (22) qu'un seul système de valeurs des coordonnées x, y du lieu apparent du point lumineux; mais ce système renfermera implicitement tous ceux qu'on devra obtenir, lesquels s'en déduiront par la substitution, à la place de m, de ses diverses valeurs données par l'équation (15). On pourra ensuite, par la discussion de chacun de ces systèmes, en particulier, découvrir si ces images sont vues au-dessus ou au-dessous de la véritable direction du point lumineux, plus près ou plus loin de l'œil que ce point ne l'est réellement, et, au cas qu'il soit ques-

(*) Cette dénomination nous paraît moins sujette à équivoque que celle de *caustique* adoptée par M. Biot.

tion d'un objet de dimensions finies, si cet objet est vu droit ou renversé, et s'il est renversé dans les deux sens ou dans un seulement.

XVIII. Supposons que, par la nature du milieu, l'équation (15) ne soit, par rapport à *m* que du second degré seulement ; alors un œil convenablement situé ne pourra apercevoir au plus que deux images du point rayonnant, tandis que, placé d'une autre manière, il n'en apercevra aucune. La déterminatrice divisera donc le plan des rayons en deux régions seulement; et, pour un œil placé sur cette déterminatrice même, ces deux images se confondront.

S'il s'agit d'un objet de dimensions finies, à ses différens points répondront des déterminatrices différentes. Un œil qui laissera toutes ces déterminatrices d'un même côté, verra deux images entières de l'objet; et ces deux images pourront même être plus ou moins distantes l'une de l'autre ; tandis qu'au contraire, un œil situé de l'autre côté des déterminatrices n'apercevra aucune partie de l'objet. Un œil situé sur l'une des déterminatrices extrêmes verra les deux images en contact ; tandis qu'un l'œil situé sur l'autre déterminatrice extrême n'apercevra qu'un seul point de l'objet. Enfin si un œil est situé entre les déterminatrices extrêmes, il ne verra qu'une partie seulement de l'objet, mais il la verra double, et les deux images seront en contact par le point auquel répondra la déterminatrice sur laquelle cet œil se trouvera situé.

Dans le cas de plus de deux images, on sent qu'on pourra appliquer à chaque branche de la déterminatrice, et aux deux images qui se confondent pour un œil situé sur cette branche, ce que nous venons de dire du cas de deux images et d'une déterminatrice qui ne divise le plan des rayons qu'en deux régions seulement.

Nous supposons d'ailleurs, dans tout ceci, qu'aucun obstacle ne s'oppose à la marche libre des rayons lumineux ; et c'est, en effet, ce qui arrive communément lorsque ces rayons ont leur convexité tournée vers le ciel, c'est-à-dire, lorsque la densité des couches atmosphériques décroît de bas en haut; mais lorsqu'au contraire la convexité de ces rayons regarde la terre, ils peuvent, en plus ou moins grand nombre, être interceptés par le sol, et dès lors, malgré les autres circonstances favorables, le phénomène cesse d'avoir lieu, ou du moins il ne se montre pas partout où il aurait été visible en l'absence de cet obstacle.

XIX. Dans le cas particulier de deux images, si ces deux images sont de même grandeur et situées dans une même verticale; et si, en outre, c'est la plus élevée qui est vue dans la même situation que l'objet, tandis que la plus basse est vue dans une situation renversée, cette dernière paraîtra au spectateur la répétition de l'autre dans une eau tranquille, sur la surface de laquelle celle-ci serait posée, et l'image inférieure des nuages semblera également la répétition dans l'eau de leur image la plus élevée. Or, comme ce n'est uniquement que par cette répétition des objets au-dessous d'eux-mêmes, dans une situation renversée, que nous sommes avertis de la présence de l'eau, il s'ensuit que le spectateur éprouvera invinciblement le sentiment de cette présence, dans tous les lieux où les mêmes circonstances se manifesteront, et c'est en cela proprement que consiste le phénomène du *mirage* (*).

Comme nous jugeons assez peu sûrement de l'intervalle qui nous sépare des objets tant soit peu éloignés, il s'ensuit que, quand bien même les deux images ne seraient pas exactement situées dans une même verticale, l'œil du spectateur se prêterait aisément à

(*) Ce phénomène est fréquemment visible dans l'île de *Camargue*, espèce de delta, formé par deux branches du Rhône, à son embouchure dans la Méditerranée. Les cochers et postillons du pays conduisent hardiment leurs voitures vers l'inondation apparente; mais ce n'est pas sans causer quelque frayeur aux voyageurs étrangers, qui pourtant se rassurent peu à peu, en voyant l'eau imaginaire reculer devant eux, à mesure qu'ils avancent vers elle.

juger qu'elles s'y trouvent ; de sorte que l'illusion serait encore la même.

XX. Appliquons présentement ces généralités au cas, déjà considéré ci-dessus, où la densité des couches atmosphériques croît ou décroît proportionnellement à leur élévation. On a vu (XI) qu'alors le rayon lumineux était une parabole ayant pour équation

$$(1+m^2)x^2=4\lambda^2c(y-mx)\ ; \qquad (12)$$

équation que l'on peut écrire ainsi

$$\left\{x+\frac{2\lambda^2mc}{1+m^2}\right\}^2=\frac{4\lambda^2c}{1+m^2}\left\{y+\frac{\lambda^2m^2c}{1+m^2}\right\}. \qquad (26)$$

On voit par là que les équations du sommet de la parabole sont

$$x=-\frac{2\lambda^2mc}{1+m^2}\ , \qquad y=-\frac{\lambda^2m^2c}{1+m^2}\ , \qquad (27)$$

et que son paramètre est

$$\frac{4\lambda^2c}{1+m^2}\ ; \qquad (28)$$

de sorte que la grandeur de ce paramètre est en raison composée de la longueur c qui fixe la variation plus ou moins rapide de la densité des couches et du quarré du cosinus de l'angle que fait avec l'horizon la direction initiale du rayon. On voit de plus que les branches de cette parabole se prolongeront vers le haut ou vers le bas, suivant que c sera positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que la densité du milieu sera croissante ou décroissante de bas en haut.

Si l'on élimine m entre les équations (27), il viendra

$$x^2+4y^2+4\lambda^2cy=0\ , \qquad (29)$$

ou bien

$$\left(\frac{x}{\lambda^2 c}\right)^2+\left(\frac{y+\frac{1}{2}\lambda^2 c}{\frac{1}{2}\lambda^2 c}\right)^2=1\ ;$$

équation d'une ellipse qui a son centre sur l'axe des y, un des sommets de son petit axe à l'origine, et son grand axe double du petit. Son centre est d'ailleurs au-dessus ou au-dessous du point rayonnant, suivant que les branches de la parabole se prolongent vers le bas ou vers le haut. Tel est donc, comme M. Biot en avait déjà fait la remarque, le lieu des sommets des paraboles qui répondent à toutes les directions initiales du rayon lumineux.

Si l'on demande quelle valeur il faut donner à m pour que le rayon lumineux parvienne à un œil situé en (x', y'), on aura, pour déterminer cette valeur, l'équation

$$(1+m^2)x'^2=4\lambda^2c(y'-mx')\ ; \qquad (30)$$

c'est-à-dire,

$$x'^2m^2+4\lambda^2cx'm+(x'^2-4\lambda^2cy')=0\ ; \qquad (31)$$

ainsi, généralement, il y a deux directions initiales différentes sous lesquelles un rayon émané du point lumineux peut parvenir à un œil situé dans le plan qui contient tous les rayons (*).

Nous disons *généralement*, car si le point (x', y') était choisi de telle sorte qu'on eût

$$4\lambda^4c^2x'^2-x'^2(x'^2-4\lambda^2cy')<0\ ;$$

ou, plus simplement,

$$4\lambda c^2-(x'^2-4\lambda^2cy')<0\ ;$$

(*) C'est exactement de la même manière que, dans la balistique, il y a, pour une même charge de poudre, deux inclinaisons différentes de la bouche à feu qui peuvent faire parvenir le projectile à un même but donné.

les deux valeurs de m étant alors imaginaires, aucun des rayons émanés du point lumineux ne pourrait parvenir en (x', y'). Les rayons émanés de ce point n'embrassent donc pas ici tout le plan vertical qui les contient, comme il arrive pour les rayons rectilignes, dans le cas d'une densité constante; ils sont circonscrits par une courbe enveloppe, dont l'équation est évidemment

$$4\lambda^4c^2-(x^2-4\lambda^2cy)=0$$

ou bien

$$x^2=4\lambda^2c(y+\lambda^2c)\ ; \qquad (32)$$

équation d'une nouvelle parabole, tournée dans le même sens que celles que décrivent les rayons lumineux, mais dont l'axe est l'axe même des y; c'est-à-dire, la verticale conduite par le point rayonnant, et dont ce point est le foyer. Elle ne diffère, au surplus, que par sa position du rayon parabolique qui répond à $m=0$, c'est-à-dire du rayon dont la direction initiale est horizontale. Un œil placé dans l'intérieur de cette courbe limite, verra donc deux images du point rayonnant; ce point sera tout-à-fait invisible pour un œil situé hors d'elle; enfin pour un œil situé sur la courbe même, les deux images se confondront en une seule.

XXI. Occupons-nous présentement de la détermination précise du lieu des deux images. L'équation (30), résolue par rapport à y', donne

$$y'=\frac{(1+m^2)x'^2+4\lambda^2mcx'}{4\lambda^2c}\ ; \qquad (33)$$

de sorte que nous avons ici

$$X'=\frac{(1+m^2)x'^2+4\lambda^2mcx'}{4\lambda^2c}\ ;$$

de là résulte

$$\frac{dX'}{dx'}=\frac{(1+m^2)x'+2\lambda^2mc}{2\lambda^2c}\;;\qquad \frac{dX'}{dm}=\frac{mx'^2+2\lambda^2cx'}{2\lambda^2c}\;;$$

$$\frac{d^2X'}{dx'^2}=\frac{1+m^2}{2\lambda^2c}\;,\qquad \frac{d^2X'}{dx'dm}=\frac{mx'+\lambda^2c}{\lambda^2c}\;;$$

$$1+\left(\frac{dX'}{dx'}\right)^2=\frac{1+m^2}{4\lambda^4c^2}\{x'^2+(mx'+2\lambda^2c)^2\}\;;$$

$$\frac{dX'}{dm}\,\frac{dX'}{dx'}\,\frac{d^2X'}{dx'^2}-\frac{d^2X'}{dx'dm}\left\{1+\left(\frac{dX'}{dx'}\right)^2\right\}=-\frac{1+m^2}{8\lambda^6c^3}\{mx'^3+(mx'+2\lambda^2c)^3\}\;;$$

substituant toutes ces valeurs dans les formules (22) et (25), elles deviendront

$$\left.\begin{aligned} x-x'&=-\frac{x'(mx'+2\lambda^2c)\{x'^2+(mx'+2\lambda^2c)^2\}}{mx'^3+(mx'+2\lambda^2c)^3}\;,\\ y-y'&=-\frac{x'(mx'+2\lambda^2c)\{x'+m(mx'+2\lambda^2c)\}\{x'^2+(mx+2\lambda^2c)^2\}}{2\lambda^2c\{mx'^3+(mx'+2\lambda^2c)^3\}}\;;\end{aligned}\right\}(34)$$

telles sont donc les formules qui, pour une direction initiale donnée du rayon lumineux, feront connaître le lieu, et par suite la distance et la direction de l'image du point rayonnant, pour un œil situé en un point donné quelconque (x', y') de ce rayon.

Mais par ce même point (x',y') viennent passer deux rayons répondant aux deux racines de l'équation (31) et, pour juger de la situation des deux images qui en naîtront, il faudra substituer à la place de m, dans nos dernières formules, ses valeurs données par cette équation, lesquelles sont

$$m=\frac{-2\lambda^2c\pm\sqrt{4\lambda^2c(y'+\lambda^2c)-x'^2}}{x'}\;;$$

Nous pourrons revenir, dans un autre mémoire, sur la discussion générale des formules, mais, en attendant, pour donner au lecteur quelque idée des bizarres apparences que peut faire naître pour la vue, l'existence d'un milieu conditionné comme nous le supposons ici, nous croyons devoir mettre sous ses yeux le résultat du calcul d'un cas particulier exécuté à l'aide de ces mêmes formules. Il s'agit, dans la planche ci jointe, d'un obélisque AB de 50 mètres d'élévation, placé au sommet d'une montagne que nous supposons élevée aussi de 50 mètres au-dessus du sol. Cet obélisque est supposé vu par un œil O, élevé de 25 mètres seulement au-dessus du sol et distant de 150 mètres, dans le sens horizontal de l'axe de l'obélisque. Nous supposons d'ailleurs que la densité du milieu décroît de bas en haut, et, de telle sorte, que le rayon parabolique dont la direction initiale est horizontale a un paramètre de 400 mètres.

Nous avons représenté, dans la figure, les trois rayons qui parviennent à l'œil tant de chacune des deux extrémités de l'axe de l'obélisque que du milieu de sa hauteur. Les lieux des deux images de ces trois points sont donc sur les tangentes menées par l'œil aux six rayons qui en émanent pour lui parvenir; et nous avons calculé exactement le lieu de ces images. En conséquence, les deux images de l'axe AB de l'obélisque sont ab et $a'b'$. Nous n'avons pu figurer les images de la montagne sur laquelle l'obélisque repose, attendu que l'image ab de l'axe AB s'allonge considérablement au-delà de b, pour la moindre longueur du prolongement de AB au-delà de B. La courbe ab a une asymptote commune avec la courbe $a'b'$, et, passé cette asymptote, c'est derrière l'œil O que se trouve le lieu d'où devraient diverger les rayons pour lui parvenir. De sorte que les images du bas de la montagne ne peuvent être vu que d'une manière tout-à-fait confuse.

On voit aussi qu'à raison de l'élévation des rayons paraboliques par lesquels l'image $a'b'$ est aperçue, il faudrait, pour que tout se passât comme nous le supposons ici, que la loi suivant laquelle nous supposons que décroît la densité des couches atmosphériques se soutînt invariablement telle jusqu'à une hauteur de 200 mètres au moins au-dessus du sol ; or c'est ce qui ne doit sans doute arriver que fort rarement ; et cela explique suffisamment pourquoi le phénomène des images multiples est si peu fréquent.

Il est présumable, au surplus, que l'œil placé en O ne jugera pas les deux images ab et $a'b'$ de l'axe AB de l'obélisque aussi bizarres et aussi singulièrement situées par rapport à cet axe. Il se prêtera volontiers à les projecter sur un plan vertical, et alors, au lieu de l'objet, il en verra deux images situées l'une au-dessus de l'autre, toutes deux plus grandes que cet objet lui-même, mais la plus élevée plus grande que l'autre, et toutes deux tournées dans le sens de l'objet. Il n'est donc pas généralement vrai, comme nous l'avions faussement avancé dans notre mémoire de 1808, et comme M. Biot paraît l'avoir cru lui-même, que, dans le cas de plusieurs images d'un même objet, ces images doivent être toujours alternativement directes et renversées ; nous ne concevons pas même qu'il en puisse jamais être ainsi, lorsque la densité croît sans cesse dans le même sens.