

---

---

# ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

**Géométrie analytique. Sur le nombre des conditions nécessaires  
pour déterminer une ligne ou une surface du second ordre**

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 20 (1829-1830), p. 185-195

[http://www.numdam.org/item?id=AMPA\\_1829-1830\\_\\_20\\_\\_185\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__185_0)

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

*Sur le nombre des conditions nécessaires pour déterminer une ligne ou une surface du second ordre ;*

Par UN ABONNÉ.

~~~~~

ON lit, à la pag. 226 du IV.<sup>m</sup> volume de la *Correspondance* de M. QUETELET, une note de M. Pagani, professeur à Louvain, sur le nombre des points nécessaires pour déterminer, dans l'espace, une surface du second ordre d'une espèce donnée; note dans laquelle on se borne à énoncer les propositions, pour laisser, dit-on, au lecteur le plaisir d'en trouver les démonstrations.

Ces démonstrations ne sont point difficiles à découvrir, si toutefois on peut appeler démonstration quelques considérations fort simples dont il faut faire précéder l'énoncé de chaque cas. Nous nous proposons de traiter ici sommairement non seulement la question qui a fait le sujet des recherches de M. Pagani, mais encore son analogue relative aux lignes du second ordre dont il ne paraît pas s'être occupé.

Rappelons-nous bien d'ailleurs, dans tout ce qui va suivre, qu'au moyen d'un multiplicateur choisi d'une manière convenable, on peut toujours amener un quelconque des termes d'une équation à avoir un coefficient donné, ou, plus généralement, faire en sorte qu'il existe entre tous ou partie des coefficients de cette équation, une relation donnée quelconque, non homogène; de manière qu'on peut, sans rien ôter à la généralité d'une telle équation, admettre qu'une telle relation existe.

*Tom. XX, n.° VII, 1.<sup>er</sup> Janvier 1830.*

Il résulte de là que la ligne ou la surface exprimée par une équation générale à deux ou à trois variables, d'une forme donnée, ne saurait être assujétie qu'à autant de conditions moins une que cette équation a de termes. Ainsi, par exemple, une ligne du second ordre ne saurait être assujétie à plus de cinq conditions, ni une surface de cet ordre à plus de neuf.

I. Cela posé, pour qu'une ellipse ou une hyperbole soit donnée de *grandeur*, il faut en connaître deux élémens, tels, par exemple, que les deux axes, ou l'un d'eux avec l'excentricité ou le paramètre, ou encore ces deux derniers lignes, etc. Pour qu'en outre elle soit donnée de *situation*, il faut connaître et les deux coordonnées de son centre, et une quantité angulaire qui détermine la direction de l'un de ses axes.

On pourrait encore, pour donner une ellipse ou une hyperbole de grandeur et de situation sur un plan, donner les quatre coordonnées de ses deux foyers, avec l'un de ses axes, son excentricité ou son paramètre. Dans l'un comme dans l'autre cas, *cinq élémens* seront donc également nécessaires et seront en outre suffisans pour déterminer complètement la grandeur et la situation d'une ellipse ou d'une hyperbole sur un plan.

Donc, quand bien même on ne connaîtrait encore l'ellipse et l'hyperbole que par leur définition géométrique, que par leur description graphique, on pourrait affirmer que l'équation générale de l'une ou de l'autre courbe doit contenir cinq coefficients arbitraires et indépendans; que conséquemment cette équation doit avoir six termes; qu'ainsi elle ne saurait être d'un degré moindre que le second; que, par suite, si elle est de ce degré, elle doit être complète, sans aucune relation obligée entre ses coefficients; qu'enfin c'est proposer un problème possible et déterminé que de demander de faire passer une ellipse ou une hyperbole par cinq points donnés.

Si, des cinq élémens qui doivent déterminer la grandeur et la

situation de la courbe, un était donné, ou, ce qui revient au même, si l'on exigeait qu'il existât une certaine équation de relation entre tous ou partie de ces élémens, le nombre des élémens vraiment arbitraires et indépendans se trouvant ainsi réduit à quatre, on ne pourrait plus assujétir la courbe qu'à passer par quatre points seulement; et il devrait conséquemment exister une certaine relation homogène entre les coefficients de son équation générale.

C'est, par exemple, ce qui arriverait si l'on exigeait que la courbe fût semblable à une ellipse ou à une hyperbole donnée; car, cela reviendrait à donner le rapport de grandeur des axes, ou encore à donner l'angle soit des diamètres conjugués égaux soit des asymptotes. C'est encore ce qui arriverait si l'on exigeait que le centre, l'un des foyers ou l'un des sommets de la courbe, fût situé sur une droite donnée. Dans tous les cas semblables, les coefficients de l'équation générale ne sauraient être liés entre eux par plus d'une condition.

On voit par là, en particulier, que c'est sans fondement aucun que, dans un traité élémentaire fort répandu, et que même beaucoup de jeunes gens se croient dans l'obligation d'étudier, on a avancé que deux conditions sont nécessaires pour que l'équation générale du second degré à deux indéterminées, exprime une hyperbole équilatère. Il est évident, par ce qui précède, qu'une seule condition suffit pour cela. Du reste, l'hyperbole équilatère n'a rien ici de plus particulier que toute autre hyperbole, dont l'angle des asymptotes serait donné.

Il pourrait se faire qu'en voulant rendre l'ellipse ou l'hyperbole à construire, semblable à une ellipse ou à une hyperbole donnée, elle se réduisît à un point ou au système de deux droites. Une seule condition est donc nécessaire pour qu'une équation complète du second degré à deux indéterminées exprime un point ou le système de deux droites.

Dans le cas de l'ellipse, celle à laquelle et doit être semblable peut dégénérer en cercle; alors on n'a plus à déterminer la direction de l'un des axes; trois élémens suffisent donc pour déter-

miner un cercle de grandeur et de situation, sur un plan; savoir: les deux coordonnées de son centre et son rayon; deux équations de relation entre les coefficients d'une équation du second degré à deux indéterminés, sont donc nécessaires pour que cette équation exprime un cercle.

Pour donner deux parallèles sur un plan, il suffit de donner les segmens que l'une d'elles détermine sur les deux axes, à partir de l'origine et la distance qui la sépare de l'autre, ce qui fait trois élémens, comme pour le cercle; donc aussi deux conditions sont nécessaires pour qu'une équation du second degré à deux indéterminés exprime le système de deux parallèles.

Si la distance entre les parallèles était donnée, il ne resterait plus que deux élémens arbitraires; et il en serait encore de même si cette distance était nulle; donc aussi trois conditions sont nécessaires pour qu'une équation du second degré à deux indéterminés exprime le système de deux droites qui se confondent.

Pour se donner, de grandeur et de situation, une ellipse ou une hyperbole sur un plan, on peut se donner les deux coordonnées de l'une des extrémités du grand axe ou de l'axe transverse, l'angle qui en détermine la direction, sa longueur et le paramètre. Si l'on suppose que cet axe doive avoir une longueur donnée, la courbe ne dépendra plus que de quatre élémens; et il en sera encore de même si cette longueur est infinie; mais, comme alors on passe à la parabole, il s'ensuit que la détermination complète d'une parabole sur un plan ne dépend que de quatre conditions seulement, et qu'ainsi une seule équation de relation est nécessaire entre les coefficients d'une équation complète du second degré à deux indéterminés, pour que cette équation exprime une parabole. Il en faudrait deux pour qu'elle exprimât une parabole dont le paramètre serait donné. M. Pagani appelle *parabole équilatère* celle dont le paramètre est égal à l'unité; mais cette dénomination nous paraît tout à fait impropre, puisqu'ainsi toute parabole serait ou ne serait point équilatère, suivant l'unité qu'on voudrait choisir.

On voit, en résumé, 1.<sup>o</sup> que, par cinq points donnés, on peut faire passer une ellipse ou une hyperbole quelconque; 2.<sup>o</sup> que, par quatre points donnés, on peut faire passer ou une hyperbole équilatère ou le système de deux droites qui se coupent ou une parabole; 3.<sup>o</sup> que, par trois points donnés, on peut faire passer ou une circonférence de cercle ou le système de deux parallèles; 4.<sup>o</sup> qu'enfin, par deux points donnés, on peut faire passer le système de deux droites qui se confondent,

II. Pour déterminer *de grandeur* un ellipsoïde ou un hyperboloïde, il faut simplement connaître les longueurs de ses trois diamètres principaux; pour le déterminer en outre *de situation* dans l'espace, il faut connaître les trois coordonnées de son centre, deux angles qui déterminent la direction de l'un de ses diamètres principaux et, par suite, le plan des deux autres, et enfin un troisième angle qui fixe la direction d'un de ceux-ci dans ce plan, ce qui fait en tout *neuf élémens* distincts et indépendans.

Donc, quand bien même l'ellipsoïde et l'hyperboloïde ne nous seraient connus que par leur définition, que par leur description graphique, on pourrait affirmer que l'équation générale de l'une ou de l'autre surface doit renfermer neuf coefficients distincts et indépendans et doit, par conséquent, avoir dix termes; qu'ainsi cette équation ne saurait être d'un degré moindre que le second; que, si elle n'excède pas le second degré, elle doit être complète, sans qu'il existe aucune relation obligée entre les coefficients de ses termes; et qu'enfin c'est proposer un problème possible et déterminé que de demander de faire passer un ellipsoïde ou un hyperboloïde par neuf points donnés.

Si, des neuf élémens qui doivent déterminer la grandeur et la situation de la surface courbe, un était donné, ou, ce qui revient au même, si l'on exigeait qu'il existât une certaine équation de relation entre tous ou partie de ces élémens, le nombre des élémens, vraiment arbitraires et indépendans, se trouvant ainsi

réduit à huit, on ne pourrait plus assujétir la surface qu'à passer par huit points seulement; et il devrait conséquemment exister une certaine relation homogène entre les coefficients de l'équation générale.

C'est, par exemple, ce qui arriverait si l'on exigeait que l'un des diamètres principaux fût d'une longueur donnée ou que l'une des trois sections principales fût semblable à une ellipse ou à une hyperbole donnée. C'est encore ce qui arriverait si l'on exigeait que le centre ou l'un des sommets de la surface fût situé sur un plan donné. Dans tous les cas semblables, les coefficients de l'équation générale ne sauraient être liés entre eux par plus d'une relation.

Pour qu'une surface conique soit donnée de grandeur, il faut donner ses deux sections angulaires principales; pour la donner en outre de situation dans l'espace, il faut donner les trois coordonnées de son sommet, ensuite deux angles qui déterminent la direction de son axe, et enfin un autre angle qui fixe la situation de l'un de ces plans principaux; donc la surface conique du second ordre est une de ces surfaces dont la grandeur et la situation dans l'espace ne dépendent que de huit élémens, une de ces surfaces qu'on ne peut assujétir à passer que par huit points seulement; et, pour que l'équation générale du second degré à trois indéterminées exprime une surface conique, il faut qu'il existe une équation de relation homogène entre les coefficients de ses termes.

Pour qu'un parabolôide soit donné de grandeur; il suffit de connaître les paramètres de ses deux sections principales. Pour qu'en outre il soit donné de situation dans l'espace, il faut donner les trois coordonnées de son sommet, deux angles qui fixent la direction de son axe et un troisième angle qui détermine le plan de l'une de ses sections principales. Le parabolôide est donc encore une de ces surfaces dont la grandeur et la situation dans l'espace ne dépendent que de huit conditions seulement, une surface qui se trouve complètement déterminée lorsqu'on l'assujétit à passer par huit points donnés; et, pour que l'équation générale des surfaces

du second ordre exprime une telle surface, il suffit d'une seule relation homogène entre ses coefficients.

Si, des neuf élémens qui déterminent de grandeur et de situation dans l'espace un ellipsoïde ou hyperboloïde, deux étaient donnés, ou ce qui revient au même, si l'on exigeait qu'il existât deux relations données entre tous ou partie de ces élémens, le nombre des élémens vraiment arbitraires et indépendans se trouvant ainsi réduits à sept, on ne pourrait plus assujétir la surface qu'à passer par sept points seulement; et il devrait conséquemment exister deux relations distinctes entre les coefficients de l'équation générale.

C'est, par exemple, ce qui arriverait si l'on exigeait que l'une des sections principales fût une ellipse ou une hyperbole donnée, ou que la surface fût semblable à une surface donnée. C'est encore ce qui arriverait si l'on exigeait que le centre ou l'un des sommets se trouvât sur une droite donnée.

Pour donner de grandeur un ellipsoïde ou un hyperboloïde de révolution, il suffit de donner le rayon de sa section circulaire principale et la longueur du diamètre principal, perpendiculaire à son plan. Pour que cette surface soit donnée en outre de situation dans l'espace, il faudra donner les trois coordonnées de son centre et en outre deux angles qui fixent la direction de son axe; donc l'ellipsoïde et l'hyperboloïde de révolution sont du nombre des surfaces du second ordre qui ne dépendent que de sept élémens, et qui sont complètement déterminées dans l'espace lorsqu'on les assujétit à passer par sept points donnés; d'où il suit que, pour que l'équation du second degré à trois indéterminées exprime une telle surface, il faut qu'il existe deux équations de relation entre les coefficients de ses termes.

Pour donner de grandeur un cylindre elliptique ou hyperbolique, il suffit de donner les diamètres principaux de l'une de ses sections orthogonales; pour qu'il soit donné en outre de situation dans l'espace, il faut donner les quatre coordonnées des deux points où son axe perce deux des plans coordonnés; enfin, il faut encore donner un angle qui fixe la situation du plan de l'une de



ses sections principales, d'où l'on voit que le cylindre elliptique ou hyperbolique est encore une de ces surfaces dont la grandeur et la situation dans l'espace sont déterminées par sept conditions, et qu'on peut conséquemment assujétir à passer par sept points donnés.

Si, des neuf élémens qui déterminent de grandeur et de situation dans l'espace une surface du second ordre, trois sont donnés ou, ce qui revient au même, si l'on donne trois équations de relation entre tous ou partie de ces neuf élémens, le nombre des élémens vraiment arbitraires et indépendans se trouvant ainsi réduit à six, on ne pourra plus assujétir la surface qu'à passer par six points donnés, et il devra conséquemment exister trois équations de relation entre les coefficients de l'équation générale. C'est, par exemple, le cas où un ellipsoïde ou un hyperboloïde serait donné de grandeur.

Pour donner de grandeur une surface conique de révolution, il suffit de donner son angle générateur. Pour la donner en outre de situation dans l'espace, il faut donner de plus les trois coordonnées de son sommet et deux angles qui déterminent la direction de son axe; donc la surface conique de révolution est du nombre de celles dont la grandeur et la situation dans l'espace sont déterminées par six élémens, et qu'on peut conséquemment assujétir à passer par six points donnés; d'où il suit que, pour que l'équation générale du second degré à deux indéterminées exprime une telle surface, il est nécessaire qu'il existe trois équations de relation entre ses coefficients.

Pour qu'un paraboloidé de révolution soit donné de grandeur, il suffit de donner le paramètre commun à tous ses méridiens. Pour qu'il soit en outre donné de situation dans l'espace, il faut donner de plus les trois coordonnées de son sommet et deux angles qui fixent la direction de son axe. Donc le paraboloidé de révolution est également du nombre de ces surfaces dont la grandeur et la situation ne dépendent que de six élémens et qu'on détermine conséquemment en les assujétissant à passer par six points donnés;

d'où il suit encore que trois conditions sont nécessaires pour que l'équation générale du second degré, à trois indéterminées, exprime une telle surface.

Pour qu'un cylindre parabolique soit donné de grandeur, il suffit de donner le paramètre commun de toutes ses sections orthogonales; pour qu'il soit donné en outre de situation dans l'espace, il faudra donner encore les quatre coordonnées des deux points où deux plans coordonnés sont percés par la droite qui contient les sommets de toutes ces sections; il faudra donner aussi un angle qui détermine la direction de son plan diamétral principal; donc le cylindre parabolique est aussi une des surfaces dont la grandeur et la situation, dans l'espace, ne dépendent que de six élémens, et qu'on détermine complètement en les assujétissant à passer par six points donnés; et trois conditions sont nécessaires pour que l'équation générale du second degré, à trois indéterminées, exprime une telle surface.

Pour déterminer deux plans dans l'espace, il suffit de connaître les six segmens qu'ils déterminent sur les trois axes à partir de l'origine; donc le système de deux plans doit encore être classé parmi les surfaces dont la détermination complète dépend de six conditions, et qu'on peut conséquemment assujétir à passer par six points donnés; et trois conditions sont nécessaires pour que l'équation générale du second degré à trois indéterminées exprime un tel système.

Nous venons de voir ci-dessus que sept élémens sont nécessaires pour déterminer, de grandeur et de situation dans l'espace, un cylindre elliptique; de sorte que, si l'on exigeait que ses sections orthogonales fussent semblables à une ellipse donnée, il ne dépendrait plus que de six élémens; mais il pourrait bien se faire qu'alors les sections orthogonales se réduisissent à des points, ce qui réduirait le cylindre à une droite indéfinie; donc trois conditions sont nécessaires pour que l'équation générale du second degré, à trois indéterminées, exprime une simple ligne droite.

Si des neuf élémens qui déterminent, en général, de grandeur

et de situation, dans l'espace, une surface du second ordre, quatre sont donnés ou, ce qui revient au même, si l'on donne quatre équations de relation entre tous ou partie de ces élémens, le nombre des élémens arbitraires et vraiment indépendans se trouvera ainsi réduit à cinq; on ne pourra donc plus assujétir la surface qu'à passer par cinq points donnés; et il devra conséquemment exister quatre équations de relation entre les coefficients de l'équation générale.

Pour qu'un cylindre de révolution soit donné de grandeur, il suffit d'en donner le rayon; si l'on veut, en outre, qu'il soit donné de situation dans l'espace, il faudra donner de plus les quatre coordonnées des deux points où son axe perce deux des plans coordonnés; donc le cylindre de révolution est une surface dont la grandeur et la situation, dans l'espace, ne dépendent que de cinq conditions et qu'on peut par conséquent assujétir à passer par cinq points donnés; et quatre conditions sont nécessaires pour que l'équation générale du second degré exprime une telle surface. Il en irait absolument de même pour le système de deux plans perpendiculaires l'un à l'autre.

Si des neuf élémens qui déterminent, en général, de grandeur et de situation, dans l'espace, une surface du second ordre, cinq sont donnés, ou, ce qui revient au même, si l'on donne cinq équations de relation entre tous ou partie d'entre eux, le nombre des élémens vraiment arbitraires et indépendans se trouvera ainsi réduit à quatre; de sorte qu'on ne pourra assujétir la surface qu'à passer par quatre points seulement, et que cinq conditions seront nécessaires pour que l'équation générale du second degré, à deux indéterminées, exprime une telle surface. C'est évidemment le cas de la sphère et celui du système de deux plans parallèles.

Si enfin six des neuf élémens étaient donnés, ou, ce qui revient au même, si l'on donnait six équations entre tous ou partie d'entre eux, il n'en resterait plus que trois d'indépendans; on ne pourrait donc plus assujétir une telle surface qu'à passer par trois points

donnés ; et six conditions seraient nécessaires pour qu'elle fût représentée par l'équation générale du second degré à trois indéterminées. C'est , par exemple , le cas d'une sphère d'un rayon donné ou du système de deux plans qui se confondent.

Ainsi , en résumé , c'est se proposer un problème , à la fois possible et déterminé , que de demander de faire passer 1.<sup>o</sup> par trois points donnés , le système de deux plans qui se confondent ; 2.<sup>o</sup> par quatre points donnés , une sphère ou le système de deux plans parallèles ; 3.<sup>o</sup> par cinq points donnés , un cylindre de révolution ; 4.<sup>o</sup> par six points donnés , un parabolôide de révolution , un cylindre parabolique ou le système de deux plans ; 5.<sup>o</sup> par sept points donnés , un ellipsoïde ou un hyperboloïde de révolution , ou bien encore un cylindre elliptique ou hyperbolique ; 6.<sup>o</sup> par huit points donnés , une surface conique quelconque ou un parabolôide quelconque ; 7.<sup>o</sup> enfin , par neuf points donnés un ellipsoïde ou un hyperboloïde quelconque.

Nous n'avons présenté ici que les cas principaux ; il en est une multitude d'autres ; mais ils ne pourront jamais causer d'embarras , en appliquant les considérations qui nous ont guidés par rapport à ceux que nous avons signalés.

Lyon , le 28 d'août 1828.

---