
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Arithmétique. Abréviation de l'extraction des racines numériques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 125-127

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__125_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ARITHMÉTIQUE.

Abréviation de l'extraction des racines numériques ;

Par M. BOBILLIER, professeur à l'école des arts et métiers
de Châlons-Sur-Marne.



SOIT un nombre entier dont on veut obtenir la racine $m^{i\text{ème}}$, soient a une partie de cette racine déjà obtenue, x ce qu'il faut lui ajouter pour compléter la racine demandée et r le reste obtenu en retranchant du nombre proposé la $m^{i\text{ème}}$ puissance de la première partie de cette racine ; ce nombre sera ainsi indifféremment $a^m + r$ ou $(a+x)^m$. On aura donc

$$a^m + r = (a+x)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} x + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} a^{m-2} x^2 + \dots$$

ou, en supprimant a^m de part et d'autre et divisant ensuite par ma^{m-1}

$$\frac{r}{ma^{m-1}} = x + \frac{m-1}{2} \frac{x^2}{a} + \frac{m-1}{2} \frac{m-2}{3} \frac{x^3}{a^2} + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \frac{x^4}{a^3} + \dots$$

d'où l'on voit qu'en divisant r par ma^{m-1} on obtiendra le surplus x de la racine, à moins d'une demi-unité près, pourvu qu'on ait

$$\frac{1}{2} > \frac{m-1}{2} \cdot \frac{x^2}{a} + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{x^3}{a^2} + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{x^4}{a^3} + \dots$$

ou bien

$$\frac{1}{2} > \frac{m-1}{2} \cdot \frac{x^2}{a} \left\{ 1 + \frac{m-2}{3} \cdot \frac{x}{a} + \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \dots \right\}.$$

Où cette inégalité ne cessera pas d'être satisfaite si, dans son second membre, on remplace les fractions $\frac{m-3}{4}$, $\frac{m-4}{5}$, $\frac{m-5}{6}$, ..., par la fraction plus grande $\frac{m-2}{3}$, et qu'on prolonge en outre ce second membre à l'infini; de sorte qu'il suffit qu'on ait

$$\frac{1}{2} > \frac{m-1}{2} \cdot \frac{x^2}{a} \left\{ 1 + \left(\frac{m-2}{3} \cdot \frac{x}{a} \right) + \left(\frac{m-2}{3} \cdot \frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{m-2}{3} \cdot \frac{x}{a} \right)^3 + \dots \right\};$$

ou bien

$$1 > \frac{(m-1)x^2}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{m-2}{3} \cdot \frac{x}{a}},$$

ou encore

$$1 > \frac{3(m-1)x^2}{3a - (m-2)x};$$

ou enfin

$$3a > x\{3(m-1)x + (m-2)\}.$$

Pour que cette dernière inégalité soit satisfaite, il suffira que le nombre des chiffres de son premier membre surpasse le nombre de ceux du second; ou, plus simplement, que le nombre des chiffres de $3a$ surpasse le nombre des chiffres de $3(m-1)x^2$; ou que

le nombre des chiffres de a surpasse le nombre des chiffres de $(m-1)x^2$ ou de mx^2 . Or, x^2 a au plus le double du nombre des chiffres de x ; d'où il suit que mx^2 aura au plus le double du nombre des chiffres de x augmenté du nombre des chiffres de m ; d'où résulte la règle suivante :

Si, cherchant la racine m.^{ième} d'un nombre entier, on a déjà obtenu un nombre de chiffres de cette racine qui soit au moins égal au nombre de ceux qui restent encore à trouver, augmenté du nombre des chiffres de l'exposant, on obtiendra le surplus de la racine cherchée, à moins d'une demi-unité près, en divisant simplement le reste de l'opération par m fois la (m-1)^{ième} puissance de la racine déjà obtenue, et négligeant le reste de cette division.

Dans le cas particulier où $m=2$, cette règle rentre exactement dans celle qu'on donne dans les traités élémentaires, pour l'extraction de la racine carrée; mais on voit en même temps qu'elle a une étendue qu'on ne paraît pas lui avoir soupçonné jusqu'ici (*).

(*) On ne paraît pas avoir songé non plus, pour l'extraction de la racine carrée, au procédé très-brief que voici, et qui serait susceptible d'une extension analogue à celle que M. Bobillier vient de donner au premier.

Cherchez, à l'ordinaire, les deux premiers chiffres de la racine; quarrez et retranchez. Divisez le reste par le double de la racine déjà obtenue, et vous aurez le troisième chiffre de la racine. Quarrez et retranchez encore; divisez le reste par le double de toute la racine obtenue, et vous obtiendrez les deux chiffres suivans, ce qui fera cinq. Quarrez et retranchez; divisez le reste par le double de toute la racine obtenue, et vous obtiendrez les quatre chiffres suivans, ce qui fera neuf. Quarrez et retranchez; divisez le reste par le double de toute la racine obtenue, et vous obtiendrez les huit chiffres suivans, ce qui fera dix-sept; et ainsi de suite.

J. D. G.