ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le premier juillet 1810, ce Recueil paraît de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages d'impression, non compris les planches.

On peut adresser indistinctement les demandes de souscription,

Au Rédacteur des *Annales*, rue du St-Sacrement, n.° 5, à Montpellier [Hérault];

A M. *Bachelier*, gendre *Courcier*, libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n.° 55, à Paris;

Et à tous les bureaux de poste.

Les articles à insérer et les ouvrages à annoncer doivent être envoyés à la première de ces adresses.

Le prix de la souscription annuelle est 21 fr. pour la France et 24 fr. pour l'Étranger.

Les mémoires, les ouvrages, les lettres et l'argent doivent être affranchis.

ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ ET PUBLIÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur à la faculté des sciences de Montpellier, membre de plusieurs sociétés savantes.

TOME VINGTIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez M. BACHELIER, gendre COURCIER, Libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n.° 55.

1829 ET 1830.

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

OPTIQUE.

Essai analytique sur le phénomène du mirage ;

Par M. GERGONNE.

1. DANS les cas les plus ordinaires, les couches atmosphériques de densité uniforme sont sensiblement sphériques et concentriques, et leur centre commun est le centre même de la terre. Mais lorsqu'on ne considère que la portion de l'atmosphère qui repose sur un sol peu étendu, on peut, sans erreur sensible, supposer ces couches planes et horizontales, et c'est ainsi que nous en userons constamment dans tout ce qui va suivre. Communément ces couches, comprimées par le poids de toutes celles qui leur sont supérieures, sont d'autant plus denses qu'elles sont plus basses ; et l'on démontre même fort aisément que, si elles avaient toutes la même température, leur hauteur croissant en progression par différences, leur densité décroîtrait en progression par quotiens ; mais, d'un autre côté, il est visible que ces couches doivent être d'autant plus échauffées,

et, par suite, d'autant plus dilatées, toutes choses égales d'ailleurs, qu'elles sont plus voisines du sol ; voilà donc une cause de condensation et une cause de dilatation qui se contrarient, et de la combinaison desquelles il résulte que les couches inférieures doivent être plus dilatées et conséquemment moins denses, et que les couches supérieures, au contraire, doivent être moins dilatées et conséquemment plus denses qu'elles ne le seraient si la température se trouvait uniformément répartie dans toute la masse; ce qui doit rendre le décroissement de densité de bas en haut, moins rapide qu'il ne le serait dans le même cas.

On conçoit même que, dans certaines localités, dont le sol est susceptible de s'échauffer fortement dans le milieu du jour, par l'action des rayons solaires, il peut se faire que la chaleur qu'il communique aux couches atmosphériques les plus basses y produise une dilatation qui compense ou même fasse plus que compenser la densité que tend à leur faire acquérir la pression à laquelle elles sont soumises; et alors la densité de ses couches pourra fort bien être constante ou même croissante de bas en haut, jusqu'à une certaine hauteur au-delà de laquelle elle deviendra décroissante. Il ne serait même pas impossible que, dans des circonstances probablement fort rares, la densité des couches fût alternativement croissante et décroissante, de manière à présenter, le long d'une même verticale, plusieurs *maxima* et *minima* ; or, ce sont toutes ces variétés de circonstances, comme nous le verrons bientôt, qui donnent naissance à cette multiplicité d'images d'un même objet qui constitue proprement le phénomène du mirage, ainsi qu'à beaucoup d'autres phénomènes non moins piquans, dont quelques-uns, à la vérité, n'ont point encore été observés, mais que le calcul, dévançant ici l'observation, comme en tant d'autres rencontres, ne nous montre pas moins comme très-possibles.

II. Lorsqu'un milieu transparent se trouve ainsi composé de couches horizontales de densité uniforme ; les rayons émanés, dans toutes les directions d'un même point lumineux, qui s'y trouve plongé, décrivent évidemment des courbes planes, situées dans tous les plans verticaux qu'on peut concevoir par ce point, et ces rayons sont en nombre infini dans chacun de ces plans. Il n'est pas moins évident que ceux d'entre ces rayons, dont la direction initiale fait le même angle avec la verticale conduite par le point lumineux, ont exactement la même courbure et sont situés de la même manière, dans leurs plans verticaux respectifs; d'où il résulte que tous les rayons émanés de ce point sont distribués sur une série de surfaces de révolution, ayant pour axe commun la verticale conduite par le point rayonnant, point commun à toutes ces surfaces, dont ces mêmes rayons sont les méridiens. Il suffit donc d'étudier ce qui se passe dans l'un quelconque des plans verticaux conduits par ce point, pour connaître ce qui se passe dans tous les autres.

III. Considérons donc, en particulier, un quelconque de ces plans, dans lequel soient tracés, par le point rayonnant, un axe des x horizontal et un axe des y vertical. Concevons que, par chacun des points de ce dernier axe, on lui élève une perpendiculaire d'une longueur proportionnelle à la densité du milieu en ce point; les extrémités des perpendiculaires, ainsi élevées, appartiendront toutes à une certaine courbe que nous avons appelée la *caractéristique* du milieu, dans notre mémoire de 1808, parce qu'en effet elle est fort propre à en peindre aux yeux la nature. On pourra, au surplus, augmenter ou diminuer, d'une même quantité quelconque, toutes les coordonnées de cette courbe parallèles à l'axe des x, car cela reviendra simplement à admettre que l'on a augmenté ou diminué, d'une même quantité, la densité du milieu, en tous ses points; ce qui, comme l'on sait, ne saurait altérer en aucune sorte la figure des rayons lumineux (*). On pourra donc aussi faire marcher

(*) Il est pourtant essentiel de remarquer que si une augmentation ou une diminution constante quelconque dans la densité du milieu, en tous ses cette caractéristique parallèlement à elle-même, dans le sens des x; et nous profiterons à l'avenir de cette liberté pour la faire constamment passer par l'origine.

IV. Ces choses ainsi entendues, soit u la densité du milieu, à la hauteur y; cette densité sera une certaine fonction de y; de sorte qu'on pourra poser, en général,

$$u=\psi(y) \; ; \qquad (1)$$

y et u devant être nuls en même temps; et cette équation, en y considérant les u comme des coordonnées parallèles aux x, sera aussi celle de la caractéristique. On aura ainsi (tom. XIX, pag. 270)

$$P=\frac{du}{dx}=0\,, \qquad Q=\frac{du}{dy}\;;$$

en conséquence, les équations du mouvement d'une molécule lumineuse seront (*ibid.*, pag. 282)

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0\,, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=2k^2\frac{du}{dy}\;; \qquad (2)$$

---

points, ne peut changer la figure des rayons lumineux, elle est loin toutefois d'être sans influence sur l'acte de la vision. Si, en effet, le milieu devient très-dense, les humeurs dont l'œil se compose, lesquelles ne réfractent la lumière qu'à raison de l'excès de leur densité sur celle de l'air ambiant, réfracteront alors trop faiblement les rayons émanés du point lumineux qui, de la sorte, paraîtra plus voisin qu'il ne le sera réellement, et même pourra le paraître assez pour n'être vu que d'une manière confuse. Le contraire arriverait, si le milieu devenait très-rare en tous ses points. Un presbyte l'est donc d'autant plus et un myope d'autant moins que la colonne barométrique est plus élevée; et le myope lui-même devient presbyte lorsqu'il plonge dans l'eau.

k^2 ayant ici la même signification qu'à la pag. 262 du mémoire cité. On pourra d'ailleurs y joindre, comme s'y trouvant implicitement comprise (*ibid.*, pag. 273) l'équation

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=w^2+4k^2u\ , \qquad (3)$$

dans laquelle w représente toujours la vîtesse de la lumière dans le vide.

V. En multipliant par $2\mathrm{d}y$ la dernière des équations (2) elle devient

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=4k^2\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y=4k^2\mathrm{d}u\ ;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=A+4k^2u\,;$$

A étant la constante arbitraire. Cela revient à

$$\mathrm{d}y^2=(A+4k^2u)\mathrm{d}t^2\ ;$$

mais l'équation (3) donne

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=(w^2+4k^2u)\mathrm{d}t^2\ ;$$

éliminant donc $\mathrm{d}t^2$ entre ces deux équations, nous obtiendrons, pour l'équation différentielle du rayon lumineux,

$$(w^2-A)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=A+4k^2u\,. \qquad (4)$$

Pour faire disparaître la constante A, désignons par m la tangente tabulaire de l'angle que fait la direction initiale du rayon lumineux avec l'axe des x; alors on devra avoir à la fois, $y=0$ et $\frac{dy}{dx}=m$; et puisque nous sommes convenus de faire constamment passer la caractéristique par l'origine, on aura aussi alors $u=0$. En conséquence l'équation (4) deviendra

$$m^2(\varpi^2-A)=A\ ,$$

d'où

$$A=\frac{m^2\varpi^2}{1+m^2}\ ,\qquad \varpi^2-A=\frac{\varpi^2}{1+m^2}\ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\varpi^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=m^2\varpi^2+4(1+m^2)k^2u\ ;$$

posant donc, une fois pour tout, pour abréger

$$\frac{\varpi}{2k}=\lambda\ , \qquad (5)$$

cette équation deviendra

$$\lambda^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\lambda^2m^2+(1+m^2)u\ ; \qquad (6)$$

ce qui donnera, en différentiant,

$$2\lambda^2\frac{d^2y}{dx^2}=(1+m^2)\frac{du}{dy}\ ; \qquad (7)$$

on tirera d'ailleurs de l'équation (6)

$$dx=\frac{\lambda dy}{\sqrt{\lambda^2m^2+(1+m^2)u}}\ ; \qquad (8)$$

équation séparée, dont l'intégration ne dépend plus que des quadratures.

VI. Les équations (6) et (7) mettent en évidence des relations entre la courbure de la caractéristique et celle du rayon lumineux qu'il est bon de remarquer en passant. Observons d'abord qu'une même tranche horizontale du milieu ne pouvant jamais avoir, à la fois, deux densités différentes, il s'ensuit qu'à une même valeur quelconque de y ne sauraient répondre, à la fois, plusieurs valeurs de u; ce qui revient à dire qu'une parallèle quelconque à l'axe des x, ne saurait couper la caractéristique en plus d'un point. Or, l'équation (6) prouve qu'à chaque valeur de u répondent seulement pour $\frac{dy}{dx}$, deux valeurs égales et de signes contraires; il n'en répondra donc pas davantage à chaque valeur de y; ce qui revient à dire que, si une parallèle à l'axe des x est coupée par le rayon lumineux en plusieurs points, elle le sera sous les mêmes angles en tout ces points, abstraction faite du signe qui évidemment devra être alternativement positif et négatif, et conséquemment une telle droite ne pourra couper le rayon lumineux en certains points et le toucher en d'autres; ainsi, ou le rayon lumineux coupera une telle parallèle en deux points seulement, auquel cas ce rayon sera symétrique par rapport à une certaine verticale, ou bien il serpentera continuellement autour de cette droite, et alors il se trouvera entièrement compris entre deux autres droites parallèles à celles-là, qu'il ira toucher alternativement. Cette même équation (6) prouve d'ailleurs que, tant que m n'est pas nulle, c'est-à-dire, tant que la direction initiale du rayon n'est point horizontale, sa tangente ne saurait devenir parallèle à l'axe des x que dans les régions pour lesquelles u est négative; elle prouve également que, tant que la direction initiale du rayon n'est point verticale, sa tangente ne saurait devenir perpendiculaire à l'axe des x que dans les points pour lesquels on aurait u infinie.

Puisqu'à chaque valeur de y il ne saurait répondre qu'une seule valeur de u, il n'en répondra qu'une non plus de $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$; et l'équation (7) prouve qu'il n'en répondra également qu'une seule de $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$; ainsi, jamais deux branches de la courbe, affectée par un même rayon, ne pourront être tangentes l'une à l'autre. Cette même équation (7) prouve, en outre, que $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$ et $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ sont constamment de même signe, qu'ils croissent et décroissent, deviennent nuls et infinis en même temps ; ce qui revient à dire qu'aux *maxima* et *minima* de densité du milieu répondent des points d'inflexion du rayon, et que la courbure de ce rayon devient infinie pour les points où la tangente à la caractéristique devient horizontale.

VII. On voit qu'au moyen de l'équation (8) la caractéristique étant donnée, on peut en conclure la nature de la courbe affectée par le rayon. On peut aussi, à l'aide de la même équation, se proposer de résoudre la question inverse, c'est-à-dire, celle où l'on demanderait quelle caractéristique, et conséquemment quelle nature de milieu, peut donner naissance à un rayon dont la nature et la situation sont données; et nous traiterons d'autant plus volontiers cette question, avant l'autre, qu'elle n'a besoin pour être résolue, que de la simple application du calcul différentiel, tandis que la résolution de la première réclame impérieusement l'emploi du calcul intégral; mais voyons auparavant, comment on peut déduire, de l'observation directe, la figure d'un rayon lumineux.

VIII. Concevons que, dans une plaine d'une certaine étendue, à peu près horizontale, on ait tracé une rigole rectiligne, assez profonde pour qu'en y introduisant de l'eau, le fond n'en soit découvert en aucun point; on aura ainsi une surface rigoureusement horizontal (*). Soient plantés, le long de cette rigole et dans un même plan vertical, une suite de jalons verticaux, susceptibles d'être plus ou moins allongés vers le haut, au moyen d'une tige à crémaillère, mue par un pignon, à peu près comme on le voit dans nos lampes à courant d'air, soit par tout autre moyen équivalent; et soit mise cette disposition à profit pour les ajuster, de telle sorte, que leurs extrémités supérieures *paraissent*, à l'œil, être toutes en ligne droite; on sera certain alors que ces extrémités sont toutes situées sur la courbe qu'affecte l'un des rayons lumineux qui partent de l'extrémité supérieure de l'un des jalons extrêmes. Soient alors mesurées exactement tant les distances entre les jalons consécutifs que la hauteur de chacun au-dessus du niveau de l'eau, on obtiendra de la sorte les coordonnées d'un plus ou moins grand nombre de points de la courbe affectée par le rayon lumineux; d'où, par les méthodes connues d'interpolation, on pourra conclure l'équation de cette courbe. Il faudra seulement, pour ramener l'origine à l'extrémité supérieure de l'un des jalons extrêmes, compter les x à partir du pied de ce jalon, et diminuer ensuite les y de toute sa hauteur.

IX. Ces choses ainsi entendues, supposons, en général, qu'en opérant de la sorte on ait trouvé, pour l'équation de la courbe décrite par le rayon,

$$y=\varphi(x)\ ; \qquad (9)$$

équation dans laquelle y doit être nulle en même temps que x; on en conclura

---

(*) On conçoit que, dans la présente hypothèse, où la lumière ne se meut pas en ligne droite, tous les moyens ordinaires de nivellement employés dans la vue de se procurer une telle surface, seraient tout-à-fait illusoires.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x)\,, \qquad \text{d'où} \qquad m=\varphi'(0)\;;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (6), elle deviendra

$$\lambda^2\{\varphi'^2(x)-\varphi'^2(0)\}=\{1+\varphi'^2(0)\}u\;;$$

d'où on tirera

$$u=\frac{\lambda^2\{\varphi'^2(x)-\varphi'^2(0)\}}{1+\varphi'^2(0)}\;; \qquad (10)$$

mettant donc pour x, dans cette dernière formule, sa valeur en y, tirée de l'équation (9), on obtiendra ainsi la valeur de u en fonction de y, c'est-à-dire l'équation de la caractéristique.

X. Donnons des exemples de l'application de ce procédé. Supposons d'abord que l'observation ait donné, pour la figure du rayon, une droite ayant pour équation

$$y=\varphi(x)=\mu x\;;$$

il en résultera

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x)=\mu\,, \qquad \text{d'où} \qquad m=\varphi'(0)=\mu\;;$$

substituant ces valeurs dans la formule (10), elle deviendra

$$u=\frac{\lambda^2(\mu^2-\mu^2)}{1+\mu^2}=0\;;$$

résultat qui ne renferme plus x et qui nous apprend qu'ici la caractéristique est l'axe des y ou une parallèle à cet axe ; ce qui revient à dire que les rayons de lumière non verticaux ne sauraient être rectilignes que dans un milieu de densité constante ; ce qui était d'ailleurs facile à prévoir.

Supposons, pour second exemple, qu'on ait trouvé, pour la figure du rayon, une parabole ayant son axe vertical et exprimée par l'équation

$$y=\varphi(x)=\frac{2gx+x^2}{2h} ;$$

il en résultera

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)=\frac{g+x}{h}, \quad \text{d'où} \quad m=\varphi'(0)=\frac{g}{h} ;$$

substituant ces valeurs dans la formule (10), elle deviendra

$$u=\frac{\lambda^2(2gx+x^2)}{g^2+h^2} ;$$

éliminant enfin x ou, ce qui revient au même, $2gx+x^2$ de cette dernière formule, au moyen de l'équation du rayon lumineux, il viendra, pour l'équation de la caractéristique,

$$u=\frac{2\lambda hy}{g^2+h^2} ;$$

c'est-à-dire qu'ici la caractéristique est une droite inclinée à l'axe des y ; ce qui revient à dire que la densité des couches du milieu croît ou décroît proportionnellement à leur élévation au-dessus du sol. Ce n'est donc que dans un milieu ainsi constitué que les rayons lumineux peuvent être paraboliques ; les résultats obtenus prouvent d'ailleurs que les paraboles tournent constamment leur convexité du côté le moins dense.

XI. Passons présentement à l'autre question, c'est-à-dire à celle où, au contraire, il s'agit de conclure de la nature du milieu la figure de la courbe tracée par le rayon lumineux. On conçoit que, pour cela, il ne sera question que de substituer pour u, dans la formule (8), sa valeur en y donnée par la définition du milieu ; d'intégrer ensuite et de déterminer la constante introduite par l'intégration d'après la condition que x et y soient nuls en même temps.

XII. Supposons, pour premier exemple, que la densité du milieu soit constante ; la caractéristique sera alors une parallèle à l'axe des y, à laquelle il sera toujours permis (III) de substituer l'axe des y lui-même ; on aura ainsi $u=0$; au moyen de quoi l'équation (8) deviendra

$$dx=\frac{dy}{m},$$

d'où

$$x+B=\frac{y}{m};$$

ou simplement

$$y=mx; \qquad (11)$$

puisque x et y doivent être nuls en même temps. Les rayons lumineux sont donc rectilignes dans ce cas, comme on pouvait bien s'y attendre.

Supposons, pour second exemple, que la densité des couches croisse ou décroisse proportionnellement à leurs distances au plan horizontal conduit par le point rayonnant ; la caractéristique sera alors une droite passant par l'origine, on pourra donc poser $u=\frac{y}{c}$; c étant une longueur constante, positive ou négative, suivant que la densité sera croissante ou décroissante vers le haut, et d'autant moindre que la variation de densité sera plus rapide. En portant cette valeur de u dans l'équation (8), elle deviendra

$$dx=\lambda\sqrt{c}.\frac{dy}{\sqrt{\lambda^2m^2c+(1+m^2)y}}\;;$$

dont l'intégrale sera

$$x+B=\frac{2\lambda\sqrt{c}}{1+m^2}\sqrt{\lambda^2m^2c+(1+m^2)y}\;;$$

B étant la constante arbitraire. En exprimant donc que x et y doivent être nuls en même temps, on aura

$$B=\frac{2\lambda\sqrt{c}}{1+m^2}.\lambda m\sqrt{c}\;;$$

d'où, en substituant

$$x=-\frac{2\lambda\sqrt{c}}{1+m^2}\{\lambda m\sqrt{c}-\sqrt{\lambda^2m^2c+(1+m^2)y}\}\;:$$

En chassant le dénominateur, transposant et faisant disparaître le radical, il vient, en réduisant,

$$(1+m^2)x^2=4\lambda^2c(y-mx)\;; \qquad (12)$$

équation d'une parabole dont l'axe est vertical, dont la concavité regarde le côté vers lequel la densité va croissant, et qui a une courbure d'autant moindre que cette densité varie moins rapidement (*).

Ainsi se trouvent démontrées les réciproques des deux propositions que nous avons établies ci-dessus.

(*) Cette équation est exactement la même que celle de la trajectoire des projectiles dans le vide, et on ne doit pas en être surpris, puisqu'ici, comme là, il s'agit d'une force d'impulsion combinée avec une force accélératrice constante.

XII. Ce qui nous intéresse spécialement est de découvrir de quelle manière s'opérera la vision à travers des milieux constitués comme ceux que nous considérons ici. Pour cela, observons d'abord que, quelle que soit la fonction de y que l'on substitue pour u, dans l'équation (8), en intégrant ensuite cette équation et en déterminant la constante comme nous l'avons dit, on parviendra toujours, pour le rayon lumineux, à une équation de la forme

$$\mathrm{f}(x, y, m)=0 ; \qquad (13)$$

de sorte que, pour chaque valeur particulière de m, c'est-à-dire, pour chaque direction initiale donnée du rayon lumineux, on pourra toujours, au moyen de cette équation, déterminer le cours entier de la courbe qu'il devra affecter.

Soit un œil plongé dans le milieu, et soit (x', y') le centre de l'ouverture de sa prunelle. Si, considérant m, dans l'équation (13), comme un paramètre indéterminé, on veut profiter de son indétermination pour assujétir le rayon parti de l'origine à passer par le point (x', y'), il faudra écrire que les coördonnées de ce point satisfont à l'équation (13) ; ce qui donnera pour déterminer m, l'équation

$$\mathrm{f}(x', y', m)=0 . \qquad (14)$$

Pour aller du simple au composé, supposons d'abord que cette équation ne soit, par rapport à m, que du premier degré seulement, ou encore qu'étant d'un degré impair quelconque, par rapport à cette inconnue, elle ne donne jamais pour elle qu'une seule valeur réelle, quelle que puisse être d'ailleurs la situation du point (x', y'). Il s'ensuivra qu'en quelque endroit qu'un œil soit situé, sur le plan des axes, un rayon et un seul rayon émané du point lumineux, parviendra toujours au centre de sa prunelle. Le plan des axes sera donc entièrement couvert par les rayons qui s'y trouveront contenus, et ces rayons, ne se coupant pas les uns les autres, n'auront pas de courbe limite ou d'enveloppe commune.

Si, dans ce cas, on tire de l'équation (14) la valeur de m, pour la substituer dans l'équation (13), l'équation résultante en x, y, x', y', sera l'équation particulière du rayon qui parvient au centre de l'œil, lequel se trouvera ainsi parfaitement déterminé. En lui menant donc une tangente par le point (x', y'), cette tangente indiquera, par sa direction, la direction dans laquelle le point rayonnant *paraîtra* situé, pour un œil placé en (x', y') ; car on sait que les objets sont toujours vus dans la direction de la tangente menée par l'œil au rayon que lui envoyent ces mêmes objets.

Par exemple, dans le cas d'un milieu homogène, ayant trouvé (XII) pour l'équation générale des rayons lumineux

$$y=mx\ ,$$

si l'on veut déterminer m de manière que l'un de ces rayons passe par le point (x', y'), il faudra écrire

$$y'=mx'\ ;$$

tirant de cette équation la valeur de m, pour la substituer dans la précédente, celle-ci deviendra

$$y=\frac{y'}{x'}x\ , \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}\ ;$$

l'équation de la tangente menée au rayon par l'œil sera donc

$$y-y'=\frac{y'}{x'}(x-x')\ , \quad \text{ou simplement} \quad y=\frac{y'}{x'}x\ ;$$

c'est-à-dire que cette tangente se confondra avec le rayon lui-même; de sorte que le point rayonnant sera vu dans sa véritable direction.

XIII. Mais c'est peu de savoir dans quelle direction ou sur quelle droite menée par l'œil, le point rayonnant semblera se trouver; et on peut désirer en outre de connaître positivement quel sera le point de cette droite qu'il *paraîtra* occuper, ou ce qu'on appelle autrement le *lieu de l'image* (*). Or, si, par le point (x', y'), on imagine une trajectoire orthogonale de tous les rayons émanés du point lumineux, il est clair que les tangentes menées à ces rayons, par les points où les coupera la trajectoire, seront des normales à cette trajectoire; d'où il suit que, pour un œil situé en (x', y'), ces rayons sembleront diverger du centre de courbure de la trajectoire en ce même point; et puisque, généralement, le lieu de l'image d'un point est l'endroit d'où paraissent diverger, à leur entrée dans l'œil, ceux des rayons émanés de ce point qui y pénètrent, on pourra établir ce théorème général :

THÉORÈME. Lorsque des rayons lumineux, de figure quelconque, émanés d'un même point, sont tous compris dans un même plan, le lieu apparent de ce point, pour un œil situé d'une manière quelconque dans ce plan, est le centre de courbure relatif au lieu de l'œil, de celle des trajectoires orthogonales de tous les rayons lumineux qui le contient.

Il suit évidemment de là que le point rayonnant ne pourra être distinctement aperçu qu'autant que la trajectoire orthogonale de tous les rayons émanés de ce point aura sa convexité tournée vers l'œil. Si, en effet, le contraire arrivait, le centre de courbure de cette courbe étant alors situé derrière le spectateur, les rayons de lumières parviendraient à son œil dans des directions convergentes; il se trouverait donc dans un cas pareil à celui où l'on est lors-

(*) M. Biot ne paraît pas s'être occupé de cette question; l'inspection des planches de son ouvrage pourrait même induire les personnes peu versées dans ces matières à penser que le lieu apparent d'un point lumineux est généralement sur le rayon qui parvient de ce point à l'œil, ce qui, au contraire, ne saurait arriver que dans le cas très-particulier où ce rayon est rectiligne, c'est-à dire, dans le cas où le milieu est homogène.

qu'on regarde des objets fort éloignés, en appliquant contre l'œil une lentille extrêmement convexe. Il verrait le point lumineux comme le verrait, dans les circonstances ordinaires, un spectateur excessivement myope.

XIV. Si pour faire l'application de notre théorème il était nécessaire d'obtenir d'abord l'équation de la trajectoire orthogonale des rayons lumineux, le problème pourrait souvent être d'une solution fort embarrassante, car cette trajectoire est donnée immédiatement par une équation différentielle qui peut n'être que difficilement séparable. Heureusement on n'a pas besoin de la courbe même, mais seulement de son centre de courbure répondant au point (x', y'); et ce centre, comme on va le voir, peut être facilement obtenu par la simple application du calcul différentiel.

Soit toujours (x', y') un des points du rayon unique qui répond à une valeur donnée de m, c'est-à-dire, à une direction initiale donnée du rayon lumineux; sa tangente en ce point, normale au même point à la trajectoire orthogonale, contiendra le centre de courbure cherché, et sa normale au même point, tangente à cette même trajectoire, pourra, dans des points très-voisins de celui-là, être prise sensiblement pour la trajectoire elle-même. Si donc on passe de ce premier rayon à un autre qui en soit très-voisin, sa tangente, au point où il sera coupé par la normale au premier en (x', y'), pourra être prise sensiblement pour une seconde normale à la trajectoire orthogonale, laquelle coupera la première en un point très-voisin du centre de courbure, et qui deviendra finalement ce point lui-même, si le nouveau rayon lumineux vient à se confondre avec le premier.

Appliquons à cette conception géométrique les procédés de l'analyse; supposons qu'ayant résolu l'équation du rayon lumineux par rapport à y, cette équation soit alors

$$y = \mathrm{F}(x, m) = X\,;$$

on aura ainsi, pour le point (x', y'),

$$y'=X', \qquad (15)$$

d'où

$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{dX'}{dx'}; \qquad (16)$$

en conséquence ; l'équation de la tangente en ce point, normale à la trajectoire au même point, et contenant ainsi le centre de courbure cherché, sera

$$y-y'=\frac{dX'}{dx'}(x-x'), \qquad (17)$$

ou encore

$$y-X'=\frac{dX'}{dx'}(x-x'); \qquad (18)$$

Supposons présentement que le point (x', y') se change en $(x'+\delta x', y'+\delta y')$; et soit $m+\delta m$ la valeur que prend m pour ce nouveau point. La variation de l'équation (17) de la tangente, dans laquelle il faudra traiter comme constantes les coordonnées x et y du centre de courbure, sera, en observant que X' est fonction de x' et m seulement, divisant par δm et réduisant,

$$-\frac{dX'}{dm}=\left\{\frac{d^2X'}{dx'dm}+\frac{d^2X'}{dx'^2}\,\frac{\delta x'}{\delta m}\right\}(x-x')$$

d'où

$$x-x'=-\frac{\dfrac{dX'}{dm}}{\dfrac{d^2X'}{dx'dm}+\dfrac{d^2X'}{dx'^2}\,\dfrac{\delta x'}{\delta m}}; \qquad (19)$$

et par suite (17)

$$y-y'=-\frac{\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}x'}\;\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}m}}{\frac{\mathrm{d}^2X'}{\mathrm{d}x'\mathrm{d}m}+\frac{\mathrm{d}^2X'}{\mathrm{d}x'^2}\;\frac{\delta x'}{\delta m}}\,; \qquad (20)$$

Si présentement on prend la variation de l'équation (15), on aura, en divisant toujours par δm,

$$\frac{\delta y'}{\delta m}=\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}x'}\;\frac{\delta x'}{\delta m}+\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}m}\;; \qquad (21)$$

d'un autre côté, si nous supposons que le point $(x'+\delta x', y'+\delta y')$, est sur la normale au rayon lumineux en (x', y'), nous aurons

$$1+\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}\;\frac{\delta y'}{\delta x'}=0\,,\quad \text{ou bien (16)},\quad 1+\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}x'}\;\frac{\delta y'}{\delta x'}=0\,,$$

où, en multipliant par $\frac{\delta x'}{\delta m}$,

$$\frac{\delta x'}{\delta m}+\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}x'}\;\frac{\delta y'}{\delta m}=0\,;$$

mettant dans cette dernière équation pour $\frac{\delta y'}{\delta m}$ sa valeur donnée par l'équation (21), elle deviendra

$$\left\{1+\left(\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}x'}\right)^2\right\}\frac{\delta x'}{\delta m}+\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}x'}\;\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}m}=0\,;$$

tirant enfin de cette dernière la valeur de $\frac{\delta x'}{\delta m}$, pour la substituer dans les formules (19) et (20), celles-ci deviendront

$$\left.\begin{aligned}
x-x'&=\frac{\dfrac{dX'}{dm}\left\{1+\left(\dfrac{dX'}{dx'}\right)^2\right\}}{\dfrac{dX'}{dm}\,\dfrac{dX'}{dx'}\,\dfrac{d^2X'}{dx'^2}-\dfrac{d^2X'}{dx'dm}\left\{1+\left(\dfrac{dX'}{dx'}\right)^2\right\}}\,,\\
y-y'&=\frac{\dfrac{dX'}{dx'}\,\dfrac{dX'}{dm}\left\{1+\left(\dfrac{dX'}{dx'}\right)^2\right\}}{\dfrac{dX'}{dm}\,\dfrac{dX'}{dx'}\,\dfrac{d^2X'}{dx'^2}-\dfrac{dX'}{dxdm}\left\{1+\left(\dfrac{dX'}{dx'}\right)^2\right\}}\,;
\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

on déduira donc de ces formules générales, dans chaque cas particulier, les valeurs des coordonnées x, y du lieu de l'image du point lumineux, vu du point (x', y') ; valeurs dans lesquelles il faudra d'ailleurs substituer pour m sa valeur tirée de l'équation (15).

Si l'on représente par r et r' les distances réelles et apparentes de l'œil au point rayonnant, et par θ et θ' les inclinaisons à l'horizon des droites menées respectivement de l'œil à ce point et à son image, on aura

$$\left.\begin{aligned} r&=\sqrt{x'^2+y'^2}\,,\\ \text{Tang.}\theta&=\frac{y'}{x'}\ ; \end{aligned}\right\}\ (23)\qquad \left.\begin{aligned} r'&=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\,,\\ \text{Tang.}\theta'&=\frac{y-y'}{x=x'}\ ; \end{aligned}\right\}\ (24)$$

en substituant donc, dans ces dernières formules, pour $x-x'$ et $y-y'$ leurs valeurs (22), on aura

$$r'=\frac{-\dfrac{dX'}{dm}\left\{1+\left(\dfrac{dX'}{dx'}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{dX'}{dm}\,\dfrac{dX'}{dx'}\,\dfrac{d^2X'}{dx'^2}-\dfrac{d^2X'}{dx'dm}\left\{1+\left(\dfrac{dX'}{dx'}\right)^2\right\}}\,,\qquad \text{Tang.}\theta'=\frac{dX'}{dx'}.\quad(25)$$

La comparaison des formules (23) et (25) fera connaître si le point lumineux est vu au-dessus ou au-dessous de sa véritable place, plus près ou plus loin de l'œil qu'il ne l'est réellement

XV. Appliquons ces formules générales au cas particulier d'une densité constante, pour lequel on a (XII)

$$y'=mx'=X' ;$$

il en résultera

$$\frac{dX'}{dx'}=m , \quad \frac{dX'}{dm}=x' , \quad \frac{d^2X'}{dx'dm}=1 , \quad \frac{d^2X'}{dx'^2}=0 ;$$

et conséquemment

$$1+\left(\frac{dX'}{dx'}\right)^2=1+m^2 ;$$

à l'aide de ces résultats, les formules (22) et (25) deviendront

$$x-x'=-x' , \quad y-y'=-mx' , \quad r'=x'\sqrt{1+m^2} , \quad \text{Tang}\,\theta'=m ,$$

c'est-à-dire, en mettant pour m sa valeur $\frac{y'}{x'}$

$$x=0 , \quad y=0 , \quad r'=\sqrt{x'^2+y'^2}=r , \quad \text{Tang.}\theta'=\frac{y'}{x'}=\text{Tang.}\theta ;$$

c'est-à dire que le point rayonnant sera vu alors dans sa véritable direction et à sa véritable distance. Cela, au surplus, pourrait facilement être prévu ; et cette application particulière ne doit être envisagée, en conséquence, que comme un moyen de vérifier nos formules générales.

XVI. Si, au lieu d'un point rayonnant unique, il s'agit d'un objet d'une certaine étendue, on pourra se demander si cet objet paraîtra à l'œil dans sa véritable situation ou dans une situation renversée, et si, dans ce dernier cas, le renversement aura lieu, à la fois, du haut en bas et de l'avant à l'arrière, ou seulement dans l'une ou l'autre de ces deux directions. Pour découvrir ce qui devra surpasser sous ce rapport, supposons d'abord que le point rayonnant, au lieu d'être à l'origine, soit en (a, b) ; transposant l'origine en ce nouveau point x, y, x', y' se changeront en $x-a$, $y-b$, $x-a'$, $y-b'$, dans les formules (14) et (22). Eliminant alors m des dernières, au moyen de la première, on obtiendra x et y en fonctions de a et b ; et il s'agira d'examiner ensuite si x et a, y et b croissent et décroissent ensemble ; ou si, au contraire, x ou y ou tous les deux décroissent lorsque a ou b ou tous les deux vont croissant.

Plus généralement, pour savoir sous quel aspect s'offrira à l'œil une ligne quelconque, droite ou courbe plane, tracée dans le plan des rayons, il faudra dans l'équation de cette ligne, en a et b, mettre pour ces deux variables leurs valeurs en x et y ; et l'équation résultante, entre ces deux dernières variables, sera l'équation de la ligne demandée. On ferait l'inverse s'il s'agissait de déterminer, au contraire, quelle sera la ligne qui s'offrira sous une apparence donnée (*).

XVII. Passons présentement au cas où l'équation (14) ou (15), c'est-à-dire,

$$y' = F(x', m) = X' \qquad (15)$$

est, par rapport à m, d'un degré supérieur au premier. Alors elle donne pour m un certain nombre de valeurs ; de sorte qu'en général, dans ce cas, plusieurs rayons, émanés du point lumineux dans des directions différentes, pourront parvenir à un œil convenablement situé, qui en apercevra ainsi un plus ou moins grand nombre d'images. Mais on conçoit que, suivant la grandeur et les

(*) Il ne serait guère plus difficile de résoudre le problème pour une courbe à double courbure ou pour une ligne plane, droite ou courbe, non située dans un plan vertical conduit par l'œil.

signes de x' et de y', c'est-à-dire, suivant la situation de l'œil, des valeurs de m, en plus ou moins grand nombre, pourront être tantôt réelles et tantôt imaginaires; elles pourront même quelquefois, si le degré de l'équation est pair, par rapport à m, être toutes de cette dernière sorte. Les rayons émanés du point lumineux pourront donc ne pas occuper, en totalité, le plan qui les contient; ou du moins ils pourront ne pas concourir, en même nombre, en tous les points de ce plan; ces rayons pourront donc avoir une ou plusieurs courbes limites ou enveloppes communes, lesquelles diviseront le plan qui les contient en plusieurs régions, telle qu'en passant d'une région à celle qui lui sera consécutive, le nombre des rayons concourant en un même point, et par suite, le nombre des images du point rayonnant qui pourront être aperçus par un œil situé en ce point, augmentera ou diminuera d'une unité. Ce sont ces diverses enveloppes, qui peuvent fort bien d'ailleurs n'être que diverses branches d'une même courbe, que nous avons appelé les *déterminatrices* du nombre des images, dans notre mémoire de 1808 (*).

Comme d'ailleurs à chaque valeur de m il ne pourra jamais répondre qu'un rayon unique; en conservant ce symbole dans les calculs, on ne déduira des formules (22) qu'un seul système de valeurs des coordonnées x, y du lieu apparent du point lumineux; mais ce système renfermera implicitement tous ceux qu'on devra obtenir, lesquels s'en déduiront par la substitution, à la place de m, de ses diverses valeurs données par l'équation (15). On pourra ensuite, par la discussion de chacun de ces systèmes, en particulier, découvrir si ces images sont vues au-dessus ou au-dessous de la véritable direction du point lumineux, plus près ou plus loin de l'œil que ce point ne l'est réellement, et, au cas qu'il soit ques-

---

(*) Cette dénomination nous paraît moins sujette à équivoque que celle de *caustique* adoptée par M. Biot.

tion d'un objet de dimensions finies, si cet objet est vu droit ou renversé, et s'il est renversé dans les deux sens ou dans un seulement.

XVIII. Supposons que, par la nature du milieu, l'équation (15) ne soit, par rapport à *m* que du second degré seulement ; alors un œil convenablement situé ne pourra apercevoir au plus que deux images du point rayonnant, tandis que, placé d'une autre manière, il n'en apercevra aucune. La déterminatrice divisera donc le plan des rayons en deux régions seulement; et, pour un œil placé sur cette déterminatrice même, ces deux images se confondront.

S'il s'agit d'un objet de dimensions finies, à ses différens points répondront des déterminatrices différentes. Un œil qui laissera toutes ces déterminatrices d'un même côté, verra deux images entières de l'objet; et ces deux images pourront même être plus ou moins distantes l'une de l'autre ; tandis qu'au contraire, un œil situé de l'autre côté des déterminatrices n'apercevra aucune partie de l'objet. Un œil situé sur l'une des déterminatrices extrêmes verra les deux images en contact ; tandis qu'un l'œil situé sur l'autre déterminatrice extrême n'apercevra qu'un seul point de l'objet. Enfin si un œil est situé entre les déterminatrices extrêmes, il ne verra qu'une partie seulement de l'objet, mais il la verra double, et les deux images seront en contact par le point auquel répondra la déterminatrice sur laquelle cet œil se trouvera situé.

Dans le cas de plus de deux images, on sent qu'on pourra appliquer à chaque branche de la déterminatrice, et aux deux images qui se confondent pour un œil situé sur cette branche, ce que nous venons de dire du cas de deux images et d'une déterminatrice qui ne divise le plan des rayons qu'en deux régions seulement.

Nous supposons d'ailleurs, dans tout ceci, qu'aucun obstacle ne s'oppose à la marche libre des rayons lumineux ; et c'est, en effet, ce qui arrive communément lorsque ces rayons ont leur convexité tournée vers le ciel, c'est-à-dire, lorsque la densité des couches atmosphériques décroît de bas en haut; mais lorsqu'au contraire la convexité de ces rayons regarde la terre, ils peuvent, en plus ou moins grand nombre, être interceptés par le sol, et dès lors, malgré les autres circonstances favorables, le phénomène cesse d'avoir lieu, ou du moins il ne se montre pas partout où il aurait été visible en l'absence de cet obstacle.

XIX. Dans le cas particulier de deux images, si ces deux images sont de même grandeur et situées dans une même verticale; et si, en outre, c'est la plus élevée qui est vue dans la même situation que l'objet, tandis que la plus basse est vue dans une situation renversée, cette dernière paraîtra au spectateur la répétition de l'autre dans une eau tranquille, sur la surface de laquelle celle-ci serait posée, et l'image inférieure des nuages semblera également la répétition dans l'eau de leur image la plus élevée. Or, comme ce n'est uniquement que par cette répétition des objets au-dessous d'eux-mêmes, dans une situation renversée, que nous sommes avertis de la présence de l'eau, il s'ensuit que le spectateur éprouvera invinciblement le sentiment de cette présence, dans tous les lieux où les mêmes circonstances se manifesteront, et c'est en cela proprement que consiste le phénomène du *mirage* (*).

Comme nous jugeons assez peu sûrement de l'intervalle qui nous sépare des objets tant soit peu éloignés, il s'ensuit que, quand bien même les deux images ne seraient pas exactement situées dans une même verticale, l'œil du spectateur se prêterait aisément à

(*) Ce phénomène est fréquemment visible dans l'île de *Camargue*, espèce de delta, formé par deux branches du Rhône, à son embouchure dans la Méditerranée. Les cochers et postillons du pays conduisent hardiment leurs voitures vers l'inondation apparente; mais ce n'est pas sans causer quelque frayeur aux voyageurs étrangers, qui pourtant se rassurent peu à peu, en voyant l'eau imaginaire reculer devant eux, à mesure qu'ils avancent vers elle.

juger qu'elles s'y trouvent ; de sorte que l'illusion serait encore la même.

XX. Appliquons présentement ces généralités au cas, déjà considéré ci-dessus, où la densité des couches atmosphériques croît ou décroît proportionnellement à leur élévation. On a vu (XI) qu'alors le rayon lumineux était une parabole ayant pour équation

$$(1+m^2)x^2=4\lambda^2c(y-mx)\ ; \qquad (12)$$

équation que l'on peut écrire ainsi

$$\left\{x+\frac{2\lambda^2mc}{1+m^2}\right\}^2=\frac{4\lambda^2c}{1+m^2}\left\{y+\frac{\lambda^2m^2c}{1+m^2}\right\}. \qquad (26)$$

On voit par là que les équations du sommet de la parabole sont

$$x=-\frac{2\lambda^2mc}{1+m^2}\ , \qquad y=-\frac{\lambda^2m^2c}{1+m^2}\ , \qquad (27)$$

et que son paramètre est

$$\frac{4\lambda^2c}{1+m^2}\ ; \qquad (28)$$

de sorte que la grandeur de ce paramètre est en raison composée de la longueur c qui fixe la variation plus ou moins rapide de la densité des couches et du quarré du cosinus de l'angle que fait avec l'horizon la direction initiale du rayon. On voit de plus que les branches de cette parabole se prolongeront vers le haut ou vers le bas, suivant que c sera positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que la densité du milieu sera croissante ou décroissante de bas en haut.

Si l'on élimine m entre les équations (27), il viendra

$$x^2+4y^2+4\lambda^2cy=0\ , \qquad (29)$$

ou bien

$$\left(\frac{x}{\lambda^2 c}\right)^2+\left(\frac{y+\frac{1}{2}\lambda^2 c}{\frac{1}{2}\lambda^2 c}\right)^2=1\;;$$

équation d'une ellipse qui a son centre sur l'axe des y, un des sommets de son petit axe à l'origine, et son grand axe double du petit. Son centre est d'ailleurs au-dessus ou au-dessous du point rayonnant, suivant que les branches de la parabole se prolongent vers le bas ou vers le haut. Tel est donc, comme M. Biot en avait déjà fait la remarque, le lieu des sommets des paraboles qui répondent à toutes les directions initiales du rayon lumineux.

Si l'on demande quelle valeur il faut donner à m pour que le rayon lumineux parvienne à un œil situé en (x', y'), on aura, pour déterminer cette valeur, l'équation

$$(1+m^2)x'^2=4\lambda^2 c(y'-mx')\;; \qquad (30)$$

c'est-à-dire,

$$x'^2m^2+4\lambda^2 cx'm+(x'^2-4\lambda^2 cy')=0\;; \qquad (31)$$

ainsi, généralement, il y a deux directions initiales différentes, sous lesquelles un rayon émané du point lumineux peut parvenir à un œil situé dans le plan qui contient tous les rayons (*).

Nous disons *généralement*, car si le point (x', y') était choisi de telle sorte qu'on eût

$$4\lambda^4c^2x'^2-x'^2(x'^2-4\lambda^2cy')<0\;;$$

ou, plus simplement,

$$4\lambda c^2-(x'^2-4\lambda^2cy')<0\;;$$

(*) C'est exactement de la même manière que, dans la balistique, il y a, pour une même charge de poudre, deux inclinaisons différentes de la bouche à feu qui peuvent faire parvenir le projectile à un même but donné.

les deux valeurs de m étant alors imaginaires, aucun des rayons émanés du point lumineux ne pourrait parvenir en (x', y'). Les rayons émanés de ce point n'embrassent donc pas ici tout le plan vertical qui les contient, comme il arrive pour les rayons rectilignes, dans le cas d'une densité constante; ils sont circonscrits par une courbe enveloppe, dont l'équation est évidemment

$$4\lambda^4c^2-(x^2-4\lambda^2cy)=0$$

ou bien

$$x^2=4\lambda^2c(y+\lambda^2c)\ ; \qquad (32)$$

équation d'une nouvelle parabole, tournée dans le même sens que celles que décrivent les rayons lumineux, mais dont l'axe est l'axe même des y; c'est-à-dire, la verticale conduite par le point rayonnant, et dont ce point est le foyer. Elle ne diffère, au surplus, que par sa position du rayon parabolique qui répond à $m=0$, c'est-à-dire du rayon dont la direction initiale est horizontale. Un œil placé dans l'intérieur de cette courbe limite, verra donc deux images du point rayonnant; ce point sera tout-à-fait invisible pour un œil situé hors d'elle; enfin pour un œil situé sur la courbe même, les deux images se confondront en une seule.

XXI. Occupons-nous présentement de la détermination précise du lieu des deux images. L'équation (30), résolue par rapport à y', donne

$$y'=\frac{(1+m^2)x'^2+4\lambda^2mcx'}{4\lambda^2c}\ ; \qquad (33)$$

de sorte que nous avons ici

$$X'=\frac{(1+m^2)x'^2+4\lambda^2mcx'}{4\lambda^2c}\ ;$$

de là résulte

$$\frac{dX'}{dx'}=\frac{(1+m^2)x'+2\lambda^2mc}{2\lambda^2c}\;; \qquad \frac{dX'}{dm}=\frac{mx'^2+2\lambda^2cx'}{2\lambda^2c}\;;$$

$$\frac{d^2X'}{dx'^2}=\frac{1+m^2}{2\lambda^2c}\;, \qquad \frac{d^2X'}{dx'dm}=\frac{mx'+\lambda^2c}{\lambda^2c}\;;$$

$$1+\left(\frac{dX'}{dx'}\right)^2=\frac{1+m^2}{4\lambda^4c^2}\{x'^2+(mx'+2\lambda^2c)^2\}\;;$$

$$\frac{dX'}{dm}\,\frac{dX'}{dx'}\,\frac{d^2X'}{dx'^2}-\frac{d^2X'}{dx'dm}\left\{1+\left(\frac{dX'}{dx'}\right)^2\right\}=-\frac{1+m^2}{8\lambda^6c^3}\{mx'^3+(mx'+2\lambda^2c)^3\}\;;$$

substituant toutes ces valeurs dans les formules (22) et (25), elles deviendront

$$\left.\begin{aligned} x-x'&=-\frac{x'(mx'+2\lambda^2c)\{x'^2+(mx'+2\lambda^2c)^2\}}{mx'^3+(mx'+2\lambda^2c)^3}\;, \\ y-y'&=-\frac{x'(mx'+2\lambda^2c)\{x'+m(mx'+2\lambda^2c)\}\{x'^2+(mx+2\lambda^2c)^2\}}{2\lambda^2c\{mx'^3+(mx'+2\lambda^2c)^3\}}\;; \end{aligned}\right\}(34)$$

telles sont donc les formules qui, pour une direction initiale donnée du rayon lumineux, feront connaître le lieu, et par suite la distance et la direction de l'image du point rayonnant, pour un œil situé en un point donné quelconque (x', y') de ce rayon.

Mais par ce même point (x', y') viennent passer deux rayons répondant aux deux racines de l'équation (31) et, pour juger de la situation des deux images qui en naîtront, il faudra substituer à la place de m, dans nos dernières formules, ses valeurs données par cette équation, lesquelles sont

$$m=\frac{-2\lambda^2c\pm\sqrt{4\lambda^2c(y'+\lambda^2c)-x'^2}}{x'}\;;$$

Nous pourrons revenir, dans un autre mémoire, sur la discussion générale des formules, mais, en attendant, pour donner au lecteur quelque idée des bizarres apparences que peut faire naître pour la vue, l'existence d'un milieu conditionné comme nous le supposons ici, nous croyons devoir mettre sous ses yeux le résultat du calcul d'un cas particulier exécuté à l'aide de ces mêmes formules. Il s'agit, dans la planche ci jointe, d'un obélisque AB de 50 mètres d'élévation, placé au sommet d'une montagne que nous supposons élevée aussi de 50 mètres au-dessus du sol. Cet obélisque est supposé vu par un œil O, élevé de 25 mètres seulement au-dessus du sol et distant de 150 mètres, dans le sens horizontal de l'axe de l'obélisque. Nous supposons d'ailleurs que la densité du milieu décroît de bas en haut, et, de telle sorte, que le rayon parabolique dont la direction initiale est horizontale a un paramètre de 400 mètres.

Nous avons représenté, dans la figure, les trois rayons qui parviennent à l'œil tant de chacune des deux extrémités de l'axe de l'obélisque que du milieu de sa hauteur. Les lieux des deux images de ces trois points sont donc sur les tangentes menées par l'œil aux six rayons qui en émanent pour lui parvenir; et nous avons calculé exactement le lieu de ces images. En conséquence, les deux images de l'axe AB de l'obélisque sont *ab* et *a'b'*. Nous n'avons pu figurer les images de la montagne sur laquelle l'obélisque repose, attendu que l'image *ab* de l'axe AB s'allonge considérablement au-delà de *b*, pour la moindre longueur du prolongement de AB au-delà de B. La courbe *ab* a une asymptote commune avec la courbe *a'b'*, et, passé cette asymptote, c'est derrière l'œil O que se trouve le lieu d'où devraient diverger les rayons pour lui parvenir. De sorte que les images du bas de la montagne ne peuvent être vu que d'une manière tout-à-fait confuse.

On voit aussi qu'à raison de l'élévation des rayons paraboliques par lesquels l'image *a'b'* est aperçue, il faudrait, pour que tout se passât comme nous le supposons ici, que la loi suivant laquelle nous supposons que décroît la densité des couches atmosphériques se soutînt invariablement telle jusqu'à une hauteur de 200 mètres au moins au-dessus du sol ; or c'est ce qui ne doit sans doute arriver que fort rarement ; et cela explique suffisamment pourquoi le phénomène des images multiples est si peu fréquent.

Il est présumable, au surplus, que l'œil placé en O ne jugera pas les deux images ab et $a'b'$ de l'axe AB de l'obélisque aussi bizarres et aussi singulièrement situées par rapport à cet axe. Il se prêtera volontiers à les projecter sur un plan vertical, et alors, au lieu de l'objet, il en verra deux images situées l'une au-dessus de l'autre, toutes deux plus grandes que cet objet lui-même, mais la plus élevée plus grande que l'autre, et toutes deux tournées dans le sens de l'objet. Il n'est donc pas généralement vrai, comme nous l'avions faussement avancé dans notre mémoire de 1808, et comme M. Biot paraît l'avoir cru lui-même, que, dans le cas de plusieurs images d'un même objet, ces images doivent être toujours alternativement directes et renversées ; nous ne concevons pas même qu'il en puisse jamais être ainsi, lorsque la densité croît sans cesse dans le même sens.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème d'hydrostatique énoncé à la pag. 316 du présent volume ;

Par M. Théodore Dallari, cadet au corps royal des Pionniers, à Modène.

PROBLÈME. *On suppose qu'il n'existe rien autre chose, dans l'univers, qu'une masse de fluide élastique, dont les molécules s'at-*

tirent en raison composée de la directe de la masse de la molécule attirante et de l'inverse du quarré de sa distance à la molécule attirée ; on suppose, en outre, que ce fluide se comprime proportionnellement aux pressions qu'ils éprouve ; on suppose enfin que ses couches de densité uniforme sont sphériques et concentriques, et l'on demande suivant quelle fonction de leur rayon doit varier la densité de ces couches, pour que toute la masse fluide soit en équilibre ?

Solution. Rapportons la masse fluide à trois axes rectangulaires. Soit (x', y', z') le lieu d'une molécule quelconque attirée par une autre molécule, également quelconque, située en (x, y, z), et dont la densité est δ. La force qui sollicite la molécule située en (x', y', z') est

$$\frac{k\delta}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

k étant une constante. En représentant par X, Y, Z les composantes de cette force, respectivement parallèles aux trois axes, nous aurons

$$X=-\frac{k\delta(x-x')}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y=-\frac{k\delta(y-y')}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$Z=-\frac{k\delta(z-z')}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation

$$\mathrm{d}p=X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z$$

des fluides en équilibre, il viendra

$$\mathrm{d}p = -\frac{k\delta\{(x-x')\mathrm{d}x+(y-y')\mathrm{d}y+(z-z')\mathrm{d}z\}}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}} . \quad (1)$$

Mais

$$(x-x')\mathrm{d}x+(y-y')\mathrm{d}y+(z-z')\mathrm{d}z=0$$

doit représenter la différentielle d'une surface quelconque de niveau, ou de l'une des surfaces sphériques concentriques de densité uniforme, ce qui donne x', y', z' constantes. Transportant donc l'origine au point (x', y', z') ou, en d'autres termes, posant $x'=y'=z'=0$, l'équation (1) deviendra

$$\mathrm{d}p = -\frac{k\delta(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} ,$$

ou, en désignant par r le rayon variable des couches de densité uniforme,

$$\mathrm{d}p = -\frac{k\delta.r\mathrm{d}r}{r^3} = -\frac{k\delta.\mathrm{d}r}{r^2} ; \quad (2)$$

Par la condition du problème, qui rend la densité δ proportionnelle à la pression, on a $p=h\delta$, h étant une nouvelle constante ; il en résulte $\mathrm{d}p=h\mathrm{d}\delta$; d'où, en substituant dans l'équation (2),

$$h\mathrm{d}\delta = -\frac{k\delta\mathrm{d}r}{r^2}, \qquad \text{c'est-à-dire,} \qquad h\frac{\mathrm{d}\delta}{\delta} = -k\frac{\mathrm{d}r}{r^2} ;$$

d'où, en intégrant

$$h\mathrm{Log.}\frac{\delta}{A} = \frac{k}{r} ;$$

et par suite

$$\delta=Ae^{\frac{k}{hr}}, \qquad (3)$$

A étant une constante arbitraire que l'on voit être la valeur de δ qui répond à $r=\infty$.

Solution d'un problème de géométrie énoncé à la pag. 87 du précédent volume ;

Par MM. Bobillier et Lenthéric.

PROBLÈME. *Quel est le lieu des centres communs de gravité de tous les systèmes de rayons vecteurs d'une même ellipse ?*

Solution. Si l'on représente respectivement par a, b, c le demi-grand axe, le demi-petit axe et l'excentricité de la courbe, en prenant son grand axe pour l'axe des x et son petit axe pour celui des y, son équation sera

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2, \qquad (1)$$

et l'on aura

$$a^2=b^2+c^2. \qquad (2)$$

Si l'on représente respectivement par r et r' les rayons vecteurs du point (x, y) qui répondent aux deux foyers, on trouvera aisément

$$r=a-\frac{cx}{a}, \qquad r'=a+\frac{cx}{a};$$

les coordonnées des centres de gravité respectifs de ces deux droites, c'est-à-dire, de leurs milieux, seront d'ailleurs

$$\frac{x+c}{2}, \frac{y}{2}; \qquad \frac{x-c}{2}, \frac{y}{2};$$

on aura donc, en prenant tour à tour l'axe des x et celui des y pour axes des momens, et en désignant par (x', y') le centre commun de gravité de ces deux rayons vecteurs

$$\left(a-\frac{cx}{a}\right)\frac{x+c}{2}+\left(a+\frac{cx}{a}\right)\frac{x-c}{2}=2ax';$$

$$\left(a-\frac{cx}{a}\right)\frac{y}{2}+\left(a+\frac{cx}{a}\right)\frac{y}{2}=2ay';$$

ou, en développant et réduisant,

$$ax-\frac{cx^2}{a}=2ax', \qquad ay=2ay';$$

d'où on tirera

$$x=\frac{2a^2x'}{a^2-c^2}=\frac{2a^2x'}{b^2}, \qquad y=2y';$$

substituant ces valeurs dans l'équation (1), on aura, pour l'équation du lieu cherché.

$$\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2x'^2+\left(\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2y'^2=\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2; \quad (3)$$

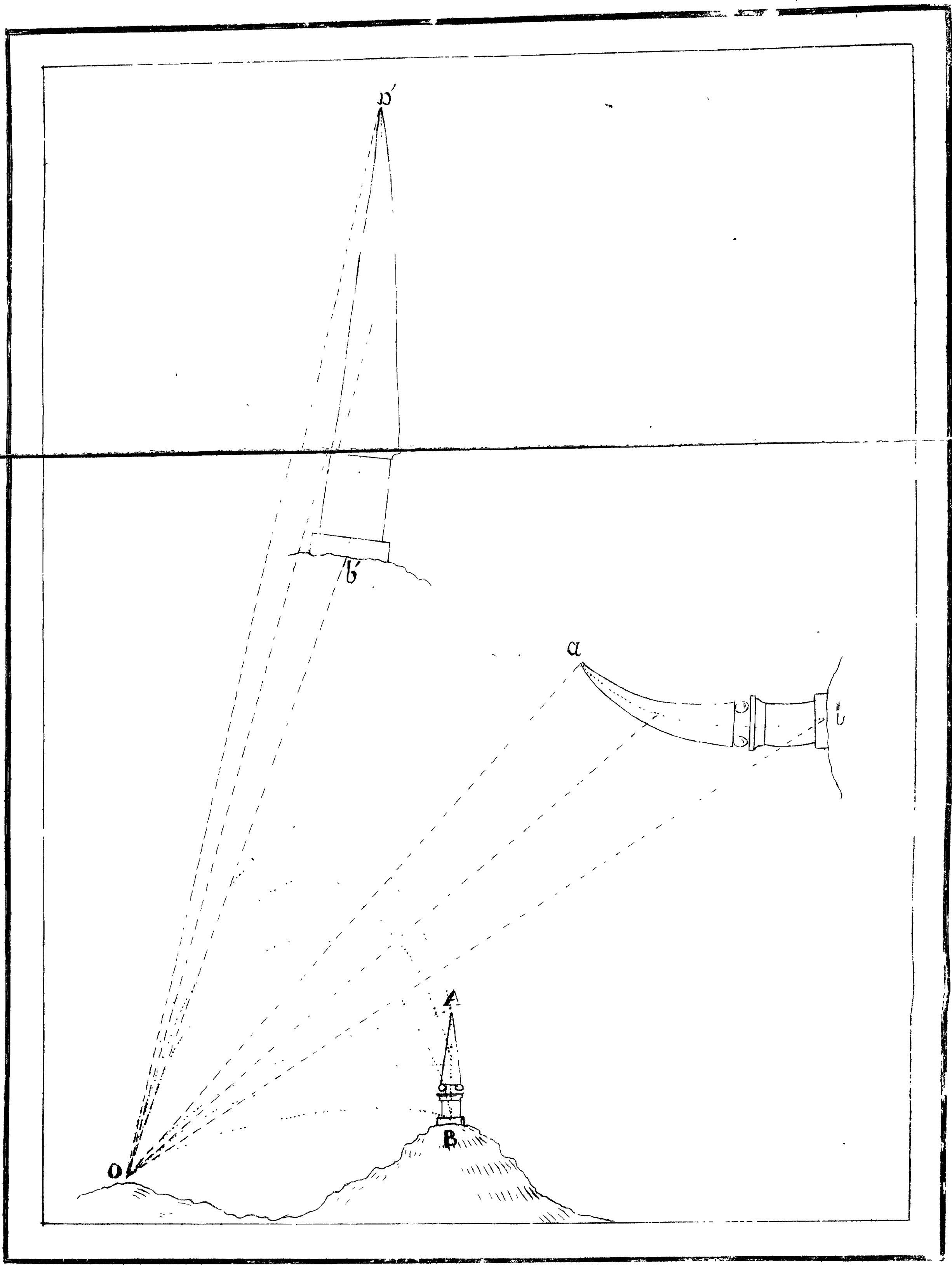
ce lieu est donc une autre ellipse, concentrique à la première, ayant ses axes dans les mêmes directions que les siens; cette ellipse est semblable à l'autre, mais elle est tournée en sens inverse, et ses dimensions sont moitié moindres.

Si l'on veut résoudre le problème analogue pour l'hyperbole, il suffira de changer b en $b\sqrt{-1}$, ce qui conduira aux mêmes conclusions, si ce n'est que l'hyperbole, lieu des centres de gravité, ne pourra être dite semblable à la proposée, puisque les axes proportionnels ne seront point de même dénomination. Il faudra d'ailleurs admettre que la pesanteur agit de bas en haut sur l'un des deux rayons vecteurs.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'hydrostatique.

Tout étant d'ailleurs comme dans le problème de la pag. 31, on suppose que la masse totale du fluide est M, et l'on demande de déterminer la valeur correspondante de la constante A?



J. D G. fecit.

DYNAMIQUE.

Solution d'un problème de dynamique, suivie de considérations sur le problème général des forces centrales ;

Par M. AMPÈRE, de l'Académie royale des sciences, etc.

Au Rédacteur des Annales,

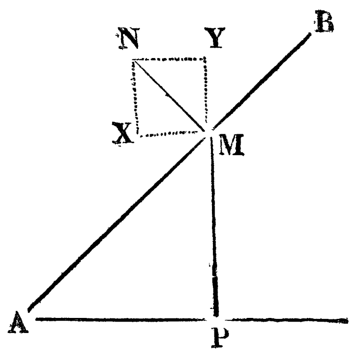
MONSIEUR,

A LA pag. 285 du tom. XIX de ces *Annales de mathématiques* qui rendent aux sciences, par les excellens articles que vous y faites paraître, un des plus grands services qui puissent leur être rendus, j'ai été surpris de rencontrer un mémoire relatif à un problème de dynamique dont la solution me paraît d'une inexactitude frappante. Il s'agit, dans ce mémoire, d'un tube rectiligne qui tourne, dans un plan vertical, autour d'un axe horizontal, tandis qu'une sphère pesante se meut dans l'intérieur de ce tube. Il est évident que l'auteur a négligé de faire entrer en considération l'effet de la force centrifuge à laquelle la sphère est nécessairement soumise en vertu du mouvement que le tube l'oblige de prendre autour du point fixe par lequel l'axe de ce tube passe constamment et qu'on doit considérer comme le centre de son mouvement. L'erreur de cette solution s'aperçoit immédiatement en remarquant que, suivant les idées de l'auteur, si la gravité était nulle, ainsi que la vîtesse initiale, le centre de la sphère mobile devrait constamment parcourir la circonférence d'un cercle ayant pour centre le centre du mouvement, tandis qu'il est évident qu'alors cette sphère, en vertu de l'action de la force centrifuge, devrait s'éloigner sans cesse de ce point.

Comme les problèmes de ce genre sont du nombre de ceux que je traite chaque année, dans mes cours, j'ai pensé qu'il pourrait vous être agréable de faire connaître à vos lecteurs la solution directe que j'en donne depuis bien long-temps. Cette solution partant des équations générales de la dynamique, on n'a pas besoin de considérer, en particulier, l'effet de la force centrifuge, mais on le reconnaît ensuite dans les résultats qu'on obtient.

On trouve dans les œuvres de l'un des Bernouilli, de Jean, si ma mémoire ne me trompe pas, la solution de ce problème pour le cas où le tube se meut dans un plan horizontal, autour d'un axe vertical, et où, conséquemment, la pesanteur n'a aucune action, ce qui rentre dans l'hypothèse que je faisais plus haut; aussi la solution à laquelle je parviens devient-elle celle de Bernouilli quand on y suppose $g=o$, ce qui n'arrive pas pour celle qu'on a donnée dans votre XIX.^{me} volume.

Voici présentement ma solution



Soit AB l'axe du tube, tournant dans le plan de la figure, supposé vertical, autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à ce plan, et passant par le point A. L'horizontale AP étant prise pour l'axe des x et le point A pour origine; si M est le point de AB où se trouve le centre de la sphère mobile à l'époque t, en abaissant de ce point la perpendiculaire AP sur l'axe des x, désignant par α l'inclinaison du tube à l'origine des temps, par T la durée de sa révolution, par θ l'angle variable que fait sa direction avec l'axe des x, et enfin par r la distance variable du centre de la sphère mobile au centre du mouvement, on aura

$$\mathrm{AP}=x\ ,\quad \mathrm{PM}=y\ ,\quad \mathrm{AM}=r\ ,\quad \mathit{Ang}.\mathrm{PAM}=\alpha+2\varpi\frac{t}{T}=\theta\,,$$

$$x=r\mathrm{Cos}.\theta\ ,\qquad y=r\mathrm{Sin}.\theta\ ;$$

donc

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}r\mathrm{Cos}.\theta-r\mathrm{d}\theta\mathrm{Sin}.\theta\ ,\quad \mathrm{d}y=\mathrm{d}r\mathrm{Sin}.\theta+r\mathrm{d}\theta\mathrm{Cos}.\theta\ ,$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2\ ; \qquad (1)$$

formule connue, sur laquelle est fondée la rectification des spirales.

Maintenant, il y a deux forces qui agissent sur le point M, et non pas une seule, comme le suppose le mémoire cité. Ces deux forces sont la pesanteur et la pression exercées par le tube sur le mobile; pression par laquelle ce tube l'oblige de le suivre dans son mouvement. L'intensité de cette dernière force est inconnue, mais sa direction est donnée, puisqu'elle est nécessairement perpendiculaire à la direction du tube, représentée par celle de son axe AM. En nommant N cette pression inconnue comme le fait M. Poisson, pour un problème analogue, dans sa *Mécanique*, tom. I.er, n.° 250, pag. 373 et 374, il faudra égaler à $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ les forces parallèles à l'axe des x qui tendent à augmenter l'abscisse, moins celles qui tendent à les diminuer, et faire la même chose à l'égard de $\frac{d^2y}{dt^2}$ pour les forces parallèles à l'axe des ordonnées.

Or, en considérant les choses comme elles le sont dans la figure, et en admettant que le mouvement de révolution du tube tend à augmenter l'angle θ, on voit que la gravité g, dirigée suivant l'ordonnée, tend à la diminuer. Quant aux composantes

$$X=\frac{Ny}{r}\ ,\qquad Y=\frac{Nx}{r}\ ,$$

de N, parallèles aux axes, on voit que la première tend à diminuer l'abscisse du point M, tandis que l'autre tend à augmenter son ordonnée. En conséquence les deux équations du mouvement de ce point seront

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{Ny}{r}\ ,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{Nx}{r}-g,$$

entre lesquelles il faudra éliminer l'inconnue N, en prenant la somme de leurs produits respectifs par x et par y, ce qui donnera

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}=-gy=-gr\text{Sin.}\theta\ ; \qquad (2)$$

on aura d'ailleurs

$$x^2+y^2=r^2\ ;$$

d'où en différentiant deux fois consécutivement

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=r\frac{dr}{dt}\ ,$$

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

En remplaçant, dans cette dernière équation, dx^2+dy^2 par sa valeur (1) et réduisant, il viendra

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=r\frac{d^2r}{dt^2},$$

ce qui change l'équation (2) en

$$\frac{d^2r}{dt^2}=r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-g\text{Sin.}\theta=r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-g\text{Sin.}\left(\alpha+2\varpi\frac{t}{T}\right);$$

d'où l'on voit que l'équation (1) du mémoire cité est fausse par l'omission du terme $r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ qui est précisément la force centrifuge qui aurait lieu sur une circonférence du rayon r, la vîtesse angulaire de rotation étant, comme celle du tube, dans ce problème, $\frac{d\theta}{dt}$; car la vîtesse sur la circonférence étant alors $r\frac{d\theta}{dt}$, le quarré de cette vîtesse $r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, divisée par le rayon r, donne précisément $r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ pour la force centrifuge (*).

Il ne serait peut-être pas facile de montrer, *à priori*, que c'est

(*) Je reçois à l'instant une lettre de M Th. Barrois, de Lille, qui contient des remarques toutes pareilles à celles de M Ampère. M. Barrois pense que M. Poncelet a commis une inadvertance, à peu près pareille, dans le calcul de sa roue à aubes courbes, ce qui n'ôte rien d'ailleurs, ajoute-il, au mérite *pratique* de l'invention. Il est évident que la solution du problème traité à la pag. 359 du précédent volume est entachée d'une pareille erreur.

Afin de consoler l'auteur ou les auteurs, autant du moins que les torts d'autrui peuvent nous consoler des nôtres, je saisirai cette occasion pour observer que le petit article que j'ai donné à la pag. 263 de mon XV.me volume, sur la stabilité de l'équilibre des corps flottans, quelque spécieux qu'en soient les raisonnemens, est complètement faux de tous points.

J. D. G.

la force centrifuge, ainsi calculée, qu'il faut considérer comme la force accélératrice, agissant dans la direction du tube, qui doit être jointe à la composante $-g\,\mathrm{Sin.}\theta$ de la pesanteur, dans la même direction, pour avoir la valeur de $\frac{d^2r}{dt^2}$ que nous venons d'obtenir; mais les calculs qui précèdent ne peuvent laisser aucun doute à cet égard, puisque la valeur de $\frac{d^2r}{dt^2}$ a été déduite, par un calcul direct, de celles de $\frac{d^2x}{dt^2}$ et de $\frac{d^2y}{dt^2}$. Si l'on supprime le terme dû à l'action de la pesanteur, dans cette valeur de $\frac{d^2r}{dt^2}$, en y faisant $g=0$, on a

$$\frac{d^2r}{dt^2}=r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

équation qui revient à celle de Bernouilli. Je m'occuperai plus tard de son intégration; je me bornerai seulement ici à faire remarquer que, dans les précédens calculs, il n'est pas nécessaire de supposer que le mouvement du tube est uniforme, et d'admettre conséquemment qu'on ait

$$\theta=\alpha+2\varpi\frac{t}{T};$$

ainsi que nous l'avons fait jusqu'ici; il suffit que le mouvement de rotation du tube, autour du point A, soit déterminé par une relation donnée entre t et θ, telle que $\theta=\mathrm{f}(t)$.

Si l'on veut connaître la pression N que le tube exerce sur la sphère, en fonction de la distance r et de l'angle θ, on déduira d'abord des valeurs de x, y, dx, dy, obtenues plus haut, l'équation connue

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=r^2\frac{d\theta}{dt},$$

d'où, en différentiant,

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\ ; \qquad (3)$$

on reprendra ensuite les deux équations

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{Ny}{r}\ , \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{Nx}{r}-g\ ;$$

en faisant la somme de leurs produits respectifs par $-y$ et par $+x$, et en se rappelant que $x^2+y^2=r^2$, on aura

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=Nr-gx=Nr-gr\text{Cos}.\theta\,;$$

comparant cette équation à l'équation (3) on en conclura

$$Nr-gr\text{Cos}.\theta=2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\ ,$$

et, par suite,

$$N=2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}+g\text{Cos}.\theta\,;$$

Cette pression du tube sur la sphère se compose de deux parties; l'une, exprimée par $g\text{Cos}\,\theta$, est l'effort qu'il doit exercer sur cette sphère pour faire équilibre à la composante de la pesanteur perpendiculaire au tube, tandis que sa composant $g\text{Sin}.\theta$, dans le sens du tube, tend à mouvoir cette sphère dans ce sens, sans exercer aucune pression; et voilà pourquoi cette composante fait partie de la valeur de $\frac{d^2r}{dt^2}$. L'autre portion

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\ ,$$

de la force N, est celle par laquelle le tube en pressant la sphère, augmente sa vîtesse perpendiculairement à l'axe de ce tube, afin qu'elle le suive dans son mouvement de rotation.

Dans le cas où ce mouvement est uniforme, et où, par conséquent,

$$\theta = \alpha + 2\varpi\frac{t}{T},$$

on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\varpi}{T}, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0;$$

ainsi alors

$$N = \frac{4\varpi}{T}\cdot\frac{dr}{dt} + g\,\mathrm{Cos}.\theta,$$

et l'équation entre r et t est

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{4\varpi^2}{T^2}r = -g\,\mathrm{Sin}.\theta,$$

équation linéaire du second ordre qui peut s'intégrer par les méthodes connues, mais son intégrale ne paraît pas susceptible d'une forme simple, et le calcul en serait trop long pour trouver place dans cette lettre.

Dans le cas de Bernouillí, où le tube se meut horizontalement autour d'un axe vertical, il faut supprimer le terme $g\,\mathrm{Sin}.\theta$, et l'on a à intégrer l'équation

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{4\varpi^2}{T^2}r.$$

En multipliant ses deux membres par $2dr$ et intégrant, il vient

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{4\varpi^2}{T^2}r^2 + C;$$

Si l'on désigne par V la vîtesse initiale, répondant à la distance R, on aura

$$V^2=\frac{4\varpi^2}{T^2}R^2+C\ ;$$

d'où, en retranchant, transposant et extrayant les racines,

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{V^2+\frac{4\varpi^2}{T^2}(r^2-R^2)}\ ;$$

c'est cette valeur qu'il faudrait substituer dans

$$N=\frac{4\varpi}{T}\cdot\frac{dr}{dt}\ ,$$

pour avoir la valeur de la pression N, en fonction de la distance r.

On en tire

$$dt=\frac{dr}{\sqrt{V^2+\frac{4\varpi^2}{T^2}(r^2-R^2)}}\ ,$$

qu'il suffit d'intégrer de nouveau pour avoir l'équation entre t et r, dans laquelle substituant ensuite pour t sa valeur

$$t=\frac{T}{2\varpi}(\theta-\alpha)\ ,$$

on aura l'équation polaire de la trajectoire décrite.

Supposons que la sphère soit liée au point A par un fils inextensible d'une longueur égale à R ; il est clair qu'alors son centre décrira uniformément une circonférence dont R sera le rayon et qui aura ce point A pour centre. Supposons qu'au moment où ce rayon R fait un angle α avec l'axe des abscisses, le fil vienne subitement à se rompre ; on se trouvera alors dans le cas particulier du problème qui nous occupe, où il n'y aurait pas de vîtesse initiale ; l'équation ci-dessus deviendra donc alors simplement

$$dt = \frac{T}{2\varpi}\frac{dr}{\sqrt{r^2-R^2}} \quad ,$$

dont l'intégrale est

$$t = \frac{T}{2\varpi}\,\text{Log.}(r+\sqrt{r^2-R^2})+C \; .$$

Si l'on compte les temps de l'instant où le fil se rompt, on aura

$$o = \frac{T}{2\varpi}\,\text{Log.}R+C \; ;$$

d'où, en retranchant,

$$t = \frac{T}{2\varpi}\,\text{Log.}\,\frac{r+\sqrt{r^2-R^2}}{R} \quad ,$$

ce qui donne d'abord

$$r+\sqrt{r^2-R^2} = Re^{2\varpi\frac{T}{t}} \; ,$$

et ensuite

$$r-\sqrt{r^2-R^2} = Re^{-2\varpi\frac{t}{T}} \; ;$$

d'où, en ajoutant et divisant par 2,

$$r = \frac{R}{2}\left(e^{2\varpi\frac{t}{T}}+e^{-2\varpi\frac{t}{T}}\right) \, :$$

Si l'on nomme s l'arc de la circonférence dont le rayon est R et le centre est A, compté depuis le point où le fil s'est rompu jusqu'à celui que détermine l'axe du canal, à l'époque t, on aura

$$s=2\varpi\frac{t}{T}R\,, \qquad \text{d'où} \qquad 2\varpi\frac{t}{T}=\frac{s}{R}\;;$$

en conséquence, on aura

$$r=\frac{R}{2}\left(e^{\frac{s}{R}}+e^{-\frac{s}{R}}\right);$$

et conséquemment, pour l'excès du rayon vecteur de la trajectoire sur le rayon du cercle

$$r-R=\frac{R}{2}\left(e^{\frac{s}{R}}+e^{-\frac{s}{R}}-2\right).$$

Or, on sait que, si l'on prend pour l'axe des x d'une chaînette uniformément pesante l'horizontale menée par le point le plus bas, et ce même point pour origine, on aura, pour l'équation de cette courbe,

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}-2\right),$$

a étant le paramètre de la chaînette, c'est-à-dire, la longueur de son rayon de courbure au point le plus bas ; en comparant donc cette valeur de y à celle de $r-R$ on en conclura que la trajectoire décrite par le centre de la sphère mobile n'est autre chose que la courbe qu'on obtiendrait en décrivant d'abord une chaînette dont le paramètre serait égal au rayon R, en menant sa tangente au point le plus bas, enveloppant avec cette tangente le cercle dont le rayon est R, de telle sorte que ce point le plus bas répondît au lieu du centre de la sphère mobile à l'instant de la rupture du fil, et dirigeant enfin toutes ses ordonnées suivant les prolongemens des rayons de ce cercle.

On peut généraliser le problème de Bernouilli en supposant que l'axe du tube, au lieu de se mouvoir dans un plan horizontal, décrit une surface conique quelconque; et j'ai fait, il y a longtemps, à ce sujet, une remarque qui ne me paraît pas dépourvue d'intérêt; elle consiste en ce que si, faisant toujours abstraction de la pesanteur, on développe la surface conique sur un plan, et qu'on suppose que l'axe du tube décrive exactement sur ce plan, dans les mêmes intervalles de temps, les espaces angulaires qu'il aurait décrit sur la surface conique dont il s'agit; en traçant sur ce même plan la trajectoire plane qu'y décrirait le centre de la sphère mobile, en vertu du mouvement du tube, il suffira de plier cette surface plane sur la surface conique, de manière que les situations correspondantes de l'axe du tube coïncident, pour obtenir la trajectoire qui devrait être décrite sur cette dernière surface, par le centre de la sphère.

Pour le démontrer, en conservant aux lettres r et θ la même signification que dans les précédens calculs, où le tube était supposé se mouvoir dans un plan, on aura, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=0\ ;$$

pour l'équation qui donne r en fonction de t, lorsque θ est lui-même donné en fonction de t, par l'équation qui détermine le mouvement du tube. Il s'agit donc de démontrer qu'on a la même équation en r et t lorsque le tube se meut sur la surface conique; or, c'est ce qu'il est bien facile de vérifier; car d'abord r et θ restant les mêmes lorsqu'on enveloppe le plan sur la surface conique, ainsi que l'arc décrit par le centre de la sphère, en représentant cet arc par s, on aura, sur le plan,

$$ds^2=dx^2+dy^2=dr^2+r^2d\theta^2\ ;$$

et cette valeur restera la même sur la surface conique; mais, en nommant x, y, z les trois coordonnées du centre de la sphère, dans son mouvement sur cette surface, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 ,$$

ainsi

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 ; \qquad (4)$$

mais, comme on fait abstraction de la pesanteur, la seule force qui agisse sur la sphère est la pression N du tube qui est perpendiculaire à la direction de son axe; les trois composantes de cette force sont donc respectivement égales à

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2};$$

et en posant

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 = W;$$

les cosinus des trois angles que fait sa direction avec les axes sont

$$\frac{1}{W} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{1}{W} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{1}{W} \cdot \frac{d^2z}{dt^2};$$

les cosinus des trois angles que l'axe du tube forme avec les mêmes axes sont

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad \frac{z}{r};$$

et comme ces deux directions forment un angle droit, puisque la pression exercée par le tube est nécessairement perpendiculaire à son axe, la somme des produits des cosinus correspondans sera nulle; en sorte qu'on aura, en supprimant le facteur commun $\frac{1}{Wr}$, l'équation

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=0\,; \qquad (5)$$

mais

$$x^2+y^2+z^2=r^2\,,$$

d'où l'on tire successivement

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=r\frac{dr}{dt}\,;$$

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\,;$$

c'est-à-dire (4)

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dr^2+r^2d\theta^2}{dt^2}=r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

ou, en réduisant,

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=z\frac{d^2r}{dt^2}-r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\,;$$

donc finalement (5)

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=0\,;$$

c'est-à-dire que l'équation qui détermine la courbe décrite par le centre de la sphère sur la surface conique est la même que celle qui détermine son mouvement sur le plan; et, comme l'on suppose que l'on a la même relation donnée entre t et θ dans les deux cas, la valeur de r sera aussi la même pour les mêmes valeurs de ces deux variables ; ce qui démontre que le développement de la courbe décrite sur la surface conique est identiquement le même que la courbe décrite sur le plan ; bien entendu que la position et la vîtesse initiale de la sphère dans le tube, d'après lesquelles doivent être déterminées les constantes introduites par l'intégration, seront les mêmes dans les deux cas.

Je crois devoir observer, en terminant cette lettre, que l'équation

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=r\frac{d^2r}{dt^2}+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

peut servir à obtenir directement, par une transformation très-simple, et en n'employant que le calcul différentiel, la solution d'un problème de mécanique qu'on résout ordinairement d'une manière plus compliquée et en employant le calcul intégral. Ce problème acquiert une grande importance en ce que c'est de sa solution qu'on déduit les trois lois de Képler ; il a pour objet de déterminer la direction et l'intensité de la force R, en vertu de laquelle un point mobile décrit une courbe plane donnée, de manière que les aires mesurées sur le plan de la courbe, autour d'un point fixe, situé dans ce plan, soient proportionnelles aux temps correspondans.

En prenant le point pour l'origine des coordonnées rectangulaires x et y, dans le plan des rayons vecteurs r, et nommant θ l'angle que fait r avec l'axe des x, à l'époque t, le petit secteur décrit pendant l'instant dt a pour valeur $\frac{1}{2}r^2d\theta$, et, comme cette aire doit être proportionnelle au temps dt, on a $r^2d\theta=Cdt$. Or nous avons trouvé

$$r^2d\theta=xdy-ydx,$$

ainsi

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c,$$

et, en différentiant,

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

ou

$$\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}=\frac{y}{x};$$

Or, si l'on considère, comme on le fait ordinairement, la force R comme attractive, c'est-à-dire, comme tendant à diminuer les deux coordonnées, ses deux composantes seront

$$-\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad -\frac{d^2y}{dt^2},$$

et leur rapport, que nous venons de trouver égal à $\frac{y}{x}$, exprimera conséquemment la tangente tabulaire de l'angle que fait la direction de cette force R avec l'axe des x; or, $\frac{y}{x}$ est aussi la tangente tabulaire de l'angle que fait le rayon vecteur avec le même axe, d'où il suit que la force R est dirigée suivant ce rayon vecteur.

On aura, d'après cela, pour les deux équations du mouvement,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{Rx}{r}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{Ry}{r};$$

d'où, en prenant la somme de leurs produits respectifs par x et y, et observant que $x^2+y^2=r^2$;

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}=-Rr;$$

or, nous avons trouvé ci-dessus

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}=r\frac{d^2r}{dt^2}-r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2;$$

on aura donc, pour la valeur de la force R,

$$R=r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-\frac{d^2r}{dt^2}.$$

Cette valeur se compose de deux parties, dont la première $r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ est, comme nous l'avons vu ci-dessus, la force qui devrait agir sur la sphère mobile pour faire équilibre à la force centrifuge qui a lieu dans le cercle dont le rayon est r, avec la vîtesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ du rayon vecteur; et la seconde $-\frac{d^2r}{dt^2}$ est la force qui devrait agir sur la même sphère, dans le sens du même rayon lorsqu'on le suppose immobile, pour que son mouvement, le long de ce rayon, variât précisement comme il varie en même temps que le rayon change de position; résultat remarquable, parce qu'on ne voit point comment on pourrait prévoir à *priori* qu'il faut prendre, pour le premier terme de la valeur de R, la force centrifuge qui aurait lieu dans le cercle dont il vient d'être question.

Il est presque inutile de remarquer que si l'on trouve pour le second terme $-\frac{d^2r}{dt^2}$, et non pas seulement $\frac{d^2r}{dt^2}$, c'est qu'on a regardé comme positives les forces qui agissent pour porter la sphère M vers l'origine, et par conséquent pour diminuer la distance r.

M. Binet, inspecteur des études à l'école polytechnique, a donné, il y a long-temps, une expression de la force R qui ne contient pas dt, et donne sur-le-champ la valeur de cette force, d'après l'équation entre r et θ de la trajectoire décrite; elle est bien préférable, pour la simplicité des calculs, à celle qu'on donne ordinairement; voici comment on peut la déduire immédiatement de celle que nous venons d'obtenir.

Nous avons vu qu'on avait $r^2 d\theta = c dt$, et qu'ainsi

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r^2} \; ;$$

on en conclut, en prenant θ pour variable indépendante,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{c}{r^2} = -c . \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} \; ;$$

et par suite

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \quad \text{ou} \quad \frac{d\left(\frac{dr}{dt}\right)}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{c}{r^2} \frac{d\left(\frac{dr}{dt}\right)}{d\theta} = -\frac{c^2}{r^2} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} \; ;$$

substituant ces valeurs de $\frac{d\theta}{dt}$ et de $\frac{d^2 r}{dt^2}$ dans l'expression de R, elle deviendra,

$$R = r . \frac{c^4}{r^4} + \frac{c^2}{r^2} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} \, ,$$

c'est-à-dire,

$$R = \frac{c^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} \right\} \; ;$$

c'est l'expression de R donnée par M. Binet.

Pour juger à quel point cette expression simplifie le calcul, dans chaque cas particulier, il suffit de l'appliquer à quelques exemples. Soit d'abord une ellipse dont a représente le demi-grand axe et e l'excentricité; on aura pour l'équation polaire de cette courbe

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \operatorname{Cos.} \theta} \, ,$$

ainsi

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\,\mathrm{Cos}.\theta}{a(1-e^2)},$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{e\,\mathrm{Sin}.\theta}{a(1-e^2)};$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2}=-\frac{e\,\mathrm{Cos}.\theta}{a(1-e^2)};$$

ce qui donnera, en substituant

$$R=\frac{c^2}{r^2}\left\{\frac{1+e\,\mathrm{Cos}.\theta}{a(1-e^2)}-\frac{e\,\mathrm{Cos}.\theta}{a(1-e^2)}\right\}=\frac{c^2}{a(1-e^2)}\cdot\frac{1}{r^2},$$

ou, en posant $\frac{c^2}{a(1-e^2)}=\mu$,

$$R=\frac{\mu}{r^2};$$

c'est là l'expression connue de la force accélératrice, dans le cas des planètes, d'après la seconde loi de Képler relative à l'ellipticité de leurs orbites; d'où l'on voit que, pour différens points de l'orbite d'une même planète, cette force est inverse du quarré de la distance.

Il ne s'agit plus que de calculer la valeur de la constante

$$\mu=\frac{c^2}{a(1-e^2)},$$

comme le fait M. Poisson, dans sa *Mécanique* (tom. 1.er, n.° 241), pour en conclure, en partant de la troisième loi de Képler, comme il le fait dans cet article, que cette force est aussi en raison inverse du quarré de la distance, considérée dans deux planètes différentes (*).

Si j'ai mis quelque intérêt à n'employer que le calcul différentiel, dans la solution du précédent problème, c'est surtout parce qu'en considérant que ce sont les mouvemens considérés en eux-mêmes, indépendamment des forces qui les produisent, qui sont les données de l'observation; que c'est elle, par exemple, qui a appris à Galilée que, dans la chute verticale des corps pesans, les espaces parcourus sont comme les quarrés des temps, ou, ce qui est la même chose, que la vîtesse croît proportionnellement aux temps; que c'est de même l'observation qui a donné à Képler ses trois lois, il m'a semblé, d'après cela, qu'on devait traiter d'abord en mécanique, et considérer comme des problèmes directs ceux où le mouvement étant donné, on demande la valeur de la force accélératrice ou de la résultante de toutes celles qui agissent sur le corps qui présente ce mouvement, lorsqu'il y en a plusieurs; et que ces problèmes directs, comme, en géométrie, la détermination des tangentes, sous tangentes, normales, sous normales et rayons de courbure d'une courbe donnée, n'exigent que le calcul direct des fonctions dérivées ou calcul différentiel (**), tandis que les problèmes inverses, tels qu'en géométrie la recherche des courbes planes ou à double courbure, d'après les propriétés de leurs tangentes, normales et rayons de courbure, et en mécanique la détermination des courbes décrites par les différens points des corps,

---

(*) On peut aussi consulter la pag. 7, du VII.me volume du présent recueil, où la proposition se trouve établie, à la fois, d'une manière fort simple, tant pour les orbites elliptiques que pour les orbites paraboliques et hyperboliques.

J. D. G.

(**) C'est ainsi que nous en avons toujours usé nous-même, comme le prouve le mémoire cité dans la précédente note. C'est également ainsi qu'en ont usé MM. Poisson et Francœur dans leurs Traités de Mécanique.

J. D. G.

et du temps pendant lequel leur mouvement s'exécute, lorsqu'on suppose connues les forces qui agissent sur ces corps, ne peuvent se résoudre que par le calcul inverse des fonctions ou le calcul intégral.

Ce théorème que, dans le mouvement elliptique autour d'un foyer, la force centrale attractive est en raison inverse du quarré de la distance, servant de base au vrai système du monde, et devant par conséquent trouver place dans tous les traités et tous les cours de physique où l'on veut exposer l'ensemble des lois de la nature, il convient de le mettre à la portée du plus grand nombre de ceux qui lisent ces traités ou qui suivent ces cours, et dont la plupart ne connaissent que la géométrie élémentaire; c'est pourquoi j'ai cherché à démontrer ce théorème par les élémens, d'une manière plus simple qu'il ne l'est dans les *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, en évitant de supposer connues les diverses propriétés de l'ellipse sur lesquelles est fondée la démonstration que l'on trouve dans cet admirable ouvrage, d'où elle a passé dans un grand nombre de traités élémentaires.

La démonstration à laquelle je suis parvenu, et qui me paraît satisfaire à ces conditions, est l'objet d'un petit mémoire que j'ai l'honneur de vous adresser, Monsieur, et, comme je pense que vous voudrez bien donner place à la présente lettre dans vos *Annales de mathématiques*, je vous prie de vouloir bien y insérer aussi le mémoire dont il s'agit, comme pouvant lui servir de supplément.

La valeur générale de R, due à M. Binet, et que j'ai démontrée plus haut, conduit, par des calculs aussi simples que ceux dont j'ai tiré la valeur de la force centrale dans l'ellipse, à la détermination de cette force dans les courbes qui donnent d'autres lois simples. Il suffit pour cela de prendre les valeurs de $\frac{1}{r}$ et de $\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}$ dans l'équation polaire de chacune de ces courbes, et, après en avoir fait la somme, d'en éliminer θ au moyen de cette même équation polaire; en multipliant ensuite le résultat de l'élimination par $\frac{c}{r^2}$ on a la valeur de R. C'est ainsi qu'on trouve, par exemple, que, dans les spirales hyperboliques et logarithmiques, le point attirant étant au centre, l'attraction doit être en raison inverse du cube de la distance; que, quand un mobile décrit une circonférence de cercle, par l'attraction d'un point fixe situé sur sa circonférence, la force attractive est en raison inverse de la cinquième puissance de la distance; que, dans ce dernier cas, les durées des révolutions sont comme les cubes des diamètres des circonférences décrites, et ainsi du reste. Bien que ces théorèmes soient connus depuis long-temps (*), je m'étais pourtant d'abord proposé de montrer, dans cette lettre, avec quelle simplicité ils se déduisent immédiatement de la valeur générale de R, afin qu'on pût mieux apprécier les avantages de la forme que M. Binet a donné à cette valeur, mais j'ai pensé ensuite que cette lettre n'était déjà que trop longue, et que d'ailleurs les calculs sont si faciles que les lecteurs pourront les exécuter sans peine, pour si peu qu'ils y attachent d'intérêt.

Agréez, etc.

(*) Voy., entr'autres, les additions de Clairaut à la traduction de Newton, par la marquise du Chastelet.

J. D. G.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux problèmes de géométrie énoncés à la pag. 224 du précédent volume ;

Par M. Paul MARTINELLI, cadet au corps royal des Pontonniers, à Modène.

PROBLÈME I. *A quelle courbe sont tangentes toutes les droites tracées sur le plan d'un polygone donné, de telle sorte qu'en abaissant des perpendiculaires sur chacune de ces droites des sommets du polygone, la somme algébrique des perpendiculaires, relatives à chacune de ces droites, soit égale à une longueur constante donnée ?*

Solution. Rapportons le polygone donné à deux axes rectangulaires, et soient alors ses sommets (α,β), (α',β'), (α'',β''), ... Soit (x',y') un des points de la courbe cherchée; soit $\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}=p$; l'équation de la tangente à cette courbe en ce point sera

$$y-y'=p(x-x')\ ; \qquad (1)$$

les longueurs des perpendiculaires abaissées sur cette droite des sommets du polygone donné, auront pour expression

$$\frac{\beta-y'-p(\alpha-x')}{\sqrt{1+p^2}}\ ,$$

$$\frac{\beta'-y'-p(\alpha'-x')}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$\frac{\beta''-y'-p(\alpha''-x')}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en désignant donc par L la longueur donnée, à laquelle doit être égale la somme algébrique de ces perpendiculaires, et par n le nombre des sommets du polygone, on aura

$$\frac{\Sigma(\beta)-ny'-p[\Sigma(\alpha)-nx']}{\sqrt{1+p^2}}=L\,,$$

ou bien

$$\Sigma(\beta)-ny'-p[\Sigma(\alpha)-nx']=L\sqrt{1+p^2}\,; \qquad (2)$$

équation dans laquelle p peut être considéré comme un paramètre variable.

En la différentiant par rapport à p seulement, il viendra

$$[\Sigma(\alpha)-nx']\sqrt{1+p^2}+Lp=0\,;$$

d'où on tirera

$$p=\pm\frac{\Sigma(\alpha)-nx'}{\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2}}\,,$$

et, par suite

$$\sqrt{1+p^2}=\mp\frac{L}{\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2}}$$

substituant ces valeurs dans l'équation (2), il viendra, en transposant et chassant le dénominateur,

$$[\Sigma(\beta)-ny']\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']}=\pm\{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2\} ;$$

ou bien

$$[\Sigma(\beta)-ny']=\pm\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2} ;$$

d'où, en quarrant, supprimant les accens et transposant,

$$\left\{x-\frac{\Sigma(\alpha)}{n}\right\}^2+\left\{y-\frac{\Sigma(\beta)}{n}\right\}^2=\left(\frac{L}{n}\right)^2 ,$$

équation de la courbe cherchée, que l'on voit être un cercle ayant son centre au centre des moyennes distances des sommets du polygone donné et son rayon égal à la $n.^{ième}$ partie de la longueur donnée.

Ce résultat pouvait être d'ailleurs facilement prévu. Si, en effet, on suppose des masses égales à l'unité, situées aux sommets du polygone dont il s'agit, la somme des momens de ces masses, par rapport à une droite quelconque située sur le plan de ce polygone, laquelle se réduira à la somme algébrique des perpendiculaires abaissées sur cette droite de ses divers sommets, devra être égale à n fois la perpendiculaire abaissée du centre commun de gravité de ces masses sur la même droite; si donc l'on veut que la somme des premières perpendiculaires soit constante, il faudra que la dernière le soit également; ce qui ne pourra arriver que pour des tangentes à un cercle, ayant son centre au centre des moyennes distances des sommets du polygone et son rayon égal à la $n.^{ième}$ partie de la somme des perpendiculaires dont il s'agit.

PROBLÈME II. A quelle surface sont tangens tous les plans sur lesquels abaissant des perpendiculaires de tous les sommets d'un polyèdre donné, la somme algébrique des perpendiculaires relatives à chaque plan est égale à une longueur constante donnée ?

Solution. Soit rapporté le polyèdre donné à trois axes rectangulaires, et soient alors ses sommets (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, ... Soit (x', y', z') un des points de la surface cherchée ;

soient $\frac{dx'}{dz'}=p$, $\frac{dy'}{dz'}=q$; l'équation du plan tangent à cette surface en ce point sera

$$z-z'=p(x-x')+q(y-y') \; ; \qquad (1)$$

les longueurs des perpendiculaires abaissées sur ce plan des sommets du polyèdre donné auront pour expression

$$\frac{\gamma-z'-p(\alpha-x')-q(\beta-y')}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \; ,$$

$$\frac{\gamma'-z'-p(\alpha'-x')-q(\beta'-y')}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \; ,$$

$$\frac{\gamma''-z'-p(\alpha''-x')-q(\beta''-y')}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \; ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ;$$

en désignant donc par L la longueur donnée, à laquelle doit être égale la somme algébrique de ces perpendiculaires, et par n le nombre des sommets du polyèdre, on aura

$$\frac{\Sigma(\gamma)-nz'-p[\Sigma(\alpha)-nx']-q[\Sigma(\beta)-ny']}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=L,$$

ou bien

$$\Sigma(\gamma)-nz'-p[\Sigma(\alpha)-nx']-q[\Sigma(\beta)-ny']=L\sqrt{1+p^2+q^2} \; ; \quad (2)$$

équation dans laquelle p et q peuvent être considérés comme deux paramètres variables.

En la différentiant, tour à tour, par rapport à chacun de ces deux paramètres seulement, il viendra

$$[\Sigma(\alpha)-nx']\sqrt{1+p^2+q^2}+Lp=0 \; ,$$

$$[\Sigma(\beta)-ny']\sqrt{1+p^2+q^2}+Lq=0 \; ;$$

équations d'où on tirera

$$p=\pm\frac{\Sigma(\alpha)-nx'}{\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2-[\Sigma(\beta)-ny']^2}}\,;$$

$$q=\pm\frac{\Sigma(\beta)-ny'}{\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2-[\Sigma(\beta)-ny']^2}}\,,$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\mp\frac{L}{\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2-[\Sigma(\beta)-ny']^2}}\,;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (2), elle deviendra, en transposant et chassant le dénominateur,

$$[\Sigma(\gamma)-nz']\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2-[\Sigma(\beta)-ny']^2}=\pm\{L-[\Sigma(\alpha)-nx']^2-[\Sigma(\beta)-ny']^2\}\,;$$

ou bien

$$\Sigma(\gamma)-nz'=\pm\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2-[\Sigma(\beta)-ny']^2}\,;$$

d'où, en quarrant, supprimant les accens et transposant,

$$\left\{x-\frac{\Sigma(\alpha)}{n}\right\}^2+\left\{y-\frac{\Sigma(\beta)}{n}\right\}^2+\left\{z-\frac{\Sigma(\gamma)}{n}\right\}^2=\left(\frac{L}{n}\right)^2\,;$$

équation de la surface cherchée, que l'on voit être une sphère ayant son centre au centre des moyennes distances des sommets du polygone donné et son rayon égal à la $n.^{ieme}$ partie de la longueur donnée.

C'est encore là un résultat qui aurait pu être facilement prévu à l'avance. Si, en effet, on suppose des masses égales à l'unité situées à tous les sommets du polyèdre, la somme algébrique des perpendiculaires abaissées de ces sommets, sur un plan quelconque, ne sera autre chose que la somme des momens de ces masses par rapport à ce plan, et devra conséquemment être égale à n fois la perpendiculaire abaissée sur le même plan de leur centre commun de gravité, centre des moyennes distances de ces sommets; si donc on veut que la somme des premières perpendiculaires soit constante, il faudra que la dernière le soit aussi; propriété qui ne saurait appartenir qu'aux plans tangens à une sphère, ayant son centre au centre des moyennes distances des sommets du polyèdre et son rayon égal à la $n.^{ieme}$ partie de la somme des perpendiculaires dont il s'agit.

A l'aide de ces considérations on apercevra, sur-le-champ, la vérité des deux théorèmes suivans, dont ceux qui viennent d'être démontrés ne sont que des cas particuliers :

I. La courbe à laquelle sont tangentes toutes les droites sur chacune desquelles abaissant des perpendiculaires de tous les sommets (α,β), (α',β'), (α'',β''), ... d'un polygone donné, la somme algébrique des produits respectifs de ces perpendiculaires, par des multiplicateurs m, m', m'' ....., est égale au produit d'une longueur donnée R par un multiplicateur donné $M=\Sigma(m)$, est une circonférence dont le centre a pour ses coordonnées $\frac{\Sigma(m\alpha)}{\Sigma(m)}$ et $\frac{\Sigma(m\beta)}{\Sigma(m)}$, et dont le rayon est R.

II. La surface à laquelle sont tangens tous les plans sur chacun desquels abaissant des perpendiculaires de tous les sommets (α,β,γ), (α',β',γ'), $(\alpha'',\beta'',\gamma'')$, ... d'un polyèdre donné, la somme algébrique des produits respectifs de ces perpendiculaires, par des multiplicateurs m, m', m'' ...., est égale au produit d'une longueur donnée R par un multiplicateur donné $M=\Sigma(m)$, est une sphère dont le centre a pour ses coordonnées $\frac{\Sigma(m\alpha)}{\Sigma(m)}$, $\frac{\Sigma(m\beta)}{\Sigma(m)}$, $\frac{\Sigma(m\gamma)}{\Sigma(m)}$, et dont le rayon est R.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de trigonométrie sphériques.

I. Quel est, dans l'intérieur d'un triangle sphérique, le point dont la somme des distances à ses trois sommets, mesurée par des arcs de grands cercles, est un *minimum* ?

II. Quel est, dans l'intérieur d'un triangle sphérique, le point dont la somme des distances à ses trois côtés, mesurée par des arcs de grands cercles est un *minimum* ?

ASTRONOMIE PHYSIQUE.

Essai analytique sur la nature des queues des comètes ;

Par M. GERGONNE.

Si un étudiant de quelque université d'Allemagne prenait pour sujet de thèse la question dont je vais m'occuper, eût-il cent fois raison pour le fond, il trouverait difficilement grâce devant ses doctes juges, s'il ne prenait soin de débuter par une description détaillée des diverses apparences qu'ont présenté jusqu'ici les queues des comètes, et par un exposé historique des hypothèses, plus ou moins plausibles, qui ont été imaginées, depuis Aristote jusqu'à nous, dans la vue d'expliquer la cause de ces singulières apparences. Cette partie de sa tâche ne serait pourtant pas la plus difficile à remplir, car elle n'exigerait à peu près de lui que de transcrire ce qu'on rencontre sur ce sujet dans le V.me chapitre du 2.me volume de la *Cométographie* de PINGRÉ.

Mes lecteurs voudront bien, je pense, trouver pour agréable que je leur fasse grâce de cette érudition d'emprunt, et que, me bornant à leur indiquer la source où j'aurais pu moi-même puiser, j'entre de suite en matière par un exposé sommaire de l'origine et du progrès de mes idées sur le phénomène auquel je me propose de consacrer cet essai.

A l'époque où je m'occupais, pour la première fois, de la recherche des lois du mouvement de la lumière, à travers les milieux transparens de densité variable, la comète de 1807 brillait toutes les nuits sur notre horizon ; je ne pouvais porter mes regards vers elle sans réfléchir sur la nature de cette apparence singulière qui, sous le nom de *queue*, *barbe* ou *chevelure*, accompagne communément et exclusivement ces sortes d'astres. Je m'empressai de relire avec soin tout ce qu'on avait écrit sur ce sujet; mais je ne trouvais dans tout cela que des suppositions vagues, insuffisantes et inconciliables avec les lois d'une saine physique. Dans mes recherches sur le phénomène du mirage j'avais eu soin d'abord de tenir compte de la courbure des couches atmosphériques de densité constante, comme l'a fait postérieurement M. Biot. Quelques résultats d'analyse que je venais d'obtenir me firent faire de singuliers rapprochemens, et je fus conduit, presque involontairement, à une hypothèse tellement hardie et tellement éloignée des idées reçues, que je crus devoir mettre tous mes soins à la repousser, comme j'aurais pu le faire d'une pensée coupable.

J'étais presque parvenu, non sans beaucoup d'effort et de peine, à bannir tout-à-fait cette hypothèse de mon esprit, lorsque la belle comète de 1811 s'offrit à mes regards et me fit retomber, malgré moi, dans mes premières réflexions. Plus j'envisageais mon hypothèse et plus elle me paraissait plausible, et même la seule que l'on pût raisonnablement admettre. Toutefois, éloigné, par goût, de tout ce qui n'est point susceptible de démonstration rigoureuse, je ne fis part de mes réflexions à personne; seulement ayant eu l'occasion d'écrire, dans le même temps, à M. l'astronome Flaugergues, au sujet d'un mémoire sur la diffraction, qu'il avait adressé à l'Académie de Nismes, et ne pouvant guère me dispenser de lui parler de la comète qui alors attirait tous les regards, même ceux des plus indifférens, et dont je venais de calculer une éphéméride, je lui touchai quelque chose de mes conjectures, dont je ne lui donnai d'ailleurs qu'une idée très-succincte, ayant même soin d'aller au devant des principales objections qui pourraient m'être opposées. Ce patriarche de l'astronomie en fut si peu offusqué que, par une lettre de Viviers, en date du 25 novembre 1811, il me fit l'honneur de me répondre en ces termes:

« J'ai examiné, Monsieur, avec le plus grand soin, l'hypothèse » sur la nature des queues des comètes, que vous m'avez fait l'hon- » neur de me communiquer; j'en ai été enchanté. Elle est très- » simple, et la simplicité est le cachet de la nature. Votre idée est » sublime, mais elle vous donnera sans doute de grandes difficul- » tés pour la réduire au calcul. Il me tarde beaucoup de vous voir » achever ce travail, et de lire le beau mémoire que vous nous » faites espérer sur cet intéressant sujet. »

On ne me taxera pas sans doute d'un engouement excessif pour mes idées, si l'on considère que, malgré une approbation si flatteuse et si encourageante, j'ai résisté, pendant dix-huit ans encore, à la tentation de publier mes conjectures sur un sujet qui m'avait tant préoccupé. Mes recherches récentes sur le mouvement de la lumière dans un milieu transparent de densité variable (tom. XIX, pag. 257) ont rendu la tentation plus forte, et, comme en même temps les glaces de l'âge ont rendu la résistance moins énergique, j'y succombe aujourd'hui, ne fassent que pour m'en ôter le tourment et n'être plus tenté à l'avenir. C'est, si l'on veut, un vieux procès bien chanceux que, quelle qu'en puisse être l'issue, je veux faire juger définitivement pour n'avoir plus désormais à m'en occuper en aucune sorte.

Au surplus, quand bien même mon hypothèse serait de nature à ne pouvoir absolument être admise, ce qui va suivre pourrait encore être digne de quelque intérêt, comme exercice de calcul, et comme supplément aux exemples que j'ai donnés dans le mémoire rappelé plus haut. On a quelque fois reproché à Euler de créer des hypothèses pour se donner le plaisir de faire des calculs, et je sens fort bien que, si c'est là un travers, je suis loin d'avoir les mêmes titres que cet illustre géomètre à me le faire pardonner; mais je n'ai pas non plus la prétention de valoir mieux que lui sous aucun rapport.

Soit, dans l'espace, une masse très-étendue d'une substance gazeuse transparente, enveloppant ou du moins pouvant envelopper un noyau solide, qui pourra lui-même être recouvert d'une couche plus ou moins épaisse d'un liquide également transparent. Le liquide et le gaz se disposeront, autour du noyau solide, suivant les lois de l'équilibre; et la densité de la masse gazeuse, par l'effet combiné de son élasticité et de l'attraction exercée sur elle, tant par le noyau que par les couches inférieures, décroîtra sans cesse du dedans au-dehors, ainsi qu'il arrive à la masse atmosphérique qui enveloppe notre terre, si ce n'est qu'elle pourra s'étendre à une beaucoup plus grande distance du centre. Telle est, dans mon hypothèse, l'idée qu'on doit se faire d'une *comète*, du moins de celles qui se montrent accompagnées d'une queue ou chevelure.

Pour ne pas trop compliquer d'abord la question, supposons que le noyau solide de l'astre soit rigoureusement sphérique et que toute la masse de cet astre soit assez distante des autres corps célestes, et du soleil en particulier, pour que l'attraction exercée par ces corps divers sur les molécules qui la composent soit sensiblement la même pour chacune de ces molécules, et pour qu'en même temps elles reçoivent toutes de l'action échauffante du soleil une température sensiblement constante. Alors, abstraction faite de tout mouvement, soit de rotation soit de translation dans l'espace, les parties mobiles de la comète ne seront soumises qu'à leur action mutuelle, et la masse gazeuse, qui concourt à la former, et que j'appelerai à l'avenir l'*atmosphère cométaire*, s'arrangera de telle sorte, autour du noyau, que ses couches de densité constante seront à la fois sphériques et concentrique; et, comme je l'ai déjà observé plus haut, la densité de ces couches sera d'autant moindre qu'elles auront un plus grand rayon. Il en sera donc de même de leur pouvoir réfringent; si, du moins, comme je le suppose encore pour le moment, l'atmosphère cométaire est chimiquement homogène.

Considérons présentement un des points lumineux de la surface du soleil; ce point lance des rayons dans toutes les directions. Ceux d'entre eux qui ne rencontrent pas l'atmosphère cométaire poursuivent leur trajet en ligne droite, dans les profondeurs de l'espace; et il en est de même du rayon unique qui se dirige vers le centre du noyau, puisqu'il traverse toutes les couches gazeuses de densité constante dans des directions normales. Dans le cas particulier où il n'existerait pas de noyau opaque, ce dernier rayon poursuivrait sa route au-delà du centre de l'astre, sans être plus dévié qu'avant de l'avoir atteint.

Les rayons intermédiaires qui s'éloigneront peu de ces rayons extrêmes ne s'écarteront pas sensiblement de la direction rectiligne, savoir : les uns parce qu'ils traverseront des couches extrêmement rares de l'atmosphère cométaire, et les autres parce qu'ils en traverseront les couches, même les plus denses, dans des directions presque normales. Quant aux rayons qui s'écarteront plus sensiblement de ces deux limites, on conçoit que, suivant les variétés que pourra présenter leur direction initiale, ils seront plus ou moins infléchis vers le centre de l'astre, de telle sorte qu'il y aura une certaine direction initiale à laquelle répondra le *maximum* de courbure. Il est d'ailleurs manifeste que les trajectoires décrites par ces rayons seront toutes des courbes planes, dont les plans passeront tous par le point rayonnant que nous considérons sur la surface du soleil, et par le centre de la comète.

Il y aura donc, comme l'on voit, dans l'un quelconque de ces plans, une infinité de trajectoires dont celle qui passera par le centre de l'astre sera rectiligne, tandis que celles qui s'écarteront de part et d'autre de celle-là auront des courbures continuellement croissantes jusqu'à un certain terme, au-delà duquel leur courbure diminuera, au contraire, continuellement de manière à devenir enfin, de nouveau, tout-à-fait nulle.

Il est aisé de conclure de là que les trajectoires, appartenant à un même plan quelconque, se couperont consécutivement, de manière à être toutes tangentes à une sorte de caustique qui en sera l'enveloppe commune, ou, en d'autres termes, qui sera la solution particulière de leur équation différentielle. Il est même visible que la droite qui joindra le point rayonnant au centre de la comète sera un diamètre principal de cette caustique, puisque les circonstances seront rigoureusement les mêmes de part et d'autre de cette droite. Voilà donc une courbe sur laquelle viendront converger, tour à tour, les rayons émanés du point lumineux; de sorte que les molécules de l'atmosphère cométaire qui se trouveront situées sur cette courbe, devront être plus éclairées que celles qui se trouveront situées en d'autres points de son plan; or, comme il en ira de même pour tous les plans conduits par le point rayonnant et par le centre de l'astre, il s'ensuit que, si l'on fait tourner cette caustique autour de la droite qui joint ces deux points, elle engendrera une surface de révolution qui sera le lieu des points les plus éclairés de l'atmosphère cométaire.

Voilà de quelle manière les choses se passeraient si le soleil se trouvait réduit à un simple point lumineux, et il est probable qu'alors la portion fortement éclairée de l'atmosphère cométaire formerait une couche trop mince pour pouvoir affecter, d'une manière sensible, l'œil d'un spectateur placé sur la surface de notre terre; mais chacun des points de la portion de la surface solaire qui regarde la comète, donnera naissance à une pareille surface caustique; et l'ensemble des surfaces caustiques qui répondront à tous ces points, lesquelles se succéderont les unes aux autres, sans interruption, produira, dans l'atmosphère cométaire, non plus une simple surface, mais un volume de molécules fortement éclairées. Il arrive un phénomène assez analogue, lorsque, de nuit, on tient un verre plein d'eau, à quelque distance de la flamme d'une chandelle; en regardant par-dessus le verre, on aperçoit distinctement, dans son intérieur, un volume de liquide plus ou moins considérable, sensiblement plus éclairé que le reste de la masse. Ajoutons que les surfaces caustiques, dont l'ensemble formera la portion la plus éclairée de l'atmosphère cométaire, se succédant les unes aux autres, sans interruption, pourront avoir elles-mêmes leur surface caustique, leur surface enveloppe, solution particulière de leur équation différentielle commune, laquelle pourra avoir plusieurs nappes, telles que les molécules de l'atmosphère cométaire qui s'y trouveront situées seront éclairées d'une lumière plus intense encore.

Telle est, dans mon hypothèse, la cause purement optique de cette apparence qui, sous le nom de queue, de barbe ou de chevelure, accompagne la plupart des comètes observées jusqu'ici; et l'on voit que cette hypothèse ne tend à rien moins qu'à attribuer à l'atmosphère des comètes, un rayon au moins égal à la longueur de leur queue, c'est-à-dire, pour beaucoup d'entre elles, un rayon de plusieurs dixaines de millions de lieues. Voilà ce qui m'avait, en quelque sorte, effrayé au premier abord; je craignais sérieusement qu'à notre très-grand préjudice, les atmosphères cométaires ne vinssent quelquefois se mêler avec la nôtre; mais, peu à peu, je me suis familiarisé avec cette idée, et je suis présentement tout-à-fait aguerri.

Cette hypothèse explique tout naturellement pourquoi la queue d'une comète est constamment opposée au soleil; et l'on voit même, qu'abstraction faite des causes perturbatrices dont je m'occuperai tout-à-l'heure, cette apparence devrait constamment affecter la figure d'un solide de révolution, ayant son axe dans le prolongement de la droite qui joint les centres des deux astres. Cette hypothèse explique également la transparence de cette traînée lumineuse, les courbes plus lumineuses qu'elle dont elle est quelquefois sillonnée, et enfin l'espèce de vague indéfinissable que ses bords offrent à la vue, et qui fait qu'au même instant deux spectateurs ont souvent beaucoup de peine à tomber d'accord sur son étendue et ses limites.

Si une comète s'approche du soleil, les rayons solaires qui traverseront son atmosphère y pénétreront dans des directions de plus en plus divergentes; les diverses trajectoires qu'ils y décriront, iront donc se couper de plus en plus loin derrière l'astre, à peu près comme le foyer d'une lentille convexe s'éloigne de plus en plus derrière elle, à mesure que le point rayonnant en devient plus voisin. En outre, l'action échauffante du soleil, devenue plus énergique, par l'effet d'une plus grande proximité, dilatera de plus en plus l'atmosphère cométaire ; cette atmosphère acquerra donc une plus grande étendue, et, par suite, la queue de la comète une plus grande longueur.

Cette dernière considération explique fort bien aussi comment ce n'est pas d'ordinaire à l'époque du périhélie, mais un peu après, que la queue d'une comète parvient à sa plus grande extension. On conçoit, en effet, que l'action dilatente de la chaleur solaire continuant à s'exercer après le périhélie, ce ne doit être également qu'après cette époque que l'astre aura acquis son *maximum* de température et par suite son *maximum* de dilatation et de volume. C'est ainsi que le jour le plus chaud de l'année est d'ordinaire postérieur à l'époque du solstice, et l'heure la plus chaude du jour, postérieure à celle de midi.

Si la comète n'est pas aussi distante des autres corps célestes, et du soleil en particulier, que je l'ai d'abord supposé, ni l'action attractive exercée sur elle par ces différens corps, ni l'action dilatente de ce dernier ne seront les mêmes pour tous les points de son atmosphère ; les couches de densité uniforme de cette atmosphère pourront donc cesser d'être, à la fois, sphériques et concentriques ; et il en sera de même, à plus forte raison, si un mouvement de rotation de la comète, sur son axe, développe dans son atmosphère une force centrifuge; de là les variétés infinies que pourra présenter la queue des comètes, qui cessera dès lors d'être un solide de révolution ; de là aussi les variétés que présentera la queue d'une même comète aux diverses époques de son apparition; de là enfin le peu de régularité et de symétrie que ces sortes d'apparences offriront quelquefois à la vue du spectateur. On peut conjecturer que, parmi ces diverses causes d'anomalie, il s'en trouvera d'à peu près communes à toutes les comètes, en vertu desquelles l'extrémité de la queue de la plupart d'entre elles se courbera dans un sens opposé à celui du mouvement.

J'ai tacitement supposé, dans tout ce qui précède, que les différentes couches de l'atmosphère cométaire avaient exactement la même constitution chimique, et ne différaient uniquement les unes des autres que par leur densité ; mais il pourrait fort bien n'en être pas toujours ainsi. Il se pourrait quelquefois que cette atmosphère fût un mélange de gaz divers, dont l'action sur la lumière ne suivît pas exactement le rapport des densités, c'est-à-dire qu'il se pourrait que la loi de décroissement de ce que j'ai appelé récemment *densité optique* (*), fût différente de la loi de décroissement de la *densité physique*; il se pourrait même que la première de ces densités fût croissante de l'intérieur à l'extérieur, tandis qu'au contraire, l'autre irait en décroissant dans cette même direction ; c'est en particulier ce qui arriverait si, par exemple, les couches les plus voisines du noyau étant formées d'un gaz à peu près pareil à notre air atmosphérique, les couches supérieures étaient formées de quelque gaz de la nature du gaz hydrogène, ou même de quelque autre gaz, tout-à-fait inconnu sur notre planète, réfractant plus encore la lumière, à densité égale, que ne le fait celui-là ; et de là encore une autre source de variété dans la figure de la queue. Le calcul prouve, en effet, que le changement le plus léger, dans la loi de variation de la densité optique des différentes couches, suffit pour opérer un changement notable dans la figure des trajectoires, et par suite dans celle de la caustique. Ajoutons encore que la queue d'une comète n'est point vue sous sa figure effective, puisqu'elle est vue à travers l'atmosphère de cet astre, dont l'interposition doit nécessairement en changer l'apparence.

Il pourrait, en particulier, arriver souvent que les trajectoires décrites par les rayons de la lumière solaire, infléchis par l'action de l'atmosphère cométaire, fissent une portion de révolution ou même une ou plusieurs révolutions autour de son noyau, de telle sorte

(*) Voy. la pag. 268 du précédent volume.

que le centre de l'astre se trouvât dans l'intérieur des nœuds de ces diverses trajectoires (*) ; et il est aisé de comprendre qu'alors les caustiques passeraient entre la comète et le soleil. Il arriverait donc ainsi que la queue de la comète ne serait pas entièrement située derrière cet astre ; cette queue pourrait, par exemple, figurer une sorte de parabole fort allongée, dont le foyer serait à peu près au centre de la comète ; et c'est, en effet, sous cette forme que ces traînées lumineuses s'offrent le plus souvent à nos regards.

Quant aux comètes qui ont paru totalement dépourvues de queues, il est presque superflu de dire qu'il faut admettre que celles-là doivent être dépourvues d'atmosphère sensible, ou du moins que leur atmosphère doit être extrêmement circonscrite ; ces comètes seront, pour bien dire, de véritables planètes ne différent uniquement des autres que par une plus grande excentricité de leur orbite et par une plus grande inclinaison de son plan sur le plan de l'écliptique. Au surplus, il se pourrait fort bien qu'une comète, environnée d'une atmosphère très-étendue, se montrât dépourvue de queue ; il suffirait pour cela que les trajectoires, décrites dans cette atmosphère par les rayons de la lumière solaire, fussent de nature à n'avoir pas d'enveloppe commune ; et le calcul prouve qu'il peut quelquefois en être ainsi. Il se pourrait aussi que les caustiques fussent des spirales dont les circonvolutions les plus lumineuses s'écarteraient peu du noyau qui alors paraîtrait simplement enveloppé d'une nébulosité, ainsi qu'il arrive quelquefois.

La plus grave objection qu'on puisse opposer à cette hypothèse, est la suivante que je n'avais pas dissimulée à M. Flaugergues qui en fut si peu offusqué, qu'il n'en fit absolument aucune mention dans la lettre dont j'ai rapporté plus haut un fragment. Si l'at-

---

(*) Ces circonvolutions de la trajectoire autour du noyau étaient ce que M. Flaugergues répugnait le plus à admettre, sans doute, à cause de l'insuffisance de mes développemens ; le calcul en met la possibilité tout-à-fait hors de doute.

mosphère cométaire, dira-t-on, a communément l'immense étendue que vous lui supposez, et si elle a la propriété de dévier plus ou moins fortement les rayons de la lumière solaire qui la traversent, elle doit agir d'une manière analogue sur la lumière des étoiles, lesquelles conséquemment, vues à travers cette atmosphère, ne doivent point paraître à leur véritable place. Or, on détermine le plus souvent le lieu des comètes par leur comparaison aux étoiles voisines; donc, dans cette hypothèse, ajoutera-t-on, de telles déterminations, et par suite les élémens auxquels elles conduisent, devraient être tout-à-fait erronés; ce qui pourtant n'est point confirmé par le fait.

Pour atténuer la force de cette objection, je rappelerai d'abord que, malgré les nombreux perfectionnemens qu'ont acquis de nos jours les instrumens, l'art d'en faire usage et les méthodes de calcul, il est fort rare que des élémens, conclus de la comparaison d'une comète aux étoiles voisines, aient, du premier jet, toute l'exactitude qu'on se croirait fondé à en attendre; de sorte que des élémens déterminés par deux observateurs offrent quelquefois des disparates assez choquantes, et que même des élémens conclus par un même observateur, de comparaisons d'une même comète aux étoiles, faites à deux époques un peu distantes l'une de l'autre, ne sont souvent pas mieux d'accord entre eux. Pour expliquer ce défaut de concordance, on s'est retranché jusqu'ici sur les perturbations causées par les planètes, sur la résistance de l'éther et surtout sur l'espèce de vague que présentent les limites du noyau, à raison de la nébulosité qui l'environne communément; mais pourquoi ne pourrait-on pas, tout aussi bien, l'attribuer, du moins en grande partie, à la déviation à travers l'atmosphère cométaire des rayons de lumière émanés des étoiles? Et pourquoi ne viendrai-je pas de signaler ici une nouvelle cause d'erreur, contre laquelle on n'aurait pas songé jusqu'à ce jour à se mettre en garde?

Remarquons présentement que, lorsqu'on détermine les lieux d'une comète, par sa comparaison aux étoiles, on choisit constamment de préférence les étoiles les plus voisines, des étoiles qui puissent être comprises avec l'astre dans le champ souvent peu étendu de la lunette, sans même approcher trop de ses bords; les rayons, par lesquels ces étoiles sont rendues visibles à l'observateur, passent donc, dans leur trajet, à travers l'atmosphère cométaire, assez près du centre de l'astre; et j'ai déjà fait observer plus haut que ces rayons doivent être fort peu déviés. On sait d'ailleurs que, toutes les fois que la chose est possible, les astronomes préfèrent à la comparaison aux étoiles voisines l'observation de la hauteur méridienne et celle de l'heure du passage au méridien, observations qui, dans mon hypothèse, ne sauraient être passibles de l'erreur dont il s'agit ici.

Des physiciens, comme on en rencontre tant encore aujourd'hui, même quelquefois dans les chaires des hautes écoles, pourraient croire la question suffisamment débattue et mon hypothèse complètement justifiée; et il est, en effet, dans la philosophie naturelle, un grand nombre d'hypothèses universellement admises, bien qu'elles ne soient pas appuyées sur des fondemens plus solides; mais je sais que j'écris pour des physiciens géomètres, et je sens que je ne saurais espérer d'entraîner leur conviction, si je ne soumettais mon hypothèse à l'épreuve délicate mais décisive du calcul. S'il fallait ici attaquer la question dans toute sa généralité, le problème serait assez difficile à manier; mais, en écartant toutes les causes d'aberration, on parvient à des résultats assez simples et suffisans pour faire pressentir ce qu'on pourrait se promettre d'une analyse plus savante et plus rigoureuse.

Je supposerai donc constamment, dans tout ce qui va suivre, que la comète, sans noyau solide ni liquide, est uniquement formée d'une substance gazeuse, dans laquelle les couches de densité constante sont à la fois sphériques et concentriques; la densité, variant d'une couche à celle qui la suit immédiatement suivant une loi mathématique quelconque, que je supposerai uniforme pour toute l'étendue de la masse cométaire. Alors, comme je l'ai observé plus haut, les trajectoires décrites par la lumière, à travers une telle masse, seront des courbes planes dont les plans contiendront à la fois le centre de cette masse et le point rayonnant auquel je supposerai le soleil réduit.

Soit pris le plan de l'une quelconque de ces trajectoires pour celui des coordonnées supposées rectangulaires, et le centre de la comète pour origine. Faisons passer l'axe des x positives par le point rayonnant que nous supposerons à une distance a de l'origine. En représentant par u la densité de la comète, en l'un quelconque (x, y) de ses points, nous aurons

$$u=\psi(\sqrt{x^2+y^2})\ ; \qquad (1)$$

d'où nous conclurons

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=P=x\,\frac{\psi'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\ , \qquad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)=Q=y\,\frac{\psi'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ; \quad (2)$$

en conséquence (tom. XIX, pag. 282) les équations du mouvement d'une molécule lumineuse, à travers la masse gazeuse, seront

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=2k^2x.\frac{\psi'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\ , \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=2k^2y.\frac{\psi'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ; \quad (3)$$

équations dans lesquelles, comme on l'a vu à l'endroit cité, k^2 est un coefficient constant, relatif au mode d'action des milieux sur la lumière, et auxquelles on pourra joindre, comme s'y trouvant implicitement comprise, l'équation (pag. 273)

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=w^2+4k^2\psi(\sqrt{x^2+y^2})\ , \qquad (4)$$

dans laquelle w exprime la vîtesse de la lumière dans le vide.

Si l'on représente par φ la force accélératrice, on aura, comme l'on sait,

$$\varphi=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}\ ;$$

d'où on conclura (3), en substituant,

$$\varphi=2k^2\psi'(\sqrt{x^2+y^2})\ ; \qquad (5)$$

ainsi, généralement, *la force accélératrice est proportionnelle à la dérivée de la fonction du rayon des couches sphériques concentriques qui exprime la densité optique de ces couches.*

Les équations (3) donnent, par division,

$$y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}=0\ ,$$

d'où, en intégrant,

$$y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=C\mathrm{d}t\ ; \qquad (6)$$

équation qui est l'expression du principe des aires, et dans laquelle C est la constante arbitraire. En portant la valeur de $\mathrm{d}t$, donnée par cette équation, dans l'équation (4), on obtiendra, pour l'équation générale de la trajectoire décrite,

$$C^2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)=\{w^2+4k^2\psi(\sqrt{x^2+y^2})\}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2\ . \qquad (7)$$

Ici, comme dans la théorie du mirage, il nous sera permis, sans rien changer à la nature des trajectoires, ni conséquemment des caustiques, d'augmenter ou de diminuer la densité de la masse gazeuse que nous supposons composer la comète d'une même quantité quelconque en tous ses points, et nous profiterons de cette liberté pour la rendre constamment nulle à la distance a du centre de l'astre à laquelle le point rayonnant se trouve situé, ce qui donnera $\psi(a)=0$. En supposant donc que le rayon fait, à son point de départ, avec l'axe des x, un angle dont la tangente tabulaire est égale à m, on devra avoir, en même temps,

$$x=a\ ,\quad y=0\ ,\quad \mathrm{d}y=m\mathrm{d}x\ ,\quad \psi(\sqrt{x^2+y^2})=\psi(a)=0\ ;$$

ce qui donnera, en substituant dans (7),

$$C^2(1+m^2)=m^2a^2w^2\ ; \qquad (8)$$

tirant de cette équation la valeur de C^2, pour la substituer dans l'équation (7), celle-ci deviendra

$$m^2a^2w^2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)=(1+m^2)\{w^2+4k^2\psi(\sqrt{x^2+y^2})\}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2\ ;$$

posant enfin, pour abréger, comme dans la théorie du mirage,

$$w=2\lambda k\ ,$$

on aura, pour l'équation différentielle de la trajectoire décrite par le rayon qui fait, à son point de départ, avec la droite qui joint ce point au centre de l'astre, un angle dont la tangente tabulaire est m,

$$m^2\lambda^2a^2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)=(1+m^2)\{\lambda^2+\psi(\sqrt{x^2+y^2})\}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2\ . \quad (9)$$

L'intégrale de cette équation, dans chaque hypothèse sur la forme de la fonction ψ, fera connaître la trajectoire décrite.

Il conviendra pour séparer les variables, et ramener ainsi le problème aux quadratures, de passer aux coordonnées polaires, en posant

$$x=r\mathrm{Cos}.\theta\ ,\qquad y=r\mathrm{Sin}.\theta\ ;$$

il en résultera successivement

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}r\mathrm{Cos}.\theta-r\mathrm{d}r\mathrm{Sin}.\theta\ ,\qquad \mathrm{d}y=\mathrm{d}r\mathrm{Sin}.\theta+r\mathrm{d}r\mathrm{Cos}.\theta\ ,$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=r\ ,\quad \mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2\ ,\quad (y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2=r^4\mathrm{d}\theta^2\ ,$$

ce qui donnera, en substituant dans l'équation (9),

$$m^2\lambda^2a^2(dr^2+r^2d\theta^2)=(1+m^2)\{\lambda^2+\psi(r)\}r^4d\theta^2\ , \qquad (10)$$

équation d'où on tirera

$$d\theta=\frac{m\lambda a dr}{r\sqrt{(1+m^2)r^2\psi(r)+\lambda^2[(1+m^2)r^2-m^2a^2]}}\ ; \qquad (11)$$

équation séparée, dans laquelle on pourra faire, sur la forme de la fonction ψ, quelle hypothèse on voudra. La constante qu'introduira l'intégration devra d'ailleurs être déterminée de telle sorte qu'à $\theta=0$ réponde $r=a$.

Mais ce qui nous intéresse particulièrement ici, c'est beancoup moins la figure des trajectoires qui peuvent répondre aux diverses formes de la fonction ψ et aux différentes valeurs de m, que la figure de la caustique ou courbe enveloppe de ces trajectoires qui, pour une même forme quelconque de cette fonction ψ, répond aux diverses valeurs de m. Or, rien n'est plus facile que d'obtenir l'équation différentielle générale de cette caustique, puisqu'il ne s'agit pour cela que d'éliminer m entre l'équation (10) et sa différentielle prise uniquement par rapport à ce paramètre. Or, par la forme de cette équation, m disparaît de lui-même de sa différentielle ; de sorte que l'équation différentielle générale de la caustique est simplement

$$\lambda^2a^2(dr^2+r^2d\theta^2)=\{\lambda^2+\psi(r)\}r^4d\theta^2\ . \qquad (12)$$

Si l'on connaît l'équation polaire de la caustique on en tirera, par différentiation, la valeur de $d\theta$ en r et dr; en substituant cette valeur dans l'équation (12), dr disparaîtra de lui-même ; de sorte que l'équation résultante fera connaître la forme de la fonction ψ, d'où l'on conclura ensuite, si on le juge convenabl, au moyen de l'équation (11), la nature de la trajectoire.

On doit seulement observer, 1.° que, d'après l'hypothèse que nous avons admise sur la constitution de la comète, on ne peut prendre, pour la caustique, qu'une courbe symétrique, par rapport à l'axe des x; 2.° qu'ayant diminué arbitrairement d'une même quantité la densité de la comète, en tous ses points, il faudra, pour avoir la valeur complète de $\psi(r)$, ajouter une constante à la valeur qu'on aura déduite du procédé que nous venons d'indiquer.

Observons encore que la caustique admise ne sera pas proprement la queue de la comète; mais que, pour l'en déduire, il faudra supposer que l'axe de cette caustique oscille autour du centre de l'astre, de part et d'autre de l'axe des x, d'une quantité angulaire égale à l'angle sous lequel serait, vu de ce centre, le demi-diamètre du disque solaire.

Faisons présensement quelques applications; et, pour prendre un cas un peu général, supposons que la caustique soit une section conique quelconque, ayant son axe dans l'axe des x et son foyer à l'origine; son équation polaire sera, comme l'on sait

$$r=\frac{\frac{1}{2}p}{1+\varepsilon\mathrm{Cos.}\theta}\ ,$$

p étant le paramètre et ε le rapport de l'excentricité au demi-axe, cela revient à

$$2(1+\varepsilon\mathrm{Cos.}\theta)r=p\ ,$$

d'où, en différentiant,

$$(1+\varepsilon\mathrm{Cos.}\theta)\mathrm{d}r=\varepsilon r\mathrm{d}\theta\mathrm{Sin.}\theta\ ;$$

ces deux équations donnent

$$\mathrm{Sin.}\theta=\frac{p\mathrm{d}r}{2\varepsilon r^2\mathrm{d}\theta}\ ,\qquad \mathrm{Cos.}\theta=\frac{r(p-2r)\mathrm{d}\theta}{2\varepsilon r^2\mathrm{d}\theta}\ ;$$

d'où

$$\mathrm{Sin.}^2\theta+\mathrm{Cos.}^2\theta=1=\frac{p^2\mathrm{d}r^2+r^2(p-2r)^2\mathrm{d}\theta^2}{4\varepsilon^2r^4\mathrm{d}\theta^2}\ ,$$

ce qui revient à

$$\mathrm{d}\theta^2=\frac{p^2\mathrm{d}r^2}{r^2\{4\varepsilon^2r^2-(p-2r)^2\}}\ ;$$

substituant cette valeur dans l'équation (12), elle deviendra, toutes réductions faites,

$$4\lambda^2a^2\{(\varepsilon^2-1)r+p\}=p^2r\{\lambda^2+\psi(r)\}\ ;$$

d'où l'on tirera

$$\psi(r)=\lambda^2.\frac{\{4a^2(\varepsilon^2-1)-p^2\}r+4a^2p}{p^2r}\ ,$$

ou encore

$$\psi(r)=\lambda^2\left\{\frac{4a^2(\varepsilon^2-1)-p^2}{p^2}+\frac{4a^2}{pr}\right\}\ ;$$

mais, à cause de la constante qu'il faudra introduire, on pourra poser simplement

$$\psi(r)=4\lambda^2\left(n+\frac{a^2}{pr}\right)\ ,$$

cela donne une densité infinie au centre de l'astre, et une densité finie à une distance infinie, ce qu'on peut très-bien admettre. Il n'est donc pas surprenant, d'après cela, que la queue d'une comète affecte fort souvent, comme nous l'avons déjà dit, à peu près, la figure d'une parabole, ayant son foyer au centre de l'astre.

De cette équation on tire, par différentiation,

$$\psi'(r)=-\frac{4\lambda^2a^2}{pr^2}\ ;$$

donc, d'après ce que nous avons dit ci-dessus, la force accélératrice est ici inverse du quarré de la distance ; ce qui prouve, sans autres développemens, que les trajectoires décrites par les rayons lumineux sont-elles mêmes des coniques ayant pour foyer le centre de l'astre.

Si j'étais assez heureux pour avoir rencontré juste dans l'explication du phénomène auquel j'ai consacré cet écrit, l'observation de la figure exacte des queues des comètes acquerrait à l'avenir beaucoup d'intérêt. La connaissance précise de cette figure fournirait, en effet, sur la constitution physique de ces astres, des lumières qui pourraient être ensuite utilement appliquées à corriger les erreurs dont seraient nécessairement affectées les comparaisons des comètes aux étoiles voisines.

Pour second exemple, supposons que la caustique soit une spirale logarithmique donnée par l'équation

$$r=ce^{\theta},$$

auquel cas la comète paraîtra simplement enveloppée d'une nébulosité. Il viendra, en différentiant,

$$\mathrm{d}r=ce^{\theta}\mathrm{d}\theta=r\mathrm{d}\theta\ ;$$

d'où

$$r^2\mathrm{d}\theta^2=\mathrm{d}r^2\ ;$$

portant cette valeur dans l'équation (12), elle deviendra

$$2\lambda^2a^2=\{\lambda^2+\psi(r)\}b^2\ ,$$

ce qui donne

$$\psi(r)=\lambda^2\left(\frac{2a^2}{r^2}-1\right)\ ;$$

mais, à cause de la constante qu'il faudra introduire, on pourra écrire, plus généralement,

$$\psi(r)=2\lambda^2\left(n+\frac{a^2}{r^2}\right)\ ;$$

on aura donc encore ici une densité infinie au centre de l'astre et une densité finie à une distance infinie.

On tire de là, par différentiation,

$$\psi'(r)=-\frac{4\lambda^2a^2}{r^3}\ ;$$

ce qui montre qu'ici la force accélératrice sera inverse du cube de la distance; d'où on peut conclure, par les principes connus, et notamment par ce qui a été observé par M. Ampère, dans un précédent mémoire, que les trajectoires décrites par les rayons lumineux seront elles-mêmes des spirales; ce qui résout complètement la difficulté qui m'avait été opposée par M. l'astronome Flaugergues.

Je crois inutile de pousser plus loin ces applications, qui n'ont, comme l'on voit, rien de bien difficile, et que pourront étendre indéfiniment ceux qui y mettront quelque intérêt. On voit, en effet, qu'on pourra toujours façonner une comète, de manière à lui faire avoir une queue de telle figure qu'on voudra.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution de deux des six problèmes de géométrie énoncés à la pag. 155 *du XVIII.me volume des* Annales (*).

PROBLÈME I. Décrire une sphère qui intercepte, sur quatre plans donnés, des cercles dont les rayons soient respectivement égaux à des longueurs données ?

PROBLÈME II. Décrire une sphère telle que les cônes circonscrits qui auront leurs sommets en quatre points donnés, aient leurs angles générateurs respectivement égaux à des angles donnés ?

Solution du premier problème ;

Par un ABONNÉ.

Soient A, B, C, D les quatre plans donnés, O le centre de la sphère cherchée, r son rayon, α, β, γ, δ les centres des cercles qu'elle doit intercepter sur les plans donnés, et enfin a, b, c, d les rayons respectifs de ces cercles; on aura évidemment

$$r^2=a^2+\overline{O\alpha}^2=b^2-\overline{O\beta}^2=c^2-\overline{O\gamma}^2=d^2-\overline{O\delta}^2 \ ;$$

d'où

$$\overline{O\delta}^2-\overline{O\alpha}^2=a^2-d^2 \ ,$$

$$\overline{O\delta}^2-\overline{O\beta}^2=b^2-d^2 \ ,$$

$$\overline{O\delta}^2-\overline{O\gamma}^2=c^2-d^2 \ ;$$

(*) Voy., pour la résolution des deux autres de ces problèmes, la pag. 175 du XIX.me volume du présent recueil.

de sorte que la question se réduit à trouver un point O de l'espace, tel que les différences entre le quarré de sa distance au plan D et les quarrés de ses distances aux trois autres plans A, B, C, soient égales à trois quantités données.

D'après ce qui a été déjà remarqué (tom. XIX, pag. 177), le lieu géométrique des centres de tous les cercles qui interceptent sur les deux côtés d'un angle donné, des longueurs respectivement égales à $2a$ et $2d$, est une hyperbole équilatère ayant son centre au sommet de cet angle, ayant pour asymptotes les deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, qui divisent cet angle et ses supplémens en deux parties égales, et qui passent par les quatre points dont les distances aux deux côtés de l'angle sont respectivement égales à a et d.

Il suit évidemment de là que le lieu géométrique des centres de toutes les sphères qui interceptent, sur les deux faces d'un angle dièdre donné, des cercles dont les rayons sont respectivement égaux à a et d, est un cylindre hyperbolique équilatère, dont les plans asymptotiques sont les deux plans, perpendiculaires l'un à l'autre, qui divisent l'angle proposé et ses supplémens en deux parties égales et qui a pour quatre de ses génératrices les parallèles à l'arête de l'angle dièdre, dont les distances à ses faces sont respectivement égales à a et d.

En conséquence, la solution du problème proposé se réduit à ce qui suit: Soient construites les trois surfaces cylindriques, hyperboliques, équilatères qui répondent aux angles dièdres que fait le plan D avec chacun des plans A, B, C; ces surfaces se couperont généralement en *huit* points, centres d'autant de sphères qui résoudront le problème.

Les centres des sphères cherchées étant ainsi déterminés, rien ne sera plus aisé que d'en trouver les rayons respectifs; car, pour chacune d'elles, en abaissant de son centre une perpendiculaire sur l'un quelconque des plans donnés, cette perpendiculaire et le rayon du cercle intercepté sur ce plan seront les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypothénuse sera le rayon de la sphère.

Si les cercles interceptés sur deux des trois plans A, B, C, devaient être égaux au cercle intercepté sur le plan D, deux des trois surfaces se réduiraient à leurs plans asymptotiques; de sorte qu'il serait facile de ramener la recherche de leur intersection avec la troisième à celle des intersections d'une sphère avec une droite; le problème pourrait donc alors être rigoureusement résolu par les élémens.

Si les quatre cercles devaient tous être égaux, les surfaces cylindriques se réduiraient alors toutes trois à leurs plans asymptotiques, et les centres des sphères cherchées seraient les mêmes que ceux des huit sphères tant inscrites qu'ex-inscrites au tétraèdre formé par les quatre plans donnés, ce qui est d'ailleurs évident.

En considérant que l'on peut raisonner sur chacun des trois autres plans comme nous avons raisonné sur le plans D, on conclura de tout ceci le théorème suivant :

THÉORÈME I. Un tétraèdre T *étant donné, si l'on en construit un autre* T′ *dont les faces, respectivement parallèles aux siennes, en soient à des distances* a, b, c, d; *en construisant des cylindres hyperboliques équilatères, dont les plans asymptotiques soient ceux qui divisent les angles dièdres du tétraèdre* T *et leurs supplémens en deux parties égales, et tels que chacun d'eux ait, pour une de ses génératrices, l'arête du tétraèdre* T′ *qui est parallèle à son axe; ces six cylindres se couperont aux huit mêmes points, centres d'autant de sphères qui intercepteront sur les plans des faces du tétraèdre* T *des cercles dont les rayons seront respectivement égaux aux longueurs* a, b, c, d.

Solution du deuxième problème;

Par M. Camille Pagliani, cadet au corps royal des Pionniers, à Modène.

Soient A, B, C, D les quatre points donnés dans l'espace, O le centre de la sphère cherchée, r son rayon, α, β, γ, δ, les angles générateurs des cônes circonscrits ayant leurs sommets aux quatre points donnés ; on aura évidemment

$$r=\mathrm{OASin}.\alpha=\mathrm{OBSin}.\beta=\mathrm{OCSin}.\gamma=\mathrm{ODSin}.\delta\ ;$$

d'où

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{Cosec}.\alpha}=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{Cosec}.\beta}=\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{Cosec}.\gamma}=\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{Cosec}.\delta}\ ;$$

de sorte que la question se réduit à trouver un point O, dont les distances aux quatre points donnés soient respectivement proportionnelles aux cosécantes des quatre angles donnés.

Or, on sait que, si sur la distance entre les centres de similitude directe et inverse de deux cercles, prise pour diamètre, on décrit un troisième cercle, sa circonférence sera le lieu géométrique de tous les points du plan des deux premiers dont les distances à leurs centres seront respectivement proportionnelles à leurs rayons ; et ce sera aussi le lieu géométrique de tous les points de leur plan d'où on les verra sous des angles égaux ; d'où il résulte évidemment que le lieu géométrique de tous les points de l'espace dont les distances aux centres de deux sphères données sont respectivement proportionnelles à leurs rayons, ou, ce qui revient au même, le lieu géométrique de tous les points de l'espace desquels on peut voir ces deux sphères sous un même angle est une troisième sphère ayant pour diamètre la distance entre les centres de similitude directe et inverse des deux premières.

En conséquence, la solution du problème proposé se réduit à ce qui suit : Des points donnés A, B, C, D, pris successivement pour centres et avec des rayons arbitraires, mais respectivement proportionnels aux cosécantes des angles donnés α, β, γ, δ, soient décrites quatre sphères ; soient décrites ensuite trois autres sphères ayant respectivement pour diamètres les distances entre les centres de similitude directe et inverse des sphères dont les centres sont D et A, D et B, D et C ; ces trois dernières se couperont en deux points, centres d'autant de sphères résolvant le problème proposé.

Les centres de ces deux sphères étant ainsi déterminés, rien ne sera plus facile que d'en assigner les rayons respectifs; car, pour chacune, en joignant son centre au point D, par exemple, par une droite et menant par ce même point D une autre droite faisant avec celle-là un angle égal à δ, la perpendiculaire abaissée de ce centre sur cette dernière droite sera le rayon cherché.

Si les angles donnés $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, étaient égaux entre eux, les trois sphères qui, par leur intersection, déterminent le centre de la sphère cherchée se réduiraient à des plans perpendiculaires sur les milieux des trois droites DA, DB, DC; ce centre serait donc le même que le centre de la sphère passant par les quatre points A, B, C, D; ce qui est d'ailleurs évident.

En considérant que l'on peut raisonner sur les trois autres points comme nous l'avons fait sur le point D, on conclura de tout ceci le théorème suivant :

THÉORÈME II. Des sommets d'un tétraèdre donné, pris pour centres, soient décrites quatre sphères, ayant leurs rayons respectivement proportionnels aux cosécantes de quatre angles donnés α, β, γ, δ. Si, sur les distances entre les centres de similitude directe et inverse de ces sphères, considérées deux à deux, prises pour diamètres, on décrit successivement six autres sphères, ces dernières se couperont toutes aux deux mêmes points, centre de deux nouvelles sphères telles que les cônes circonscrits qui auront leurs sommets aux quatre sommets du tétraedre, auront leurs angles générateurs respectivement égaux aux quatre angles donnés $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

On peut dire aussi plus brièvement :

Le centre de la sphère qui est vue de quatre points de l'espace, sous quatre angles donnés, est le point duquel on verrait, sous le même angle, quatre autres sphères qui auraient pour centres les points donnés, et dont les rayons seraient respectivement proportionnels aux cosécantes des moitiés des angles donnés.

ASTRONOMIE.

Démonstration élémentaire du principe de la gravitation universelle ;

Par M. Ampère, de l'Académie royale des sciences de Paris, etc.

Personne ne doute de l'avantage qu'il y a à mettre à la portée de ceux dont les connaissances en mathématiques se bornent aux élémens de la géométrie et de l'algèbre, l'étude de la physique générale, de cette science la plus utile peut-être à tous les hommes dès qu'ils vivent en société, et qui est comme la base de toutes les sciences naturelles. Fondée sur l'expérience et l'observation des faits, elle a pour objet de ramener ceux-ci à des lois générales, et de remonter à leurs causes, quand il nous est permis de les connaître.

Parmi les phénomènes qui se reproduisent sans cesse autour de nous, ceux qui sont dus à la pesanteur sont peut-être les plus fréquemment offerts à nos observations, et se mêlent, en quelque sorte, à tous les autres. Or, comment celui qui étudie la physique pourrait-il se faire une idée juste de ces phénomènes, s'il ne savait pas que la force qui les produit n'est qu'un cas particulier de cette force universelle, en vertu de laquelle toutes les particules de la matière s'attirent en raison inverse du quarré de leur distance, et si, en calculant, d'après cette loi, ce que la pesanteur, telle que nous l'observons à la surfaee de la terre, devient à la distance où la lune est de notre globe, il ne vérifiait pas qu'elle est précisément la force et la seule force qui retient notre satellite dans son orbite?

Il est aisé de faire comprendre à ceux qui ont quelque idée de la construction et du calcul des triangles, comment Képler a découvert les trois lois du mouvement des planètes; et les notions de statique les plus élémentaires suffisent pour comprendre comment de la première de ces lois, c'est-à-dire de la proportionnalité des aires décrites autour du soleil aux temps employés à les décrire, il résulte que la force qui agit constamment sur les planètes pour faire varier leur vitesse et la direction de leur mouvement, est toujours dirigée vers le centre de cet astre; mais lorsqu'on veut déduire des deux autres lois de Képler, d'abord pour une même planète à divers points de son orbite, ensuite pour les différentes planètes, que cette force est en raison inverse du quarré de la distance, la démonstration purement géométrique donnée par le grand Newton, la seule qui puisse trouver place dans un traité élémentaire de physique, suppose qu'on connaît un assez grand nombre de propriétés de l'ellipse qu'ignorent, en général, ceux qui se livrent à l'étude de cette science, surtout depuis qu'on a banni de l'enseignement public les démonstrations synthétiques des principales propriétés des sections coniques.

J'ai donc cru faire une chose utile à tous ceux qui étudient et enseignent la physique, et qui ne veulent pas ignorer ou laisser ignorer à leurs élèves une des lois les plus importantes de l'économie de l'univers, en cherchant l'expression de la force centrale dans une ellipse décrite par un point matériel, de manière que les aires, autour d'un de ses foyers, soient proportionnelles aux temps, sans supposer que l'on connaisse préalablement aucune des propriétés de cette courbe. Pour cela, à l'exemple de ce qu'a fait le marquis de l'Hôpital, dans le second chapitre du sixième livre de son *Traité analytique des sections coniques*, je définirai l'ellipse une section faite par un plan quelconque dans un cylindre à base circulaire, que je supposerai droit (*); et j'admettrai seulement comme connus les théorèmes les plus élémentaires de la géométrie, et les quatre suivans dont la démonstration est si facile que je ne crois pas devoir m'y arrêter.

1.° Deux tangentes menées d'un même point extérieur à une sphère et terminées à leurs points de contact, sont de même longueur.

2.° Un angle dièdre étant circonscrit à une sphère, les droites menées d'un même point de son arête aux points de contact de la sphère, avec ses faces, font des angles égaux avec cette arête.

3.° Les projections de deux parties d'une même droite ou de deux droites parallèles sur un même plan, sont entre elles comme ces droites elles-mêmes.

4.° Les aires des projections, sur un plan quelconque de deux figures situées dans un autre plan, sont entre elles comme les aires de ces figures elles-mêmes.

Cela posé, soit AMBL (fig. 1) la section faite dans un cylindre droit, à base circulaire *ambl*, à laquelle on a donné le nom d'*ellipse*. Le point C, où le plan coupant rencontre l'axe C*c* du cylindre, se nomme le *centre* de cette ellipse, et, si l'on inscrit au cylindre une surface sphérique S*ambl*, qui touche le plan sécant en S, ce point S prend le nom de *foyer* de l'ellipse.

Comme on peut, dans un cylindre, prendre pour base la section circulaire faite dans sa surface par tel plan perpendiculaire à son

(*) M. Ferriot, par une semblable considération, a fort simplement démontré (*Annales*, tom. II, pag. 240) les diverses propriétés de l'ellipse qui ne dépendent pas de ses foyers. Quant à la situation et aux propriétés de ces deux points, on ne saurait trouver rien de plus simple que ce qui a été donné par MM. Quetelet et Dandelin (*Annales*, tom. XV, pag. 387), et qui s'étend, sans aucune complication nouvelle, aux sections du cône et de l'hyperboloïde de révolution à une nappe.

J. D. G.

axe qu'on veut, nous prendrons pour cette base celui *ambl* qui passe par le centre *c* de la surface sphérique inscrite. Alors la circonférence de cette base est évidemment la ligne de contact de cette surface sphérique avec la surface du cylindre.

Toute droite LM, menée dans le plan de l'ellipse, par son centre C, et terminée de part et d'autre à la courbe, se projète, sur le plan de sa base, par un plan *l*LM*m* qui contient l'axe C*c*; d'où il suit que sa projection *lm* est un diamètre de cette base; et, comme les projections *cl*, *cm*, des deux parties CL, CM, de la droite LM sont égales, il s'ensuit (3.°) que CL=CM, et qu'ainsi le centre C est le milieu de LM.

Si, aux deux extrémités *l*, *m*, du diamètre *lm*, on mène, dans le plan de la base, les deux tangentes *lh* et *mt*, perpendiculaires au diamètre *lm*, et par conséquent parallèles entre elles, et qu'on mène par ces tangentes et par les arêtes *l*L, *m*M du cylindre, deux plans, ils seront tangens à sa surface et parallèles entre eux; leurs intersections LH, MT, avec le plan de l'ellipse, seront donc aussi tangentes à cette ellipse en L et M et parallèles entre elles; d'où il suit que toute droite passant par le centre de la courbe la coupe en deux points dont les tangentes sont parallèles.

Il est aisé de voir qu'une telle droite coupe en deux parties égales toutes les cordes de l'ellipse parallèles à ces tangentes; c'est pour quoi on lui a donné le nom de *diamètre*. Au reste, la considération de cette propriété qui résulte de ce que ces cordes se projètent sur le plan de la base par des cordes de cette base parallèles aux tangentes *lh*, *mt*, et par conséquent perpendiculaires au diamètre *lm*, qui les coupe toutes en deux parties égales, est inutile pour la démonstration qui fait le sujet de cet écrit.

Une droite, telle que SM, menée du foyer S à un quelconque M des points de l'ellipse se nomme *rayon vecteur*. Comme le plan sécant où se trouve cette droite touche la surface sphérique en S, il s'ensuit que le rayon vecteur, au point M, est une tangente menée par ce point à la surface sphérique.

Mais l'arête Mm du cylindre est aussi une tangente menée du point M à la surface sphérique; donc (1.°) SM$=$Mm; et (2.°) $Ang.$TMS$=$$Ang.TMm$.

De même que SM$=$Mm, on doit avoir aussi SL$=$Ll et par conséquent SL$+$SM$=$L$l$$+Mm$; mais dans le trapèze lLMm, L$l$$+Mm$ est double de Cc; de sorte qu'en désignant par a cette longueur Cc, constante pour une même ellipse, on aura

$$SL+SM=2a\ .$$

De même que l'angle SMT est égal à l'angle TMm, l'angle SLH doit aussi être égal à l'angle HLl; mais les angles TMm et HLl sont égaux entre eux, comme ayant les côtés parallèles; donc on doit avoir aussi

$$Ang.SLH=Ang.SMT\ ;$$

Ainsi, la somme des longueurs des droites menées du foyer aux extrémités d'un même diamètre est constante, et ces droites font des angles égaux avec les tangentes aux extrémités de ce diamètre.

Si l'on fait tourner le diamètre LM autour du centre C, il variera de longueur, mais sera toujours plus petit que la constante $2a$, égale à la ligne brisée LSM, jusqu'à ce que le diamètre prenne la position AB, où il passe par le point S. Alors SL devenant égale à SA et SM à SB, on a AB$=$SA$+$SB$=2a$; cette constante est donc le plus grand des diamètres de l'ellipse, que l'on connaît sous le nom de *grand axe* (*).

(*) Cela s'aperçoit aussi très-facilement en considérant que, dans le trapèze, aABb, on a (1.°) A$a$$=AS, Bb$$=$BS; d'où il suit que

$$2a=2Cc=Aa+Bb=AS+BS=AB\ .$$

J. D. G.

Il est aisé de voir que SA est le plus petit et SB le plus grand des rayons vecteurs. Quand une planète décrit une ellipse, les divers rayons vecteurs sont les distances entre la planète et le soleil, qui en occupe le foyer, aux divers points où elle se trouve successivement de son orbite. SA est donc alors sa plus petite et SB sa plus grande distance au soleil, $a=\frac{SA+SB}{2}=CA=CB$ est par conséquent sa *moyenne distance* à cet astre. On prouverait aisément, si cela était nécessaire, que cette moyenne distance a lieu aux deux extrémités du diamètre perpendiculaire à AB.

Si l'on prolonge le rayon vecteur MS au-delà de S, jusqu'à ce qu'il rencontre en H la tangente LH, parallèle à la tangente MT qui répond au point M, l'angle SHL sera égal, comme alterne interne, à l'angle SMT, que nous avons déjà vu être égal à l'angle SLH; d'où il suit que le triangle HSL est isocèle, et qu'ainsi on a $SH=SL$; puis donc qu'on a $SM+SL=2a$, on aura aussi $MH=SM+SH=2a$; la droite MH, déterminée, comme nous venons de le dire, est donc toujours égale à la constante $2a$.

Rien n'est plus facile maintenant que de trouver l'expression de la force centrale dans l'ellipse. On sait qu'il faut pour cela concevoir deux rayons vecteurs SM et SN, extrêmement rapprochés l'un de l'autre, et calculer la longueur du prolongement NR du second, terminé par la tangente MT à l'extrémité du premier.

Or, en projetant le secteur MSN en *msn* sur le plan de la base du cylindre, on a, pour la projection de NR, la partie *nr* de la droite *sur* comprise entre la circonférence de la base du cylindre et la tangente *mr*. Or, MH et NR peuvent être considérées ici comme des droites parallèles dont le rapport doit conséquemment (3.°) être le même que celui de leurs projections; ce qui donne

$$NR=MH.\frac{nr}{mh}=2a.\frac{nr}{mh}\ .$$

Si du point n on abaisse sur mr la perpendiculaire nv, le triangle nvr sera semblable au triangle mlh comme ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux de ce dernier; ainsi

$$lm : mh :: nv : nr = \frac{mh.nv}{lm},$$

ce qui changera l'expression de NR en celle-ci

$$\mathrm{NR}=\mathrm{MH} : \frac{nv}{lm} = 2a.\frac{nv}{lm}.$$

Soient T le temps qu'emploie la planète à décrire son orbite, t le temps qu'elle emploie à aller de M en N, E la surface de l'ellipse et B celle de la base du cylindre; on aura

$$T : t :: E : \mathrm{MSN} :: B : msn; \qquad (4.°)$$

or $B=\frac{1}{4}\varpi.\overline{lm}^2$; et, en abaissant du point s la perpendiculaire st sur la tangente mt, on a, en négligeant les infiniment petits du second ordre, vis-à-vis de ceux du premier,

$$smn=\tfrac{1}{2}st.mv=\tfrac{1}{2}st.\sqrt{lm.nv};$$

de sorte que notre proportion devient

$$T : t :: \tfrac{1}{2}\varpi.\overline{lm}^2 : st.\sqrt{lm.nv};$$

ou bien, en quarrant et simplifiant,

$$T^2 : t^2 :: \tfrac{1}{4}\varpi^2.\overline{lm}^3 : \overline{st}^2.nv;$$

ce qui donne

$$\frac{nv}{lm}=\tfrac{1}{4}\varpi^2.\frac{t^2}{T^2}.\frac{\overline{lm}^2}{\overline{st}^2};$$

ce qui change la valeur de NR en celle-ci

$$NR = \frac{1}{2}\varpi^2 a . \frac{t^2}{T^2} . \left(\frac{lm}{st}\right)^2 ;$$

mais à cause des triangles rectangles semblables *stm* et *mlh*

$$lm : st :: mh : sm :: MH : SM ,$$

de sorte que, dans l'expression de NR, on peut remplacer $\frac{lm}{st}$ par $\frac{MH}{SM}$ ou par $\frac{2a}{SM}$, au moyen de quoi elle deviendra

$$NR = 2\varpi^2 a^3 . \frac{t^2}{T^2} . \frac{1}{SM^2} ;$$

or, en nommant φ la force centrale, on a

$$NR = \frac{\varphi t^2}{2} , \qquad \text{d'où} \qquad \varphi = \frac{2NR}{t^2} ;$$

donc

$$\varphi = \frac{4\varpi^2 a^3}{T^2} . \frac{1}{SM^2} ;$$

la force φ est donc en raison inverse du quarré de la distance, dans une même ellipse, où a^3 et T^2 sont deux constantes.

A la distance 1, la force accélératrice est simplement

$$\Phi = 4\varpi \frac{a^3}{T^2} ;$$

qui sera la même pour deux planètes différentes, si l'on a

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2} ;$$

c'est-à-dire, qu'elle est la même pour toutes les planètes, en vertu de la troisième loi de Képler.

OPTIQUE.

Recherches sur les caustiques planes ;

Par M. C. LAMBERT, aspirant ingénieur des mines, ancien élève de l'école polytechnique.

L'ENVELOPPE commune de toutes les normales à une courbe plane est ce qu'on appelle la *développée* de cette courbe ; le point de contact de cette enveloppe avec chaque normale est dit le *centre de courbure* du point correspondant de la courbe proposée ; et la droite qui joint ces deux points est nommée le *rayon de courbure* de la courbe, en ce même point.

Mais si, par les différens points d'une courbe proposée, on mène des droites faisant avec ses normales, en ces mêmes points, des angles constans ou variables suivant une loi mathématique donnée quelconque, ces droites auront aussi, comme les normales, une enveloppe commune que, par analogie, on pourra appeler une *développée oblique* de la courbe proposée ; le point de contact de cette nouvelle enveloppe, avec chacune des droites qui auront concouru à sa détermination, pourra être dit le *centre de courbure oblique* du point correspondant de la courbe primitive ; et enfin la droite qui joindra ces deux points pourra être nommée le *rayon de courbure oblique* de cette courbe, en ce même point.

Si, par exemple, la courbe proposée est un cercle, et que l'angle des rayons de courbure obliques avec les rayons de courbure orthogonaux soit constant, la développée oblique sera évidemment un autre cercle concentrique avec le premier. Si, dans le même cas d'un angle constant, on veut que la développée oblique se réduise à un point, il faudra que la courbe proposée soit une spirale logarithmique. Si cette courbe proposée se réduit à une droite, et que les angles croissent comme les distances des normales à un point fixe de cette droite, la développée oblique sera la développée orthogonale d'une cycloïde, et conséquemment une autre cycloïde, et ainsi du reste.

La théorie générale des développées obliques, qui paraît n'avoir pas encore fixé l'attention des géomètres, et sur laquelle nous pourrons revenir dans une autre occasion, conduit, avec une merveilleuse simplicité, à une multitude de résultats curieux qu'on ne déduirait souvent que d'une manière très-pénible des procédés ordinaires d'investigation. Nous nous bornerons, pour le présent, à établir les principales formules qui lient les développées obliques aux développées orthogonales et à en faire une application spéciale à l'optique.

Soient M et M′ (fig. 2) deux des points d'un arc de courbe donné, C et C′ les deux points correspondans de sa développée orthogonale, centres de courbure respectifs de la courbe en M et M′, m et m' les centres de courbure correspondans de l'une de ses développées obliques, et O l'intersection de C′M′ et de mM. Du point m' comme centre, et avec sa distance au point M pour rayon, soit décrit un arc de cercle, se terminant en A, sur la direction de m'M′.

Désignons par S l'arc de la courbe MM′, compté de M vers M′, par s l'arc de la courbe mm', compté de m vers m', par R le rayon de courbure orthogonal CM, par r le rayon de courbure oblique mM, par θ l'angle CMm que forment entre eux ces deux rayons, par Σ le quadrilatère mixtiligne MCC′M′, et par σ le quadrilatère mixtiligne Mmm'M′.

Si nous supposons le point M′ infiniment voisin du point M, les points C′ et m' seront aussi infiniment voisins des points C et m, les arcs CC′ et mm' pourront être considérés comme les prolongemens rectilignes respectifs de MC et Mm; les espaces MCC'M' et Mmm'M' pourront aussi être considérés comme de simples secteurs, ou encore comme des triangles; et MA comme une simple perpendiculaire, soit à mM soit à m'M'.

Dans la même hypothèse on aura

$$MM'=dS\ ,\quad CC'=dR\ ,\quad mm'=ds$$

$$M'C'=R+dR\ ,\quad M'm'=r+ds\ ,\quad \text{Ang.}C'M'm'=\theta+d\theta\ .$$

On aura ensuite

$$MA=MM'\text{Cos.}\theta=dS\text{Cos.}\theta\ ,\quad M'A=MM'\text{Sin.}\theta=dS\text{Sin.}\theta\ ;$$

mais on a

$$mM+mM'=m'M=m'A=m'M'+M'A\ ;$$

il viendra donc, en substituant,

$$r+ds=r+dr+dS\text{Sin.}\theta\ .$$

Ou en réduisant

$$ds=dr+\text{Sin.}\theta\ . \qquad (1)$$

On a aussi

$$\mathit{Ang}.MC'O=\frac{MM'}{C'M}=\frac{dS}{R+dR}\ ,\quad \mathit{Ang}.M'm'O=\frac{MA}{m'M}=\frac{dS\cdot\text{Cos.}\theta}{r+ds}\ ;$$

mais, à cause que les triangles MOC' et M'Om' ont un angle égal en O, on doit avoir

$$\mathit{Ang}.OMC'+\mathit{Ang}.OC'M=\mathit{Ang}.OM'm'+\mathit{Ang}.Om'M'\ ,$$

c'est-à-dire, en substituant,

$$\theta+\frac{dS}{R+dR}=(\theta+d\theta)+\frac{dS\text{Cos.}\theta}{r+ds}\ ;$$

ou, en réduisant,

$$\frac{dS}{R+dR}=d\theta+\frac{dS.\text{Cos}.\theta}{r+ds} ;$$

ou bien encore

$$(r+ds)dS=(R+dR)(r+ds)d\theta+(R+dR)dS\,\text{Cos}.\theta ;$$

ou, en développant, supprimant les termes de plus d'une dimension en différentielles et divisant par dS

$$\frac{d\theta}{dS}=\frac{1}{R}-\frac{\text{Cos}.\theta}{r} . \qquad (2)$$

On a enfin

$$Sect.\text{MC}'\text{M}'=\tfrac{1}{2}\text{MM}'.\text{C}'\text{M} , \qquad Sect.\text{M}m'\text{M}'=\tfrac{1}{2}m'\text{M}'.\text{MA} ;$$

c'est-à-dire,

$$d\Sigma=\tfrac{1}{2}(R+dR)dS , \qquad d\sigma=\tfrac{1}{2}(r+dr)dS.\text{Cos}.\theta ;$$

ou, en supprimant les termes de deux dimensions en différentielles;

$$d\Sigma=\tfrac{1}{2}RdS , \quad (3) \qquad d\sigma=\tfrac{1}{2}rdS\text{Cos}.\theta . \quad (4)$$

Ces quatre formules, qu'il serait assez difficile d'obtenir par les procédés ordinaires de la géométrie analytique, répondent à la figure telle que nous l'avons supposé construite ; mais il sera aisé, dans tous les cas, d'y faire les changemens de signes qu'exigeront les circonstances particulières dans lesquelles on pourra se trouver.

Pour deux développées obliques d'une même courbe donnée, on obtiendrait évidemment deux systèmes de pareilles équations ; de sorte qu'en affectant d'un accent les symboles relatifs à la seconde développée oblique, nous aurons, entr'autres formules, les quatre équations

$$\mathrm{d}s=\mathrm{d}r+\mathrm{d}S\,\mathrm{Sin.}\theta\ ,\quad (1)\qquad \mathrm{d}s'=\mathrm{d}r'+\mathrm{d}S\,\mathrm{Sin.}\theta'\ ,\quad (1')$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}S}=\frac{1}{R}-\frac{\mathrm{Cos.}\theta}{r}\ ,\quad (2)\qquad \frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}S}=\frac{1}{R}-\frac{\mathrm{Cos.}\theta'}{r'}\ .\quad (2')$$

Présentement nous pouvons supposer que les rayons de courbure de l'une des deux séries sont des rayons incidens, tous tangens à une des développées obliques ; que la courbe proposée est une courbe réfléchissante ou séparatrice de deux milieux homogènes de densité différente, et qu'enfin les rayons de courbure obliques de l'autre série sont les rayons réfléchis ou réfractés à la rencontre de cette courbe, tous tangens à l'autre développée oblique qui sera ainsi la caustique par réflexion ou par réfraction, formée par ces mêmes rayons. Pour cela, il nous faudra, suivant les lois de l'optique, joindre aux quatre équations ci-dessus, l'équation

$$\frac{\mathrm{Sin.}\theta}{\mathrm{Sin.}\theta'}=\frac{\lambda}{\lambda'}\ ,\qquad (5)$$

λ et λ' étant deux nombres constans qui, dans le cas particuliet de la réflexion, ne différeront l'un de l'autre que par le signe.

En différentiant l'équation (5), il vient

$$\mathrm{d}\theta\,\mathrm{Sin.}\theta'\mathrm{Cos.}\theta-\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{Sin.}\theta\,\mathrm{Cos.}\theta'=0\ ,$$

ou bien

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}S}\,\mathrm{Sin.}\theta'\mathrm{Cos.}\theta-\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}S}\,\mathrm{Sin.}\theta\,\mathrm{Cos.}\theta'=0\ ;$$

mettant dans cette dernière équation pour $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}S}$ et $\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}S}$ leurs valeurs données par les équations (2) et (2'), elle deviendra

$$\frac{\mathrm{Sin.}\theta\,\mathrm{Cos.}^2\theta'}{r'}-\frac{\mathrm{Sin.}\theta'\,\mathrm{Cos.}^2\theta}{r}=\frac{\mathrm{Sin.}(\theta-\theta')}{R}\ .\qquad (6)$$

Au moyen de cette dernière formule, on construira facilement par points la caustique par réfraction qui répondra à une courbe donnée, séparatrice de deux milieux, pour laquelle on saura construire le rayon de courbure en tous ses points, et pour des rayons incidens tous tangens à une même courbe donnée. Menant, en effet, à cette dernière courbe une tangente prolongée jusqu'à son point de rencontre avec la courbe séparatrice, à laquelle on menera une normale par ce point; on connaîtra ainsi, à la fois, la longueur r du rayon incident et l'angle d'incidence θ, duquel on conclura θ', au moyen de l'équation (5); on pourra donc tracer la direction du rayon réfracté; l'équation (6) en fera ensuite facilement connaître la longueur r', et déterminera ainsi un des points de la caustique cherchée.

Si, au lieu de donner la courbe que touchent tous les rayons incidens, on donnait une courbe à laquelle ils fussent tous normaux, ils seraient par là même tous tangens à la développée orthogonale de cette courbe, ce qui ramenerait la question au cas précédent. Dans le cas particulier où ils devraient être tous normaux à un même cercle, ils devraient tous émaner de son centre, de sorte que la première développée oblique se réduirait au point rayonnant et que r serait simplement le symbole général des distances de ce point aux divers points de la courbe séparatrice.

L'équation (6) étant mise sous cette forme

$$\frac{\text{Sin.}\theta\text{Cos.}^2\theta'}{r'}-\frac{\text{Sin.}\theta'\text{Cos.}^2\theta}{r}=\frac{\text{Sin.}\theta\text{Cos.}\theta'-\text{Sin.}\theta'\text{Cos.}\theta}{R},$$

en y mettant pour $\text{Sin.}\theta'$ sa valeur tirée de l'équation (5), elle deviendra divisible par $\text{Sin.}\theta$ et se réduira à

$$\frac{\lambda\text{Cos.}^2\theta'}{r'}-\frac{\lambda'\text{Cos.}^2\theta}{r}=\frac{\lambda\text{Cos.}\theta'-\lambda'\text{Cos.}\theta}{R}; \qquad (7)$$

si nous supposons présentement que l'angle d'incidence est nul, l'équation (5) prouve que l'angle de réfraction le sera aussi ; on aura donc $\text{Cos.}\theta=\text{Cos.}\theta'=1$; ce qui réduira l'équation (7) à

$$\frac{\lambda}{r'}-\frac{\lambda'}{r}=\frac{\lambda-\lambda'}{R}\,. \qquad (8)$$

Ainsi, lorsque les rayons incidens seront tous émanés d'un même point, cette équation donnera fort simplement le point de la caustique par réfraction, qui est situé sur le rayon normal, c'est ce point qu'on appelle le *foyer*, lorsque la courbe séparatrice est un cercle.

Si, dans le cas du cercle, on suppose le point rayonnant infiniment éloigné, l'équation (8) se réduira à

$$\frac{\lambda}{r'}=\frac{\lambda-\lambda'}{R}\,, \qquad \text{d'où} \qquad r'=\frac{\lambda}{\lambda-\lambda'}R\,, \qquad (9)$$

et fera conséquemment connaître la position du foyer des rayons parallèles, ou de ce qu'on appelle le *foyer principal.*

Si, dans cette même équation (8), on suppose que la ligne séparatrice se réduit à une droite ou que R est infini, elle deviendra simplement

$$\frac{\lambda}{r'}-\frac{\lambda'}{r}=0\,, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{r}{r'}=\frac{\lambda'}{\lambda}\,; \qquad (10)$$

ainsi, dans ce cas, les distances du point rayonnant et du foyer à la droite séparatrice sont dans un rapport inverse de celui du sinus d'incidence au sinus de réfraction. C'est aussi ce qu'on a vu (*Annales*, tom. XI, pag. 229).

Si, dans le cas général, les rayons, après une première réfraction, devaient se réfracter de nouveau, une ou plusieurs fois, à la rencontre d'une ou de plusieurs autres courbes séparatrices ; comme, avant chaque réfraction nouvelle, on connaîtrait, par ce qui a été dit ci-dessus, la caustique à laquelle les rayons incidens seraient tangens, on parviendrait, de proche en proche, par les moyens que nous avons indiqués, à construire par points la dernière caustique ; de sorte qu'on peut regarder les équations (5) et (6) comme propres à faire connaître par points la caustique résultant de tant de réfractions successives qu'on voudra.

Pour nous borner à un cas des plus simples, et qui offre pourtant d'utiles applications, supposons deux surfaces séparatrices seulement, en désignant par r'' la distance du nouveau point d'incidence au point où le second rayon incident touche la seconde développée oblique, par R' le rayon de courbure de la nouvelle courbe séparatrice au point d'incidence, par r''' la longueur du rayon doublement réfracté, comptée du point de seconde incidence jusqu'à son point de contact avec la troisième développée oblique, et enfin par θ'' et θ''' les angles de seconde incidence et de seconde réfraction, dont nous supposerons les sinus proportionnels à λ' et λ'', nous aurons (5) et (7) les quatre équations

$$\frac{\text{Sin.}\theta}{\text{Sin.}\theta'}=\frac{\lambda}{\lambda'}\,, \qquad \frac{\text{Sin.}\theta''}{\text{Sin.}\theta'''}=\frac{\lambda''}{\lambda'''}\;;$$

$$\frac{\lambda\text{Cos.}^2\theta'}{r'}-\frac{\lambda'\text{Cos.}^2\theta}{r}=\frac{\lambda\text{Cos.}\theta'-\lambda'\text{Cos.}\theta}{R}\,,$$

$$\frac{\lambda''\text{Cos.}^2\theta'''}{r'''}-\frac{\lambda'''\text{Cos.}^2\theta''}{r''}=\frac{\lambda''\text{Cos.}\theta'''-\lambda'''\text{Cos.}\theta''}{R'}\;;$$

on tirera des deux dernières

$$r'=\frac{\lambda\text{Cos.}^2\theta'}{\dfrac{\lambda'\text{Cos.}^2\theta}{r}+\dfrac{\lambda\text{Cos}\,\theta'-\lambda'\text{Cos.}\theta}{R}}\;;$$

$$r''=\frac{\lambda'''\text{Cos.}^2\theta''}{\dfrac{\lambda''\text{Cos.}^2\theta'''}{r'''}-\dfrac{\lambda''\text{Cos.}\theta'''-\lambda'''\text{Cos.}\theta''}{R'}}\;;$$

mais ici r' et r'' ont une même direction qui contient les deux points d'incidence ; de sorte que la distance entre ces deux derniers points devra être égale à leur somme ou à leur différence ; en désignant donc par e cette distance, on aura

$$e = \frac{\lambda''' \text{Cos.}^2\theta''}{\frac{\lambda''\text{Cos.}^2\theta'''}{r'''} - \frac{\lambda''\text{Cos.}\theta''' - \lambda''\text{Cos.}\theta''}{R'}} \pm \frac{\lambda \text{Cos.}^2\theta'}{\frac{\lambda'\text{Cos.}^2\theta}{r} + \frac{\lambda\text{Cos.}\theta' - \lambda'\text{Cos.}\theta}{R}} ; \quad (11)$$

formule qui, en y considérant r''' comme inconnue, servira à trouver immédiatement par points la caustique résultant de deux réfractions consécutives, sans qu'on soit obligé de tracer la caustique intermédiaire.

Si, en particulier, les deux surfaces séparatrices sont deux faces d'un même corps transparent, il faudra joindre à l'équation (11) la double équation

$$\frac{\text{Sin.}\theta}{\text{Sin.}\theta'} = \frac{\text{Sin.}\theta'''}{\text{Sin.}\theta''} = \frac{\lambda}{\lambda'} ; \qquad (12)$$

on peut donc considérer le système de ces deux équations comme renfermant toute la théorie des lentilles de toute nature dont on pourra ainsi déterminer les foyers sans négliger leur épaisseur, comme on le fait communément.

Des équations (1) et (1') on tire, en transposant et divisant,

$$\frac{ds - dr}{ds' - dr'} = \frac{\text{Sin}\,\theta}{\text{Sin.}\theta'} = \frac{\lambda}{\lambda'} ,$$

d'où

$$\frac{ds - dr}{\lambda} = \frac{ds' - dr'}{\lambda'} ;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\frac{s - r}{\lambda} - \frac{s' - r'}{\lambda'} = C ,$$

C étant la constante arbitraire. Si l'on fait commencer ensemble les arcs s et s' et qu'on désigne par r_0 et r'_0 les rayons incidens et réfractés qui répondent à leur origine, on aura

$$-\frac{r_0}{\lambda}+\frac{r'_0}{\lambda'}=C\ ;$$

d'où, en retranchant et transposant,

$$\frac{s+r_0-r}{\lambda}=\frac{s'+r'_0-r'}{\lambda'}\ . \tag{13}$$

Si l'on demande quelle doit être la courbe séparatrice pour que les rayons émanés d'un certain point concourent, après leur réfraction, en un autre point, il faudra poser $s=0$ et $s'=0$, au moyen de quoi l'équation (13) deviendra

$$\frac{r}{\lambda}-\frac{r'}{\lambda'}=\frac{r_0}{\lambda}-\frac{r'_0}{\lambda'}=\text{Const.} \tag{14}$$

Telle est donc la relation entre les distances r et r' des différens points de la courbe demandée aux deux points fixes donnés ; d'où il est aisé de conclure que l'équation de cette courbe, en coordonnées rectangulaires, s'éleverait au quatrième degré. Ces sortes de courbes ont été appelées *lignes aplanétiques* par M. Quetelet qui en a fait le sujet de diverses recherches fort curieuses, soit dans sa *Correspondance*, soit dans des mémoires spéciaux.

Tout ce qui vient d'être dit s'applique immédiatement à la réflexion, en supposant simplement $\theta'=-\theta$, d'où $\text{Sin.}\theta'=-\text{Sin.}\theta$, $\text{Cos}\,\theta'=\text{Cos.}\theta$ et $\lambda'=-\lambda$; ainsi, d'abord, si des rayons incidens sont tous tangens à une même courbe, en représentant par r la longueur du rayon incident, comptés depuis cette courbe jusqu'au point d'incidence, par r' la longueur du rayon réfléchi, comptée depuis le point d'incidence jusqu'à la caustique, et enfin par R le rayon de courbure de la courbe réfléchissante, au point d'incidence, on aura (6)

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\frac{2}{R\,\mathrm{Cos}.\theta}\ ; \qquad (15)$$

formule commode pour tracer par points la caustique par réflexion lorsqu'on donne la courbe réfléchissante et celle à laquelle les rayons incidens sont tangens. On ramenerait au surplus à ce problème celui où l'on donnerait une courbe à laquelle les rayons incidens seraient normaux.

Si l'on considère uniquement le rayon incident normal à la courbe réfléchissante, on aura (8)

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\frac{2}{R}\ , \qquad (16)$$

ce qui détermine le foyer dans les miroirs circulaires. S'il s'agit du foyer principal ou du foyer des rayons parallèles, on aura (9)

$$r'=\frac{R}{2}\ . \qquad (17)$$

Le point rayonnant étant quelconque, si la ligne réfléchissante est droite, on aura

$$r'=-r\ ; \qquad (18)$$

enfin on parviendrait, au moyen de l'équation (15), à construire directement la caustique qui naîtrait d'un nombre quelconque de réflexions consécutives, sans être obligé de construire les caustiques intermédiaires. Quant à la ligne aplanétique par réflexion, elle sera donnée (14) par l'équation

$$r+r'=\mathrm{Const.}\ ;$$

c'est-à-dire que cette ligne sera une ellipse ou une hyperbole suivant que r et r' seront de mêmes signes ou de signes contraires, et conséquemment une parabole lorsqu'un des deux points fixes sera infiniment distant.

Les formules (6) et (15), en y supposant R constant, et en admettant que $s=0$, rentrent exactement dans celles qui ont été données par Petit, dans la *Correspondance* de M. Hachette (tom. II, pag. 353), pour le cas d'un cercle réfléchissant ou séparateur, et de rayons incidens tous émanés d'un même point; mais on voit en même temps qu'ici ces formules ont un sens beaucoup plus étendu. Il est surprenant, au surplus, que Petit n'ait pas songé à leur donner une extension aussi facile; il aurait pu considérer, en effet, que, quand des rayons incidens, tangens à une courbe quelconque, se réfléchissent ou se réfractent, à la rencontre d'une autre courbe également quelconque, l'un d'eux peut être envisagé comme émané de son point de contact avec la première de ces deux courbes, et son point d'incidence comme un des points du cercle osculateur de la seconde courbe; de sorte que les formules construites pour le cercle et pour des rayons émanés d'un même point doivent subsister encore, en remplaçant le rayon du cercle par le rayon de courbure, au point d'incidence, de la courbe dont il est le cercle osculateur, en en remplaçant la distance du point d'incidence au point rayonnant par la distance de ce point d'incidence au point de contact du rayon qui y parvient avec la courbe enveloppe de tous les rayons incidens. C'est exactement de la même manière qu'en mécanique de la théorie du mouvement dans le cercle, on passe à la théorie du mouvement le long d'une courbe quelconque (*).

(*) Les géomètres qui, les premiers, se sont occupés de la théorie des caustiques, avaient cru faussement pouvoir substituer à la courbe réfléchissante ou séparatrice sa tangente au point d'incidence; l'identité des formules de M. Lambert avec celles de Petit prouve que, du moins, il est permis de substituer à cette courbe son cercle osculateur au point d'incidence.

J. D. G.

ANALYSE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur l'élimination dans les équations du premier degré;

Par M. GERGONNE.

JE reçois assez fréquemment, et depuis fort long-temps, sur l'élimination au premier degré, des mémoires dans lesquels on reproche à tel ou à tel autre auteur d'élémens de n'avoir pas discuté d'une manière assez complète les valeurs générales des inconnues auxquelles conduit cette élimination, et où on tente, d'une manière plus ou moins heureuse, de suppléer à ce qu'ils ont omis.

Si jusqu'ici je n'ai pas donné à ces mémoires la publicité que leurs auteurs réclamaient pour eux, c'est parce qu'il m'a toujours semblé que la discussion qu'ils avaient pour but de compléter n'avait rien de bien difficile; qu'elle n'avait pas au fond une très-grande utilité pratique; que bornée, comme elle, par les auteurs de ces mémoires, au cas de trois équations entre trois inconnues, elle est ainsi beaucoup trop circonscrite; qu'on ne saurait l'étendre au-delà sans s'engager dans des détails et des distinctions presque interminables et sans se mettre dans la nécessité d'écrire des formules d'une étendue démesurée; et enfin, parce que, eût-on poussé la discussion jusqu'au cas de dix équations entre dix inconnues, ce que personne, je pense, n'aurait le courage de tenter, ce serait encore exactement comme si l'on n'avait rien fait, puisque le nombre des cas omis serait toujours infiniment plus grand que le nombre de ceux dont on se serait occupé.

Il y a déjà long-temps que j'ai songé à remplacer, dans mes cours, ces fastidieuses et peu utiles discussions, par quelque chose à la fois de plus général, de plus direct et de plus simple. Je n'en ai rien publié jusqu'ici, parce qu'il m'a semblé que cela pouvait être très-aisément imaginé par tout le monde; et si je le fais présentement, c'est uniquement dans la vue de justifier l'espèce de délaissement que je me suis permis à l'égard des nombreux mémoires qu'on m'a fait l'honneur de m'adresser sur ce sujet.

Au surplus, comme il ne s'agit ici que de choses fort simples et fort élémentaires, afin de ne leur pas donner plus d'étendue qu'elles n'en méritent, je me bornerai à de simples assertions, à des espèces d'aphorismes dont le lecteur, au courant de ces matières, apercevra la raison à la simple vue.

1. Lorsque des grandeurs inconnues sont liées entre elles par des équations du premier degré, ou bien le nombre de ces équations est inférieur au nombre des inconnues, ou bien il lui est égal, ou bien enfin il est plus grand. Dans le premier cas, le problème est tout au moins indéterminé et il peut être impossible; dans les deux autres, il peut être indistinctement déterminé, indéterminé ou impossible.

2. Lorsqu'un problème qui donne au moins autant d'équations que d'inconnues est *indéterminé*, cela vient nécessairement de ce qu'une ou plusieurs de ses équations sont *équivalentes* à une ou plusieurs autres; lorsqu'un problème est *impossible*, c'est qu'une ou plusieurs de ces équations sont *incompatibles* avec une ou plusieurs des autres.

3. L'indétermination ou l'impossibilité d'un problème se manifeste, dans le calcul même des valeurs des inconnues, en ce que l'on est conduit à des équations qui ne renferment plus aucune inconnues et qui sont identiques si le problème est indéterminé, ou absurdes, s'il est impossible. Ces circonstances se manifestent aussi en ce que les valeurs des inconnues, ou du moins de quelques-

unes d'entre elles, se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$ si le problème est indéterminé, ou sous la forme $\frac{a}{0}$ si le problème est impossible. Dans ce dernier cas on doit abandonner le problème; dans le premier, il s'agit de reconnaître quelles sont les équations essentiellement distinctes.

4. Mais, dans l'un et dans l'autre cas, on aura fait des calculs inutiles si l'on a commencé par chercher les valeurs des inconnues; et il est clair qu'on aurait pu se les épargner, si l'on avait su résoudre cette question : *Des équations du premier degré en nombre quelconque, entre des inconnues, étant données, découvrir si, parmi ces équations, il s'en trouve d'équivalentes ou de contradictoires ?* C'est donc là le problème qui doit principalement nous occuper.

5. Soient d'abord $A, B, C, \ldots\ldots G, H$ des inconnues en nombre quelconque, et soient les deux équations

$$\left.\begin{array}{l} aA+bB+cC+\ldots\ldots+gG+hH+k=0\ , \\ a'A+b'B+c'C+\ldots\ldots+g'G+h'H+k'=0\ ; \end{array}\right\} \quad (1)$$

soient posées

$$ma+a'=0\ ,\quad mb+b'=0\ ,\quad mc+c'=0\ ,\quad \ldots\ldots\quad mg+g'=0\ ,\quad mh+h'=0\ ;\ (2)$$

si la valeur de m, tirée de l'une quelconque des équations (2), satisfait à toutes les autres, sans satisfaire à l'équation $mk+k'=0$, on en conclura que les deux équations (1) sont incompatibles; si, au contraire, cette valeur de m satisfait à la dernière équation, il s'ensuivra que les équations (1) sont équivalentes et ne doivent compter que pour une seule; mais si la valeur de m, tirée de l'une quelconque des équations (2), ne satisfaisait pas à toutes les autres, les deux équations (1) ne seraient ni incompatibles, ni équivalentes.

6. Qu'on ait présentement tant d'équations qu'on voudra, de la

forme des équations (1), on les soumettra, deux à deux, de toutes les manières possibles, à l'épreuve qui vient d'être expliquée. Si, au moyen de cette épreuve, on reconnaît que deux d'entre elles, au moins, sont incompatibles, on abandonnera le problème. Si, au contraire, on ne trouve point de couple d'équations incompatibles, toutes les fois qu'on rencontrera deux équations équivalentes, on supprimera l'une d'elles, et si les équations restantes sont au nombre de plus de deux, on les soumettra à l'épreuve nouvelle qui va être expliquée.

Soient les trois équations

$$\left.\begin{array}{l} aA+bB+cC+\dots\dots\dots+gG+hH+k=0\ , \\ a'A+b'B+c'C+\dots\dots\dots+g'G+h'H+k'=0\ , \\ a''A+b''B+c''C+\dots\dots\dots+g''G+h''H+k''=0\ , \end{array}\right\} \quad (3)$$

telles que deux quelconques d'entre elles ne soient ni contradictoires ni équivalentes. Soient posées les équations

$$\left.\begin{array}{l} ma+m'a'+a''=0\ , \\ mb+m'b'+b''=0\ , \\ mc+m'c'+c''=0\ , \\ \dots\dots\dots\dots \\ mg+m'g'+g''=0\ , \\ mh+m'h'+h''=0\ . \end{array}\right\} \quad (4)$$

Parmi ces dernières, il s'en trouvera au moins deux desquelles on pourra tirer les valeurs de m et de m'. Si ces valeurs satisfont à toutes les autres, sans satisfaire à l'équation

$$mk+m'k'=k''=0\ , \qquad (5)$$

on en conclura que chacune des équations (3) est incompatible avec les deux autres. Si, au contraire, ces valeurs de m et m' satisfont à l'équation (5), il s'ensuivra que chacune des équations (3) est comportée par les deux autres, et qu'elles n'équivalent conséquemment qu'à deux équations distinctes. Mais si les valeurs de m et de m', tirées de deux quelconques des équations (4), ne satisfaisaient pas à la totalité des autres, les trois équations (3) ne seraient ni incompatibles ni équivalentes à deux seulement.

7. Qu'on ait présentement tant d'équations qu'on voudra de la forme des équations (3), desquelles on se soit préalablement assuré (6) que, prises deux à deux, elles ne sont ni contradictoires ni équivalentes ; on les soumettra, trois à trois, de toutes les manières possibles, à l'épreuve qui vient d'être expliquée ; si, au moyen de cette épreuve, on reconnaît que trois d'entre elles, au moins, sont incompatibles, on abandonnera le problème. Si, au contraire, on ne rencontre aucun système de trois équations incompatibles, toutes les fois qu'on rencontrera trois équations telles que chacune d'elles sera comportée par les deux autres, on supprimera l'une d'elles, et, si les équations restantes sont au nombre de plus de trois, on les soumettra à l'épreuve nouvelle qui va être expliquée.

8. Soient les quatre équations

$$\left.\begin{array}{l} aA+bB+cC+\dots\dots\dots\dots+gG+hH+k=0\ , \\ a'A+b'B+c'C+\dots\dots\dots+g'G+h'H+k'=0\ , \\ a''A+b''B+c''C+\dots\dots\dots+g''G+h''H+k''=0\ , \\ a'''A+b'''B+c'''C+\dots\dots+g'''G+h'''H+k'''=0\ , \end{array}\right\} \quad (6)$$

que nous supposons telles que, deux à deux ou trois à trois, elles ne soient ni contradictoires ni rentrantes. Soient posées les équations

$$\left.\begin{array}{l}
ma+m'a'+m''a''+a'''=0\ , \\
mb+m'b'+m''b''+b'''=0\ , \\
mc+m'c'+m''c''+c'''=0\ , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\ , \\
mg+m'g'+m''g''+g'''=0\ , \\
mh+m'h'+m''h''+h'''=0\ .
\end{array}\right\}\quad(7)$$

Parmi ces dernières il s'en trouvera au moins trois desquelles on pourra tirer les valeurs de m, m' et m''. Si ces valeurs satisfont à toutes les autres, sans satisfaire à l'équation

$$mk+m'k'+m''k''+k'''=0\ , \qquad (8)$$

on en conclura que chacune des équations (6) est incompatible avec les trois autres. Si, au contraire, ces valeurs de m, m' et m'' satisfont à l'équation (8), il s'ensuivra que chacune des équations (6) est comportée par les trois autres, et qu'ainsi elles n'équivalent qu'à trois équations distinctes. Mais si les valeurs de m, m' et m'', tirées de trois quelconques des équations (7), ne satisfont pas à la totalité des autres, les quatre équations (6) ne seront ni incompatibles, ni équivalentes à trois seulement.

9. Qu'on ait présentement tant d'équations qu'on voudra, de la forme des équations (6), desquelles on se soit préalablement assuré (6, 7) que, prises deux à deux ou trois à trois, elles ne sont ni contradictoires, ni équivalentes ; on les soumettra, quatre à quatre, de toutes les manières possibles, à l'épreuve qui vient d'être expliquée. Si, au moyen de cette épreuve, on reconnaît que quatre d'entre elles sont incompatibles, on abandonnera le problème.

Si, au contraire, on ne rencontre aucun système de quatre équations incompatibles, toutes les fois qu'on rencontrera quatre équations telles que chacune d'entre elles sera comportée par les trois autres, on supprimera l'une d'elles, et, si les équations restantes sont au nombre de plus de quatre, on aura une nouvelle épreuve à leur faire subir.

10. La marche de ces épreuves successives est assez évidente pour rendre tout développement ultérieur superflu. On voit qu'en y soumettant les équations proposées on saura positivement si le problème est impossible, et que, dans le cas contraire, on se trouvera avoir supprimé toutes les équations et les seules équations superflues; les équations ne se trouveront donc plus alors qu'en nombre tout au plus égal à celui des inconnues; et si, en effet, elles sont en tel nombre, on trouvera, pour ces inconnues, des valeurs qui ne seront ni infinies ni indéterminées. Si elles sont en moindre nombre, on ne réputera telles que des inconnues en nombre égal à celui des équations, et on en obtiendra, sans difficulté, leurs valeurs, en fonction des inconnues surabondantes.

Ceci paraît fort clair et fort simple; mais comme cela sort de la routine, de l'ornière, il est très-peu probable que les géomètres qui écriront à l'avenir des élémens d'algèbre y donnent la plus légère attention, comme on n'en a donné aucune à la manière rapide de parvenir aux valeurs générales des inconnues que nous avons indiquées à la pag. 281 de notre XII.me volume, pas plus qu'à la méthode plus générale, et en même temps plus briève, que nous avons donnée à la pag. 148 de notre IV.me volume, bien que l'idée fondamentale de cette dernière soit due à Laplace. Il semble vraiment que ce soit un parti pris de laisser les élémens stationnaires, tandis que les branches élevées de la science font chaque jour de si notables progrès.

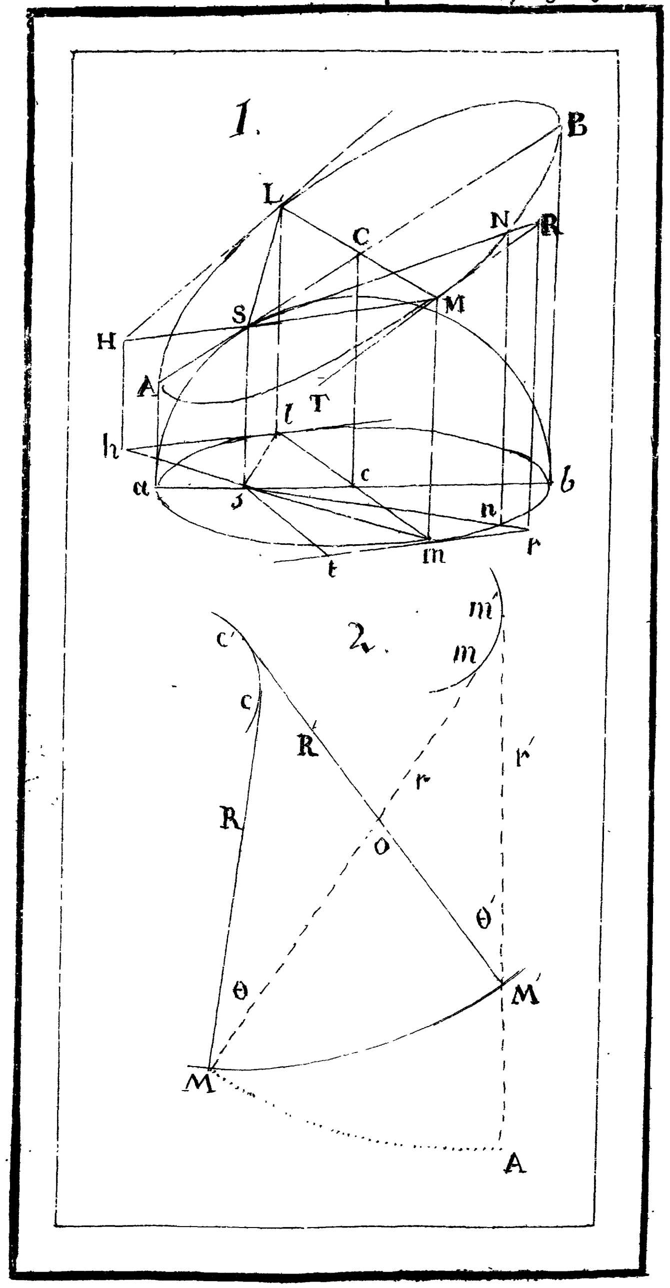
QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de trigonométrie sphérique.

I. QUEL est le point de l'intérieur d'un triangle sphérique qu'il faut joindre aux trois sommets par des arcs de grands cercles, pour diviser le triangle en trois autres équivalens entre eux ?

II. Quel est le point de l'intérieur d'un triangle sphérique duquel il faut abaisser des arcs de grands cercles perpendiculaires sur ses trois côtés, pour diviser le triangle en trois quadrilatères sphériques bi-rectangles équivalens entre eux (*) ?

(*) Les deux problèmes analogues, relatifs aux triangles rectilignes, proposés à la pag. 344 du VII.me volume des *Annales*, sont demeurés jusqu'ici sans solution.



J. D. G. fecit.

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Essai sur une méthode générale d'intégration ;

Par M. Le Barbier.

M. Wronski, dans quelqu'un de ses ouvrages, a traité de *rapsodiques* nos connaissances actuelles en mathématiques ; et, bien que cette qualification puisse paraître un peu sévère, il est peut-être vrai de dire qu'en ne la prenant que dans le sens le moins défavorable, le géomètre polonais pourrait bien n'avoir pas eu tout à fait tort. Nous possédons les matériaux d'un grand et bel édifice scientifique, ces matériaux sont admirables pour la plupart ; mais nous manquons d'une main suffisamment habile pour les réunir systématiquement et en former un ensemble tout à fait régulier.

Pour ne parler ici que du calcul intégral, combien n'existe-t-il pas de cas où nous en sommes réduits à attendre le succès de nos procédés d'intégration de certains artifices de calcul qui ne sauraient être réduits en préceptes, d'un hasard heureux, que le génie maîtrise quelquefois, mais seulement par une sorte d'instinct tout à fait incommunicable ; de telle sorte qu'on ne saurait jamais affirmer positivement de certaines formules qui, jusqu'ici, se sont montrées tout à fait réfractaires, qu'elles ne céderont pas un jour à des efforts mieux dirigés. Parmi celles d'ailleurs que nous savons intégrer, combien de méthodes diverses, que le calculateur ne doit jamais perdre un instant de vue, attendu que chacune d'elles est exclusivement applicable à certains cas spéciaux.

Dans un tel état de choses, il nous paraît qu'on ne saurait trop encourager les recherches qui ont pour but d'enrichir la haute analyse des procédés qui lui manquent encore, et qu'on doit accueillir avec quelque bienveillance toutes les tentatives dirigées vers ce but important. C'est à ce titre seulement que nous osons réclamer l'attention du lecteur en faveur de l'essai, bien imparfait encore, que nous allons mettre sous ses yeux.

Soit désignée par X une fonction de forme quelconque de la variable x et de tant de constantes qu'on voudra ; on pourra toujours, sans difficulté, en former les coefficiens différentiels successifs

$$\frac{dX}{dx}, \quad \frac{d^2X}{dx^2}, \quad \frac{d^3X}{dx^3}, \quad \frac{d^4X}{dx^4}, \ldots\ldots ;$$

et pour peu que ces nouvelles fonctions suivent une marche régulière, il sera aisé d'en déduire, par induction, la forme du coefficient différentiel général $\frac{d^mX}{dx^m}$. Si, du reste, on conservait quelque doute sur la véritable forme de ce coefficient, il serait facile de confirmer ou de détruire l'induction qui y aurait conduit ; il ne s'agirait en effet, pour cela, que de former, sur son modèle, la fonction $\frac{d^{m-1}X}{dx^{m-1}}$, et de vérifier ensuite si, par la différenciation, elle conduit exactement à la forme qu'on avait attribuée à $\frac{d^mX}{dx^m}$.

Supposons qu'il en soit ainsi ; alors $\frac{d^mX}{dx^m}$ sera une certaine fonction déterminée de x et de m ; de sorte qu'on aura

$$\frac{d^mX}{dx^m}=\varphi(x, m) ;$$

or, il est connu que

$$\frac{\mathrm{d}^{-m}X}{\mathrm{d}x^{-m}} \text{ est l'équivalent de } \int^m X\mathrm{d}x^m \ ;$$

donc, par le simple changement du signe de m, on conclura de l'équation précédente

$$\int^m X\mathrm{d}x^m = \varphi(x, -m) \ ;$$

et, en particulier, en posant $m=1$,

$$\int X\mathrm{d}x = \varphi(x, -1) \ ;$$

Nous ne craignons pas de trop hasarder en donnant ce peu de lignes comme l'équivalent des préceptes, si nombreux et si variés, qui ont été donnés jusqu'ici pour l'intégration des fonctions différentielles d'une seule variable (*).

Pour prendre d'abord un exemple des plus simples, supposons qu'il soit question d'assigner la valeur de l'intégrale $\int x^r\mathrm{d}x$. On aura ici

$$X = x^r, \quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = rx^{r-1}, \quad = \frac{\mathrm{d}^2X^r}{\mathrm{d}x^2} = r(r-1)x^{r-2}, \quad \frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3} = r(r-1)(r-2)x^{r-3} \ .$$

Il n'en faudra pas davantage pour être conduit à penser qu'on doit avoir, en général,

$$\frac{\mathrm{d}^mX}{\mathrm{d}x^m} = r(r-1)(r-2)\ldots\ldots(r-m+1)x^{r-m} \ ,$$

(*) Nous croyons avoir lu quelque part que le comte de Buquoy, chambellan de S. M. l'Empereur d'Autriche, a imaginé, il y a quelques années, un procédé d'intégration à peu près pareil à celui-ci. C'est encore au même procédé que revient la méthode donnée par M. Bouvier (*Annales*, tom. XV, pag. 41) pour l'intégration de l'équation linéaire du premier ordre.

J. D. G.

on s'en assurera d'ailleurs en remarquant que, si l'on pose

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}X}{\mathrm{d}x^{m-1}}=r(r-1)(r-2)\ldots\ldots(r-m+2)x^{r\ m+1}\,,$$

on retombera, par différentiation, sur l'expression supposée.

On peut écrire, plus brièvement, suivant la notation des facultés numériques,

$$\frac{\mathrm{d}^m x^r}{\mathrm{d}x^m}=(r-m+1)^{m|1}x^{r-m}\,;$$

d'où on conclura, en changeant le signe de m,

$$\int^m x^r\mathrm{d}x^m=(r+m-1)^{-m|1}x^{r+m}\,;$$

mais (*Annales*, tom. III, pag. 2)

$$(r+m-1)^{-m|1}=\frac{1}{(r+1)^{m|1}}\,;$$

donc, on aura finalement

$$\int^m x^r\mathrm{d}x^m=\frac{x^{r\ m}}{(r+1)^{m|1}}\,;$$

ou, en développant,

$$\int^m x^r\mathrm{d}x^m=\frac{x^{r+m}}{(r+1)(r+2)(r+3)\ldots\ldots(r+m)}$$

et, en changeant le signe de r,

$$\int^m\frac{\mathrm{d}x^m}{x^r}=\frac{(-1)^m}{(r-1)(r-2)(r-3)\ldots\ldots(r-m)x^{r-m}}$$

donc, en particulier, en posant $m=1$,

$$\int x^r\mathrm{d}x=\frac{x^{r+1}}{r+1}\ ,\quad \int\frac{\mathrm{d}x}{x^r}=-\frac{1}{(r-1)x^{r-1}}\ ;$$

comme on le savait déjà.

Pour second exemple, soit l'intégrale $\int a^x\mathrm{d}x$; nous aurons en prènant les logarithmes népériens

$$X=a^x\ ,\quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}=a^x\mathrm{Log}.a\ ,\quad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}=a^x\mathrm{Log}.^2a\ ,\quad \frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3}=a^x\mathrm{Log}.^3a\ ;$$

d'où il sera facile de conclure généralement

$$\frac{\mathrm{d}^mX}{\mathrm{d}x^m}=a^x.\mathrm{Log}^m x\ ;$$

puis en changeant le signe de m et remplaçant X par sa valeur

$$\int^m a^x\mathrm{d}x^m=\frac{a^x}{\mathrm{Log}.^m a}\ ;$$

et, en particulier,

$$\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\mathrm{Log}.a}\ ;$$

comme on le savait déjà.

Traitons encore les deux intégrales

$$\int\mathrm{d}x\mathrm{Sin}.x\ ,\qquad \int\mathrm{d}x\mathrm{Cos}.x\ ;$$

Pour la première, nous aurons

$$X=\mathrm{Sin}.x\ ,\quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}=\mathrm{Cos}.x\ ,\quad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}=-\mathrm{Sin}.x\ ,\quad \frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3}=-\mathrm{Cos}\,x\ ,$$

et, en général,

$$\frac{\mathrm{d}^m.X}{\mathrm{d}x^m}=\mathrm{Sin}.\left(x+m\frac{\varpi}{2}\right)$$

donc, en changeant le signe de m et remplaçant X par sa valeur,

$$\int^m \text{Sin}\, x.\text{d}x = \text{Sin.}\left(x - m\frac{\varpi}{2}\right).$$

Pour la seconde, nous aurons

$$X = \text{Cos.}x, \quad \frac{\text{d}X}{\text{d}x} = -\text{Sin.}x, \quad \frac{\text{d}^2X}{\text{d}x^2} = -\text{Cos.}x, \quad \frac{\text{d}^3X}{\text{d}x^3} = +\text{Sin}\, x,$$

et, en général,

$$\frac{\text{d}^mX}{\text{d}x^m} = \text{Sin.}\left\{x + (m+1)\frac{\varpi}{2}\right\};$$

donc, en changeant le signe de m et remplaçant X par sa valeur,

$$\int^m \text{Cos.}x.\text{d}x = \text{Sin.}\left\{x - (m-1)\frac{\varpi}{2}\right\}.$$

En supposant, dans ces deux formules, $m=1$, elles deviennent

$$\int \text{Sin.}x.\text{d}x = -\text{Cos.}x, \qquad \int \text{Cos.}x.\text{d}x = +\text{Sin.}x,$$

comme on le savait déjà.

Nous terminerons par un cas plus compliqué, en traitant les deux intégrales

$$\int a^x \text{Sin.}x.\text{d}x; \qquad \int a^x \text{Cos.}x.\text{d}x:$$

On sait qu'en général, P et Q étant des fonctions de x, on a

$$\frac{\text{d}^m.PQ}{\text{d}x^m} = P\frac{\text{d}^mQ}{\text{d}x^m} + \frac{m}{1}\frac{\text{d}P}{\text{d}x}.\frac{\text{d}^{m-1}Q}{\text{d}x^{m-1}} + \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}\frac{\text{d}^2P}{\text{d}x^2}\frac{\text{d}^{m-2}Q}{\text{d}x^{m-2}} + \ldots\ldots;$$

mais, en posant $Q=a^x$, on a, comme nous l'avons vu ci-dessus, quel que soit r,

$$\frac{\mathrm{d}^r Q}{\mathrm{d}x^r} = a^x \mathrm{Log.}^r a \ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\frac{\mathrm{d}^m . Pa^x}{\mathrm{d}x^m} = a^x \mathrm{Log.}^m a \left\{ P + \frac{m}{1} \frac{1}{\mathrm{Log.}a} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{Log.}^2 a} \frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}x^2} + \ldots\ldots \right\} ;$$

mais si l'on pose successivement

$$P = \mathrm{Sin.}x \ , \qquad P = \mathrm{Cos.}x \ ,$$

on aura, dans le premier cas,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \mathrm{Cos.}x \ , \quad \frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}x^2} = -\mathrm{Sin.}x \ , \quad \frac{\mathrm{d}^3 P}{\mathrm{d}x^3} = -\mathrm{Cos.}x \ , \ \ldots\ldots \ ;$$

et, dans le second,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{Sin.}x \ , \quad \frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}x^2} = -\mathrm{Cos.}x \ , \quad \frac{\mathrm{d}^3 P}{\mathrm{d}x^3} = +\mathrm{Sin.}x \ , \ \ldots\ldots \ ;$$

substituant donc, tour à tour, dans la formule ci-dessus, elle deviendra, dans le premier cas,

$$\frac{\mathrm{d}^m . a^x \mathrm{Sin.}x}{\mathrm{d}x^m} = a^x \mathrm{Log.}^m a \left(\mathrm{Sin.}x + \frac{m}{1} \frac{\mathrm{Cos.}x}{\mathrm{Log.}a} - \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \frac{\mathrm{Sin.}x}{\mathrm{Log.}^2 a} - \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{\mathrm{Cos.}x}{\mathrm{Log.}^3 a} + \ldots \right) ;$$

et dans le second,

$$\frac{\mathrm{d}^m . a^x \mathrm{Cos.}x}{\mathrm{d}x^m} = a^x \mathrm{Log.}^m a \left(\mathrm{Cos.}x - \frac{m}{1} \frac{\mathrm{Sin.}x}{\mathrm{Log.}a} - \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \frac{\mathrm{Cos.}x}{\mathrm{Log.}^2 a} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{\mathrm{Sin.}x}{\mathrm{Log.}^3 a} + \ldots \right) ;$$

on aura donc en changeant le signe de m,

$$\int^m a^x \mathrm{Sin.}x . \mathrm{d}x^m = \frac{a^x}{\mathrm{Log.}^m a} \left(\mathrm{Sin.}x - \frac{m}{1} \cdot \frac{\mathrm{Cos.}x}{\mathrm{Log.}a} - \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{\mathrm{Sin.}x}{\mathrm{Log.}^2 a} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+2}{3} \cdot \frac{\mathrm{Cos.}x}{\mathrm{Log.}^3 a} + \ldots \right) ,$$

$$\int^m a^x \text{Cos.}x.\text{d}x^m = \frac{a^x}{\text{Log.}^m a}\left(\text{Cos.}x + \frac{m}{1}\,\frac{\text{Sin.}x}{\text{Log.}a} - \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\,\frac{\text{Cos.}x}{\text{Log.}^2 a} - \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{\text{Sin.}x}{\text{Log.}^3 a} + \ldots\right)$$

en faisant ensuite $m=1$, on conclura de là

$$\int a^x \text{Sin.}x.\text{d}x = a^x\left(\frac{\text{Sin.}x}{\text{Log.}a} - \frac{\text{Cos.}x}{\text{Log.}^2 a} - \frac{\text{Sin.}x}{\text{Log.}^3 a} + \frac{\text{Cos.}x}{\text{Log.}^4 a} + \frac{\text{Sin.}x}{\text{Log.}^5 a} - \ldots\ldots\right),$$

$$\int a^x \text{Cos.}x.\text{d}x = a^x\left(\frac{\text{Cos.}x}{\text{Log.}a} + \frac{\text{Sin}\,x}{\text{Log.}^2 a} - \frac{\text{Cos}\,x}{\text{Log.}^3 a} - \frac{\text{Sin}\,x}{\text{Log.}^4 a} + \frac{\text{Cos.}x}{\text{Log.}^5 a} + \ldots\ldots\right);$$

comme on le trouverait d'ailleurs en intégrant par partie.

Comme il s'agit toujours ici de logarithmes népériens, si l'on change a et e, il viendra simplement

$$\int e^x \text{Sin.}x.\text{d}x = e^x(\text{Sin.}x - \text{Cos.}x - \text{Sin.}x + \text{Cos.}x + \text{Sin.}x - \text{Cos.}x - \ldots),$$

$$\int e^x \text{Cos.}x.\text{d}x = e^x(\text{Cos.}x + \text{Sin.}x - \text{Cos.}x - \text{Sin.}x + \text{Cos.}x + \text{Sin}\,x - \ldots).$$

Pour savoir ce que valent ces séries, nous remarquerons que, suivant que le nombre des termes qu'on y admet est de l'une des formes $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, la première se réduit à

$$0\,,\quad +\text{Sin.}x\,,\quad +\text{Sin.}x - \text{Cos.}x\,,\quad -\text{Cos.}x\,,$$

et la seconde à

$$0\,,\quad +\text{Cos.}x\,,\quad +\text{Cos.}x + \text{Sin.}x\,,\quad +\text{Sin.}x\,;$$

prenant donc dans chacune le quart de la somme de ces quatre résultats, nous aurons

$$\int e^x \text{Sin.}x.\text{d}x = \tfrac{1}{2}e^x(\text{Sin.}x - \text{Cos.}x)\,,\quad \int e^x \text{Cos.}x.dx = \tfrac{1}{2}e^x(\text{Sin.}x + \text{Cos.}x)\,;$$

ce que la différentiation confirme parfaitement.

Nous pourrons revenir encore, dans une autre occasion, sur ce procédé d'intégration ; nous nous bornerons à observer, pour le présent, que, comme on a,

$$\Sigma^m.fx=\Delta^{-m}.fx\ ,$$

il peut être tout aussi bien appliqué à l'intégration des formules aux différences qu'à celle des formules différentielles.

ARITHMÉTIQUE.

Abréviation de l'extraction des racines numériques ;

Par M. Bobillier, professeur à l'école des arts et métiers de Châlons-Sur-Marne.

Soit un nombre entier dont on veut obtenir la racine m.ième, soient a une partie de cette racine déjà obtenue, x ce qu'il faut lui ajouter pour compléter la racine demandée et r le reste obtenu en retranchant du nombre proposé la m.ième puissance de la première partie de cette racine ; ce nombre sera ainsi indifféremment a^m+r ou $(a+x)^m$. On aura donc

$$a^m+r=(a+x)^m=a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}x^2+\ldots\ldots$$

ou, en supprimant a^m de part et d'autre et divisant ensuite par ma^{m-1}

$$\frac{r}{ma^{m-1}}=x+\frac{m-1}{2}\,\frac{x^2}{a}+\frac{m-1}{2}\,\frac{m-2}{3}\,\frac{x^3}{a^2}+\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\,\frac{x^4}{a^3}+\ldots.$$

d'où l'on voit qu'en divisant r par ma^{m-1} on obtiendra le surplus x de la racine, à moins d'une demi-unité près, pourvu qu'on ait

$$\frac{1}{2} > \frac{m-1}{2}\cdot\frac{x^2}{a} + \frac{m-1}{2}\,\frac{m-2}{3}\cdot\frac{x^3}{a^2} + \frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\,\frac{x^4}{a^3} + \ldots$$

ou bien

$$\frac{1}{2} > \frac{m-1}{2}\,\frac{x^2}{a}\left\{1 + \frac{m-2}{3}\,\frac{x}{a} + \frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\,\frac{x^2}{a^2} + \ldots\right\}.$$

Où cette inégalité ne cessera pas d'être satisfaite si, dans son second membre, on remplace les fractions $\frac{m-3}{4}$, $\frac{m-4}{5}$, $\frac{m-5}{6}$, ..., par la fraction plus grande $\frac{m-2}{3}$, et qu'on prolonge en outre ce second membre à l'infini; de sorte qu'il suffit qu'on ait

$$\frac{1}{2} > \frac{m-1}{2}\cdot\frac{x^2}{a}\left\{1 + \left(\frac{m-2}{3}\cdot\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{m-2}{3}\cdot\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{m-2}{3}\cdot\frac{x}{a}\right)^3 + \ldots\right\};$$

ou bien

$$1 > \frac{(m-1)x^2}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{m-2}{3}\cdot\frac{x}{a}},$$

ou encore

$$1 > \frac{3(m-1)x^2}{3a-(m-2)x};$$

ou enfin

$$3a > x\{3(m-1)x + (m-2)\}.$$

Pour que cette dernière inégalité soit satisfaite, il suffira que le nombre des chiffres de son premier membre surpasse le nombre de ceux du second; ou, plus simplement, que le nombre des chiffres de $3a$ surpasse le nombre des chiffres de $3(m-1)x^2$; ou que le nombre des chiffres de a surpasse le nombre des chiffres de $(m-1)x^2$ ou de mx^2. Or, x^2 a au plus le double du nombre des chiffres de x; d'où il suit que mx^2 aura au plus le double du nombre des chiffres de x augmenté du nombre des chiffres de m; d'où résulte la règle suivante :

Si, cherchant la racine m.$^{\text{ieme}}$ *d'un nombre entier, on a déjà obtenu un nombre de chiffres de cette racine qui soit au moins égal au nombre de ceux qui restent encore à trouver, augmenté du nombre des chiffres de l'exposant, on obtiendra le surplus de la racine cherchée, à moins d'une demi-unité près, en divisant simplement le reste de l'opération par* m *fois la* (m—1)$^{\text{ieme}}$ *puissance de la racine déjà obtenue, et négligeant le reste de cette division.*

Dans le cas particulier où $m=2$, cette règle rentre exactement dans celle qu'on donne dans les traités élémentaires, pour l'extraction de la racine quarrée; mais on voit en même temps qu'elle a une étendue qu'on ne paraît pas lui avoir soupçonné jusqu'ici (*).

(*) On ne paraît pas avoir songé non plus, pour l'extraction de la racine quarrée, au procédé très-brief que voici, et qui serait susceptible d'une extension analogue à celle que M. Bobillier vient de donner au premier.

Cherchez, à l'ordinaire, les deux premiers chiffres de la racine; quarrez et retranchez. Divisez le reste par le double de la racine déjà obtenue, et vous aurez le troisième chiffre de la racine. Quarrez et retranchez encore; divisez le reste par le double de toute la racine obtenue, et vous obtiendrez les deux chiffres suivans, ce qui fera *cinq*. Quarrez et retranchez; divisez le reste par le double de toute la racine obtenue, et vous obtiendrez les quatre chiffres suivans, ce qui fera *neuf*. Quarrez et retranchez; divisez le reste par le double de toute la racine obtenue, et vous obtiendrez les huit chiffres suivans, ce qui fera *dix-sept*; et ainsi de suite.

J. D. G.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la pag. 315 du précédent volume, et d'un autre théorème analogue ;

Par M. Vallès, ingénieur des ponts et chaussées, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

Théorème I. *La perpendiculaire abaissée de l'un quelconque des sommets d'un parallélogramme quelconque, sur un plan conduit arbitrairement par son opposé, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées sur le même plan des deux sommets restans.*

Démonstration. Soit S celui des sommets du parallélogramme par lequel est supposé conduit le plan dont il s'agit; soit S' son opposé, A et B les deux sommets restans, et C l'intersection, milieu commun des deux diagonales SS' et AB; et convenons de désigner la longueur de chaque perpendiculaire par la lettre minuscule qui correspond à la lettre majuscule qui désigne le point d'où elle part.

Parce que le point C est le milieu de SS', nous aurons

$$s'=2c\ ;$$

mais, parce que ce point C est le milieu de AB, nous aurons, par la propriété du trapèze,

$$2c=a+b\ ;$$

donc finalement

$$s'=a+b\ ,$$

comme l'annonce le théorème.

Donc, *si tant de parallélogrammes qu'on voudra, situés ou non dans un même plan, ont une diagonale commune, la somme des perpendiculaires abaissées des deux extrémités de l'autre diagonale, sur un plan conduit arbitrairement par l'une des extrémités de la première, sera une quantité constante pour tous ces parallélogrammes.*

Il est facile de conclure de là 1.° que *la perpendiculaire abaissée de l'un quelconque des sommets d'un parallélogramme quelconque, sur une droite conduite arbitrairement dans son plan, par le sommet opposé, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées sur la même droite de ses deux autres sommets;* 2.° que, *si tant de parallélogrammes qu'on voudra, situés dans un même plan, ont une diagonale commune, la somme des perpendiculaires abaissées des deux extrémités de l'autre diagonale, sur une droite conduite arbitrairement, dans ce plan, par l'une des extrémités de la première, sera une quantité constante pour tous ces parallélogrammes.*

THÉORÈME II. La perpendiculaire abaissée de l'un quelconque des sommets d'un parallélipipède quelconque, sur un plan conduit arbitrairement par le sommet opposé, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées sur le même plan des trois sommets qui environnent ce dernier; cette même perpendiculaire est la moitié seulement de la somme des perpendiculaires abaissées sur ce plan des trois sommets restans, respectivement opposés à ces trois là.

Démonstration. Soit S le sommet du parallélipipède par lequel est supposé conduit le plan dont il s'agit; soient S′ le sommet opposé, A, B, C les trois sommets qui environnent le sommet S, et A′, B′, C′ les trois sommets restans, respectivement opposés à ces trois là ; et convenons encore ici de désigner la longueur de chaque perpendiculaire par la lettre minuscule qui correspond à la majuscule qui désigne le point d'où elle part.

La droite SS' étant une diagonale commune à trois parallélogrammes, dont les secondes diagonales sont AA', BB', CC', on doit avoir (*Théorème I*),

$$\left.\begin{array}{l} s'=a+a' \,, \\ s'=b+b' \,, \\ s'=c+c' \,. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Mais dans les trois parallélogrammes qui concourent au sommet S, on a aussi (*Théorème I*)

$$\left.\begin{array}{l} a'=b+c \,, \\ b'=c+a \,, \\ c'=a+b \,, \end{array}\right\} \quad (2)$$

ajoutant deux équations correspondantes quelconques, dans les deux groupes (1) et (2), il viendra, en réduisant,

$$s'=a+b+c \,, \qquad (3)$$

comme l'annonce la première partie du théorème.

Si, ensuite de la somme des équations (1), on retranche l'équation (3), il viendra, en réduisant,

$$2s'=a'+b'+c' \,,$$

comme l'annonce la seconde partie du théorème.

Donc aussi, *si tant de parallélipipèdes qu'on voudra ont une diagonale commune, et que, par l'une des extrémités de cette dia-*

gonale, on conduise arbitrairement un plan, la somme des perpendiculaires abaissées sur ce plan des trois sommets qui environnent l'une ou l'autre extrémité de cette diagonale sera une quantité constante pour tous ces parallélipipèdes.

Remarque. Il est essentiel de remarquer 1.° que, dans ces deux théorèmes, il s'agit de *sommes algébriques*, c'est-à-dire que les perpendiculaires qui tombent de différens côtés du plan doivent y être prises avec des signes contraires; 2.° que ces théorèmes subsistent encore en substituant aux perpendiculaires des parallèles à une droite fixe quelconque.

Applications. On peut, à l'aide de ces théorèmes, parvenir facilement à des résultats que l'on n'obtient d'ordinaire que par des procédés dépourvus d'élégance et de symétrie.

I. Soient, sur un plan, x, y les coordonnées d'un point P, rapporté à deux axes rectangulaires, et t, u les coordonnées du même point, rapporté à deux axes obliques de même origine; ces dernières, avec les axes obliques, formeront un parallélogramme dont une diagonale sera la droite menée du point P à l'origine; les perpendiculaires abaissées des deux extrémités de l'autre diagonale sur les axes des x et y seront, savoir:

$$\text{sur l'axe des } x\,, \quad t\text{Cos.}(t,y)\,, \quad u\text{Cos.}(u,y)\,,$$

$$\text{sur l'axe des } y\,, \quad t\text{Cos.}(t,x)\,, \quad u\text{Cos.}(u,x)\,;$$

on aura donc (*Théorème I*)

$$x=t\text{Cos.}(t,x)+u\text{Cos.}(u,x)\,,$$
$$y=t\text{Cos.}(t,y)+u\text{Cos.}(u,y)\,;$$

ce sont les formules connues pour le passage d'un système rectangulaire à un système oblique de même origine.

II. Soient, dans l'espace, x, y, z les coordonnées d'un point P rapporté à trois axes rectangulaires, et t, u, v les coordonnées du même point, rapportées à deux axes obliques de même origine; ses dernières, avec les axes obliques, seront six arêtes, opposées deux à deux, d'un parallélipipède dont une diagonale sera la droite menée du point P à l'origine, les perpendiculaires abaissées des trois sommets qui environnent l'origine sur les plans des yz, des zx et des xy, seront savoir :

sur le plan des yz, ... $t\text{Cos.}(t,x)$, $u\text{Cos.}(u,x)$, $v\text{Cos.}(v,x)$,

sur le plan des zx, ... $t\text{Cos.}(t,y)$, $u\text{Cos.}(u,y)$, $v\text{Cos.}(v,y)$,

sur le plan des xy, ... $t\text{Cos.}(t,z)$, $u\text{Cos.}(u,z)$, $v\text{Cos.}(v,z)$;

on aura donc (*Théorème II*)

$$x=t\text{Cos}(t,x)+u\text{Cos.}(u,x)+v\text{Cos.}(v,x),$$
$$y=t\text{Cos.}(t,y)+u\text{Cos.}(u,y)+v\text{Cos.}(v,y),$$
$$z=t\text{Cos.}(t,z)+u\text{Cos.}(u,z)+v\text{Cos.}(v,z);$$

ce sont les formules connues qui servent, dans l'espace, à passer d'un système rectangulaire à un système oblique de même origine.

III. Soient R l'une des diagonales d'un parallélogramme, et r, r' les deux côtés de ce parallélogramme qui concourent avec l'une de ses extrémités; par cette extrémité conduisons arbitrairement, dans le plan du parallélogramme, deux axes rectangulaires; et soient alors respectivement (a, b), (a', b'), (A, B), les extrémités des droites r, r', R; nous aurons (*Théorème I*)

$$A=a+a',$$
$$B=b+b';$$

en prenant la somme des quarrés de ces deux équations, il viendra

$$R^2=r^2+r'^2+2(aa'+bb')\ ;$$

mais on sait que

$$aa'+bb'=rr'\text{Cos.}(r,r')\ ;$$

donc, en substituant,

$$R^2=r^2+r'^2+2rr'\text{Cos.}(r,r')\ .$$

IV. Soient R l'une des diagonales d'un parallélipipède et r, r', r'' les trois arêtes de ce parallélipipède qui concourent à l'une de ses extrémités ; par cette extrémité conduisons, arbitrairement, dans l'espace, trois axes rectangulaires ; et soient alors respectivement (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), (A, B, C) les extrémités des droites r, r', r'', R ; nous aurons (*Théorème II*)

$$A=a+a'+a''\ ,$$
$$B=b+b'+b''\ ,$$
$$C=c+c'+c''\ ;$$

en prenant la somme des quarrés de ces équations, il viendra

$$R^2=r^2+r'^2+r''^2+2(a'a''+b'b''+c'c'')+2(a''a+b''b+c''c)+2(aa'+bb'+cc')\ ;$$

mais on sait que

$$a'a''+b'b''+c'c''=r'r''\text{Cos.}(r',r'')\ ,$$
$$a''a+b''b+c''c=r''r\,\text{Cos.}(r'',r)\ ,$$
$$a\,a'+b\,b'+c\,c'=r\,r'\text{Cos.}(r\,,r')\ ;$$

donc, en substituant,

$$R^2=r^2+r'^2+r''^2+2r'r''\text{Cos.}(r',r'')+2r''r\text{Cos.}(r'',r)+2rr'\text{Cos.}(r,r')\ ;\quad (*)$$

(*) Nous avons déjà donné, par une analyse fort simple, à la pag. 51 de notre IX.me volume, en fonction des trois arêtes d'un même angle d'un parallélipipède et des angles qu'elles forment deux à deux, non seulement la

Solution de l'un des problèmes de géométrie énoncés à la pag. 379 du précédent volume ;

Par MM. Le Barbier, Bonetti et Vallès.

Problème. *Y a-t-il, dans une ellipse, une corde mobile, de grandeur constante, qui, dans son mouvement, enveloppe un cercle? Et, s'il y existe une telle corde, quelle en est la longueur et quel est le rayon du cercle qu'elle enveloppe?*

Solution. La manière de traiter ce problème qui semblerait la plus naturelle et la plus directe consisterait à chercher d'abord à quelle courbe est tangente une corde d'une longueur constante quelconque, qui roule dans une ellipse, et à examiner ensuite s'il ne serait pas possible de profiter de la longueur indéterminée de cette corde constante, de telle sorte que la courbe enveloppée devînt un cercle. C'est aussi de cette manière que le problème a été attaqué par M. Le Barbier qui a même supposé d'abord, pour plus de généralité, que la courbe dans laquelle roulait la corde de longueur constante était quelconque ; mais il n'a pu pousser très-loin la solution de ce problème général. Il y a long-temps, en effet, que nous avons reconnu, M. Poncelet et moi, que, borné même à l'ellipse, ce problème est à peu près intraitable (*Annales*, tom. VIII, pag. 211).

---

diagonale, mais encore les angles qu'elle forme avec ces arêtes, ainsi que le volume du parallélipipède. On n'en a pas moins persisté depuis à employer, dans cette recherche, un triangle sphérique qui la complique et en détruit tout-à-fait la symétrie.

J. D. G.

M. Bonetti, cadet au corps royal des Pontonniers, à Modène, et Vallès, ingénieur des ponts et chaussées, ancien élève de l'Ecole polytechnique, ont eu l'heureuse idée de renverser le problème, c'est-à-dire qu'ils se sont proposés celui-ci :

Peut-on, sur le plan d'une ellipse donnée, décrire un cercle tel que les cordes interceptées par cette ellipse sur les tangentes à ce cercle soient toutes de même longueur ?

Il est d'abord aisé de voir que, si le problème est possible, le cercle ne devra pas couper l'ellipse ni même lui être tangent ; car alors on pourrait avoir, à la fois, des cordes d'une grandeur finie, des cordes d'une grandeur nulle et des cordes imaginaires ; ce cercle doit donc être intérieur à l'ellipse.

De plus, pour que les cordes de l'ellipse tangentes à ce cercle, menées parallèlement à un des axes de cette ellipse soient de même longueur, il est nécessaire que le centre du cercle soit sur cet axe ; ce centre doit donc être à la fois sur les deux axes de l'ellipse ; c'est-à-dire que le cercle et l'ellipse doivent être concentriques.

Cela posé, pour prouver qu'un tel cercle ne saurait exister, M. Bonetti suppose qu'ayant décrit ce cercle, on lui circonscrive un quarré ; alors, observe-t-il, ou ce quarré se trouvera être inscrit à l'ellipse ou bien il ne sera pas.

Si ce quarré se trouve inscrit à l'ellipse, le cercle ne pourra satisfaire aux conditions du problème. En effet, il est connu que le cercle inscrit au quarré, qui est lui-même inscrit à une ellipse, et dont les côtés sont parallèles à ses axes, est aussi inscrit au parallélogramme dont les sommets coïncident avec les sommets de l'ellipse ; or, les côtés de ce parallélogramme sont $\sqrt{a^2+b^2}$, ou bien $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, tandis que les côtés du quarré sont $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; a et b étant les demi-axes. Or, on a $a^2+b^2>2ab$; d'où l'on voit que, dans ce cas, les cordes de l'ellipse, tangentes au cercle, ne seraient pas toutes de même longueur.

Il faudra donc, s'il existe un tel cercle, qu'en lui circonscrivant un quarré, ayant ses côtés parallèles aux axes de l'ellipse, ses sommets soient tous intérieurs ou tous extérieurs à cette ellipse qui coupera conséquemment chacun de ses côtés ou leurs prolongemens en deux points; or, il est visible que, pour que les quatre cordes qui correspondent à ces côtés fussent de même longueur, il faudrait que les huit points d'intersection de l'ellipse, avec les directions des côtés du quarré, fussent également distans de son centre, et conséquemment sur une même circonférence qui couperait ainsi l'ellipse en huit points; tandis que deux sections coniques ne sauraient avoir plus de quatre points communs.

Pour prouver l'impossibilité du problème, M. Vallès remarque qu'en désignant par r le rayon du cercle, sa tangente au point (x', y') a pour équation

$$x'x+y'y=r^2 ,$$

sous la condition

$$x'^2+y'^2=r^2 ,$$

et qu'en combinant l'équation de cette tangente avec celle de l'ellipse que nous supposons être

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 ,$$

on trouve, pour la longueur de la corde interceptée par l'ellipse,

$$\frac{2abr\sqrt{a^2x'^2+b^2y'^2-r^4}}{a^2x'^2+b^2y'^2} ;$$

or, pour que cette corde soit constante, il est nécessaire et il suffit que $a^2x'^2+b^2y'^2$ soit une quantité constante, quels que soient x' et y'; ce qui assujétirait le point (x', y') à être l'un des points d'une certaine ellipse; mais ce point (x', y') doit être à la circonférence d'un cercle, laquelle ne saurait se confondre avec cette ellipse qu'autant qu'on aurait $a=b$; c'est-à-dire, qu'autant que l'ellipse donnée serait elle-même un cercle.

Solution des deux problèmes de trigonométrie sphérique énoncés à la pag. 64 du présent volume et de divers autres problèmes analogues ;

Par M. G. P.

Avant de nous occuper des problèmes énoncés à la pag. 64 du présent volume et de quelques autres problèmes qui se rattachent à ceux-là, nous allons reprendre sommairement, en essayant de la simplifier un peu et de la compléter, une intéressante théorie présentée par M. Magnus, de Berlin, à la pag. 33 du XVI.me volume des *Annales*. Pour cela, nous nous proposerons ce problème :

PROBLÈME. Quelle est la surface conique lieu géométrique de toutes les droites menées par un même point de l'espace, de telle sorte que la somme ou la différence des angles formés par chacune d'elles avec deux droites fixes, menées par ce même point, soit constamment égale à un angle donné de grandeur ?

Solution. Soit pris le point dont il s'agit pour origine des coordonnées rectangulaires, auxquelles nous supposerons d'ailleurs une direction quelconque. Soient alors respectivement a et a', b et b', c et c' les cosinus tabulaires des angles que forment les deux droites fixes avec les trois axes ; nous aurons

$$a^2+b^2+c^2=1\,,\qquad a'^2+b'^2+c'^2=1\,,\qquad (1)$$

et les équations de ces deux droites seront

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\,,\qquad \frac{x}{a'}=\frac{y}{b'}=\frac{z}{c'}\,.\qquad (2)$$

Désignant pareillement par A, B, C les cosinus tabulaires des angles que forme la génératrice avec les trois axes, nous aurons

$$A^2+B^2+C^2=1\ , \qquad (3)$$

et les équations de cette génératrice seront

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}\ . \qquad (4)$$

Si nous désignons par θ et θ' les angles variables, de grandeur mais constans de somme ou de différence, que forme cette génératrice avec les deux droites fixes, et par 2α leur somme ou leur différence constante, nous aurons

$$\theta\pm\theta'=2\alpha\ ,$$

d'où

$$\text{Cos.}\theta\text{Cos}\,\theta'\mp\text{Sin.}\theta\text{Sin}\,\theta'=\text{Cos.}2\alpha\ ,$$

ou, en transposant et quarrant,

$$(\text{Cos.}\theta\text{Cos.}\theta'-\text{Cos.}2\alpha)^2=\text{Sin.}^2\theta\text{Sin.}^2\theta'=(1-\text{Cos.}^2\theta)(1-\text{Cos.}^2\theta')\ ;$$

ou enfin, en développant, transposant et réduisant,

$$\text{Cos.}^2\theta-2\text{Cos.}\theta\text{Cos}\,\theta'\text{Cos.}2\alpha+\text{Cos}^2\theta'=\text{Sin.}^22\alpha\ ;$$

mais on a

$$\text{Cos.}\theta=aA+bB+cC\ , \qquad \text{Cos}\,\theta'=a'A+b'B+c'C\ ;$$

il viendra donc, en substituant,

$$\left\{\begin{matrix}(aA+bB+cC)^2\\+(a'A+b'B+c'C)^2\end{matrix}\right\}-2(aA+bB+cC)(a'A+b'B+c'C)\text{Cos.}2\alpha=\text{Sin.}^22\alpha\ ;$$

mais d'un autre côté les équations (3) et (4) donnent

$$A=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,\quad B=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,\quad C=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,;$$

mettant donc ces valeurs dans cette dernière, et chassant les dénominateurs, nous obtiendrons pour l'équation de la surface conique cherchée,

$$\left.\begin{array}{l}(ax+by+cz)^2\\+(a'x+b'y+c'z)^2\end{array}\right\}-2(ax+by+zc)(a'x+b'y+c'z)\text{Cos.}2\alpha=(x^2+y^2+z^2)\text{Sin.}^2 2\alpha\,. \quad (5)$$

Ainsi, *la surface conique dont toutes les génératrices font, avec deux droites fixes passant par son sommet, des angles dont la somme ou la différence est constante, est une surface conique du second ordre.* Ces deux droites fixes sont ce que M. Magnus a appelé les *lignes focales* de la surface conique; et, par analogie, les deux angles θ et θ' peuvent en être dits les *angles vecteurs.* Il est aisé de voir que, pour une même surface conique de cette nature, c'est la somme ou la différence de ces deux angles qui est constante, suivant que les lignes focales sont prises toutes deux dans une même nappe ou bien l'une dans une nappe et l'autre dans son opposée.

Supposons que les lignes focales, que nous avons supposées quelconques par rapport aux axes des coordonnées, soient toutes deux dans le plan des xz et fassent de différens côtés, avec l'axe des z, des angles égaux que nous désignerons par γ; nous aurons ainsi

$$a=+\text{Sin}\,\gamma\,,\qquad b=0\,,\qquad c=\text{Cos.}\gamma\,,$$

$$a'=-\text{Sin}\,\gamma\,,\qquad b'=0\,,\qquad c'=\text{Cos.}\gamma\,;$$

au moyen de quoi l'équation (5), de la surface conique, deviendra simplement

$$2x^2\text{Sin.}^2\gamma+2z^2\text{Cos.}^2\gamma+2(x^2\text{Sin.}^2\gamma-z^2\text{Cos.}^2\gamma)\text{Cos}\,2\alpha=(x^2+y^2+z^2)\text{Sin.}^2 2\alpha\,. \quad (6)$$

Si, pour avoir les traces de la surface conique sur le plan des yz, on fait $x=0$, cette équation deviendra

$$2z^2\text{Cos.}^2\gamma(1-\text{Cos.}2\alpha)=(y^2+z^2)\text{Sin.}^22\alpha\ ,$$

ou bien encore

$$z^2\text{Cos.}^2\gamma\text{Sin.}^2\alpha=(y^2+z^2)\text{Sin.}^2\alpha\text{Cos.}^2\alpha\ ;$$

ou encore, en réduisant,

$$z^2\text{Cos.}^2\gamma=(y^2+z^2)\text{Cos.}^2\alpha\ ,$$

ce qui donnera

$$y^2=\frac{\text{Cos.}^2\gamma-\text{Cos.}^2\alpha}{\text{Cos.}^2\alpha}z^2\ ;$$

équation commune aux deux traces qui, comme l'on voit, font, de part et d'autre, des angles égaux avec l'axe des z. Désignant par β l'un de ces angles, on aura

$$\text{Tang.}^2\beta=\frac{\text{Cos.}^2\gamma-\text{Cos.}^2\alpha}{\text{Cos.}^2\alpha}\ ;$$

d'où

$$\text{Cos.}^2\beta=\frac{1}{1+\text{Tang.}^2\beta}=\frac{\text{Cos.}^2\alpha}{\text{Cos.}^2\gamma}\ ,$$

ce qui donne

$$\text{Cos.}\alpha=\pm\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma\ ,$$

ce qui lie entre eux les trois angles α, β, γ.

En introduisant dans l'équation (6), pour $\text{Sin.}^2\gamma$ et $\text{Cos.}^2\gamma$, leurs valeurs

$$\frac{\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\alpha}{\text{Cos.}^2\beta}\qquad\text{et}\qquad\frac{\text{Cos.}^2\alpha}{\text{Cos.}^2\beta}\ ,$$

donnée par cette dernière équation et remplaçant respectivement $\text{Cos}.2\alpha$ et $\text{Sin}.2\alpha$ par leurs équivalens $\text{Cos}.^2\alpha-\text{Sin}.^2\alpha$ et $2\text{Sin}.\alpha\text{Cos}.\alpha$, on la réduit facilement à cette forme

$$\left(\frac{x}{z\text{Tang}.\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{z\text{Tang}.\beta}\right)^2=1\ ;$$

or, par un choix convenable des axes, l'équation de toute surface conique du second ordre est aussi réductible à cette forme ; donc réciproquement : *toute surface conique du second ordre est le lieu géométrique de toutes les droites qui font, avec deux droites fixes, menées par son sommet, des angles dont la somme ou la différence est constante*, suivant qu'on prend ces deux droites dans l'une des nappes ou bien qu'on prend l'une dans une nappe et l'autre dans son opposée. Les deux angles 2α et 2β peuvent être dits les *angles diamétraux principaux* de la surface conique, et la droite qui divise l'angle de ses lignes focales en deux parties égales peut en être dite l'*axe*.

L'équation de la surface conique étant sous la forme (5), les axes des coordonnées sont quelconques par rapport à elle ; en conséquence nous pouvons disposer des indéterminées que renferme cette équation pour amener la surface conique à toucher le plan des xz suivant l'axe des z. Il faudra pour cela qu'en posant $y=0$ dans cette équation, elle se réduise à $x^2=0$; mais elle se réduit alors à

$$\left.\begin{array}{l}(a^2-2aa'\text{Cos}.2\alpha+a'^2-\text{Sin}.^2 2\alpha)x^2\\ +2\{(ac+a'c')-(ac'+ca')\text{Cos}.2\alpha\}xz\\ +(c^2-2cc'\text{Cos}.2\alpha+c'^2-\text{Sin}.^2 2\alpha)z^2\end{array}\right\}=0\ ;$$

donc, pour que la surface conique touche le plan des xz suivant l'axe des z, il faut qu'on ait, à la fois,

$$ac+a'c'=(ac'+ca')\text{Cos}.2\alpha\ ;$$

$$c^2-2cc'\mathrm{Cos.}2\alpha+c'^2=\mathrm{Sin.}^2 2\alpha\ ;$$

éliminant α entre ces deux équations, on aura

$$(c^2-c'^2)\{a^2(1-c'^2)-a'^2(1-c^2)\}=0\ ;$$

or comme, dans cet état de choses, la situation de la surface conique demeure encore indéterminée, on peut toujours la disposer de telle sorte que c et c' soient inégaux ou que $c^2-c'^2$ ne soit pas nul ; donc on doit avoir généralement alors

$$a^2(1-c'^2)=a'^2(1-c^2),$$

ou bien

$$\frac{a^2}{1-c^2}=\frac{a'^2}{1-c'^2}\ ;$$

ou encore (1)

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{a'^2}{a'^2+b'^2}\ ;$$

or, ce sont précisément là les quarrés des cosinus des angles que forment les plans des angles vecteurs avec le plan des xz, c'est-à-dire, avec le plan tangent ; et, comme d'ailleurs ces deux plans ne sauraient se confondre, ils doivent faire, avec le plan tangent, des angles supplémens l'un de l'autre, c'est-à-dire, des angles égaux pris de différens côtés. On a donc cette autre proposition :

Les plans tangent et normal à une surface conique du second ordre, suivant une génératrice quelconque, divisent en deux parties égales les quatre angles dièdres que forment, par leur rencontre, les plans des angles vecteurs de cette génératrice (*).

(*) On peut suivre une marche absolument analogue à celle-ci, dans la discussion analytique des propriétés des sections coniques, relativement à leurs

Si l'on conçoit une sphère de rayon quelconque, ayant même centre que la surface conique, on conclura de ce qui précède les propositions suivantes :

---

foyers ; comme cette marche n'est pas dépourvue d'une certaine élégance, et comme elle peut offrir un exercice utile aux commençans, nous l'indiquerons ici rapidement.

Soient (α, β), (α', β') deux points pris arbitrairement sur le plan de deux axes rectangulaires, et proposons-nous d'assigner le lieu géométrique de tous les points (x, y) de ce plan dont la somme ou la différence des distances aux points donnés est égale à une longueur constante $2a$.

Soient r et r' ces deux distances, nous aurons

$$r \pm r' = 2a ;$$

d'où en quarrant et transposant

$$r^2 + r'^2 - 4a^2 = \mp 2rr' ;$$

quarrant de nouveau, il viendra

$$(r^2 - r'^2)^2 - 8a^2(r^2 + r'^2) + 16a^4 = 0 ;$$

or, on a

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 , \qquad r'^2 = (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 ;$$

d'où

$$r^2 - r'^2 = -2(\alpha-\alpha')x - 2(\beta-\beta')y + (\alpha^2 - \alpha'^2 + \beta^2 - \beta'^2) ,$$

$$r^2 + r'^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2(\alpha+\alpha')x - 2(\beta+\beta')y + (\alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2) ;$$

en substituant donc, nous aurons, pour l'équation du lieu cherché,

$$\left.\begin{array}{l} 4\{(\alpha-\alpha')^2 - 4a^2\}x^2 + 4\{(\beta-\beta')^2 - 4a^2\}y^2 + 8(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')xy \\ \quad -4\{(\alpha-\alpha')(\alpha^2-\alpha'^2+\beta^2-\beta'^2) - 4(\alpha+\alpha')a^2\}x \\ \quad -4\{(\beta-\beta')(\alpha^2-\alpha'^2+\beta^2-\beta'^2) - 4(\beta+\beta')a^2\}y \\ \quad +\{(\alpha^2-\alpha'^2+\beta^2-\beta'^2)^2 - 8(\alpha^2+\alpha'^2+\beta^2+\beta'^2)a^2 + 16a^4\} \end{array}\right\} = 0. \quad (1)$$

c'est donc une ligne du second ordre.

I. *Le lieu géométrique de tous les points de la surface d'une sphère dont la somme ou la différence des distances sphériques à deux points fixes de cette sphère est constante, est la courbe à double courbure, intersection de cette sphère avec une surface conique du second ordre, qui a le même centre qu'elle.*

Si l'on suppose que les deux points fixes sont sur l'axe des x, à une distance c de part et d'autre de l'origine, on aura

$$\alpha=c\,,\qquad \alpha'=-c\,,\qquad \beta=0\,,\qquad \beta'=0\,;$$

au moyen de quoi l'équation (1) deviendra simplement

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)\,, \tag{2}$$

en y faisant $x=0$ et désignant la valeur correspondante de y^2 par $\pm b^2$, le signe étant choisi de manière à avoir b réel, il viendra

$$c^2=a^2\pm b^2\,;$$

introduisant cette valeur de c^2 dans l'équation (2), elle deviendra

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm\left(\frac{y}{b}\right)^2=1\,;$$

et l'on sait que l'équation de toute ligne du second ordre qui a un centre est réductible à cette forme.

Ainsi, *le lieu géométrique de tous les points d'un plan dont la somme ou la différence des distances à deux points fixes, pris sur ce plan, est constante, est une ligne du second ordre pourvue d'un centre; et réciproquement, toute ligne du second ordre pourvue d'un centre est un pareil lieu.*

La courbe exprimée par l'équation (1) étant quelconque par rapport aux axes, nous pourrons profiter des indéterminées que renferme cette équation pour amener cette courbe à toucher l'axe des x à l'origine. Il faudra pour cela qu'en faisant $y=0$ dans l'équation (1) elle se réduise à $x^2=0$; or, elle devient ainsi

Réciproquement : *toute courbe à double courbure, intersection d'une sphère avec une surface conique du second ordre de même centre, est le lieu géométrique de tous les points de cette sphère dont la somme ou la différence des distances sphériques à deux points fixes de sa surface est une quantité constante.*

$$\left.\begin{array}{r}4\{(\alpha-\alpha')^2-4a^2\}x^2\\ -4\{(\alpha-\alpha')(\alpha^2-\alpha'^2+\beta^2-\beta'^2)-4(\alpha+\alpha')a^2\}x\\ +\{(\alpha^2-\alpha'^2+\beta^2-\beta'^2)^2-8(\alpha^2+\alpha'^2+\beta^2+\beta'^2)a^2+16a^4\}\end{array}\right\}=0\ ;$$

afin donc que l'axe des x soit tangent à la courbe à l'origine, il faudra qu'on ait, à la fois,

$$(\alpha-\alpha')(\alpha^2-\alpha'^2+\beta^2-\beta'^2)=4(\alpha+\alpha')a^2\ ,$$

$$(\alpha^2-\alpha'^2+\beta^2-\beta'^2)^2-8(\alpha^2+\alpha'^2+\beta^2+\beta'^2)a^2+16a^4=0\ ;$$

éliminant a entre ces deux équations, l'équation résultante pourra être mise sous cette forme

$$(\alpha^2\beta'^2-\alpha'^2\beta^2)(\alpha^2-\alpha'^2+\beta^2-\beta'^2)=0\ ,$$

ou sous celle-ci

$$(r^2-r'^2)(\alpha^2\beta'^2-\alpha'^2\beta^2)=0\ .$$

Or comme, avec ces conditions même, la situation de la courbe demeure encore indéterminée, on peut toujours faire en sorte que r et r' soient inégaux, ou que $r^2-r'^2$ ne soit pas nul; donc on doit avoir généralement alors

$$\alpha^2\beta'^2=\alpha'^2\beta^2\ , \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\ ;$$

or, ce sont précisément là les quarrés des tangentes tabulaires des angles que font les deux rayons vecteurs de l'origine avec l'axe des x, c'est-à-dire, des angles que font les deux rayons vecteurs d'un point de la courbe avec

Cette courbe à double courbure est constamment composée de deux parties entièrement fermées, extérieures l'une à l'autre, contenant chacune deux foyers; elle peut être dite *ellipse ou hyperbole sphérique*, suivant qu'on choisit les deux foyers dans l'une de ces deux parties ou qu'au contraire on en prend un dans chacune. On conçoit d'ailleurs qu'il ne saurait y avoir ici de parabole.

II. *Les arcs de grands cercles tangent et normal en un quelconque des points de l'ellipse ou de l'hyperbole sphérique divisent en deux parties égales les quatre angles formés par les deux arcs vecteurs de ce point.*

On pourra donc décrire une ellipse ou une hyperbole sphérique, soit par points soit d'un mouvement continu; on pourra lui mener une tangente ou une normale par l'un des points de son périmètre, ou encore lui mener des tangentes par un point extérieur, par des procédés tout à fait analogues aux procédés de géométrie plane à l'aide desquels on résout les mêmes problèmes par rapport aux sections coniques.

Si l'on suppose que le rayon de la sphère croît jusqu'à devenir infini, on retombera sur toutes les propriétés connues des sections coniques pourvues de centre; d'où, en supposant ensuite que le grand axe devient infini, on passera à celles de la parabole. La courbe sphérique à double courbure deviendra d'ailleurs ellipse ou hyperbole, suivant que le plan tangent avec lequel la surface de la sphère tendra à se confondre aura son point de contact au centre de la courbe sphérique considérée comme ellipse, ou, au con-

---

sa tangente en ce point; et, comme d'ailleurs ces deux angles ne sauraient être égaux, il s'ensuit qu'ils doivent être supplément l'un de l'autre ou qu'ils doivent être égaux de différens côtés.

Ainsi, dans toute ligne du second ordre pourvue d'un centre, la tangente et la normale en un point quelconque divisent en deux parties égales les quatre angles formés par les deux rayons de ce point.

J. D. G.

traire, au centre de cette courbe considérée comme hyperbole (*).

Ces préliminaires ainsi établis, passons aux questions proposées et aux autres qui s'y rattachent, et dont la solution peut être facilement déduite de celle d'un problème général que nous allons d'abord nous proposer.

PROBLÈME GÉNÉRAL. Quel est le point de la surface d'une sphère dont la somme des distances sphériques aux circonférences de trois cercles tracés sur cette sphère est la moindre possible ?

Solution. Soient C, C', C'' les pôles des trois cercles et soit P le point que l'on suppose résoudre le problème. Il est d'abord clair que les arcs de grands cercles qui joindront le point P aux trois circonférences devront être les plus courts qu'on puisse leur mener de ce point, et qu'ainsi il faudra que les prolongemens de ces arcs passent par les pôles respectifs de ces trois cercles. Soient A, A', A'' les points où ces arcs rencontrent leurs circonférences, de manière que la somme d'arcs $PA+PA'+PA''$ soit la moindre possible. Si, d'un autre point Q de la surface de la sphère, on veut conduire à ces mêmes circonférences des arcs de grands cercles dont la somme soit la moindre possible, il faudra pareillement que les prolongemens de ces arcs passent par leurs pôles, et si l'on désigne par B, B', B'' les points où ils rencontrent leurs circonférences ; pour que le point P résolve effectivement le problème, il faudra qu'on ait, quel que soit Q,

$$PA+PA'+PA''<QB+QB'+QB'' ;$$

(*) Tout semble sans cesse nous ramener, comme malgré nous, vers cette pensée philosophique que la véritable géométrie, la géométrie fondamentale pourrait fort bien être la géométrie sphérique, dont alors la géométrie plane ne serait plus qu'un cas particulier, un pur accident.

J. D. G.

mais on a aussi, quel que soit Q, $AC=BC$, $A'C'=B'C'$, $A''C''=B''C''$, et, par conséquent,

$$AC+A'C'+A''C''=BC+B'C'+B''C'' \ ;$$

donc, en ajoutant, on devra avoir aussi, quel que soit Q,

$$(PA+AC)+(PA'+A'C')+(PA''+A''C'')<(QB+BC)+(QB'+B'C')+(QB''+B''C''),$$

ou plus simplement

$$PC+PC'+PC''<QC+QC'+QC'' \ ;$$

ce qui nous apprend que la somme des distances sphériques du point cherché P aux pôles des trois cercles doit être la moindre possible.

Supposons donc qu'il en soit ainsi, et soit décrite une ellipse sphérique ayant les points C' et C'' pour foyers et passant par le point P ; en supposant le point Q sur le périmètre de cette ellipse, on aura

$$PC'+PC''=QC'+QC'' \ ;$$

d'où il suit, en retranchant, qu'on devra avoir

$$PC<QC \ ;$$

donc PC devra être normal à l'ellipse sphérique en P, et devra conséquemment diviser en deux parties égales l'angle $C'PC''$ des deux rayons vecteurs PC' et PC''. Or, comme on pourrait raisonner tour à tour sur chacun des points C' et C'', comme nous venons de le faire sur le point C, il s'ensuit que chacun des arcs PC, PC', PC'' doit diviser en deux parties égales l'angle formé par les deux autres; ce qui revient à dire que ces trois arcs doivent former des angles égaux autour du point P. On a donc le théorème général que voici :

PREMIER THÉORÈME GÉNÉRAL. Le point de la surface d'une sphère dont la somme des distances sphériques aux circonférences de trois cercles tracés sur cette sphère, est la moindre possible, doit être tellement situé que les arcs de grands cercles qui le joindront aux pôles respectifs de ces trois cercles, forment autour de lui des angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.

Si l'on conçoit des cônes droits ayant leur centre commun au centre de la sphère, et passant respectivement par ces trois cercles, on déduira de là cet autre théorème :

DEUXIÈME THÉORÈME GÉNÉRAL. La droite qui, partant du sommet commun de trois cônes droits, fait avec les surfaces de ces cônes des angles dont la somme est la moindre possible, doit être tellement située que les plans conduits par cette droite, et par les axes des trois cônes, forment autour d'elle des angles dièdres égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.

Si l'on suppose, dans le premier théorème général, que le rayon de la sphère croît jusqu'à devenir infini, le théorème ne cessera pas d'être vrai, et alors il se changera en celui-ci :

TROISIÈME THÉORÈME GÉNÉRAL. Le point du plan de trois cercles dont la somme des distances à leurs circonférences est la moindre possible, doit être tellement situé que les droites qui le joindront aux centres de ces trois cercles, forment autour de lui des angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.

Présentement, comme la vérité de ces théorèmes est indépendante de la grandeur des cercles ou de l'ouverture des cônes qu'on y considère, on pourra, sans qu'ils cessent d'être vrais, supposer que tous ou partie des cercles ou des cônes se réduisent à des points ou à des droites. On pourra aussi supposer, dans le premier, que tous ou partie des cercles deviennent des grands cercles de la sphère : dans le second, que tous ou partie des cônes deviennent des plans, et enfin, dans le troisième, que tous ou partie des cercles deviennent des droites indéfinies. En épuisant toutes les combinaisons que peuvent offrir ces diverses hypothèses, on reconnaîtra que chacun de ces théorèmes en renferme implicitement dix, servant à résoudre un égal nombre de problèmes (*). Mais il faut remarquer que, tandis que les problèmes qui répondent aux deux premiers sont généralement tous possibles, plusieurs de ceux qui répondent au troisième sont généralement impossibles, à moins qu'ils ne tombent dans l'indétermination. Comme l'examen des cas particuliers ne saurait, d'après ce qui précède, offrir aucune difficulté, nous nous bornerons ici à énoncer ceux qui avaient été proposés, et qui ont donné naissance à cet essai.

I. *Le point de l'intérieur d'un triangle sphérique dont la somme des distances sphériques à ses trois sommets est la moindre possible, doit être tellement situé que les arcs de grands cercles, qui le joindront à ces mêmes sommets, forment, autour de lui, des angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.*

II. *Le point de l'intérieur d'un triangle sphérique dont la somme des distances sphériques à ses trois côtés est la moindre possible, doit être tellement situé que les arcs de grands cercles qui le joindront aux pôles de ces mêmes côtés, sommets de son supplémentaire, forment autour de lui trois angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.*

Leurs analogues dans l'espace sont les suivans :

I. *La droite qui, menée par le sommet d'un angle trièdre, fait avec ses arêtes des angles dont la somme est la moindre possible, doit être tellement située qu'en la joignant à ces mêmes arêtes par trois plans, ces plans forment, autour d'elle, des angles dièdres égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.*

(*) Les dix problemes qui répondent au troisième théorème, ainsi que beaucoup d'autres du même genre, ont été traités dans ce recueil (tom. I, pag. 375).

J. D. G.

II. *La droite qui, menée par le sommet d'un angle trièdre, fait avec ses faces des angles dont la somme est la moindre possible, doit être tellement située qu'en la joignant aux perpendiculaires conduites par le sommet à ces mêmes faces par trois plans, ces plans forment, autour d'elle, des angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.*

L'analogue du premier de ces théorèmes, dans la géométrie plane, est le suivant :

Le point de l'intérieur d'un triangle rectiligne, dont la somme des distances à ses trois sommets est la moindre possible, est le point d'où l'on verrait ses trois côtés sous des angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit (*).

Quant à l'analogue plan du second problème, il est indéterminé si le triangle est équilatéral, et, dans le cas contraire, il est impossible en ce sens que la somme des distances d'un point à ses trois côtés, prises avec leurs signes, peut avoir toutes les valeurs entre l'infini positif et l'infini négatif.

Lyon, le 17 d'août 1829.

(*) Quelqu'un, sans doute par trop de précipitation, a donné, pour solution du premier problème sphérique, le point où se coupent les arcs de grands cercles qui joignent les sommets aux milieux des côtés opposés. S'il en était ainsi, il s'ensuivrait que le point de l'intérieur d'un triangle rectiligne, dont la somme des distances à ses trois sommets serait la moindre possible, devrait être le centre de gravité de la surface de ce triangle; ce qui est généralement faux, d'après ce qui précède.

Il y a plus de quarante ans que ce dernier problème m'a été proposé par mon professeur, au collége de Nancy où j'étudiais alors. Je l'ai moi même proposé, en 1810, dans le premier volume du présent recueil où il a été résolu et géneralisé (pag. 285) par M. Tédenat, correspondant de l'Institut, alors recteur à Nismes Je devais donc croire que cela courait à peu près les rues, lorsque je l'ai vu propose de nouveau par M. Noël, dans le tom. V.me de la *Correspondance* de Bruxelles, où il se trouve résolu (pag. 237) par M. Heichen.

J. D. G.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de trigonométrie sphérique.

DÉTERMINER, dans l'intérieur d'un triangle sphérique, un point tel qu'en le joignant à ses trois sommets, par des arcs de grands cercles, ces arcs forment, autour de lui, des angles égaux ?

TRACER, sur une sphère, un grand cercle qui soit divisé en trois parties égales par les trois côtés d'un triangle sphérique, donné sur cette sphère, prolongés s'il est possible ?

Problèmes de géométrie.

Quel est le point de l'espace dont la somme des distances aux surfaces de quatre sphères, données de grandeur et de situation, est la moindre possible ?

I. A quelle courbe est tangente la droite mobile qui intercepte des cordes égales sur deux cercles donnés ?

II. A quelle surface est tangent le plan mobile qui intercepte des cercles égaux sur trois sphères données ?

STATIQUE.

De l'équilibre de la chaînette sur une surface courbe ;

Par M. Bobillier, professeur au Collége royal d'Amiens.

PROBLÈME. *Quelle est la courbe à double courbure qu'affecte un fil pesant et homogène, parfaitement flexible et inextensible, d'une longueur déterminée, fixé, par ses deux extrémités, en deux points d'une surface courbe donnée quelconque et abandonné à l'action de la pesanteur sur cette surface, qu'on suppose n'exercer sur lui aucun frottement? Quelle est la tension du fil, en un quelconque des points de sa longueur? et quelle est la pression normale qu'il exerce sur la surface courbe, en ce même point?*

Solution. Soit $S=0$, l'équation en x, y, z de la surface proposée, rapportée à trois axes rectangulaires, choisis de telle sorte que l'axe des z soit vertical. Si l'on désigne par α, β, γ les trois angles que fait la normale au point (x, y, z) avec les axes des coordonnées; en posant, pour abréger,

$$\frac{dS}{dx}=P\,,\qquad \frac{dS}{dy}=Q\,,\qquad \frac{dS}{dz}=R\,,\qquad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}=V\,;\qquad (2)$$

on aura

$$\mathrm{Cos}.\alpha=PV\,,\qquad \mathrm{Cos}.\beta=QV\,,\qquad \mathrm{Cos}.\gamma=RV\,;\quad (3)$$

et l'équation différentielle de la surface S sera

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0\,. \qquad (4)$$

En prenant la somme des produits respectifs des équations (3) par P, Q, R, on trouve

$$P\mathrm{Cos}.\alpha+Q\mathrm{Cos}\,\beta+R\mathrm{Cos}.\gamma=(P^2+Q^2+R^2)V=\frac{1}{V}\,. \qquad (5)$$

Dans ces diverses formules, le signe de V devra varier suivant que la chaînette sera couchée de côté ou d'autre de la surface S. On le déterminera, pour chaque problème, par la considération d'un cas particulier, comme on détermine les constantes dans le calcul intégral.

Si, considérant un arc quelconque de la chaînette, nous remplaçons les tensions aux extrémités de cet arc, par des forces équivalentes, tangentes à cette courbe en ces points, nous devrons former un système en équilibre, dans lequel l'équilibre devra subsister encore, si nous supposons que cette portion, sans changer de courbure, est subitement devenue inflexible.

Cette portion de chaînette exerce, en chacun de ses points, sur la surface S une pression qu'on peut remplacer par une force égale et contraire, normale à cette surface, dont on pourra dès lors faire abstraction dans toute la partie qui répond à cet arc de la chaînette, qui, retenu en équilibre par l'action de toutes ces forces, deviendra ainsi un système libre de forme invariable, dans lequel conséquemment les forces devront avoir une résultante nulle; leurs sommes de composantes, parallèles aux trois axes, devront donc être aussi séparément nulles; ce qui nous conduira à trois équations entre les données et les inconnues du problème. Occupons-nous donc de la recherche de ces équations.

Prenons l'arc de la chaînette depuis son point le plus bas, où sa tangente est horizontale, jusqu'à l'un quelconque (x, y, z) de ses points. Sa tension au point le plus bas pouvant être assimilée à un poids, nous supposerons qu'en la rompant en cet endroit, il soit nécessaire, pour la maintenir en équilibre, de lui ajouter un prolongement vertical d'une longueur a et de même densité qu'elle, passant sur une poulie fixe, infiniment petite. Prenant alors, pour unité de poids, le poids d'une unité de longueur de cette chaînette, nous pourrons dire qu'en son point le plus bas la tension est a. De plus, comme les axes des x et des y sont simplement assujétis à être rectangulaires sur le plan horizontal des xy, et peuvent d'ailleurs avoir sur ce plan des directions quelconques, nous pourrons les y faire tourner de manière que la tangente au point le plus bas de la chaînette, et conséquemment la tension a en ce point, soit parallèle à l'axe des x. Quant à la tension au point (x, y, z) dirigée suivant la tangente en ce point, nous la représenterons par T; en désignant par s l'arc de la courbe compris depuis le point le plus bas jusqu'à celui-là, les composantes de cette tension, parallèles aux trois axes, seront

$$T\frac{dx}{ds}\ ,\quad T\frac{dy}{ds}\ ,\quad T\frac{dz}{ds}\ .$$

Soit N la pression normale exercée par la chaînette, au point (x, y, z), sur la surface S; cette pression sera une fonction des trois coordonnées de ce point et variera avec elles; mais, dans toute l'étendue d'un élement ds, on peut la regarder comme constante et proportionnelle à l'étendue de cet élément, pour lequel elle sera ainsi exprimée par Nds; et, comme elle est normale à la surface S, ses composantes, parallèles aux axes, seront respectivement

$$Nds.\mathrm{Cos}.\alpha\ ,\qquad Nds.\mathrm{Cos}.\beta\ ,\qquad Nds.\mathrm{Cos}.\gamma\ ;$$

nous devrons donc remplacer les sommes de composantes, parallèles aux axes, de la pression de l'arc entier, depuis le point le plus bas, origine des S, par les intégrales

$$-\int N\mathrm{Cos}.\alpha.\mathrm{d}s\ ,\qquad -\int N\mathrm{Cos}.\beta.\mathrm{d}s\ ,\qquad -\int N\mathrm{Cos}.\gamma\,\mathrm{d}s\ ;$$

Enfin aux composantes parallèles à l'axe des z, il faudra ajouter le poids de la chaînette, pris négativement, et qui, d'après les conventions qui précèdent sur le choix des unités de poids et de longueur, devra être exprimé par $-s$.

Exprimant donc que les sommes de composantes parallèles aux trois axes sont séparément nulles, et observant que la tension a doit être de signe contraire à la composante de T, parallèle à l'axe des x, nous aurons

$$T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}-\int N\mathrm{Cos}.\alpha.\mathrm{d}s-a=0\ ,$$

$$T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\int N\mathrm{Cos}.\beta.\mathrm{d}s=0\ ,$$

$$T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}-\int N\mathrm{Cos}.\gamma.\mathrm{d}s-s=0\ ;$$

De ces trois équations on tirera les valeurs des deux inconnues T et N et en outre une équation en x, y, z, indépendante de ces mêmes inconnues, laquelle sera l'équation d'une surface coupant la surface S suivant la chaînette demandée. En les différentiant, elles deviennent

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}T.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+T\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}-N\mathrm{Cos}.\alpha.\mathrm{d}s=0\ ,\\&\mathrm{d}T.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+T\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-N\mathrm{Cos}.\beta.\mathrm{d}s=0\ ,\\&\mathrm{d}T.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}+T\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}-N\mathrm{Cos}.\gamma.\mathrm{d}s=\mathrm{d}s\ .\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Comme on a

$$dx^2+dy^2+dz^2=ds^2\ , \qquad (7)$$

il s'ensuit qu'en considérant s comme la variable indépendante, on aura

$$dx.d\frac{dx}{ds}+dy.d\frac{dy}{ds}+dz.d\frac{dz}{ds}=0\ . \qquad (8)$$

En outre, parce que la normale à la surface S, en (x, y, z), est perpendiculaire à la tangente à la chaînette, en ce même point, on aura

$$\frac{dx}{ds}\text{Cos.}\alpha+\frac{dy}{ds}\text{Cos.}\beta+\frac{dz}{ds}\text{Cos.}\gamma=0\ . \qquad (9)$$

Enfin, l'équation (7) donne, en divisant par ds

$$\frac{dx}{ds}dx+\frac{dy}{ds}dy+\frac{dz}{ds}dz=ds\,. \qquad (10)$$

Cela posé, si l'on prend la somme des produits respectifs des équations (6) par dx, dy, dz, en ayant égard aux relations (8), (9), (10), il viendra, en divisant par ds,

$$dT=dz\ ,$$

d'où

$$T=z+A\ ; \qquad (11)$$

A étant une constante arbitraire. Ainsi la tension T au point (x, y, z) est tout à fait indépendante de la longueur de l'arc de la chaînette compris depuis ce point jusqu'au point le plus bas de cette courbe, ainsi que de la surface sur laquelle elle est située; cette tension ne dépend uniquement que de la distance verticale entre ces deux points, c'est-à-dire, de la distance entre les plans horizontaux qui les contiennent respectivement.

Si l'on désigne par c la coordonnée verticale du point le plus bas de la chaînette, il faudra qu'à $z=c$ réponde $T=a$, ce qui donnera

$$a=c+A\,; \qquad (12)$$

d'où l'on voit que, si l'on disposait le plan arbitraire des xy de telle sorte que l'on eût $c=a$, il en résulterait $A=0$, et par suite $T=z$; c'est-à-dire que, si l'on remplace la tension au point le plus bas par un prolongement de la chaînette d'une longueur suffisante, passant sans frottement sur une poulie infiniment petite, et pendant verticalement, on pourra remplacer la tension en un autre point quelconque de cette chaînette par un prolongement de même nature qui devra alors se terminer inférieurement avec le premier sur un même plan horizontal; d'où l'on peut conclure, plus généralement, que, si l'on remplace les tensions aux deux extrémités d'un arc quelconque de la chaînette par des prolongemens de cette chaînette, d'une longueur suffisante, passant sur des poulies infiniment petites et pendant verticalement, ces deux prolongemens devront se terminer inférieurement au même plan horizontal (*); d'où il résulte encore que la différence des tensions en deux points quelconques de la chaînette est constamment égale au poids d'une portion de cette chaînette dont la longueur serait égale à la distance verticale entre ces deux points.

Pour conserver à nos résultats toute leur généralité, nous garderons A; et, en substituant pour T et $\mathrm{d}T$, dans les équations (6) leurs valeurs $z+A$ et $\mathrm{d}z$, elles deviendront, en divisant par $\mathrm{d}s$

(*) Ceci est, comme l'on voit, une généralisation de ce qui a été établi tom. XIX, pag. 347.

J. D. G.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz}{ds}\,\frac{dx}{ds}+(z+A)\,\frac{d^2x}{ds^2}-N\mathrm{Cos}.\alpha=0\,,\\
\frac{dz}{ds}\,\frac{dy}{ds}+(z+A)\,\frac{d^2y}{ds^2}-N\mathrm{Cos}.\beta=0\,,\\
\frac{dz}{ds}\,\frac{dz}{ds}+(z+A)\,\frac{d^2z}{ds^2}-N\mathrm{Cos}.\gamma=1\,.
\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Pour tirer facilement de ces équations la valeur de la pression normale N, au point (x, y, z), nous prendrons la somme de leurs produits respectifs par P, Q, R; ce qui donnera, en ayant égard aux relations (4) et (5),

$$(z+A)\left(P\,\frac{d^2x}{ds^2}+Q\,\frac{d^2y}{ds^2}+R\,\frac{d^2z}{ds^2}\right)-\frac{N}{V}=R\,;$$

d'où on tirera

$$N=V\left\{(z+A)\left(P\,\frac{d^2x}{ds^2}+Q\,\frac{d^2y}{ds^2}+R\,\frac{d^2z}{ds^2}\right)-R\right\},$$

ou encore (2)

$$N=\frac{(z+A)\left(P\,\frac{d^2x}{ds^2}+Q\,\frac{d^2y}{ds^2}+R\,\frac{d^2z}{ds^2}\right)-R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}\,.\quad(14)$$

En substituant cette valeur, ainsi que la valeur (3) de Cos.γ, dans la dernière des équations (13), nous obtiendrons, pour l'équation différentielle du second ordre d'une surface qui doit couper la surface S suivant la chaînette cherchée,

$$R(z+A)\left(P\,\frac{d^2x}{ds^2}+Q\,\frac{d^2y}{ds^2}\right)=(P^2+Q^2)\left\{(z+A)\,\frac{d^2z}{ds^2}-1\right\}+(P^2+Q^2+R^2)\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\,.\quad(15)$$

Pour première application de ces formules générales, supposons la chaînette couchée sur un plan incliné, et, pour que la tangente au point le plus bas soit parallèle à l'axe des x, comme ces mêmes formules l'exigent, faisons passer le plan incliné par cet axe, et soit ω l'angle qu'il fait avec le plan des xz, son équation sera

$$y\,\mathrm{Cos.}\omega = z\,\mathrm{Sin.}\omega\,. \qquad (16)$$

Nous aurons ici

$$S = y\,\mathrm{Cos.}\omega - z\,\mathrm{Sin.}\omega\,,$$

d'où

$$P = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = 0\,; \qquad Q = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y} = \mathrm{Cos.}\omega\,, \qquad R = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{Sin.}\omega\,,$$

$$P^2 + Q^2 = \mathrm{Cos.}^2\omega\,, \qquad P^2 + Q^2 + R^2 = 1\,;$$

en substituant ces valeurs dans les formules (14) et (15), elles deviendront

$$N = (z+A)\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\,\mathrm{Cos}\,\omega - \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\,\mathrm{Sin.}\omega\right) + \mathrm{Sin.}\omega\,, \qquad (17)$$

$$(z+A)\left\{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\,\mathrm{Sin.}\omega + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\,\mathrm{Cos.}\omega\right\}\mathrm{Cos.}\omega + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \mathrm{Cos.}^2\omega\,; \qquad (18)$$

mais l'équation (16) donne, par deux différentiations,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{Sin.}\omega}{\mathrm{Cos.}\omega}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\cdot\frac{\mathrm{Sin.}\omega}{\mathrm{Cos.}\omega}\,; \qquad (19)$$

substituant ces valeurs dans les équations (17) et (18), elles deviendront

$$N = \mathrm{Sin.}\omega\,, \qquad (20)$$

$$(z+A)\frac{d^2z}{dx^2}+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=\text{Cos.}^2\omega\ . \qquad (21)$$

L'équation (20) nous apprend que la pression sur le plan incliné est constante en tous les points de la chaînette, et que, pour une unité de longueur de cette courbe, elle est égale à l'unité de poids multipliée par le cosinus de l'inclinaison de ce plan à l'horizon.

L'équation (21) revient à

$$\frac{d\left\{(z+A)\frac{dz}{ds}\right\}}{ds}=\text{Cos.}^2\omega\ ,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$(z+A)\frac{dz}{ds}=s\text{Cos.}^2\omega+B\text{Cos.}\omega\ ,$$

B étant une constante arbitraire. On tire de là, en multipliant par $2ds$ et intégrant de nouveau

$$(z+A)^2=s^2\text{Cos.}^2\omega+2Bs\text{Cos.}\omega+C\ ,$$

C étant une nouvelle constante.

De cette dernière équation on tire

$$s\text{Cos}\,\omega=-B\pm\sqrt{(z+A)^2-(C-B^2)}\ ;$$

d'où, en différentiant,

$$ds\text{Cos.}\omega=\pm\frac{(z+A)dz}{\sqrt{(z+A)^2-(C-B^2)}}\ ;$$

et, en quarrant,

$ds^2\text{Cos.}^2\omega$, c'est-à-dire $(dx^2+dy^2+dz^2)\text{Cos.}^2\omega=\frac{(z+A)^2dz^2}{(z+A)^2-(C-B^2)}$;

ou encore, en remplaçant (19) $dy^2\text{Cos.}^2\omega$ par $dz^2\text{Sin.}^2\omega$,

$$dx^2\text{Cos.}^2\omega+dz^2=\frac{(z+A)^2dz^2}{(z+A)^2-(C-B^2)},$$

ce qui donne

$$dx\text{Cos.}\omega=\sqrt{C^2-B}.\frac{dz}{\sqrt{(z+A)^2-(C-B^2)}};$$

telle est donc l'équation différentielle de la projection de la chaînette sur le plan des xz.

Si l'on veut que l'axe des x soit tangent au point le plus bas, il faudra qu'à $z=0$ réponde $\frac{dz}{dx}=0$, ce qui donnera $C-B^2=A^2$; au moyen de quoi l'équation deviendra

$$dx\text{Cos.}\omega=\frac{Adz}{\sqrt{(z+A)^2-A^2}};$$

mais alors (12) on aura $c=0$ d'où $A=a$, ce qui donne,

$$dx\text{Cos.}\omega=\frac{adz}{\sqrt{(z+a)^2-a^2}};$$

ce qui donnera, et en intégrant de nouveau,

$$e^{\frac{x\text{Cos.}\omega}{a}}=\frac{z+a+\sqrt{(z+a)^2-a^2}}{D},$$

D étant une nouvelle constante. Si l'on veut en outre que le point le plus bas soit l'origine même des coordonnées, il faudra que x et z soient nuls en même temps, ce qui donnera $D=a$, et, par suite,

$$a.e^{\frac{x\text{Cos.}\omega}{a}}=z+a+\sqrt{(z+a)^2-a^2};$$

équation qui, résolue par rapport à $z+a$, donne finalement

$$2(z+a)=a\left\{e^{\frac{x\,\text{Cos.}\,\omega}{a}}+e^{-\frac{x\,\text{Cos.}\,\omega}{a}}\right\}; \qquad (22)$$

telle est donc l'équation primitive de la projection de la chaînette sur le plan vertical des xz. Si l'on suppose $\omega=0$, d'où $\text{Cos.}\,\omega=1$, elle devient

$$2(z+a)=a\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

c'est-à-dire, celle de la chaînette ordinaire, comme cela doit être (*).

Pour deuxième application, supposons que la chaînette soit située sur une surface cylindrique quelconque, ayant ses élémens rectilignes verticaux, et conséquemment parallèles à l'axe des z; alors la coordonnée z n'entrera pas dans S, de sorte qu'on aura

$$R=\frac{dS}{dz}=0,$$

(*) En considérant que la pesanteur le long d'un plan incliné n'est autre que la pesanteur dans un plan vertical multipliée par le sinus de l'inclinaison du plan, on pourrait parvenir directement à l'équation différentielle de la chaînette sur un plan incliné quelconque; on en conclurait ensuite l'équation différentielle de la chaînette sur une surface courbe quelconque, en considérant qu'en chacun de ses points, cette chaînette se trouve située sur le plan tangent à la surface courbe en ce point. On pourrait aussi obtenir l'équation de la chaînette située sur une surface courbe, en se proposant de tracer, sur cette surface, une courbe telle que la distance de son centre de gravité au plan des xy fût la moindre possible; ce qui offrirait une application intéressante de la méthode des variations.

J. D. G.

les équations (14) et (15) deviendront ainsi, en divisant la dernière par P^2+Q^2,

$$N=\frac{(z+A)\left(P\frac{d^2x}{ds^2}+Q\frac{d^2y}{ds^2}\right)}{\sqrt{P^2+Q^2}}, \qquad (23)$$

$$(z+A)\frac{d^2z}{ds^2}+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1. \qquad (24)$$

Cette dernière équation n'est autre que l'équation (21) dans laquelle on aurait fait $\text{Cos.}\omega=1$ et changé x en s. Si donc, comme nous l'avons fait alors, on place le point le plus bas à l'origine des coordonnées, elle donnera (22)

$$2(z+a)=a\left(e^{\frac{s}{a}}+e^{-\frac{s}{a}}\right). \qquad (25)$$

Mais, si l'on développe la surface cylindrique sur un plan vertical, z et s seront les coordonnées rectangulaires de la chaînette; donc le développement d'une chaînette, située sur une surface cylindrique à élémens rectilignes verticaux, est une chaînette ordinaire, comme il était facile de le prévoir.

Quant à la pression normale (23) exercée par la chaînette, en chaque point, sur la surface cylindrique, on sent qu'elle devra différer suivant la nature de cette surface. Pour donner un exemple de la manière de la calculer dans chaque cas, supposons qu'il soit question d'un cylindre de révolution d'un rayon égal à r, ayant pour axe l'axe des z; nous aurons

$$x^2+y^2=r^2, \qquad (26)$$

d'où

$$S=x^2+y^2-r^2,$$

$$P=\frac{dS}{dx}=2x\ ,\quad Q=\frac{dS}{dy}=2y\ ,\quad P^2+Q^2=4(x^2+y^2)=4r^2\ ;$$

ce qui donnera, en substituant dans (23), et observant qu'ici $A=a$

$$rN=(z+a)\left(x\frac{d^2x}{ds^2}+y\frac{d^2y}{ds^2}\right)\ ; \qquad (27)$$

mais, par deux différentiations successives, l'équation (26) donne

$$x\frac{dx}{ds}+y\frac{dy}{ds}=0\ ,$$

$$x\frac{d^2x}{ds^2}+y\frac{d^2y}{ds^2}=-\left(\frac{dx}{ds}\right)^2-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=\left(\frac{dz}{ds}\right)^2-1\ ;$$

on aura donc, en substituant dans (27),

$$rN=(z+a)\left\{\left(\frac{dz}{ds}\right)^2-1\right\}\ ;$$

d'un autre côté, l'équation (25) donne

$$\frac{dz}{ds}=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{s}{a}}-e^{-\frac{s}{a}}\right),$$

d'où

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=\tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{2s}{a}}+e^{-\frac{2s}{a}}-2\right),$$

et

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)^2-1=\tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{2s}{a}}+e^{-\frac{2s}{a}}+2\right)=\left(\frac{e^{\frac{s}{a}}+e^{-\frac{s}{a}}}{2}\right)^2=\left(\frac{z+a}{a}\right)^2\ ;$$

il viendra donc, en substituant,

$$N=\frac{(z+a)^3}{a^2r}\;;$$

c'est-à-dire que si, au-dessous du plan des xy, on en conduit un autre aussi horizontal, qui en soit distant d'une quantité égale à la longueur de l'arc de chaînette dont le poids ferait équilibre à la tension au point le plus bas, les pressions croîtront comme les cubes des hauteurs des différens points de la courbe, au-dessus de ce plan. Elles seront d'ailleurs d'autant plus grandes, toutes choses égales d'ailleurs, que le rayon du cylindre sera plus petit.

Pour troisième application, supposons que la chaînette soit posée sur une surface conique de révolution, ayant pour axe l'axe des z, pour sommet l'origine et son angle générateur égal à ω; c'est la question proposée à la pag. 87 du XVIII.me volume des *Annales*. L'équation du cône sera ainsi

$$(x^2+y^2)\text{Cos.}^2\omega=z^2\text{Sin.}^2\omega\;; \tag{28}$$

de sorte qu'on aura

$$S=(x^2+y^2)\text{Cos.}^2\omega-z^2\text{Sin.}^2\omega\;,$$

d'où

$$P=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=2x\text{Cos.}^2\omega\,,\quad Q=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}=2y\text{Cos.}^2\omega\,,\quad R=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}=-2z\text{Sin}^2\omega\;;$$

$$P^2+Q^2=4(x^2+y^2)\text{Cos.}^4\omega\,,\quad P^2+Q^2+R^2=4\{(x^2+y^2)\text{Cos.}^4\omega+z^2\text{Sin.}^4\omega\}\,,$$

substituant ces valeurs dans les formules (14) et (15), elles deviendront

$$N=\frac{(z+A)\left\{\left(x\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}+y\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\right)\text{Cos.}^2\omega-z\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\text{Sin.}^2\omega\right\}+z\text{Sin.}^2\omega}{\sqrt{(x^2+y^2)\text{Cos.}^4\omega+z^2\text{Sin.}^4\omega}}\;;$$

$$z(z+A)\left(x\frac{d^2x}{ds^2}+y\frac{d^2y}{ds^2}\right)\text{Sin.}^2\omega\text{Cos.}^2\omega$$

$$+(x^2+y^2)\left\{(z+A)\frac{d^2z}{ds^2}-1\right\}\text{Cos.}^4\omega+\left\{(x^2+y^2)\text{Cos.}^4\omega+z^2\text{Sin.}^4\omega\right\}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=0.$$

En mettant d'abord, dans ces deux équations, pour $(x^2+y^2)\text{Cos}^2\omega$ sa valeur $z^2\text{Sin.}^2\omega$, elles deviendront

$$Nz\text{Sin.}\omega=(z+A)\left\{\left(x\frac{d^2x}{ds^2}+y\frac{d^2y}{ds^2}\right)\text{Cos.}^2\omega-z\frac{d^2z}{ds^2}\text{Sin.}^2\omega\right\}+\text{Sin.}^2\omega, \quad (29)$$

$$(z+A)\left(x\frac{d^2x}{ds^2}+y\frac{d^2y}{ds^2}+z\frac{d^2z}{ds^2}\right)\text{Cos.}^2\omega+z\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=z\text{Cos.}^2\omega; \quad (30)$$

mais, par deux différentiations, on tire de l'équation (28)

$$\left(x\frac{dx}{ds}+y\frac{dy}{ds}\right)\text{Cos.}^2\omega=z\frac{dz}{ds}\text{Sin.}^2\omega$$

$$\left(x\frac{d^2x}{ds^2}+y\frac{d^2y}{ds^2}\right)\text{Cos.}^2\omega=z\frac{d^2z}{ds^2}\text{Sin.}^2\omega-\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right\}\text{Cos.}^2\omega+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\text{Sin.}^2\omega,$$

ou bien encore

$$\left(x\frac{d^2x}{ds^2}+y\frac{d^2y}{ds^2}\right)\text{Cos.}^2\omega=z\frac{d^2z}{ds^2}\text{Sin}^2\omega-\left\{1-\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}\text{Cos.}^2\omega+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\text{Sin.}^2\omega,$$

ou bien enfin

$$\left(x\frac{d^2x}{ds^2}+y\frac{d^2y}{ds^2}\right)\text{Cos.}^2\omega=z\frac{d^2z}{ds^2}\text{Sin.}^2\omega+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2-\text{Cos.}^2\omega;$$

ce qui donnera, en substituant dans les équations (29) et (30)

$$Nz\text{Sin.}\omega=(z+A)\left\{\left(\frac{dz}{ds}\right)^2-\text{Cos.}^2\omega\right\}+z\text{Sin.}^2\omega, \quad (31)$$

$$z(z+A)\frac{d^2z}{ds^2}+(2z+A)\left\{\left(\frac{dz}{ds}\right)^2-\text{Cos.}^2\omega\right\}=0. \quad (32)$$

On peut mettre la dernière sous cette forme

$$(2z+A)\sqrt{\text{Cos.}^2\omega-\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}-z(z+A)\frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\text{Cos.}^2\omega-\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}}=0;$$

ou, en multipliant par dz,

$$\sqrt{\text{Cos.}^2\omega-\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}.\text{d}.z(z+A)+z(z+A).\text{d}.\sqrt{\text{Cos.}^2\omega-\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}=0;$$

ou bien encore

$$\text{d}\left\{z(z+A)\sqrt{\text{Cos.}^2\omega-\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}\right\}=0;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$z(z+A)\sqrt{\text{Cos.}^2\omega-\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}=E;$$

E étant une constante arbitraire. En désignant toujours par c la coordonnée verticale du point le plus bas de la chaînette, il faudra qu'à $z=c$ reponde $\frac{dz}{ds}=0$, ce qui donnera

$$c(c+A)\text{Cos.}\omega=E,$$

ou bien (12)

$$E=ac\text{Cos.}\omega;$$

de sorte que l'intégrale deviendra

$$z(z+A)\sqrt{\text{Cos.}^2\omega-\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}=ac\text{Cos.}\omega\ . \qquad (33)$$

On en tirera

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)^2-\text{Cos.}^2\omega=-\frac{a^2c^2\text{Cos.}^2\omega}{z^2(z+A)^2}\ , \qquad (34)$$

valeur qui, substituée dans la formule (31), donnera

$$N=\frac{z^3(z+A)\text{Sin.}^2\omega-a^2c^2\text{Cos}^2\omega}{z^3(z+A)\text{Sin.}\omega}\ , \qquad (35)$$

formule sur laquelle nous reviendrons tout à l'heure.

Le second membre de l'équation (33) étant constant, et son premier membre étant le produit de trois facteurs dont les deux premiers croissent avec z, il s'ensuit que ce troisième facteur doit devenir de plus en plus petit, à mesure que z devient plus grand, et qu'il doit être tout à fait nul lorsque z est infini, on doit donc avoir alors

$$\frac{dz}{ds}=\pm\text{Cos.}\omega\ ,$$

ce qui ne peut évidemment avoir lieu qu'autant que la chaînette se confondra avec une génératrice du cône. Ainsi la chaînette conique a pour asymptotes deux génératrices de la surface sur laquelle elle se trouve située.

Dans le cas de z infini, la formule (35) donne simplement $N=\text{Sin.}\omega$, et il doit bien en effet en être ainsi, puisque les branches infinies de la chaînette sont dans le même cas qu'une chaînette rectiligne couchée sur un plan incliné suivant la direction de sa plus grande pente.

Dans le cas où l'on aura $A=0$ ou (12) $c=a$, la formule (35) deviendra

$$N=\frac{z^4\text{Sin.}^2\omega-a^4\text{Cos.}^2\omega}{z^4\text{Sin.}\omega};$$

la pression sera donc nulle dès qu'on aura

$$z^2\text{Sin.}\omega=a^2\text{Cos}\,\omega\,,\qquad \text{d'où}\qquad z=\frac{a}{\sqrt{\text{Tang.}\omega}}.$$

Cette valeur de z sera plus grande que a, c'est-à-dire plus grande que la distance du point le plus bas de la chaînette au sommet du cône, toutes les fois que l'angle générateur ω sera moindre qu'un demi-angle droit, alors donc la partie inférieure de la chaînette abandonnera le cône pour se disposer en chaînette ordinaire. Les tensions extrêmes de cette nouvelle chaînette seront (11)

$$T=\frac{a}{\sqrt{\text{Tang.}\omega}};$$

L'équation (34) donne

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z}\right)^2\quad\text{ou}\quad\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}z^2}+1=\frac{z^2(z+A)^2}{\{z^2(z+A)^2-a^2c^2\}\text{Cos.}^2\omega},$$

et conséquemment

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=\frac{z^2(z+A)^2\text{Sin.}^2\omega+a^2c^2\text{Cos.}^2\omega}{\{z^2(z+A)^2-a^2c^2\}\text{Cos.}^2\omega}\mathrm{d}z^2,$$

ou bien encore

$$z^2(z+A)^2\{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)\text{Cos.}^2\omega-\mathrm{d}z^2\text{Sin.}^2\omega\}=a^2c^2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)\text{Cos.}^2\omega;$$

mais on tire de l'équation (28)

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\text{Cos.}\omega}{\text{Sin.}\omega},\qquad \mathrm{d}z=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\text{Cos.}\omega}{\text{Sin.}\omega},$$

$$z+A=\frac{A\text{Sin.}\omega+\sqrt{x^2+y^2}\text{Cos.}\omega}{\text{Sin.}\omega};$$

il viendra donc, en substituant,

$$(x^2+y^2)\{A\text{Sin.}\omega+\sqrt{x^2+y^2}\text{Cos.}\omega\}^2\{(x^2+y^2)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)-(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)^2\}\text{Cos.}^2\omega$$
$$=a^2c^2\{(x^2+y^2)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)\text{Sin.}^2\omega+(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)^2\text{Cos.}^2\omega\}\text{Sin.}^2\omega;$$

et telle est l'équation différentielle de la projection de la chaînette sur le plan des xy.

Si, pour passer aux coordonnées polaires, nous posons

$$x=r\text{Sin.}\theta, \qquad y=r\text{Cos.}\theta,$$

il en résultera

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}r\text{Sin.}\theta+r\mathrm{d}\theta\text{Cos.}\theta, \qquad \mathrm{d}y=\mathrm{d}r\text{Cos.}\theta-r\mathrm{d}\theta\text{Sin.}\theta;$$
$$x^2+y^2=r^2, \quad \mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2, \quad x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$r^4(A\text{Sin.}\omega+r\text{Cos}\,\omega)^2\mathrm{d}\theta^2\text{Cos.}^2\omega=a^2c^2(\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2\text{Sin.}^2\omega)\text{Sin.}^2\omega;$$

équation d'où on tirera

$$\mathrm{d}\theta=\frac{ac\mathrm{d}r\text{Sin.}\omega}{r\sqrt{(A\text{Sin.}\omega+r\text{Cos}\,\omega)^2r^2\text{Cos.}^2\omega-a^2c^2\text{Sin}^4\omega}}.$$

Il ne paraît pas que cette valeur soit généralement intégrable sous forme finie.

En conséquence nous nous bornerons à considérer le cas où $A=0$ et $c=a$; il vient alors

$$\mathrm{d}\theta=\frac{a^2\mathrm{d}r\text{Sin.}\omega}{r\sqrt{r^4\text{Cos.}^4\omega-a^4\text{Sin.}^4\omega}};$$

ce qui donne, en intégrant,

$$2(\theta+F)\mathrm{Sin.}\omega=\mathrm{Arc}\left(\mathrm{Cos.}=\frac{a^2\mathrm{Sin}^2\omega}{r^2\mathrm{Cos.}^2\omega}\right),$$

F étant la constante arbitraire. Pour la déterminer, on remarquera que, pour la projection du point le plus bas sur le plan des xy, θ est nul, et qu'on doit avoir alors

$$r=a\frac{\mathrm{Sin}\,\omega}{\mathrm{Cos.}\omega},$$

cela donne $F=0$, de sorte qu'on a simplement, pour l'équation polaire demandée,

$$2\theta\mathrm{Sin.}\omega=\mathrm{Arc}\left(\mathrm{Cos.}=\frac{a^2\mathrm{Sin.}^2\omega}{r^2\mathrm{Cos.}^2\omega}\right), \qquad (36)$$

ce qui donne, pour r infini,

$$\theta=\pm\frac{\varpi}{4\mathrm{Sin.}\omega};$$

c'est donc là la moitié de l'angle que font entre elles les projections des asymptotes de la chaînette, dans ce cas.

Il nous sera facile, dans ce même cas, de connaître la nature de la courbe décrite par la chaînette sur le développement du cône. Soit R le rayon vecteur de cette courbe, duquel r est la projection, et soit Θ l'angle du développement du cône qui répond à l'angle θ, nous aurons

$$r=\frac{R}{\mathrm{Sin.}\omega}, \qquad \theta=\frac{\Theta}{\mathrm{Sin.}\omega};$$

substituant donc dans l'équation (35), elle deviendra

$$2\Theta=\mathrm{Arc}\left(\mathrm{Cos.}=\frac{a^2\mathrm{Sin.}^4\omega}{R^2\mathrm{Cos.}^2\omega}\right),$$

ou bien

$$a^2\text{Sin.}^4\omega = R^2\text{Cos.}^2\omega\text{Cos }2\Theta = R^2(\text{Cos.}^2\Theta - \text{Sin.}^2\Theta)\text{Cos.}^2\omega \ .$$

Si, pour avoir des coordonnées rectangulaires, on pose

$$R\text{Sin.}\Theta = X \ , \quad R\text{Cos.}\Theta = Y \ ,$$

il viendra, en substituant,

$$(Y^2 - X^2)\text{Cos.}^2\omega = a^2\text{Sin.}^4\omega \ ;$$

équation d'une hyperbole équilatère quel que soit d'ailleurs l'angle générateur du cône.

Pour dernière application, supposons que la chaînette soit posée sur une sphère donnée par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \ , \qquad (37)$$

ce qui donne, par deux différentations,

$$x\text{d}x + y\text{d}y + z\text{d}z = 0 \ , \qquad (38)$$

$$x\frac{\text{d}^2x}{\text{d}s^2} + y\frac{\text{d}^2y}{\text{d}s^2} + z\frac{\text{d}^2z}{\text{d}s^2} + 1 = 0 \ , \qquad (39)$$

et, par suite,

$$P = x \ , \quad Q = y \ , \quad R = z \ , \quad P^2 + Q^2 = x^2 + y^2 = r^2 - z^2 \ ,$$
$$P^2 + Q^2 + R^2 = r^2 \ ;$$

à l'aide de ces divers résultats, les formules (14) et (15) deviennent

$$N = -\frac{2z + A}{r} \ ; \qquad (40)$$

$$r^2(z + A)\frac{\text{d}^2z}{\text{d}s^2} + r^2\left(\frac{\text{d}z}{\text{d}s}\right)^2 + z(2z + A) = r^2 \ . \qquad (41)$$

La formule (39) prouve que, toutes choses égales d'ailleurs, la pression est en raison inverse du rayon de la sphère. Dans le cas particulier de $A=0$ ou $c=a$, on a $N=-\frac{2z}{r}$, de sorte que la pression est proportionnelle à l'élévation de chaque point de la chaînette au-dessus du plan du grand cercle horizontal; elle est à son maximum au pôle de ce cercle, où elle est égale à 2, c'est-à-dire au double du poids d'une unité de longueur de la chaînette.

Dans le meme cas particulier, l'équation (41) devient simplement

$$z\frac{d^2z}{ds^2}+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=\frac{r^2-2z^2}{r^2},$$

ou bien

$$r^2d\left\{\frac{d(r^2-2z^2)}{ds}\right\}^2+4d.(r^2-2z^2)^2=0;$$

ce qui donne, par une première intégration,

$$r^2\left\{\frac{d(r^2-2z^2)}{ds}\right\}^2+4(r^2-2z^2)^2=G.$$

On déterminera la constante G, en observant qu'à $\frac{dz}{ds}$ ou $\frac{d(r^2-2z^2)}{ds}=0$ doit répondre $z=c$; ce qui donne

$$4(r^2-2c^2)^2=G,$$

et, par suite,

$$r^2\left\{\frac{d(r^2-2z^2)}{ds}\right\}^2=4\{(r^2-2c^2)^2-(r^2-2z^2)^2\};$$

puis, en extrayant les racines,

$$\frac{2ds}{r}=\frac{-d(r^2-2z^2)}{\sqrt{(r^2-2c^2)^2-(r^2-2z^2)^2}};$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\frac{2s}{r}=\text{Arc}\left(\text{Cos.}=\frac{r^2-2z^2}{r^2-2c^2}\right);$$

il n'y a point ici de constante à ajouter, puisque $s=0$ quand $z=c$, comme cela doit être.

Au point pour lequel $z=\frac{r}{\sqrt{2}}$, on a $\frac{2s}{r}=\frac{1}{2}\omega$, d'où $s=\frac{\varpi r}{4}$; telle est donc, dans le cas particulier qui nous occupe, la longueur de la portion de chaînette comprise depuis le point dont il s'agit, jusqu'au point le plus bas; d'où il suit que l'arc total de la courbe, compris entre deux points situés de cette sorte, est précisément égal au quart de la circonférence d'un grand cercle.

HYDRODYNAMIQUE.

Solution d'un problème d'hydrodynamique;

Par M. LE BARBIER.

PROBLÈME. *Un vase, dont la surface intérieure est de révolution, autour d'un axe vertical, contient un liquide pesant, homogène et incompressible, dans lequel flotte un solide pesant, dont la surface est également de révolution, autour d'un axe vertical, contenant son centre de gravité, et coïncidant avec l'axe du vase. On suppose qu'après avoir contraint le corps flottant à s'enfoncer verticalement, d'une quantité déterminée, au-dessous de sa situation naturelle d'équilibre, sans que, néanmoins, il soit otalement submergé, on l'abandonne subitement à lui-même; et* *on demande quelles seront alors les lois de son mouvement vertical, abstraction faite de la résistance du liquide* (*) ?

Solution. En coupant le vase à une distance quelconque z d'un point fixe de son axe, par un plan horizontal, on obtiendra une section circulaire dont le rayon R sera une fonction de z; la surface de cette section sera ϖR^2, et l'élément de la capacité du vase $\varpi R^2 \mathrm{d}z$; de sorte que la portion de cette capacité, comprise entre deux plans horizontaux quelconques, sera égale à l'intégrale $\varpi\int R^2 \mathrm{d}z$ prise entre ces mêmes plans.

En coupant le corps flottant à une distance quelconque z d'un point fixe de son axe, par un plan horizontal, on obtiendra une section circulaire, dont le rayon r sera une fonction de z; la surface de cette section sera ϖr^2, et l'élément du volume du corps flottant $\varpi r^2 \mathrm{d}z$; de sorte que la portion de ce volume, comprise entre deux plans horizontaux quelconques, sera égale à l'intégrale $\varpi\int r^2 \mathrm{d}z$ prise entre ces mêmes plans.

Prenons, pour point de départ des z, tant pour le vase que pour le corps flottant, le point où leur axe commun est coupé par le plan de la surface supérieure du liquide, dans l'état naturel d'équilibre, et supposons qu'à l'époque quelconque t, le corps flottant se trouve abaissé au-dessous de cette situation d'une quantité x. Soit X l'élévation correspondante du liquide dans le vase, au-dessus de son niveau primitif; x et X seront deux fonctions de la variable t, et néanmoins il devra y avoir entre ces deux quantités une relation indépendante de cette variable et résultant uniquement de l'incompressibilité du liquide et de l'impénétrabilité de la matière. Cherchons d'abord cette relation.

A l'époque t, la portion du volume du corps flottant passée au-

(*) M. Le Barbier signale ce problème comme ayant été proposé dans les *Annales*, nous n'avons pu découvrir en quel endroit.

J. D. G.

dessous du plan de niveau primitif du liquide sera évidemment $\varpi\int_x^{\circ} r^2\mathrm{d}z$. A la même époque, le volume de liquide, parvenu au-dessus de ce même plan, sera $\varpi\int_X^{\circ} R^2\mathrm{d}z - \varpi\int_{x+X}^{x} r^2\mathrm{d}z$. Or, ces deux volumes doivent visiblement être égaux; on aura donc, en divisant par ϖ

$$\int_X^{\circ} R^2\mathrm{d}z - \int_{x+X}^{x} r^2\mathrm{d}z = \int_x^{\circ} r^2\mathrm{d}z .$$

En remarquant d'ailleurs que

$$\int_{x+X}^{x} r^2\mathrm{d}z = \int_{x+X}^{\circ} r^2\mathrm{d}z - \int_x^{\circ} r^2\mathrm{d}z ,$$

cette équation se réduira simplement à

$$\int_X^{\circ} R^2\mathrm{d}z = \int_{x+X}^{\circ} r^2\mathrm{d}z , \qquad (1)$$

et telle est l'équation dont l'intégration donnera, dans chaque cas particulier, la relation demandée entre les deux variables x et X.

Cherchons présentement l'équation du mouvement vertical du corps flottant, et, pour cela, calculons la force accélératrice pour l'époque t. Soit V le volume de la partie submergée du corps flottant, dans l'état primitif d'équilibre de ce corps; V sera aussi le volume du liquide déplacé à la même époque; de sorte qu'en désignant par δ la densité du liquide, δV sera la masse du liquide déplacé, dans l'état primitif d'équilibre. En représentant donc, à l'ordinaire, par g la gravité, le poids du liquide déplacé sera $g\delta V$. Mais, en représentant par M la masse du corps flottant, son poids sera gM; on devra donc avoir suivant les lois de l'hydrostatique, et en divisant par g,

$$\delta V = M .$$

A l'époque t, le volume du liquide déplacé sera augmenté de $\varpi\int_{x+X}^{\circ} r^2\mathrm{d}z$, de sorte que ce volume sera alors

$$V+\varpi\int_{x+X}^{0} r^2 \mathrm{d}z\ ,$$

le poids du liquide déplacé, c'est-à-dire l'action verticale de bas en haut sera donc

$$g\delta\left(V+\varpi\int_{x+X}^{0} r^2\mathrm{d}z\right)\ ;$$

mais l'action verticale de haut en bas sera égale au poids du corps flottant, c'est-à-dire, à gM ; on aura donc

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=gM-g\delta\left(V+\varpi\int_{x+X}^{0} r^2\mathrm{d}z\right)\ ;$$

ou simplement, en ayant égard à la relation ci-dessus entre M et V

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\varpi g\delta\int_{x+X}^{0} r^2\mathrm{d}z\ ;$$

ou bien encore (1)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\varpi g\delta\int_{X}^{0} R^2\mathrm{d}z\ ; \qquad (2)$$

équation qui ne renfermera plus que les deux variables x et t, lorsqu'on en aura chassé X, au moyen de l'équation (1).

Il est remarquable que ces deux équations ne renferment plus aucune trace ni du volume de la partie submergée du corps flottant dans l'état primitif d'équilibre, ni de sa masse, de sorte que les lois du mouvement de ce corps seront tout à fait indépendantes de ces deux élémens. On pourra même supposer que sa partie inférieure, ainsi que celle du vase ont une figure quelconque; il suffira seulement que la partie de la surface de l'un et de l'autre, baignée par la surface supérieure du liquide, soit, dans toutes les situations de cette surface, une surface de révolution.

Pour appliquer ces formules générales à un exemple simple, supposons que la surface du vase et celle du corps flottant soient l'une et l'autre cylindriques, alors R et r, rayons respectifs des cylindres, seront des quantités constantes; au moyen de quoi les équations (1) et (2) deviendront

$$R^2\int_X^0 dz = r^2\int_{x+X}^0 dz\ , \qquad (3)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varpi g\delta R^2\int_X^0 dz\ ; \qquad (4)$$

ce qui donnera, en intégrant,

$$R^2X = r^2(x+X)\ , \qquad (5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varpi g\delta R^2 X\ . \qquad (6)$$

L'équation (5) donne

$$X = \frac{r^2x}{R^2-r^2}\ , \qquad (7)$$

valeur qui, substituée dans l'équation (6), la change en celle-ci

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\varpi g\delta R^2r^2}{R^2-r^2}x\ ; \qquad (8)$$

la force accélératrice, nulle en même temps que x, est donc simplement proportionnelle à la distance verticale du corps flottant à sa situation primitive d'équilibre ; elle est aussi proportionnelle à la densité du liquide; et elle est d'autant plus grande, toutes choses égales d'ailleurs, que le rayon du vase et celui du corps flottant sont moins inégaux. On voit aussi qu'aux mêmes distances du corps flottant, au-dessus et au-dessous de sa situation primitive d'équilibre, les forces accélératrices ne doivent différer que par le signe.

En multipliant par $2dx$ les deux membres de l'équation (8) et intégrant, elle devient

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = \frac{\varpi g\delta R^2r^2}{R^2-r^2}(a^2-x^2)\ ; \qquad (9)$$

a étant la constante arbitraire. Cette expression du quarré de la vîtesse devient nulle pour $x=a$; mais la vîtesse est nulle aussi au moment où on abandonne le corps flottant à lui-même; donc la constante a est précisément la quantité dont ce corps flottant était alors enfoncé verticalement au-dessous de sa situation primitive d'équilibre; et comme la vîtesse est également nulle, lorsqu'on fait $x=-a$, il s'ensuit que le corps flottant s'élevera précisément au-dessus de sa situation primitive d'équilibre, de la même quantité dont on l'avait d'abord enfoncé au-dessous. De plus, comme la même valeur absolue de x, quel qu'en soit le signe, donne toujours la même valeur pour v^2, il s'ensuit que les vîtesses du corps flottant, à même distance au-dessus et au-dessous de sa situation primitive d'équilibre, ne différeront au plus que par le signe. On pourra d'ailleurs rendre cette vîtesse indéfiniment grande, en rendant la différence des rayons R et r de plus en plus petite; ce qui s'accorde parfaitement avec l'effet énergique de la presse hydraulique et avec le paradoxe hydrostatique de Pascal.

On voit enfin que la vîtesse du corps flottant sera la plus grande possible lorsqu'on aura $x=0$, c'est-à-dire, lorsqu'il parviendra à sa situation primitive d'équilibre. En désignant donc par w cette plus grande vîtesse, on aura

$$w^2=\frac{\varpi g\delta R^2r^2}{R^2-r^2}a^2\ ; \qquad (10)$$

au moyen de quoi l'équation (9) deviendra simplement

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=v^2=\frac{w^2}{a^2}(a^2-x^2)\,. \qquad (11)$$

On tire de là

$$w\mathrm{d}t=\frac{a\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ , \qquad (12)$$

et ensuite en intégrant et comptant les temps de l'époque où le corps flottant est abandonné à lui-même et où conséquemment $x=a$,

$$wt=-a\mathrm{Arc}\left(\mathrm{Cos.}=\frac{x}{a}\right)\ ; \qquad (13)$$

et, par suite,

$$x = a\mathrm{Cos.}\,\frac{wt}{a}\;. \qquad (14)$$

En donnant à t les valeurs, en progression par différences,

$$\frac{4n\varpi a}{2w}\,,\quad \frac{(4n+1)\varpi a}{2w}\,,\quad \frac{(4n+2)\varpi a}{2w}\,,\quad \frac{(4n+3)\varpi a}{2w}\,,$$

où n est un nombre entier quelconque; on obtiendra pour x les valeurs

$$+a\,,\quad \pm 0\,,\quad -a\,,\quad \mp 0\;;$$

ainsi, non seulement les oscillations seront périodiques, mais chaque oscillation complète se trouvera divisée en quatre temps égaux durant lesquels le corps flottant passera successivement de sa situation la plus basse à sa situation primitive d'équilibre, de celle-ci à la plus élevée, de cette dernière à la précédente et enfin de celle-ci à la plus basse. On voit d'ailleurs (10) que ces intervalles de temps seront d'autant plus courts que la densité du liquide sera plus grande et les rayons des deux cylindres moins inégaux.

En substituant pour x sa valeur (13) dans les formules (8) et (11), il viendra, en ayant égard à la relation (10),

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{w^2}{a}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{wt}{a}\;,\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v = w\mathrm{Sin.}\,\frac{wt}{a}\;; \qquad (15)$$

telles sont donc la force accélératrice et la vîtesse en fonction du temps.

Veut-on connaître les lois du mouvement vertical de la surface supérieure du liquide ? En substituant dans la formule (7) la valeur (13) de x, on trouvera

$$X = \frac{ar^2}{R^2-r^2}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{wt}{a}\;; \qquad (16)$$

d'où on conclura, par deux différentiations,

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = -\frac{r^2w}{R^2-r^2}\,\mathrm{Sin.}\,\frac{wt}{a}\;,\qquad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{r^2w^2}{a(R^2-r^2)}\,\mathrm{Cos.}\,\frac{wt}{a}\;; \qquad (17)$$

telles sont donc la vîtesse et la force accélératrice de la surface supérieure du liquide.

S'il s'agissait d'un cylindre flottant dans un liquide indéfini, cela reviendrait à supposer R infini, on aurait alors (10)

$$v^2=\varpi g\delta r^2 a^2\ ; \qquad (18)$$

cela donnerait d'abord

$$X=0\ ,\quad \frac{dX}{dt}=0\ ,\quad \frac{d^2X}{dt^2}=0\ ;$$

c'est-à-dire que la hauteur du liquide demeurerait constante. On trouverait ensuite, au moyen de la relation (17),

$$x=a\mathrm{Cos}.rt\sqrt{\varpi g\delta}\ , \qquad (19)$$

$$\frac{dx}{dt}=v=-ar\sqrt{\varpi g\delta}\,\mathrm{Sin}.rt\sqrt{\varpi g\delta}\ , \qquad (20)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\varpi g\delta r^2 a\mathrm{Cos}.rt\sqrt{\varpi g\delta}\ ; \qquad (21)$$

on aura ainsi $x=a$, toutes les fois qu'on aura

$$\mathrm{Cos}.rt\sqrt{\varpi g\delta}=1\ ,\qquad \text{ou}\qquad rt\sqrt{\varpi g\delta}=2n\varpi\ ;$$

d'où

$$t=\frac{2n}{r}\sqrt{\frac{\varpi}{g\delta}}\ ;$$

quantité indépendante de a; ce qui prouve que la durée des oscillations sera toujours la même, quel que soit l'enfoncement du corps flottant, qui ne fera qu'en accroître la vîtesse, propriété tout à fait analogue à l'isochronisme du mouvement dans la cycloïde.

On voit par la forme des équations (1) et (2) que, quelles que soient les courbes génératrices données tant de la surface du vase que de celle du corps flottant, on pourra toujours en conclure la nature du mouvement de ce dernier, et que même le problème ne dépendra jamais que des quadratures. On pourrait aussi renverser la question, se donner l'une des deux surfaces et se demander quelle doit être la nature de l'autre pour que le corps flottant ait un mouvement donné ? C'est un problème sur lequel nous pourrons revenir dans une autre occasion.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution d'un problème de géométrie énoncé à la pag. 183 *du XIX.me volume des* Annales;

Par M. Lenthéric, docteur ès sciences, professeur au collége royal de Montpellier.

Problème. Quelles doivent être les dimensions d'un cylindre droit, inscrit à une sphère donnée, pour que sa surface ou son volume soit un maximum ?

Solution. Si l'axe du cylindre était égal au diamètre de la sphère, sa surface, soit latérale, soit totale, ainsi que son volume, seraient évidemment nuls. Si, au contraire, son axe était nul, sa surface latérale et son volume seraient encore nuls, tandis que sa surface totale serait double de celle d'un grand cercle de la sphère.

On voit clairement par là que la surface latérale et le volume du cylindre sont susceptibles de maximum; mais rien ici ne nous montre qu'il en doive être de même de sa surface totale, ou du moins on ne voit pas, *à priori*, si cette surface totale maximum est autre que celle qui répond à une hauteur nulle, et l'application du calcul peut seule nous éclairer sur ce point.

Soient r le rayon de la sphère donnée et $2x$ la hauteur du cylindre cherché; le rayon de sa base sera $\sqrt{r^2-x^2}$; la circonférence de cette base sera donc $2\varpi\sqrt{r^2-x^2}$, et sa surface $\varpi(r^2-x^2)$. En conséquence, si nous représentons par S la surface latérale du cylindre, par Σ sa surface totale et par V son volume, nous aurons

$$S=4\varpi x\sqrt{r^2-x^2}\ ,$$
$$\Sigma=2\varpi(r^2-x^2)+4\varpi x\sqrt{r^2-x^2}\ ,$$
$$V=2\varpi x(r^2-x^2)\ .$$

De là on tire, par différentiation,

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=4\varpi\frac{r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}\ ,\qquad \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x}=4\varpi x.\frac{2x^2-3r^2}{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\ ,$$
$$\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}x}=4\varpi\left\{\frac{r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}-x\right\},\qquad \frac{\mathrm{d}^2\Sigma}{\mathrm{d}x^2}=4\varpi\left\{\frac{x(r^2-6x^2)}{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}-1\right\},$$
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=2\varpi(r^2-3x^2)\ ;\qquad \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}=-12\varpi x\ .$$

En égalant les différentielles premières à zéro, on obtient successivement

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{r}{\sqrt{2}}\ , \\[2ex] x=r\sqrt{\dfrac{3\pm\sqrt{-11}}{10}}\ , \\[2ex] x=\dfrac{r}{\sqrt{3}}\ , \end{array}\right\}\text{d'où}\left\{\begin{array}{ll} S=2\varpi r^2\ , & \dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}=-16\varpi\ , \\[2ex] \Sigma= & \dfrac{\mathrm{d}^2\Sigma}{\mathrm{d}x^2}= \\[2ex] V=4\varpi\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}}\right)^3, & \dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}=-4\varpi\left(1+\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right). \end{array}\right.$$

Ainsi l'on voit, en résumé, 1.° qu'il n'y a proprement ni *maximum* ni *minimum* pour la surface totale, puisque, pour ce cas, la hauteur du cylindre est imaginaire ; 2.° que la hauteur du cylindre, dont la surface latérale est *maximum*, est égale au côté du quarré inscrit à un grand cercle de la sphère, et que cette surface latérale est alors double de celle d'un grand cercle ; 3.° enfin, que la hauteur du cylindre de plus grand volume qu'on puisse inscrire à une sphère donnée est les deux tiers du côté du triangle équilatéral inscrit à un grand cercle de la sphère, et que ce volume *maximum* est triple de celui de la sphère qui aurait cette même hauteur pour diamètre.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Sur le nombre des conditions nécessaires pour déterminer une ligne ou une surface du second ordre;

Par Un ABONNÉ.

ON lit, à la pag. 226 du IV.^{me} volume de la *Correspondance* de M. QUETELET, une note de M. Pagani, professeur à Louvain, sur le nombre des points nécessaires pour déterminer, dans l'espace, une surface du second ordre d'une espèce donnée; note dans laquelle on se borne à énoncer les propositions, pour laisser, dit-on, au lecteur le plaisir d'en trouver les démonstrations.

Ces démonstrations ne sont point difficiles à découvrir, si toutefois on peut appeler démonstration quelques considérations fort simples dont il faut faire précéder l'énoncé de chaque cas. Nous nous proposons de traiter ici sommairement non seulement la question qui a fait le sujet des recherches de M. Pagani, mais encore son analogue relative aux lignes du second ordre dont il ne paraît pas s'être occupé.

Rappelons-nous bien d'ailleurs, dans tout ce qui va suivre, qu'au moyen d'un multiplicateur choisi d'une manière convenable, on peut toujours amener un quelconque des termes d'une équation à avoir un coefficient donné, ou, plus généralement, faire en sorte qu'il existe entre tous ou partie des coefficiens de cette équation, une relation donnée quelconque, non homogène; de manière qu'on peut, sans rien ôter à la généralité d'une telle équation, admettre qu'une telle relation existe.

Il résulte de là que la ligne ou la surface exprimée par une équation générale à deux ou à trois variables, d'une forme donnée, ne saurait être assujétie qu'à autant de conditions moins une que cette équation a de termes. Ainsi, par exemple, une ligne du second ordre ne saurait être assujétie à plus de cinq conditions, ni une surface de cet ordre à plus de neuf.

I. Cela posé, pour qu'une ellipse ou une hyperbole soit donnée de *grandeur*, il faut en connaître deux élèmens, tels, par exemple, que les deux axes, ou l'un d'eux avec l'excentricité ou le paramètre, ou encore ces deux derniers lignes, etc. Pour qu'en outre elle soit donnée *de situation*, il faut connaître et les deux coordonnées de son centre, et une quantité angulaire qui détermine la direction de l'un de ses axes.

On pourrait encore, pour donner une ellipse ou une hyperbole de grandeur et de situation sur un plan, donner les quatre coordonnées de ses deux foyers, avec l'un de ses axes, son excentricité ou son paramètre. Dans l'un comme daus l'autre cas, *cinq élèmens* seront donc également nécessaires et seront en outre suffisans pour déterminer complètement la grandeur et la situation d'une ellipse ou d'une hyperbole sur un plan.

Donc, quand bien même on ne connaîtrait encore l'ellipse et l'hyperbole que par leur définition géométrique, que par leur description graphique, on pourrait affirmer que l'équation générale de l'une ou de l'autre courbe doit contenir cinq coefficiens arbitraires et indépendans ; que conséquemment cette équation doit avoir six termes ; qu'ainsi elle ne saurait être d'un degré moindre que le second ; que, par suite, si elle est de ce degré, elle doit être complète, sans aucune relation obligée entre ses coefficiens; qu'enfin c'est proposer un problème possible et déterminé que de demander de faire passer une ellipse ou une hyperbole par cinq points donnés.

Si, des cinq élémens qui doivent déterminer la grandeur et la situation de la courbe, un était donné, ou, ce qui revient au même, si l'on exigeait qu'il existât une certaine équation de relation entre tous ou partie de ces élémens, le nombre des élémens vraiment arbitraires et indépendans se trouvant ainsi réduit à quatre, on ne pourrait plus assujétir la courbe qu'à passer par quatre points seulement; et il devrait conséquemment exister une certaine relation homogène entre les coefficiens de son équation générale.

C'est, par exemple, ce qui arriverait si l'on exigeait que la courbe fût semblable à une ellipse ou à une hyperbole donnée; car, cela reviendrait à donner le rapport de grandeur des axes, ou encore à donner l'angle soit des diamètres conjugués égaux soit des asymptotes. C'est encore ce qui arriverait si l'on exigeait que le centre, l'un des foyers ou l'un des sommets de la courbe, fût situé sur une droite donnée. Dans tous les cas semblables, les coefficiens de l'équation générale ne sauraient être liés entre eux par plus d'une condition.

On voit par là, en particlier, que c'est sans fondement aucun que, dans un traité élémentaire fort répandu, et que même beaucoup de jeunes gens se croient dans l'obligation d'étudier, on a avancé que deux conditions sont nécessaires pour que l'équation générale du second degré à deux indéterminées, exprime une hyperbole équilatère. Il est évident, par ce qui précède, qu'une seule condition suffit pour cela. Du reste, l'hyperbole équilatère n'a rien ici de plus particulier que toute autre hyperbole, dont l'angle des asymptotes serait donné.

Il pourrait se faire qu'en voulant rendre l'ellipse ou l'hyperbole à construire, semblable à une ellipse ou à une hyperbole donnée, elle se réduisît à un point ou au système de deux droites. Une seule condition est donc nécessaire pour qu'une équation complète du second degré à deux indéterminées exprime un point ou le système de deux droites.

Dans le cas de l'ellipse, celle à laquelle et doit être semblable peut dégénérer en cercle; alors on n'a plus à déterminer la direction de l'un des axes; trois élémens suffisent donc pour déterminer un cercle de grandeur et de situation, sur un plan; savoir les deux coordonnées de son centre et son rayon; deux équations de relation entre les coefficiens d'une équation du second degré à deux indéterminés, sont donc nécessaires pour que cette équation exprime un cercle.

Pour donner deux parallèles sur un plan, il suffit de donner les segmens que l'une d'elles détermine sur les deux axes, à partir de l'origine et la distance qui la sépare de l'autre, ce qui fait trois élémens, comme pour le cercle; donc aussi deux conditions sont nécessaires pour qu'une équation du second degré à deux indéterminées exprime le système de deux parallèles.

Si la distance entre les parallèles était donnée, il ne resterait plus que deux élémens arbitraires; et il en serait encore de même si cette distance était nulle; donc aussi trois conditions sont nécessaires pour qu'une équation du second degré à deux indéterminées exprime le système de deux droites qui se confondent.

Pour se donner, de grandeur et de situation, une ellipse ou une hyperbole sur un plan, on peut se donner les deux coordonnées de l'une des extrémités du grand axe ou de l'axe transverse, l'angle qui en détermine la direction, sa longueur et le paramètre. Si l'on suppose que cet axe doive avoir une longueur donnée, la courbe ne dépendra plus que de quatre élémens; et il en sera encore de même si cette longueur est infinie; mais, comme alors on passe à la parabole, il s'ensuit que la détermination complète d'une parabole sur un plan ne dépend que de quatre conditions seulement, et qu'ainsi une seule équation de relation est nécessaire entre les coefficiens d'une équation complète du second degré à deux indéterminées, pour que cette équation exprime une parabole. Il en faudrait deux pour qu'elle exprimât une parabole dont le paramètre serait donné. M. Pagani appelle *parabole équilatère* celle dont le paramètre est égal à l'unité; mais cette dénomination nous paraît tout à fait impropre, puisqu'ainsi toute parabole serait ou ne serait point équilatère, suivant l'unité qu'on voudrait choisir.

On voit, en résumé, 1.° que, par cinq points donnés, on peut faire passer une ellipse ou une hyperbole quelconque; 2.° que, par quatre points donnés, on peut faire passer ou une hyperbole équilatère ou le système de deux droites qui se coupent ou une parabole; 3.° que, par trois points donnés, on peut faire passer ou une circonférence de cercle ou le système de deux parallèles; 4.° qu'enfin, par deux points donnés, on peut faire passer le système de deux droites qui se confondent.

II. Pour déterminer *de grandeur* un ellipsoïde ou un hyperboloïde, il faut simplement connaître les longueurs de ses trois diamètres principaux; pour le déterminer en outre *de situation* dans l'espace, il faut connaître les trois coordonnées de son centre, deux angles qui déterminent la direction de l'un de ses diamètres principaux et, par suite, le plan des deux autres, et enfin un troisième angle qui fixe la direction d'un de ceux-ci dans ce plan, ce qui fait en tout *neuf élémens* distincts et indépendans.

Donc, quand bien même l'ellipsoïde et l'hyperboloïde ne nous seraient connus que par leur définition, que par leur description graphique, on pourrait affirmer que l'équation générale de l'une ou de l'autre surface doit renfermer neufs coefficiens distincts et indépendans et doit, par conséquent, avoir dix termes; qu'ainsi cette équation ne saurait être d'un degré moindre que le second; que, si elle n'excède pas le second degré, elle doit être complète, sans qu'il existe aucune relation obligée entre les coefficiens de ses termes; et qu'enfin c'est proposer un problème possible et déterminé que de demander de faire passer un ellipsoïde ou un hyperboloïde par neuf points donnés.

Si, des neuf élémens qui doivent déterminer la grandeur et la situation de la surface courbe, un était donné, ou, ce qui revient au même, si l'on exigeait qu'il existât une certaine équation de relation entre tous ou partie de ces élémens, le nombre des élémens, vraiment arbitraires et indépendans, se trouvant ainsi réduit à huit, on ne pourrait plus assujétir la surface qu'à passer par huit points seulement; et il devrait conséquemment exister une certaine relation homogène entre les coefficiens de l'équation générale.

C'est, par exemple, ce qui arriverait si l'on exigeait que l'un des diamètres principaux fût d'une longueur donnée ou que l'une des trois sections principales fût semblable à une ellipse ou à une hyperbole donnée. C'est encore ce qui arriverait si l'on exigeait que le centre ou l'un des sommets de la surface fût situé sur un plan donné. Dans tous les cas semblables, les coefficiens de l'équation générale ne sauraient être liés entre eux par plus d'une relation.

Pour qu'une surface conique soit donnée de grandeur, il faut donner ses deux sections angulaires principales; pour la donner en outre de situation dans l'espace, il faut donner les trois coordonnées de son sommet, ensuite deux angles qui déterminent la direction de son axe, et enfin un autre angle qui fixe la situation de l'un de ces plans principaux; donc la surface conique du second ordre est une de ces surfaces dont la grandeur et la situation dans l'espace ne dépendent que de huit élémens, une de ces surfaces qu'on ne peut assujétir à passer que par huit points seulement; et, pour que l'équation générale du second degré à trois indéterminées exprime une surface conique, il faut qu'il existe une équation de relation homogène entre les coefficens de ses termes.

Pour qu'un paraboloïde soit donné de grandeur, il suffit de connaître les paramètres de ses deux sections principales. Pour qu'en outre il soit donné de situation dans l'espace, il faut donner les trois coordonnées de son sommet, deux angles qui fixent la direction de son axe et un troisième angle qui détermine le plan de l'une de ses sections principales. Le paraboloïde est donc encore une de ces surfaces dont la grandeur et la situation dans l'espace ne dépendent que de huit conditions seulement, une surface qui se trouve complètement déterminée lorsqu'on l'assujétit à passer par huit points donnés; et, pour que l'équation générale des surfaces du second ordre exprime une telle surface, il suffit d'une seule relation homogène entre ses coefficiens.

Si, des neuf élémens qui déterminent de grandeur et de situation dans l'espace un ellipsoïde ou hyperboloïde, deux étaient donnés, ou ce qui revient au même, si l'on exigeait qu'il existât deux relations données entre tous ou partie de ces élémens, le nombre des élémens vraiment arbitraires et indépendans se trouvant ainsi réduits à sept, on ne pourrait plus assujétir la surface qu'à passer par sept points seulement ; et il devrait conséquemment exister deux relations distinctes entre les coefficiens de l'équation générale.

C'est, par exemple, ce qui arriverait si l'on exigeait que l'une des sections principales fût une ellipse ou une hyperbole donnée, ou que la surface fût semblable à une surface donnée. C'est encore ce qui arriverait si l'on exigeait que le centre ou l'un des sommets se trouvât sur une droite donnée.

Pour donner de grandeur un ellipsoïde ou un hyperboloïde de révolution, il suffit de donner le rayon de sa section circulaire principale et la longueur du diamètre principal, perpendiculaire à son plan. Pour que cette surface soit donnée en outre de situation dans l'espace, il faudra donner les trois coordonnées de son centre et en outre deux angles qui fixent la direction de son axe ; donc l'ellipsoïde et l'hyperboloïde de révolution sont du nombre des surfaces du second ordre qui ne dépendent que de sept élémens, et qui sont complètement déterminées dans l'espace lorsqu'on les assujétit à passer par sept points donnés ; d'où il suit que, pour que l'équation du second degré à trois indéterminées exprime une telle surface, il faut qu'il existe deux équations de relation entre les coefficiens de ses termes.

Pour donner de grandeur un cylindre elliptique ou hyperbolique, il suffit de donner les diamètres principaux de l'une de ses sections orthogonales ; pour qu'il soit donné en outre de situation dans l'espace, il faut donner les quatre coordonnées des deux points où son axe perce deux des plans coordonnés ; enfin, il faut encore donner un angle qui fixe la situation du plan de l'une de ses sections principales, d'où l'on voit que le cylindre elliptique ou hyperbolique est encore une de ces surfaces dont la grandeur et la situation dans l'espace sont déterminées par sept conditions, et qu'on peut conséquemment assujétir à passer par sept points donnés.

Si, des neuf élémens qui déterminent de grandeur et de situation dans l'espace une surface du second ordre, trois sont donnés ou, ce qui revient au même, si l'on donne trois équations de relation entre tous ou partie de ces neuf élémens, le nombre des élémens vraiment arbitraires et indépendans se trouvant ainsi réduit à six, on ne pourra plus assujétir la surface qu'à passer par six points donnés, et il devra conséquemment exister trois équations de relation entre les coefficiens de l'équation générale. C'est, par exemple, le cas où un ellipsoïde ou un hyperboloïde serait donné de grandeur.

Pour donner de grandeur une surface conique de révolution, il suffit de donner son angle générateur. Pour la donner en outre de situation dans l'espace, il faut donner de plus les trois coordonnées de son sommet et deux angles qui déterminent la direction de son axe; donc la surface conique de révolution est du nombre de celles dont la grandeur et la situation dans l'espace sont déterminées par six élémens, et qu'on peut conséquemment assujétir à passer par six points donnés; d'où il suit que, pour que l'équation générale du second degré à deux indéterminées exprime une telle surface, il est nécessaire qu'il existe trois équations de relation entre ses coefficiens.

Pour qu'un paraboloïde de révolution soit donné de grandeur, il suffit de donner le paramètre commun à tous ses méridiens. Pour qu'il soit en outre donné de situation dans l'espace, il faut donner de plus les trois coordonnées de son sommet et deux angles qui fixent la direction de son axe. Donc le paraboloïde de révolution est également du nombre de ces surfaces dont la grandeur et la situation ne dépendent que de six élémens et qu'on détermine conséquemment en les assujétissant à passer par six points donnés;

d'où il suit encore que trois conditions sont nécessaires pour que l'équation générale du second degré, à trois indéterminées, exprime une telle surface.

Pour qu'un cylindre parabolique soit donné de grandeur, il suffit de donner le paramètre commun de toutes ses sections orthogonales ; pour qu'il soit donné en outre de situation dans l'espace, il faudra donner encore les quatre coordonnées des deux points où deux plans coordonnés sont percés par la droite qui contient les sommets de toutes ces sections ; il faudra donner aussi un angle qui détermine la direction de son plan diamétral principal ; donc le cylindre parabolique est aussi une des surfaces dont la grandeur et la situation, dans l'espace, ne dépendent que de six élémens, et qu'on détermine complètement en les assujétissant à passer par six points donnés ; et trois conditions sont nécessaires pour que l'équation générale du second degré, à trois indéterminées, exprime une telle surface.

Pour déterminer deux plans dans l'espace, il suffit de connaître les six segmens qu'ils déterminent sur les trois axes à partir de l'origine ; donc le système de deux plans doit encore être classé parmi les surfaces dont la détermination complète dépend de six conditions, et qu'on peut conséquemment assujétir à passer par six points donnés ; et trois conditions sont nécessaires pour que l'équation générale du second degré à trois indéterminées exprime un tel système.

Nous venons de voir ci-dessus que sept élémens sont nécessaires pour déterminer, de grandeur et de situation dans l'espace, un cylindre elliptique ; de sorte que, si l'on exigeait que ses sections orthogonales fussent semblables à une ellipse donnée, il ne dépendrait plus que de six élémens ; mais il pourrait bien se faire qu'alors les sections orthogonales se réduisissent à des points, ce qui réduirait le cylindre à une droite indéfinie ; donc trois conditions sont nécessaires pour que l'équation générale du second degré, à trois indéterminées, exprime une simple ligne droite.

Si des neuf élémens qui déterminent, en général, de grandeur et de situation, dans l'espace, une surface du second ordre, quatre sont donnés ou, ce qui revient au même, si l'on donne quatre équations de relation entre tous ou partie de ces élémens, le nombre des élémens arbitraires et vraiment indépendans se trouvera ainsi réduit à cinq ; on ne pourra donc plus assujétir la surface qu'à passer par cinq points donnés; et il devra conséquemment exister quatre équations de relation entre les coefficiens de l'équation générale.

Pour qu'un cylindre de révolution soit donné de grandeur, il suffit d'en donner le rayon; si l'on veut, en outre, qu'il soit donné de situation dans l'espace, il faudra donner de plus les quatre coordonnées des deux points où son axe perce deux des plans coordonnés; donc le cylindre de révolution est une surface dont la grandeur et la situation, dans l'espace, ne dépendent que de cinq conditions et qu'on peut par conséquent assujétir à passer par cinq points donnés ; et quatre conditions sont nécessaires pour que l'équation générale du second degré exprime une telle surface. Il en irait absolument de même pour le système de deux plans perpendiculaires l'un à l'autre.

Si des neuf élémens qui déterminent, en général, de grandeur et de situation, dans l'espace, une surface du second ordre, cinq sont donnés, ou, ce qui revient au même, si l'on donne cinq équations de relation entre tous ou partie d'entre eux, le nombre des élémens vraiment arbitraires et indépendans se trouvera ainsi réduit à quatre ; de sorte qu'on ne pourra assujétir la surface qu'à passer par quatre points seulement, et que cinq conditions seront nécessaires pour que l'équation générale du second degré, à deux indéterminées, exprime une telle surface. C'est évidemment le cas de la sphère et celui du système de deux plans parallèles.

Si enfin six des neuf élémens étaient donnés, ou, ce qui revient au même, si l'on donnait six équations entre tous ou partie d'entre eux, il n'en resterait plus que trois d'indépendans ; on ne pourrait donc plus assujétir une telle surface qu'à passer par trois points donnés ; et six conditions seraient nécessaires pour qu'elle fût représentée par l'équation générale du second degré à trois indéterminées. C'est, par exemple, le cas d'une sphère d'un rayon donné ou du système de deux plans qui se confondent.

Ainsi, en résumé, c'est se proposer un problème, à la fois possible et déterminé, que de demander de faire passer 1.° par trois points donnés, le système de deux plans qui se confondent ; 2.° par quatre points donnés, une sphère ou le système de deux plans parallèles ; 3.° par cinq points donnés, un cylindre de révolution ; 4.° par six points donnés, un paraboloïde de révolution, un cylindre parabolique ou le système de deux plans ; 5.° par sept points donnés, un ellipsoïde ou un hyperboloïde de révolution, ou bien encore un cylindre elliptique ou hyperbolique ; 6.° par huit points donnés, une surface conique quelconque ou un paraboloïde quelconque ; 7.° enfin, par neuf points donnés un ellipsoïde ou un hyperboloïde quelconque.

Nous n'avons présenté ici que les cas principaux ; il en est une multitude d'autres ; mais ils ne pourront jamais causer d'embarras, en appliquant les considérations qui nous ont guidés par rapport à ceux que nous avons signalés.

Lyon, le 28 d'août 1828.

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Examen et complément de la méthode de Newton, pour l'approximation des racines incommensurables, des équations numériques de tous les degrés;

Par M. GERGONNE.

De toutes les méthodes propres à déterminer, par approximation, les racines réelles des équations numériques, celle de Newton est bien, sans contredit, la plus commode et la plus expéditive; elle peut d'ailleurs s'appliquer tout aussi bien à plusieurs équations, entre un égal nombre d'inconnues, qu'à une équation qui n'en renferme qu'une seule, à des équations transcendantes, comme à des équations algébriques; mais cette méthode repose sur des considérations assez délicates, et l'esprit n'en peut être bien saisi qu'autant qu'elle est exposée avec tout le soin et tous les développemens convenables. En outre, cette méthode est assez souvent en défaut; et il ne paraît pas qu'on ait encore bien caractérisé jusqu'ici ni les conditions nécessaires et suffisantes pour en assurer le succès, ni les diverses circonstances qui peuvent en rendre l'application illusoire. Enfin cette méthode, telle du moins qu'on la présente communément, manque d'un complément au défaut duquel tout procédé approximatif, quelque parfait qu'il pût paraître à d'autres égards, devrait être sévèrement repoussé; elle ne donne point, en effet, à chaque approximation nouvelle, comme le fait celle de

Lagrange, la limite de l'erreur dont cette approximation se trouve affectée.

Je désire que l'essai qu'on va lire soit jugé propre à remédier en partie à ces divers inconvéniens; il renferme l'exposé de la méthode d'approximation de Newton, telle, à peu près, que j'ai coutume de la présenter dans mes cours.

Pour plus de simplicité et de briéveté je supposerai constamment, dans tout ce qui va suivre, que l'équation proposée n'a point de racines égales, et que celle de ses racines dont on veut poursuivre l'approximation est une racine positive. On sait, en effet, que la question peut toujours être réduite à ces termes.

Soit l'équation numérique proposée, de degré quelconque,

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots\ldots+Gx^2+Hx+K=\mathrm{F}x=0\,. \quad (1)$$

Supposons que l'on sache de cette équation que, parmi ses racines réelles, positives, inconnues, il en est une, et une seule r, très-peu différente d'un nombre donné p que, pour fixer les idées, nous supposerons plus grand que cette racine inconnue. Soit ξ ce qu'il faudrait rigoureusement retrancher à p pour avoir r; posons $x=p-\xi$; il viendra, en substituant dans (1),

$$A(p-\xi)^m+B(p-\xi)^{m-1}+C(p-\xi)^{m-2}+\ldots\ldots+G(p-\xi)^2+H(p-\xi)+K=0\,; \quad (2)$$

équation du même degré en ξ que la proposée en x, et dont les racines sont les m restes qu'on obtient en retranchant tour à tour de p toutes les racines de la proposée. Au nombre de ses racines se trouve donc, en particulier, ce qu'il faut retrancher à p pour avoir la racine r; mais si, pour obtenir cette quantité, il nous fallait résoudre l'équation (2), nous n'aurions fait ainsi que déplacer une difficulté qu'il s'agit, au contraire, d'éluder.

Pour y parvenir observons que, puisqu'une seule des racines de l'équation (1) est peu différente de p, une seule des racines de l'équation (2) doit être un fort petit nombre ; d'où il suit que, relativement à cette racine, la seule que nous ayons intérêt de connaître, l'équation ne sera que faiblement altérée si, dans le développement de son premier membre, nous supprimons tous les termes affectés des puissances de ξ supérieures à la première. Par leur suppression, nous atteindrons à la fois deux buts ; car, d'une part, nous amenerons ainsi l'équation (2) à n'être plus que du premier degré seulement, et, d'une autre, nous exprimerons tacitement que la racine unique de l'équation résultante est la plus petite de toutes, c'est-à-dire, précisément celle que nous cherchons. Toutefois, la seule valeur de ξ que nous obtiendrons de cette équation résultante ne sera point exacte, puisqu'elle aura été déduite d'une équation tronquée ; mais elle approchera d'autant plus de l'être, qu'elle sera plus petite, puisqu'alors nos suppressions en auront eu d'autant moins d'importance ; de sorte qu'elle serait rigoureusement exacte si on la trouvait tout à fait nulle ; ce qui est d'ailleurs manifeste, puisqu'à $\xi=0$ doit répondre $x=p$.

En exécutant le développement du premier membre de l'équation (2), avec les suppressions qui viennent d'être indiquées, elle devient

$$\left.\begin{array}{r}Ap^m+Bp^{m-1}+Cp^{m-2}+\ldots\ldots+Gp^2+Hp+k\\ -[mAp^{m-1}+(m-1)Bp^{m-2}+(m-2)Cp^{m-3}+\ldots\ldots+Gp+H]\xi\end{array}\right\}=0\ ;$$

or, nous avons déjà (1)

$$Ap^m+Bp^{m-1}+Cp^{m-2}+\ldots\ldots+Gp^2+Hp+k=\mathrm{F}p\ ;$$

si donc, suivant les notations de Lagrange, nous posons en outre

$$mAp^{m-1}+(m-1)Bp^{m-2}+(m-2)Cp^{m-3}+\ldots\ldots+Gp+H=\mathrm{F}'p\ ,$$

notre équation deviendra simplement

$$\mathrm{F}p-\xi\mathrm{F}'p=0\ ,$$

d'où nous tirerons

$$\xi = \frac{Fp}{F'p} \; ; \qquad (3)$$

telle est donc, à peu près, ce qu'il faut retrancher au nombre donné p, pour avoir la valeur r de x, de sorte que nous pourrons écrire, par forme d'approximation,

$$x = p - \frac{Fp}{F'p} \; ; \qquad (4)$$

ce qui donne cette règle fort simple : *ce qu'il faut retrancher d'une valeur approchée, mais un peu trop grande, de l'une des racines réelles positives d'une équation numérique pour en obtenir une valeur plus approchée, est une fraction ayant pour numérateur ce que devient le premier membre de l'équation proposée en y mettant cette première valeur approchée à la place de l'inconnue, et pour dénominateur ce que devient la fonction dérivée de ce premier membre lorsqu'on y fait la même substitution.*

La forme même de la valeur (3) de ξ semble venir pleinement à l'appui de cette proposition. Si, en effet, p est un nombre presque égal à une des racines de l'équation (1), le numérateur Fp de cette valeur doit être un très-petit nombre, tellement que, si p était rigoureusement racine de l'équation (1), ce numérateur serait tout à fait nul. Mais il n'en saurait être de même, en général, de son dénominateur $F'p$. Pour qu'en effet ce dénominateur fût tout à fait nul, en même temps que le numérateur Fp, il faudrait, suivant la théorie des racines égales, que l'équation (1) eût plusieurs racines égales à p ; d'où il suit que, pour qu'il fût très-petit en même temps que le numérateur, il faudrait que l'équation (1) eût plusieurs racines peu différentes de p ; supposition que, dès le début, nous avons formellement exclue. Dans notre hypothèse, donc, le dénominateur de la valeur de ξ sera généralement beaucoup plus grand que son numérateur ; cette valeur sera donc généralement une petite fraction ; nous aurons donc fait des suppressions peu importantes pour déduire cette valeur de l'équation (2) ; cette valeur sera donc à peu près exacte.

Ayant ainsi obtenu une valeur de la racine cherchée r, plus approchée que la première, en la représentant par p_1, on pourra raisonner, à plus forte raison, sur p_1 comme l'on avait raisonné sur p, et en conclure, par un semblable calcul, une valeur p_2, plus approchée encore, et ainsi de suite, c'est-à-dire que, si l'on pose successivement,

$$\left.\begin{array}{l} p-\dfrac{\mathrm{F}p}{\mathrm{F}'p}=p_1\,, \\[2ex] p_1-\dfrac{\mathrm{F}p_1}{\mathrm{F}'p_1}=p_2\,, \\[2ex] p_2-\dfrac{\mathrm{F}p_2}{\mathrm{F}'p_2}=p_3\,, \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\,; \end{array}\right\} \quad (5)$$

les nombres $p, p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots$ devront, sauf les exceptions dont il sera question plus loin, converger sans cesse vers la valeur de la racine r.

On voit, par là, pourquoi nous avons donné, comme condition de succès du procédé, qu'une seule des racines de la proposée (1) fût peu différente du nombre donné p ; on voit d'ailleurs que s'il en est autrement, que si l'équation (1) a plusieurs racines peu différentes de p, la suppression, dans le développement du premier membre de l'équation (2), des termes affectés des puissances de ξ supérieures à la première, réduira bien encore, à la vérité, cette équation au premier degré ; mais cette suppression n'exprimant plus alors nettement, comme elle faisait dans le premier cas, quelle est celle des valeurs de ξ qu'on a le dessein d'obtenir, cette valeur ne pourra se présenter que d'une manière tout à fait équivoque (*).

Nous n'avons eu égard, dans ce qui précède, qu'aux racines réelles de l'équation (1); mais on va voir que la nature de ses racines imaginaires peut souvent aussi devenir un obstacle au succès de la méthode. Soient, en effet, $g \pm h\sqrt{-1}$ deux racines imaginaires de l'équation (1); si h est une fraction extrêmement petite et que g soit un nombre peu différent de p, ou même, si l'on veut, égal à p, il sera vrai de dire que la proposée a trois racines peu différentes de p; d'où il suit que le dénominateur de la valeur de ξ sera, comme son numérateur, une quantité fort petite; or, il en pourra fort bien résulter pour ξ une valeur fort grande et conséquemment très-fautive; puisqu'alors, pour parvenir à cette valeur, on aura fait des suppressions notables dans le développement du premier membre de l'équation (2).

Dans tout ce qui précède, nous avons tacitement supposé que la fraction $\frac{\mathrm{F}p}{\mathrm{F}'p}$ avait été rigoureusement conclue de la valeur de p; mais si, comme l'on en use communément, on fait usage, dans ce calcul, des parties décimales, et qu'on se contente de simples approximations, on trouvera là une nouvelle source d'erreurs d'autant plus influentes que $\mathrm{F}p$ et $\mathrm{F}'p$ seront de plus petits nombres; de sorte que la méthode pourra être trouvée en défaut dans des cas même où un calcul plus rigoureux en aurait assuré le succès.

On a cru suffisamment obvier à ces divers inconvéniens en prescrivant de prendre, pour la valeur p de départ, un nombre très-

---

(*) On pourrait bien, dans les cas semblables, conserver, dans le développement du premier membre de l'équation (2), les termes affectés de ξ^2, s'il y avait seulement deux racines de l'équation (1) peu différentes de p; y conserver en outre les termes en ξ^3 s'il y en avait trois, et ainsi de suite; mais, outre que le plus souvent ces circonstances ne sont pas connues, on nuirait ainsi à la simplicité et à l'uniformité du procédé.

peu différent de la racine qu'on cherche ; mais l'on va voir tout à l'heure que cette condition a le double défaut de n'être ni nécessaire ni suffisante. On verra que, si voisine que se trouve de la véritable cette valeur de départ, la méthode peut très-bien être en défaut ; tandis qu'au contraire on peut en obtenir un succès complet dans certains cas, quelque éloignée que soit cette valeur de départ de la racine dont on poursuit l'approximation. On verra en outre que le procédé peut fort bien réussir lors même que plusieurs des racines de la proposée diffèrent très-peu du nombre p, tandis que, dans le cas contraire, elle peut très-bien se trouver en défaut ; ce qui revient à dire finalement qu'on a complétement ignoré jusqu'ici les conditions strictement nécessaires et suffisantes pour en assurer certainement le succès.

Pour découvrir ces conditions, consultons la géométrie, et essayons de traduire nos approximations successives en procédé graphique. Considérons la courbe parabolique donnée par l'équation

$$y = \mathrm{F}x \; ; \qquad (6)$$

la résolution de l'équation (1) se réduira, comme l'on sait, à assigner les distances de l'origine aux diverses intersections de cette courbe avec l'axe des x ; c'est-à-dire, les valeurs de x qui répondent à $y=0$.

$\mathrm{F}x$ étant, en général, l'ordonnée qui répond à l'abscisse x, et $\mathrm{F}'x$ l'angle que fait avec cet axe la tangente menée à la courbe par l'extrémité de cette ordonnée, il s'ensuit que $\frac{\mathrm{F}x}{\mathrm{F}'x}$ est l'expression de la sous-tangente qui répond à cette même abscisse, et que conséquemment $x-\frac{\mathrm{F}x}{\mathrm{F}'x}$ est la distance de l'origine au point où l'axe des x est coupé par la tangente menée à la courbe par le point dont l'abscisse est x ; donc $p-\frac{\mathrm{F}p}{\mathrm{F}'p}$ est la distance de l'origine au point où l'axe des x est coupé par la tangente au point de la courbe dont l'abscisse est p.

En conséquence le calcul indiqué par la série des équations (5) pourra être traduit graphiquement ainsi qu'il suit :

Soient O l'origine des coordonnées et P un quelconque des points de l'axe des x. Soient menées l'ordonnée PM, terminée à la courbe en M, et ensuite la tangente MP', se terminant à l'axe des x en P'; soit menée l'ordonnée P'M', terminée à la courbe en M', et ensuite la tangente M'P'', se terminant à l'axe des x en P''; soit menée l'ordonnée P''M'' terminée à la courbe en M'', et ensuite la tangente M''P''' se terminant à l'axe des x en P''', et ainsi de suite, indéfiniment; alors, si OP est supposé le nombre donné p, OP', OP'', OP''', ... seront les valeurs de $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots$ données par les équations (5).

A l'aide de cette construction (*), il nous sera très-facile d'assigner les circonstances dans lesquelles on peut compter surement sur le succès de la méthode, et celles où, au contraire, elle peut se trouver en défaut.

Soit d'abord R (fig. 1) un des points d'intersection de la courbe parabolique avec l'axe des x, et soit OR la racine de l'équation $Fx=0$ dont on se propose d'approcher de plus en plus. Soit OP>OR, valeur de départ, et soit PM l'ordonnée qui répond à l'abscisse OP; le succès de la méthode sera infaillible si, dans toute l'étendue de l'arc MR, les ordonnées sont constamment positives et décroissantes, et qu'il en soit de même des inclinaisons des tangentes sur l'axe des x, c'est-à-dire, si cet arc ne présente ni sommets ni points d'inflexion; car il est manifeste qu'alors OR sera la limite de OP, OP', OP'', OP''', ..., pourvu toutefois que ces dernières quantités soient déterminées par un calcul rigoureux.

Le succès de la méthode sera encore infaillible (fig. 2) si les

(*) Cette construction, dont je fais depuis long-temps usage dans mes cours, m'a été indiquée assez récemment par M. Bérard, géomètre distingué de Briançon, qui la croyait nouvelle, parce qu'en effet elle paraît n'avoir encore été publiée nulle part.

ordonnées et les inclinaisons des tangentes sur l'axe des x, dans toute l'étendue de l'arc MR, étant constamment négatives, les unes et les autres vont continuellement en décroissant, abstraction faite de leur signe; ce qui arrivera encore nécessairement si cet arc ne présente ni sommets ni points d'inflexion; car, dans ce cas, comme dans le précédent, OR sera nécessairement la limite de OP, OP′, OP″, OP‴, ...

Si, dans toute l'étendue de l'arc MR (fig. 3 et 4), les ordonnées et les inclinaisons des tangentes sur l'axe des x décroissant encore continuellement, abstraction faite de leur signe, c'est-à dire si cet arc, ne présentant encore ni sommets ni points d'inflexion, comme dans les deux cas précédens, ces ordonnées et ces inclinaisons étaient constamment de signes contraires, le procédé réussirait encore infailliblement, pourvu que l'on prît l'abscisse de départ OP moindre que la racine cherchée OR; mais alors cette racine OR serait la limite supérieure des grandeurs croissantes OP, OP′, OP″, OP‴, ...

Si l'on remarque présentement que Fx est l'ordonnée, F′x l'inclinaison de la tangente sur l'axe des x, et que F″x ne peut changer de signe qu'à la rencontre d'un point d'inflexion, on pourra réduire tout ce qui précède au résumé que voici : *Soit* r *une des racines de la proposée dont on propose d'obtenir des valeurs de plus en plus approchées; pour qu'en partant d'une première valeur approchée* p, *l'application de la méthode de Newton obtienne un plein succès, il suffit que, dans tout l'intervalle de* p *à* r, *aucune des fonctions* Fx, F′x *et* F″x *ne change de signe, et que les deux premières, abstraction faite de leurs signes, soient constamment décroissantes; pourvu toutefois que l'on prenne* p *plus grand ou plus petit que* r, *suivant qu'entre ces mêmes limites* Fx *et* F′x *seront de même signe ou de signes contraires.*

On voit par là qu'il n'est point toujours nécessaire, pour le succès de la méthode, que la valeur de départ p soit très-peu différente de la racine r dont on poursuit l'approximation. Tout ce qu'on peut gagner à prendre p très-peu différent de r c'est de diminuer les chances d'existence des sommets et des points d'inflexion entre ces deux limites; mais ces sommets et ces points d'inflexion peuvent fort bien exister entre ces mêmes limites, quelque rapprochées d'ailleurs qu'on les suppose.

Nous avons signalé simplement, comme *suffisante* et non comme *nécessaire*, la condition d'absence de tout sommet et de tout point d'inflexion entre les limites p et r; et c'est qu'en effet le procédé pourrait fort bien réussir dans le cas même où il existerait des sommets et des points d'inflexion entre ces mêmes limites; mais alors le succès n'en serait pas certain et dépendrait de la grandeur du nombre p de départ. C'est ce que montrent évidemment les figures 5 et 6, où il s'agit de la même courbe parabolique et conséquemment de la même équation à résoudre, et de plus de la même racine à chercher. Dans l'une et dans l'autre, il se trouve deux sommets et deux points d'inflexion entre les limites OP et OR; mais bien que, dans la figure 5, la valeur de départ soit moins rapprochée de la racine OR qu'elle ne l'est dans la figure 6, le procédé réussit très-bien dans la première de ces deux figures, tandis qu'il est en défaut dans la seconde où, comme l'on voit, les grandeurs OP, OP$'$, OP$''$, OP$'''$, ... ne sont pas constamment décroissantes.

Il est aisé de voir que, réciproquement, lorsque les valeurs de $p_1, p_2, p_3,$ ...., déduites de quelque valeur de p que se puisse être, sont constamment convergentes vers une certaine limite, ou du moins deviennent convergentes, au-delà d'un certain terme, on peut être certain que la limite vers laquelle elles convergent est une des racines de l'équation $Fx=0$. On obtient donc ainsi, par le progrès du calcul, une suite de valeurs de cette racine de moins en moins différentes de la véritable; mais on peut désirer plus encore; on peut désirer de connaître, à chaque approximation nouvelle, la limite de l'erreur dont cette approximation est affectée; c'est là un complément que la méthode d'approximation de Newton réclame impérieusement, et qu'il est très-facile de lui procurer, comme on va le voir.

Tout étant d'ailleurs dans la figure 7, comme dans la figure 1; c'est-à-dire, OP étant une limite supérieure de la racine OR, et OP′, OP″, OP‴,...... des limites supérieures de plus en plus rapprochées de cette même racine, déduites les unes des autres, et de celle-là par le procédé indiqué plus haut; soit OQ une limite inférieure de cette même racine, tellement choisie qu'entre OP et OQ la courbe parabolique ne présente ni sommets ni points d'inflexion. Soit menée l'ordonnée QN, terminée à la courbe en N, et ensuite la parallèle NQ′ à la tangente MP′, se terminant en Q′ à l'axe des x; soit menée l'ordonnée Q′N′, terminée à la courbe en N′, et ensuite la parallèle N′Q″ à la tangente M′P″, se terminant en Q″ à l'axe des x; soit menée l'ordonnée Q″N″, terminée à la courbe en N″, et ensuite la parallèle N″Q‴ à la tangente M″P‴, et ainsi de suite; les longueurs OQ, OQ′, OQ″, OQ‴,......., constamment croissantes, auront évidemment la racine OR pour limite supérieure; cette racine se trouvera donc indistinctement comprise

entre $\begin{cases} \text{OP et OQ}, \\ \text{OP}' \text{ et OQ}', \\ \text{OP}'' \text{ et OQ}'', \\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$

de sorte que PQ, P′Q′, P″Q″, ... seront les limites des erreurs dont seront respectivement affectées soient les valeurs approchées continuellement décroissantes OP, OP′, OP″, ... soit les valeurs approchées continuellement croissantes OQ, OQ′, OQ″, ...

Rien n'est plus aisé que de traduire ce procédé graphique en analyse. Soient q, q_1, q_2, q_3, ... les valeurs OQ, OQ′, OQ″, OQ‴, ... nous aurons

$$QQ'=NQ\text{Tang.}QNQ'=NQ\text{Tang.}PMP' ;$$

c'est-à-dire,

$$QQ'=\frac{Fq}{F'p} ;$$

donc

$$q_1=OQ'=OQ+QQ'=q+\frac{Fq}{F'p} ;$$

donc, à cause de l'uniformité de la construction, on aura successivement

$$\left.\begin{array}{l} q+\dfrac{Fq}{F'p}=q_1, \\ q_1+\dfrac{Fq_1}{F'p_1}=q_2, \\ q_2+\dfrac{Fq_2}{F'p_2}=q_3, \\ \ldots\ldots\ldots ; \end{array}\right\} (6)$$

en comparant ces formules aux formules (5), on aura $p-q$, p_1-q_1, p_2-q_2, ... pour les limites respectives dont seront affectées soit les valeurs approchées décroissantes p, p_1, p_2, p_3, ... soit les valeurs approchées croissantes q, q_1, q_2, q_3, ...

Si la courbe était tournée (fig. 8) comme dans la figure 2, il n'y aurait rien à changer au procédé; il arriverait seulement que les ordonnées QN, Q'N', Q''N'', ... seraient positives, au lieu d'être négatives; mais, comme les tangentes tabulaires des angles MP'P, M'P''P', M''P'''P'', ... seraient négatives, au lieu d'être positives, cela ne changerait rien aux signes des fractions $\frac{Fq}{F'p}$,

$\frac{Fq_1}{F'p_1}$, $\frac{Fq_2}{F'p_2}$, ...; de manière que les formules (6) subsisteraient encore.

Si la courbe était tournée (fig. 9 et 10) comme dans les figures 3 et 4, où p=OP est une limite inférieure à la racine r=OR; il faudrait alors prendre la valeur de départ q=OQ plus grande que cette même racine; et, en ayant égard aux signes, les formules (6) continueraient à avoir lieu.

Il y a du reste à dire, sur ce complément au procédé de Newton, tout ce que nous avons dit sur ce procédé lui-même; ainsi on en obtiendra toujours un plein succès toutes les fois que l'arc NR n'offrira ni sommets ni points d'inflexion, tandis que, dans le cas contraire, il pourra indifféremment réussir ou se trouver en défaut, suivant la grandeur des nombres de départ p et q; c'est ce qu'on aperçoit clairement à l'inspection des figures 11 et 12; dans la première, le procédé obtient un plein succès, tandis que, dans la seconde, bien que la valeur de départ OQ soit plus voisine de la véritable OR que dans l'autre, les longueurs OQ, OQ', OQ'', ... finissent par dépasser la longueur OR.

On voit donc, en résumé, que, toutes les fois que l'on saura que l'une des racines réelles r d'une équation numérique proposée est comprise entre deux limites p et q, plus ou moins rapprochées l'une de l'autre, mais telles que, dans toute l'étendue de l'arc de la courbe parabolique compris entre les ordonnées qui répondent à ces limites, cet arc ne présente ni sommets ni points d'inflexion (*), rien ne sera plus aisé que de resserrer indéfiniment ces limites, et d'obtenir ainsi une valeur de cette racine r aussi approchée qu'on

(*) Nous comprenons ici, sous la dénomination commune des sommets, tous les points de la courbe dont la tangente est parallèle à l'axe des x, et dont quelques-uns peuvent être en même temps des points d'inflexion.

pourra le désirer ; c'est-à-dire, une valeur de laquelle on puisse affirmer que sa différence avec la véritable est moindre qu'un nombre donné, si petit d'ailleurs qu'on veuille le supposer. Si donc on avait de pareilles limites pour chacune des racines réelles d'une équation numérique proposée, on pourrait en conclure des valeurs aussi approchées qu'on le voudrait de ces mêmes racines.

On obtiendrait évidemment de telles limites pour chacune des racines réelles d'une équation numérique proposée, si l'on connaissait exactement la situation des sommets et celle des points d'inflexion de la courbe parabolique correspondante. Il est évident, en effet, que toute intersection de cette courbe avec l'axe des x est toujours comprise soit entre la projection d'un sommet et celle d'un point d'inflexion, soit entre les projections de deux points d'inflexion sur le même axe. Réciproquement, si les ordonnées soit d'un sommet et d'un point d'inflexion, soit de deux points d'inflexion sont telles que l'arc de la courbe parabolique, compris entre elles, ne comprenne ni sommet ni point d'inflexion, et si ces deux ordonnées sont de signes contraires, leurs abscisses comprendront nécessairement entre elles une racine r de l'équation, et n'en comprendront qu'une seule ; de sorte que ces abscisses pourront être prises pour les limites p et q de cette même racine r.

Il n'est pas même nécessaire, pour obtenir ces limites p et q, de connaître précisément les sommets et les points d'inflexion de la courbe parabolique ; et il suffit seulement de connaître deux points indéfiniment rapprochés entre lesquels chacun de ceux-là se trouve situé. Si, en effet, on sait que l'abscisse d'un point d'inflexion est comprise entre deux limites p et $q>p$, et qu'on sache que l'abscisse du sommet consécutif est comprise entre p' et $q'>p'$, q' étant moindre que p ; et si les ordonnées qui répondent à p et q' sont de signes contraires, on saura par là même qu'il existe une racine réelle de l'équation proposée et une seule entre p et q' ; mais il pourrait encore exister une racine réelle entre le point d'inflexion et le sommet, quand bien même les ordonnées répondant à p et q' seraient de même signe ; cette racine se trouverait alors soit entre p et q, soit entre p' et q'.

Ainsi la méthode d'approximation de Newton, même avec le complément que nous y avons introduit, ne saurait complètement dispenser du recours à l'équation aux quarrés des différences des racines.

Nous avons insinué, en commençant, que la méthode d'approximation de Newton pouvait tout aussi bien être appliquée aux équations qui renferment plusieurs inconnues qu'à celles qui n'en ont qu'une seule, et cela quelle que soit la nature algébrique ou transcendante des équations proposées. C'est là une chose bien connue des astronomes ; mais, comme il n'est fait aucune mention de cette extension de la méthode dans les traités élémentaires, nous en dirons deux mots, en terminant, en faveur des commençans.

Soient

$$\varphi(x,y)=\Phi=0\ , \qquad \psi(x,y)=\psi=0\ ,$$

deux équations de forme quelconque entre x et y, desquelles on sache qu'on y satisfait, à peu près, en posant

$$x=a\ , \qquad y=b\ ;$$

en désignant respectivement par α et β ce qu'il faut retrancher à a et b pour avoir exactement x et y, on aura

$$x=a-\alpha\ , \qquad y=b-\beta\ ;$$

en substituant, et posant pour abréger,

$$\varphi(a,b)=M\ , \qquad \psi(a,b)=N\ ,$$

il viendra, suivant la série de Taylor,

$$o=M-\frac{dM}{da}\cdot\frac{\alpha}{1}+\frac{d^2M}{da^2}\cdot\frac{\alpha^2}{1.2}-\ldots \qquad o=N-\frac{dN}{da}\cdot\frac{\alpha}{1}+\frac{d^2N}{da^2}\cdot\frac{\alpha^2}{1.2}-\ldots$$

$$-\frac{dM}{db}\cdot\frac{\beta}{1}+2\frac{d^2M}{dadb}\cdot\frac{\alpha\beta}{1.2}-\ldots \qquad -\frac{dN}{db}\cdot\frac{\beta}{1}+2\frac{d^2N}{dadb}\cdot\frac{\alpha\beta}{1.2}-\ldots$$

$$+\frac{d^2M}{db^2}\cdot\frac{\beta^2}{1.2}-\ldots \qquad +\frac{d^2N}{db^2}\cdot\frac{\beta^2}{1.2}-\ldots$$

mais puisque, par l'hypothèse, α et β sont de forts petits nombres, nous pourrons, sans beaucoup d'erreur, écrire simplement

$$\frac{dM}{da}\alpha+\frac{dM}{db}\beta=M, \qquad \frac{dN}{da}\alpha+\frac{dN}{db}\beta=N,$$

d'où nous conclurons

$$\alpha=\frac{M\frac{dN}{db}-N\frac{dM}{da}}{\frac{dM}{da}\,\frac{dN}{db}-\frac{dN}{da}\,\frac{dM}{db}},$$

$$\beta=\frac{N\frac{dM}{db}-M\frac{dN}{da}}{\frac{dM}{da}\,\frac{dN}{db}-\frac{dN}{da}\,\frac{dM}{db}};$$

ces valeurs ne seront qu'approchées; mais il n'en résultera pas moins, pour x et y, les valeurs

$$a-\frac{M\frac{dN}{db}-N\frac{dM}{da}}{\frac{dM}{da}\,\frac{dN}{db}-\frac{dN}{da}\,\frac{dM}{db}}, \qquad b-\frac{N\frac{dM}{db}-M\frac{dN}{da}}{\frac{dM}{da}\,\frac{dN}{db}-\frac{dN}{da}\,\frac{dM}{db}},$$

généralement plus approchées que ne l'étaient les premières a et

b, et desquelles il sera facile d'en déduire de plus approchées encore. Il est aisé de voir par là ce qu'il y aurait à faire s'il s'agissait d'un plus grand nombre d'équations entre un égal nombre d'inconnues.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de statique.

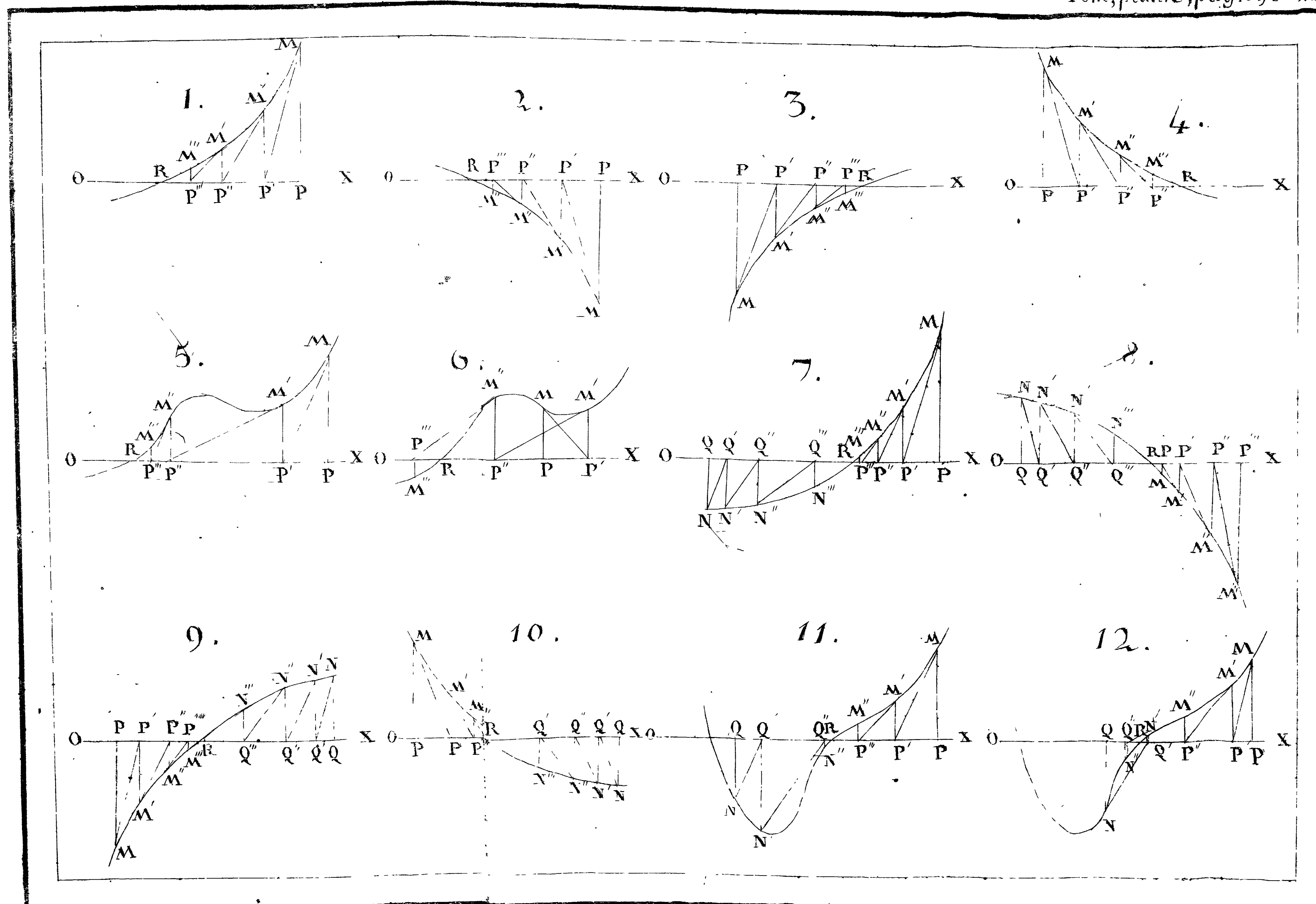
PEUT-ON trouver une surface cylindrique, à élémens rectilignes verticaux, sur laquelle on puisse rouler une chaînette uniformément pesante, de telle sorte qu'alors cette chaînette soit une courbe plane ; et, s'il existe une telle surface cylindrique, quelle est la nature de sa section par un plan horizontal ?

Théorème d'analyse indéterminée.

Si trois nombres entiers sont tels que le quarré du plus grand soit égal à la somme des quarrés des deux plus petits, le produit de ces trois nombres sera nécessairement divisible par soixante.

Problème d'analyse indéterminée.

Trouver *mille* nombres consécutifs de la suite naturelle, tels que la somme de leurs cubes soit elle-même un cube.



J. D. G. fecit.

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Exposition élémentaire des principes du calcul différentiel ;

Par M. GERGONNE.

LES noms d'*analyse infinitésimale*, de *haute analyse*, d'*analyse transcendante* donnés indistinctement au calcul différentiel, en ont fait une sorte d'épouvantail et semblent signaler cette branche d'analyse comme une science à part, et tout à fait inaccessible aux capacités ordinaires ; et c'est apparemment pour cela qu'elle est généralement beaucoup moins cultivée qu'elle ne mériterait de l'être ; et les méthodes d'exposition qui en ont été tentées dans ces derniers temps, méthodes très-savantes et très-rigoureuses, si l'on veut, ne paraissent guère de nature à rendre ce genre de calcul beaucoup plus attrayant pour les élèves des écoles où il est enseigné ; aussi n'ont-ils rien de plus pressé, pour la plupart, que d'oublier, le plus tôt qu'ils le peuvent, ce qu'ils ont été contraints d'en apprendre.

Je me propose ici de tenter de faire descendre cette branche d'analyse des hautes régions où l'on semble avoir voulu la reléguer, et de l'abaisser, de plein pied, s'il est possible, avec l'analyse ordinaire, de manière à n'en être plus qu'une continuation. Peut-être, en parcourant cet essai, quelques jeunes-gens, à qui les principes du calcul différentiel ont coûté beaucoup de peine à acquérir, seront-ils fort surpris que ce soit une chose si simple et si facile ; peut-être alors seront-ils tentés de reprendre, avec une ardeur nouvelle, une étude qui leur avait semblé jusqu'ici environnée de tant d'épines, et qu'ils étaient sur le point d'abandonner sans retour.

Il y a principalement à considérer, dans le calcul différentiel, des méthodes particulières de calcul, et l'application de ces méthodes à la solution des problèmes d'analyse, de géométrie et de mécanique; c'est surtout sur ces applications que porteront les simplifications que je me propose de tenter.

J'ignore s'il existe quelques fonctions qui ne soient pas développables en une suite finie ou illimitée de monomes; s'il en existe de telles, il n'en sera nullement question ici. Je supposerai le lecteur assez avancé dans l'analyse ordinaire pour savoir que toute fonction algébrique est susceptible d'un tel développement, et pour connaître la forme du développement des principales fonctions transcendantes, telle qu'on la trouve dans une multitude de traités élémentaires auxquels il me suffit de renvoyer.

INTRODUCTION.

Soit un polynome formé d'un nombre fini ou illimité de termes, dans chacun desquels la variable x soit affectée d'un coefficient et d'un exposant constans quelconques, positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires, rationnels ou radicaux, réels ou imaginaires. Si l'on forme un autre polynome, d'un pareil nombre de termes, dont chacun des termes soit déduit de son correspondant dans le premier, en multipliant celui-ci par l'exposant de x, et en diminuant ensuite cet exposant d'une unité, le nouveau polynome, ainsi obtenu, sera ce que l'on appelle, dans l'analyse élémentaire, la *fonction dérivée* du premier qui en sera dit à l'inverse la *fonction primitive.*

Soit, par exemple, la fonction primitive proposée

$$Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\ldots\ldots$$

sa fonction dérivée sera

$$\alpha A x^{\alpha-1} + \beta B x^{\beta-1} + \gamma C x^{\gamma-1} + \ldots\ldots$$

Ces sortes de fonctions se représentant sans cesse dans l'analyse et dans ses applications, soit à la géométrie, soit à la mécanique, on est fondé à présumer qu'elles doivent y jouer un rôle assez important; et l'on se trouve ainsi naturellement invité à en étudier la nature et les propriétés.

La notion que nous venons de donner ici des fonctions dérivées semblerait, au premier abord, n'être applicable qu'aux fonctions composées d'une suite de monomes, telles que celle que nous avons prise pour exemple; mais on ne doit pas perdre de vue que toutes les fonctions connues sont réductibles à cette forme, et qu'ainsi développées, rien n'est plus facile alors que d'en former les fonctions dérivées. A la vérité, ces dérivées, comme leur fonction primitive elle-même, après son développement, se trouveront le plus souvent composées d'une infinité de termes; mais le plus souvent aussi ces termes, en nombre infini, seront le développement connu d'une fonction finie de x, laquelle pourra ainsi être considérée comme la dérivée de la fonction primitive proposée.

Eclaircissons ceci par un exemple simple : soit la fonction primitive $(a+bx)^m$ dont on demande la fonction dérivée; en la développant en série, par la formule du binome, on trouve

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} bx + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 x^2 + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3 x^3 + \ldots\ldots;$$

développement qui, excepté le cas où m est un nombre entier positif, se compose d'une infinité de termes, et dont la fonction dérivée est

$$ma^{m-1} b + m. \frac{m-1}{1} a^{m-2} b^2 x + m. \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} a^{m-3} b^3 x^2 + \ldots\ldots$$

qui peut être encore écrite comme il suit :

$$mb\left(a^{m-1}+\frac{m-1}{1}a^{m-2}bx+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}a^{m-3}b^2x^2+\ldots\ldots\right),$$

ou bien encore, de cette manière,

$$mb(a+bx)^{m-1};$$

de sorte que cette fonction finie est la dérivée de la fonction finie $(a+bx)^m$. Nous dirons donc que deux fonctions finies, de forme quelconque, sont dérivées l'une de l'autre, lorsque, développées l'une et l'autre en une suite de monomes, le développement de l'une sera la fonction dérivée du développement de l'autre. Nous verrons bientôt, au surplus, qu'il est très-aisé d'obtenir, sous forme finie, la dérivée d'une fonction finie donnée, sans qu'il soit besoin de recourir à leur développement.

On voit qu'ici deux problèmes, exactement inverses l'un de l'autre, se présentent à résoudre : 1.° Une fonction étant donnée, comme fonction primitive, on peut se proposer d'en assigner la fonction dérivée ; 2.° une fonction étant donnée, comme dérivée d'une fonction primitive inconnue, on peut se proposer d'assigner cette fonction primitive. L'art de résoudre le premier de ces deux problèmes constitue proprement le *calcul différentiel* qu'on pourrait aussi appeler le calcul des dérivations ; la résolution de l'autre est l'objet du *calcul intégral.* Il ne sera principalement question ici que de la première de ces deux branches de calcul.

Pour indiquer la dérivée d'une fonction quelconque de la variable x, nous ferons précéder cette fonction de la caractéristique d, initiale du mot dérivée, en n'interposant aucun signe entre cette caractéristique et la fonction, lorsque cette fonction sera représentée par une seule lettre, ou bien lorsqu'elle sera un polynome entre parenthèses, sans exposant total, ou encore lorsqu'elle sera fractionnaire ou radical, sans aucun facteur au-devant du signe. Ainsi, par exemple,

$$\mathrm{d}X\,,\qquad \mathrm{d}(a+bx)\,,\qquad \mathrm{d}\,\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\,,\qquad \mathrm{d}\sqrt{a^2+x^2}\,,$$

indiqueront les dérivées respectives des fonctions

$$X\,,\qquad a+bx\,,\qquad \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\,,\qquad \sqrt{a^2+x^2}\,;$$

dans tous les autres cas nous ferons suivre la caractéristique d d'un point destiné à rappeler que cette caractéristique porte sur l'ensemble des facteurs qui la suivent. Ainsi, par exemple,

$$\mathrm{d}.x^m\,,\qquad \mathrm{d}.(a+x)^m\,,\qquad \mathrm{d}.(a+x)(b+x)\,,\qquad \mathrm{d}.ax^m\sqrt{b^2+x^2}\,,$$

indiqueront les dérivées respectives des fonctions

$$x^m\,,\qquad (a+x)^m\,,\qquad (a+x)(b+x)\,,\qquad ax^m\sqrt{b^2+x^2}\,.$$

On voit, d'après ces conventions, que $\mathrm{d}.x^m$ n'est pas la même chose que $\mathrm{d}x^m$ qu'on emploie comme abrégé de $(\mathrm{d}x)^m$, pareillement $\mathrm{d}.(a+x)(b+x)$ diffère de $\mathrm{d}(a+x)(b+x)$ en ce que la première de ces expressions est la dérivée du produit $(a+x)(b+x)$, tandis que la seconde est le produit de la dérivée de $a+x$ par le facteur $b+x$. Au surplus, pour éviter toute équivoque, il vaut mieux écrire cette dernière expression comme il suit : $(b+x)\mathrm{d}(a+x)$ (*).

On voit d'après ces conventions que, si l'on pose

(*) Nous croirions superflu de faire remarquer que la caractéristique d, tout comme le signe radical, est un symbole d'opération et non de quantité, et ne doit pas conséquemment être prise pour un facteur, si nous ne voyons que, dans le *Commentaire* du R. P. PAULIAN sur les *Infiniment petits* du marquis de L'HOPITAL (pag. 263), le bon jésuite s'y est mépris.

$$X=Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\ldots\ldots,$$

on aura

$$dX=\alpha Ax^{\alpha-1}+\beta Bx^{\beta-1}+\gamma Cx^{\gamma-1}+\ldots\ldots$$

Si a est une constante quelconque et qu'on ait $X=a$, on pourra écrire

$$X=ax^{0};$$

d'où, en appliquant le principe de dérivation,

$$dX=0ax^{0-1}=\frac{0a}{x}=0.$$

Ainsi, *la dérivée d'une quantité constante est nulle.*

Il suit de là que, si une fonction de x, développée en une suite de monomes, renferme un terme indépendant de x, ce terme n'aura point de correspondant dans la dérivée de cette fonction. Il en résulte aussi que, si deux fonctions de x ne diffèrent l'une de l'autre que par un terme indépendant de x, leurs dérivées seront rigoureusement égales. Ainsi, en général, X et X' étant deux fonctions de x, si l'on a

$$X-X'=a;$$

a étant une constante quelconque, on aura

$$dX=dX';$$

d'où l'on voit qu'*une infinité de fonctions primitives différentes peuvent avoir toutes la même fonction dérivée.*

Il suit de là que, tandis que le problème général que le calcul différentiel a pour objet de résoudre est un problème absolument déterminé, susceptible d'une solution unique, celui que se propose le calcul intégral est, au contraire, un problème tout à fait indéterminé, susceptible d'une infinité de solutions différentes ; c'est-à-dire, en d'autres termes, que la fonction primitive d'une dérivée proposée ne saurait être *complète* qu'autant qu'elle contient une *constante* tout à fait *arbitraire*, introduite dans cette fonction primitive, de telle sorte que la dérivation la fasse disparaître ; constante que l'on détermine ensuite, comme le signe d'un radical, d'après les conditions particulières de la question dont on s'occupe.

D'après le principe général de dérivation, on a

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}x^1=1x^{1-1}=1x^0=1.1=1 \quad ,$$

c'est-à-dire que *la dérivée de la variable est égale à l'unité;* et, comme l'unité ne divise pas, il s'ensuit que, si X est une fonction quelconque de x, au lieu d'écrire simplement, pour sa dérivée $\mathrm{d}X$, on peut écrire $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$. Cette remarque peut, au premier abord, sembler puérile ; ce qui va suivre en fera juger autrement.

Représentons généralement par S une fonction des deux variables x et y, et supposons, par exemple, qu'on ait,

$$S=Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F \; ;$$

on pourra indifféremment se proposer d'assigner la dérivée de cette fonction, soit par rapport à la variable x, soit par rapport à la variable y ; d'où l'on voit qu'ici l'expression $\mathrm{d}S$ serait tout à fait équivoque ; mais, de même qu'en prenant la dérivée par rapport à x, on a $\mathrm{d}x=1$, on aura aussi, en la prenant par rapport à y, $\mathrm{d}y=1$. En conséquence on peut convenir de représenter par $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$ la dérivée de S, prise uniquement par rapport à la variable x, et par $\frac{dS}{dy}$ la dérivée de la même fonction prise uniquement par rapport à la variable y; et de la sorte toute équivoque disparaît (*).

En prenant la dérivée de S, par rapport à x seulement, tous les termes sans x que renferme cette fonction doivent disparaître, comme disparaissent les termes constans dans les dérivées des fonctions de la seule variable x; et il doit en être de même des termes sans y, dans la dérivée de la même fonction, prise par rapport à y seulement. On trouve ainsi :

$$\frac{dS}{dx}=2(Ax+Cy+D)\ , \qquad \frac{dS}{dy}=2(By+Cx+E)\ .$$

Ces valeurs de $\frac{dS}{dx}$ et de $\frac{dS}{dy}$ sont dites les *dérivées partielles* de la fonction S, relatives à x et à y, respectivement.

Pareillement, si S est une fonction des trois variables x, y, z, et qu'on ait, par exemple,

$$S=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L\ ,$$

on pourra se proposer d'en prendre la dérivée, soit par rapport à x, soit par rapport à y, soit par rapport à z; en dénotant respectivement ces dérivées partielles par $\frac{dS}{dx}$, $\frac{dS}{dy}$, $\frac{dS}{dz}$, et observant que tous les termes qui ne renferment pas la variable, par rapport à laquelle on prend la dérivée partielle, doivent disparaître, on trouvera

(*) Depuis une trentaine d'années, la coutume s'est à peu près généralement introduite d'énoncer le symbole $\frac{dS}{dx}$ en disant : dS sur dx ; mais il nous paraît beaucoup plus classique, et il n'est pas beaucoup plus long de dire, comme autrefois : dS divisé par dx ; car, pour énoncer ab, on ne dit pas : a à côté de b; tout comme, pour énoncer a^m, on ne dit pas: m à droite et un peu au-dessus de a.

$$\frac{dS}{dx}=2(Ax+Ez+Fy+G) \, ,$$

$$\frac{dS}{dy}=2(By+Fx+Dz+H) \, ,$$

$$\frac{dS}{dz}=2(Cz+Dy+Ex+K) \, .$$

On voit donc qu'en prenant la dérivée partielle d'une fonction de tant de variables qu'on voudra, relative à l'une d'entre elles, non seulement les termes constans, mais encore tous ceux qui ne renferment point cette variable doivent disparaître; d'où il suit que cette dérivée partielle demeurerait encore la même, si les termes que la dérivation a fait disparaître avaient été autres que ce qu'ils étaient réellement. Si donc on donne, comme dérivée partielle d'une fonction primitive inconnue, une fonction de plusieurs variables; comme, dans la dérivation de laquelle cette fonction donnée est supposée provenir, des termes affectés seulement des variables auxquelles cette dérivée n'est point relative, *auront pu* disparaître, la fonction primitive cherchée *devra*, pour être *complète*, renfermer une *fonction arbitraire* de toutes ces variables, tellement combinée avec la variable à laquelle la dérivée partielle donnée se rapporte, que cette fonction arbitraire disparaisse par l'effet de la dérivation. Les fonctions arbitraires, ainsi introduites, se déterminent, comme les constantes arbitraires, d'après les circonstances particulières de la question dont on s'occupe.

La dérivée d'une fonction d'une seule variable, tout comme les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables, étant elles-mêmes, en général, des fonctions de ces variables, on peut se demander d'en déterminer les dérivées, puis les dérivées de ces dérivées, et ainsi de suite indéfiniment. On obtient ainsi ce qu'on appelle les *dérivées successives* de la fonction proposée; et ces dérivées se distinguent les unes des autres par les dénominations de *premières*, *secondes*, *troisièmes*, ... *dérivées*. Nous ferons connaître plus loin les notations par lesquelles on les désigne.

On voit, par ce qui précède, que la recherche des dérivées partielles successives des fonctions de plusieurs variables, ne saurait éprouver de difficulté, dès qu'on sait déterminer les dérivées successives des fonctions d'une seule variable ; et que cette dernière détermination se réduit finalement à savoir assigner la première dérivée de ces sortes de fonctions. C'est donc sur ce dernier problème que toute notre attention doit d'abord se concentrer.

SECTION PREMIÈRE.

Des fonctions d'une seule variable.

Cette section comprendra deux paragraphes. Dans le premier, nous nous occuperons exclusivement de la recherche des premières dérivées; dans le second, nous examinerons les propriétés des dérivées successives.

§. I.

Premières dérivées des fonctions d'une seule variable.

Dans tout ce qui va suivre nous représenterons constamment par X, X', X'', X''', ... des fonctions quelconques, algébriques ou transcendantes de la seule variable x, et nous représenterons simplement leurs dérivées respectives par $\mathrm{d}X$, $\mathrm{d}X'$, $\mathrm{d}X''$, $\mathrm{d}X'''$..... attendu que, dans le cas particulier qui nous occupe, le dénominateur $\mathrm{d}x$ est tout à fait superflu.

Soient d'abord les deux fonctions X et X' développées sous cette forme

$$X = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \dots\dots ,$$

$$X'=A'x^{\alpha'}+B'x^{\beta'}+C'x^{\gamma'}+\ldots\ldots ,$$

d'où

$$X+X'=\left\{\begin{array}{l} Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\ldots\ldots\ldots \\ +A'x^{\alpha'}+B'x^{\beta'}+C'x^{\gamma'}+\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

on en conclura

$$\mathrm{d}X=\alpha Ax^{\alpha-1}+\beta Bx^{\beta-1}+\gamma Cx^{\gamma-1}+\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{d}X'=\alpha'A'x^{\alpha'-1}+\beta'B'x^{\beta'-1}+\gamma'C'x^{\gamma'-1}+\ldots\ldots$$

$$\mathrm{d}(X+X')=\left\{\begin{array}{l} \alpha Ax^{\alpha-1}+\beta Bx^{\beta-1}+\gamma Cx^{\gamma-1}+\ldots\ldots\ldots \\ +\alpha'A'x^{\alpha'-1}+\beta'B'x^{\beta'-1}+\gamma'C'x^{\gamma'-1}+\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

et, par suite,

$$\mathrm{d}X+\mathrm{d}X'=\left\{\begin{array}{l} \alpha Ax^{\alpha-1}+\beta Bx^{\beta-1}+\gamma Cx^{\gamma-1}+\ldots\ldots\ldots \\ +\alpha'A'x^{\alpha'-1}+\beta'B'x^{\beta'-1}+\gamma'C'x^{\gamma'-1}+\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

ce qui donne, en comparant,

$$\mathrm{d}(X+X')=\mathrm{d}X+\mathrm{d}X' ; \qquad (1)$$

c'est-à-dire : *la dérivée de la somme de deux fonctions est égale à la somme des dérivées de ces deux fonctions.*

Si, dans cette formule, on suppose que X' se change en $X'+X''$, elle deviendra

$$\mathrm{d}(X+X'+X'')=\mathrm{d}X+\mathrm{d}(X'+X'') ,$$

ou, en vertu de la même formule,

$$d(X+X'+X'')=dX+dX'+dX'' .$$

supposant encore que X'' se change en $X''+X'''$, on aura

$$d(X+X'+X''+X''')=dX+dX'+d(X''+X''') ;$$

ou bien, en vertu de la même formule,

$$d(X+X'+X''+X'''+......)=dX+dX'+dX''+dX''' ,$$

et ainsi de suite; de sorte qu'on aura, en général,

$$d(X+X'+X''+X'''+.....)=dX+dX'+dX''+dX'''+.... \quad (2)$$

c'est-à-dire: *la dérivée de la somme de tant de fonctions qu'on voudra est égale à la somme des dérivées de toutes ces fonctions,*

Supposons $X=X'=X''=X'''=.......$ et ces fonctions au nombre de n; la formule (2) deviendra simplement

$$d.nX=n.dX ; \quad (3)$$

c'est-à-dire: *la dérivée du produit d'une fonction par un nombre entier positif quelconque est le produit de la dérivée de cette fonction par ce même nombre.*

En vertu de la formule (1), on a

$$d(X'+X'')=dX'+dX'' ;$$

posant

$$X'+X''=X , \qquad d'où \qquad X''=X-X' ,$$

il viendra, en substituant,

$$dX=dX'+d(X-X') ,$$

ce qui donne

$$d(X-X')=dX-dX' \; ; \qquad (4)$$

c'est-à-dire : *la dérivée de la différence de deux fonctions est égale à la différence des dérivées de ces deux fonctions.*

Si, dans cette dernière formule, on suppose $X=0$, on aura $dX=0$; en conséquence, elle deviendra, en changeant ensuite X' en X,

$$d(-X)=-dX \; ; \qquad (5)$$

c'est-à-dire : *les dérivées de deux fonctions qui ne diffèrent que par le signe, ne diffèrent également que par le signe ;* ou, en d'autres termes, *si la somme de deux fonctions est nulle, la somme de leurs dérivées le sera également.*

De tout cela il est facile de conclure généralement que *la dérivée de la somme algébrique de tant de fonctions qu'on voudra, est égale à la somme algébrique des dérivées de toutes ces fonctions.*

En vertu de la formule (3) on a

$$d.nX'=n.dX' \; ;$$

posant

$$nX'=X \, , \quad \text{d'où} \quad X'=\frac{X}{n} \, ,$$

il viendra, en substituant,

$$dX=n.d\frac{X}{n} \; ;$$

ce qui donne

$$d\frac{X}{n}=\frac{dX}{n} \; ; \qquad (6)$$

c'est-à-dire : *la dérivée du quotient de la division d'une fonction* *par un diviseur entier positif quelconque est égale au quotient de la division de la dérivée de cette fonction par ce même diviseur.*

On a pareillement,

$$\mathrm{d}\frac{X'}{n}=\frac{\mathrm{d}X'}{n}\ ;$$

posant

$$X'=mX\ ,\qquad \text{d'où (3)}\qquad \mathrm{d}X'=m.\mathrm{d}X\ ,$$

il viendra, en substituant,

$$\mathrm{d}.\frac{m}{n}X=\frac{m}{n}\,\mathrm{d}X\ ; \qquad (7)$$

c'est-à-dire: *la dérivée du produit d'une fonction par une fraction positive quelconque est égale au produit de la dérivée de cette fonction par cette même fraction.* La formule (5) prouve, en outre, qu'il doit en être de même pour une *fraction négative.*

Soient X et X' deux fonctions monomes de x, telles qu'on ait

$$X=Ax^{\alpha}\ ,\qquad X'=A'x^{\alpha'}\ ,$$

où A, A', α, α' sont des constantes quelconques; on en conclura

$$XX'=AA'x^{\alpha+\alpha'}\ ,$$

et ensuite

$$\mathrm{d}X=\alpha Ax^{\alpha-1}\ ,\qquad \mathrm{d}X'=\alpha'A'x^{\alpha'-1}\ ,$$

$$\mathrm{d}.XX'=(\alpha+\alpha')AA'x^{\alpha+\alpha'-1}\ .$$

Cela donnera

$$\frac{\mathrm{d}X}{X}=\frac{\alpha}{x}\ , \qquad \frac{\mathrm{d}X'}{X'}=\frac{\alpha'}{x}\ ;$$

$$\frac{\mathrm{d}.XX'}{XX'}=\frac{\alpha+\alpha'}{x}\ ,$$

donc, en comparant,

$$\frac{\mathrm{d}.XX'}{XX'}=\frac{\mathrm{d}X}{X}+\frac{\mathrm{d}X'}{X'}\ , \qquad (8)$$

ou encore

$$\mathrm{d}.XX'=X'\mathrm{d}X+X\mathrm{d}X'\ . \qquad (9)$$

Soit toujours X une fonction monome, et soit X' une fonction polynome; telle qu'on ait

$$X'=X'_1+X'_2+X'_3+\ldots\ldots\ ;$$

X'_1, X'_2, X'_3, ... étant des monomes, on aura

$$XX'=XX'_1+XX'_2+XX'_3+\ldots\ldots\ ;$$

de là on conclura (2)

$$\mathrm{d}X'=\mathrm{d}X'_1+\mathrm{d}X'\ +\mathrm{d}X'_3+\ldots\ldots\ ,$$

$$\mathrm{d}.XX'=\mathrm{d}.XX'_1+\mathrm{d}.XX'_2+\mathrm{d}.XX'_3+\ldots\ldots\ ;$$

mais on a (9)

$$\mathrm{d}.XX'_1=X'_1\mathrm{d}X+X\mathrm{d}X'_1\ ,$$

$$\mathrm{d}.XX'_2=X'_2\mathrm{d}X+X\mathrm{d}X'_2\ ,$$

$$\mathrm{d}.XX'_3=X'_3\mathrm{d}X+\mathrm{d}X'_3\ ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

ce qui donnera, en substituant dans la valeur de d.XX'

$$\mathrm{d}.XX'=(X'_1+X'_2+X'_3+\ldots..)\mathrm{d}X+X(\mathrm{d}X'_1+\mathrm{d}X'_2+\mathrm{d}X_3+\ldots..)\ ;$$

c'est-à-dire,

$$\mathrm{d}.XX'=X'\mathrm{d}X+X\mathrm{d}X'\ ;$$

ainsi l'équation (9), et conséquemment l'équation (8), a encore lieu, lors même que l'un des deux facteurs X et X' est un polynome.

Supposons présentement que la fonction X soit aussi un polynome, de telle sorte que l'on ait

$$X=X_1+X_2+X_3+\ldots\ldots\ ;$$

X_1, X_2, X_3, ... étant des monomes; on aura

$$XX'=X_1X'+X_2X'+X_3X'+\ldots..\ ;$$

d'où on conclura (2)

$$\mathrm{d}X=\mathrm{d}X_1+\mathrm{d}X_2+\mathrm{d}X_3+\ldots.\ ,$$

$$\mathrm{d}.XX'=\mathrm{d}.X_1X'+\mathrm{d}.X_2X'+\mathrm{d}.X_3X'+\ldots\ldots\ ;$$

mais, d'après ce qui vient d'être dit sur la dérivée du produit de deux facteurs dont un seul est polynome, on a (9)

$$\mathrm{d}.X_1X'=X'\mathrm{d}X_1+X_1\mathrm{d}X'\ ,$$

$$\mathrm{d}.X_2X'=X'\mathrm{d}X_2+X_2\mathrm{d}X'\ ,$$

$$\mathrm{d}.X_3X'=X'\mathrm{d}X_3+X_3\mathrm{d}X'\ ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

ce qui donnera, en substituant dans la valeur de d.XX',

$$\mathrm{d}.XX'=X'(\mathrm{d}X_1+\mathrm{d}X_2+\mathrm{d}X_3+\ldots\ldots)+(X_1+X_2+X_3+\ldots\ldots)\mathrm{d}X' \ ;$$

c'est-à-dire ,

$$\mathrm{d}.XX'=X'\mathrm{d}X+X\mathrm{d}X' \ ;$$

ainsi l'équation (9) , et conséquemment l'équation (8) , ont encore lieu lorsque les fonctions X et X' sont toutes deux polynomes ; or, comme il n'est aucune fonction connue qui ne soit développable en une suite de monomes, il s'ensuit que la formule (8) a généralement lieu quelque fonctions connues de x que puissent représenter les symboles X et X', c'est-à-dire que *le quotient de la division de la dérivée du produit de deux fonctions par ce produit lui-même est égal à la somme des quotiens qu'on obtient en divisant respectivement les dérivées des deux facteurs par ces mêmes facteurs*

Si, dans la formule (8), on suppose que X' se change en $X'X''$, elle deviendra

$$\frac{\mathrm{d}.XX'X''}{XX'X''}=\frac{\mathrm{d}X}{X}+\frac{\mathrm{d}.X'X''}{X'X''} \ ,$$

ou, en vertu de la même formule,

$$\frac{\mathrm{d}.XX'X''}{XX'X''}=\frac{\mathrm{d}X}{X}+\frac{\mathrm{d}X'}{X'}+\frac{\mathrm{d}X''}{X''} \ ;$$

supposant encore que X'' se change en $X''X'''$, on aura

$$\frac{\mathrm{d}.XX'X''X'''}{XX'X''X'''}=\frac{\mathrm{d}X}{X}+\frac{\mathrm{d}X'}{X'}+\frac{\mathrm{d}.X''X'''}{X''X'''} \ ;$$

ou bien, en vertu de la même formule,

$$\frac{\mathrm{d}.XX'X''X'''}{XX'X''X'''}=\frac{\mathrm{d}X}{X}+\frac{\mathrm{d}X'}{X'}+\frac{\mathrm{d}X''}{X''}+\frac{\mathrm{d}X'''}{X'''} \ ,$$

et ainsi de suite ; de sorte qu'on aura, en général,

$$\frac{\mathrm{d}.XX'X''X'''.....}{XX'X''X'''....}=\frac{\mathrm{d}X}{X}+\frac{\mathrm{d}X'}{X'}+\frac{\mathrm{d}X''}{X''}+\frac{\mathrm{d}X'''}{X'''}+...... \qquad (10)$$

c'est-à-dire : *le quotient qu'on obtient en divisant la dérivée du produit d'un nombre quelconque de fonctions par ce produit lui-même, est égal à la somme des quotiens qu'on obtient en divisant respectivement les dérivées des facteurs par ces mêmes facteurs.*

Supposons $X=X'=X''=X'''=.......$ et ces fonctions au nombre de n ; la formule (10) deviendra simplement

$$\frac{\mathrm{d}.X^n}{X^n}=n.\frac{\mathrm{d}X}{X} \ ; \qquad (11)$$

c'est-à-dire : *le quotient qu'on obtient en divisant la dérivée d'une puissance entière et positive d'une fonction par cette puissance même, est égal au résultat qu'on obtient en multipliant par l'exposant de la puissance la dérivée de la fonction divisée par cette même fonction.*

En vertu de la formule (8) on a

$$\frac{\mathrm{d}.X'X''}{X'X''}=\frac{\mathrm{d}X'}{X'}+\frac{\mathrm{d}X''}{X''} \ ;$$

posant

$$X'X''=X\,, \qquad \text{d'où} \qquad X''=\frac{X}{X'}\,,$$

il viendra, en substituant,

$$\frac{\mathrm{d}X}{X}=\frac{\mathrm{d}X'}{X'}+\frac{\mathrm{d}\dfrac{X}{X'}}{\dfrac{X}{X'}}\,.$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}\,\frac{X}{X'}}{\frac{X}{X'}}=\frac{\mathrm{d}X}{X}-\frac{\mathrm{d}X'}{X'}\ ; \qquad (12)$$

c'est-à-dire : *la dérivée du quotient de deux fonctions divisée par ce quotient lui-même est égale à la dérivée du dividende divisée par le dividende, moins la dérivée du diviseur divisée par le diviseur.*

Si, dans cette dernière formule, on suppose $X=1$, on aura $\mathrm{d}X=0$; en conséquence elle deviendra, en changeant X' en X,

$$\frac{\mathrm{d}\,\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}}=-\frac{\mathrm{d}X}{X}\ ; \qquad (13)$$

c'est-à-dire : *la dérivée de l'inverse d'une fonction, divisée par cette inverse, est égale au quotient, pris en signe contraire, de la dérivée de cette fonction par la fonction même ;* ou, en d'autres termes, *si le produit de deux fonctions est l'unité, la somme des quotiens respectifs de leurs dérivées par ces fonctions elles-mêmes sera nulle.*

De tout cela il est facile de conclure généralement que *la dérivée du quotient de la division du produit de plusieurs fonctions par le produit de plusieurs autres fonctions, divisée par ce quotient même, est égale à la somme des dérivées des facteurs du dividende, divisées respectivement par ces facteurs, moins la somme des dérivées des facteurs du diviseur, divisées aussi respectivement par ces derniers.*

En vertu de la formule (11), on a

$$\frac{\mathrm{d}.X'^n}{X'^n}=n.\frac{\mathrm{d}X'}{X'}\ ;$$

posant

$$X'^n = X\,, \qquad \text{d'où} \qquad X' = \sqrt[n]{X}\,,$$

il viendra, en substituant,

$$\frac{dX}{X} = n.\frac{d\sqrt[n]{X}}{\sqrt[n]{X}}\,;$$

ce qui donnera

$$\frac{d\sqrt[n]{X}}{\sqrt[n]{X}} = \frac{1}{n}.\frac{dX}{X}\,; \qquad (14)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une racine entière et positive d'une fonction, divisée par cette même racine, est égale au quotient qu'on obtient en divisant par l'exposant de la racine la dérivée de la fonction divisée par la fonction elle-même.*

On a, en vertu de cette formule,

$$\frac{d.X'^{\frac{1}{n}}}{X'^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}.\frac{dX'}{X'}\,;$$

posant

$$X' = X^m\,, \quad \text{d'où (11)} \quad \frac{dX'}{X'} = m.\frac{dX}{X}\,,$$

il viendra, en substituant,

$$\frac{d.X^{\frac{m}{n}}}{X^{\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n}.\frac{dX}{X}\,; \qquad (15)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une puissance fractionnaire positive d'une fonction, divisée par cette puissance, est égale au produit qu'on obtient en multipliant par son exposant la dérivée de la fonction divisée par cette fonction elle-même.* La formule (13) prouve, en outre, qu'il doit en être de même pour une *puissance fractionnaire négative.*

Si, dans la formule (9), on suppose $X'=a$, a étant une constante quelconque, positive ou négative, entière ou fractionnaire, commensurable ou incommensurable, réelle ou imaginaire, on aura $\mathrm{d}X=\mathrm{d}a=0$; en conséquence cette formule deviendra

$$\mathrm{d}.aX=a.\mathrm{d}X\ ; \qquad (16)$$

c'est-à-dire : *la dérivée du produit d'une fonction par un multiplicateur constant quelconque s'obtient en multipliant la dérivée de la fonction par ce multiplicateur.* Cette formule, comme l'on voit, contient, comme cas particulier, les formules (3), (5), (6), (7).

La formule (10) donne, en chassant les dénominateurs,

$$\mathrm{d}.XX'X''X'''\ldots\ldots=X'X''X'''\ldots\ldots\mathrm{d}X+XX''X'''\ldots\ldots\mathrm{d}X'+XX'X'''\ldots\ldots\mathrm{d}X''+XX'X''\ldots\ldots\mathrm{d}X'''+\ldots\ldots\ ; \quad (17)$$

c'est-à-dire : *la dérivée du produit de tant de fonctions qu'on voudra s'obtient en prenant la somme des produits de la dérivée de chacun des facteurs par tous les autres.*

De la formule (11), qui a lieu (13), (14), (15), quelque nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif que l'on prenne pour n, on tire

$$\mathrm{d}.X^n=n.X^{n-1}\mathrm{d}X\ ; \qquad (18)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une puissance quelconque d'une fonction s'obtient en multipliant cette puissance par son exposant, en diminuant ensuite cet exposant d'une unité et en multipliant enfin par la dérivée de la fonction.*

La formule (12) donne

$$\mathrm{d}\frac{X}{X'}=\frac{X'\mathrm{d}X-X\mathrm{d}X'}{X'^2}\ ; \qquad (19)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une fonction fractionnaire s'obtient en retranchant du produit du dénominateur par la dérivée du numérateur, le produit du numérateur par la dérivée du dénominateur, et en divisant le reste par le quarré de ce même dénominateur.*

Si, dans cette formule, on fait $X=1$ et qu'on y change ensuite X' en X; à cause de $\mathrm{d}1=0$, elle deviendra, comme on le déduirait aussi de la formule (13),

$$\mathrm{d}\frac{1}{X}=-\frac{\mathrm{d}X}{X^2}\ ; \qquad (20)$$

c'est-à-dire : *la dérivée de l'inverse d'une fonction s'obtient en divisant la dérivée de la fonction, prise en signe contraire, par le quarré de cette même fonction.*

La formule (14) donne

$$\mathrm{d}\sqrt[n]{X}=\frac{\sqrt[n]{X}}{nX}\mathrm{d}X\ ; \qquad (21)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une racine quelconque d'une fonction s'obtient en divisant cette racine par autant de fois la fonction qu'il y a d'unités dans l'exposant, et en multipliant le quotient obtenu par la dérivée de cette même fonction.*

Les racines du second degré étant celles qui se présentent le plus fréquemment, il est utile de remarquer 1.° que, si l'on suppose $n=2$, cette formule deviendra simplement

$$\mathrm{d}\sqrt{X}=\frac{\mathrm{d}X}{2\sqrt{X}}\ ; \qquad (22)$$

2.° que si, dans cette dernière formule, on change X en $a+2bX+cX^2$, d'où $\mathrm{d}X=2(b+cX)\mathrm{d}X$; elle deviendra

$$\mathrm{d}\sqrt{a+2bX+cX^2}=\frac{(b+cX)\mathrm{d}X}{\sqrt{a+2bX+cX^2}}\ ; \qquad (23)$$

3.° que si enfin l'on a $X=x$, d'où $\mathrm{d}X=\mathrm{d}x=1$, celle-ci deviendra simplement

$$\mathrm{d}\sqrt{a+2bx+cx^2}=\frac{b+cx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,. \tag{24}$$

Soit X une fonction de X', supposée elle-même fonction de la variable x, le développement de X, considéré comme fonction de X', ne pourra être que de la forme

$$X=aX'^{\alpha}+bX'^{\beta}+cX'^{\gamma}+\ldots\ldots$$

d'où (2), (16) et (18)

$$\mathrm{d}X=(\alpha aX'^{\alpha-1}+\beta bX'^{\beta-1}+\gamma cX'^{\gamma-1}+\ldots\ldots)\mathrm{d}X'\,;$$

mais si, dans la valeur de X, on considère X' comme la variable, et si, pour indiquer que l'on en prend la dérivée sous ce point de vue, on écrit (*Introd.*) $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}X'}$ au lieu de $\mathrm{d}X$, on aura

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}X'}=\alpha aX'^{\alpha-1}+\beta bX'^{\beta-1}+\gamma cX'^{\gamma-1}+\ldots\ldots$$

ce qui donnera, en substituant, et en écrivant $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$ et $\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}x}$ au lieu de $\mathrm{d}X$ et $\mathrm{d}X'$, pour faire connaître qu'il s'agit de dérivées relatives à x,

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}X'}\cdot\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}x}\,; \tag{25}$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une fonction d'une quantité qui est elle-même fonction de la variable s'obtient en multipliant la dérivée de la première fonction, prise par rapport à la seconde, considérée comme la variable, par la dérivée de celle-ci, prise par rapport à la variable même.* La formule (18) offre un exemple de ce cas.

Si la fonction X' était elle-même fonction d'une quantité X'' fonction de x, on aurait, suivant cette formule,

$$\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}X''}\cdot\frac{\mathrm{d}X''}{\mathrm{d}x}\;;$$

ce qui donnerait, en substituant,

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}X'}\cdot\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}X''}\cdot\frac{\mathrm{d}X''}{\mathrm{d}x}\;; \qquad (26)$$

et ainsi de suite, pour un plus grand nombre de fonctions subordonnées les unes aux autres.

Ce qui précède suffit pour déterminer la dérivée de toute fonction algébrique donnée d'une seule variable. Nous renvoyons, pour les exemples, aux divers traités connus de calcul différentiel, et nous passons de suite aux fonctions transcendantes.

On sait que, dans le système de logarithmes de Néper, le seul dont il sera question ici, X étant une fonction quelconque de x, on a

$$\mathrm{Log}.X=\frac{X-1}{1}-\frac{(X-1)^2}{2}+\frac{(X-1)^3}{3}-\frac{(X-1)^4}{4}+\ldots$$

d'où (2)

$$\mathrm{d.Log}.X=\mathrm{d}\frac{X-1}{1}-\mathrm{d}.\frac{(X-1)^2}{2}+\mathrm{d}.\frac{(X-1)^3}{3}-\mathrm{d}.\frac{(X-1)^4}{4}+\ldots$$

mais on a généralement (6) et (18)

$$\mathrm{d}.\frac{(X-1)^n}{n}=\frac{1}{n}.\mathrm{d}(X-1)^n=(X-1)^{n-1}\mathrm{d}(X-1)=(X-1)^{n-1}\mathrm{d}X\;;$$

donc, en substituant

$$\mathrm{d.Log}.X=\{1-(X-1)+(X-1)^2-(X-1)^3+(X-1)^4-\ldots\}\mathrm{d}X\;;$$

ou plus brièvement

$$\mathrm{d.Log.}X = \frac{\mathrm{d}X}{1+(X-1)} \quad ;$$

c'est-à-dire ;

$$\mathrm{d.Log.}X = \frac{\mathrm{d}X}{X} \quad . \tag{27}$$

Ce qui nous apprend que *la dérivée du logarithme d'une fonction s'obtient en divisant la dérivée de la fonction par la fonction elle-même.* C'est déjà ce qu'auraient pu faire soupçonner l'inspection des formules (8), (10), (11), (12), (13), (14), (15) (*).

La formule (27) donne

$$\mathrm{d.Log.}X'' = \frac{\mathrm{d}X''}{X''} \quad ;$$

posant

$$X'' = X^{X'} , \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{Log.}X'' = \mathrm{Log}\, X^{X'} ;$$

il viendra, en substituant,

$$\mathrm{d.Log}\, X^{X'} = \frac{\mathrm{d.}X^{X'}}{X^{X'}} \quad ,$$

ce qui donne

(*) En définissant, avec quelques auteurs, le logarithme de X ce que devient $\frac{X^n-1}{n}$ lorsque n est nul; ce qui revient exactement au développement donné plus haut; la dérivée de $\mathrm{Log.}X$ sera ce que devient la dérivée de $\frac{X^n-1}{n}$ lorsque n est nul. Or, cette dérivée est $X^{n-1}\mathrm{d}X$ ou $X^n\frac{\mathrm{d}X}{X}$, qui, lorsque n est nul, se réduit à $\frac{\mathrm{d}X}{X}$, comme ci-dessus.

$$\mathrm{d}.X^{X'}=X^{X'}.\mathrm{d}.\mathrm{Log}\,X^{X'}\;; \qquad (28)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une fonction élevée à une puissance qui est elle-même une fonction s'obtient en multipliant cette puissance par la dérivée de son logarithme.*

Soit d'abord $X'=a$, a étant une constante quelconque, positive ou négative, entière ou fractionnaire, commensurable ou incommensurable, réelle ou imaginaire ; on aura

$$\mathrm{Log}.X^{X'}=\mathrm{Log}.X^a=a\mathrm{Log}.X\;,$$

et, par suite (16) et (27),

$$\mathrm{d}.\mathrm{Log}.X^{X'}=a.\,\frac{\mathrm{d}X}{X}\;;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\mathrm{d}.X^a=aX^a\frac{\mathrm{d}X}{X}\;,$$

ou encore

$$\mathrm{d}.X^a=aX^{a-1}\,\mathrm{d}X\;; \qquad (29)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une puissance constante quelconque d'une fonction s'obtient en multipliant la puissance par son exposant, diminuant ensuite cet exposant d'une unité et multipliant enfin par la dérivée de la fonction.* Cette formule, comme l'on voit, contient, comme cas particuliers, les formules (18), (20), (21).

Si, dans la formule (28), on fait $X=a$, a étant toujours une constante quelconque, et qu'on change ensuite X' en X, elle deviendra

$$\mathrm{d}.a^X = a^X.\mathrm{d}.\mathrm{Log}\, a^X \;;$$

mais on a

$$\mathrm{Log}.a^X = X\mathrm{Log}.a \;, \quad \text{d'où (16)} \quad \mathrm{d}.\mathrm{Log}\, a^X = \mathrm{Log}.a.\mathrm{d}X\,;$$

il viendra donc, en substituant,

$$\mathrm{d}.a^X = a^X.\mathrm{Log}.a.\mathrm{d}X \;; \qquad (30)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une puissance d'une constante dont l'exposant est une fonction s'obtient en multipliant cette puissance par le logarithme de la constante et par la dérivée de la fonction.*

Dans le cas particulier où $a=e$, e étant la base des logarithmes de Néper, ou ce que devient $\sqrt[n]{1+n}$ lorsque n est nul, on aura simplement

$$\mathrm{d}.e^X = e^X\mathrm{d}X \;; \qquad (31)$$

c'est-à-dire: *la dérivée d'une puissance de la base des logarithmes de Néper dont l'exposant est une fonction s'obtient en multipliant cette puissance par la dérivée de son exposant* (*).

(*) On parviendrait directement à ce résultat, en partant de la formule

$$e^X = 1 + \frac{X}{1} + \frac{X^2}{1.2} + \frac{X^3}{1.2.3} + \frac{X^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

qui donne

$$\mathrm{d}.e^X = \left(1 + \frac{X}{1} + \frac{X^2}{1.2} + \frac{X^3}{1.2.3} + \frac{X^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots\right)\mathrm{d}X,$$

Passons présentement aux fonctions circulaires. On sait que X étant une fonction quelconque de x, on a

$$\text{Ang.}(\text{Tang.}=X)=\frac{X}{1}-\frac{X^3}{3}+\frac{X^5}{5}-\frac{X^7}{7}+\ldots\ldots;$$

donc (2)

$$\text{d.Ang.}(\text{Tang.}=X)=\text{d.}\frac{X}{1}-\text{d.}\frac{X^3}{3}+\text{d.}\frac{X^5}{5}-\text{d.}\frac{X^7}{7}+\ldots\ldots;$$

mais on a généralement, (16) et (18),

$$\text{d.}\frac{X^n}{n}=X^{n-1}\text{d}X\ ;$$

donc, en substituant,

---

c'est-à-dire, comme ci-dessus,

$$\text{d.}e^X=e^X.\text{d}X\ .$$

On aurait de même

$$\text{d.}e^{X'}=e^{X'}.\text{d}X'\ ;$$

posant alors

$$e^{X'}=X\ ,\quad \text{d'où}\quad X'=\text{Log.}X\quad \text{et}\quad \text{d}X'=\text{d.Log.}X\ ,$$

il viendrait, en substituant,

$$\text{d}X=X\text{d.Log}\ X\ ;$$

d'où l'on conclurait, comme nous l'avons trouvé ci-dessus,

$$\text{d.Log.}X=\frac{\text{d}X}{X}\ .$$

$$\text{d.Ang.}(\text{Tang} = X) = (1 - X^2 + X^4 - X^6 + X^8 - \ldots\ldots)\text{d}X \;;$$

ou, plus brièvement,

$$\text{d.Ang.}(\text{Tang.} = X) = \frac{\text{d}X}{1+X^2} \;; \qquad (32)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'un angle dont la tangente tabulaire est une fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée de cette tangente par le quarré de la sécante du même angle.*

On a

$$\text{Ang.}(\text{Cot.} = X) = \tfrac{1}{2}\varpi - \text{Ang}(\text{Tang.} = X) \;;$$

d'où

$$\text{d.Ang.}(\text{Cot.} = X) = -\text{d.Ang.}(\text{Tang} = X) \;;$$

ce qui donne, en substituant,

$$\text{d.Ang.}(\text{Cot.} = X) = -\frac{\text{d}X}{1+X^2} \;; \qquad (33)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'un angle dont la cotangente tabulaire est une fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée de cette cotangente, prise en signe contraire, par le quarré de la cosécante du même angle.*

La formule (32) donne

$$\text{d.Ang.}(\text{Tang.} = X') = \frac{\text{d}X'}{1+X'^2} \;;$$

posant alors

$\text{Ang.}(\text{Tang.}=X')=X$, d'où $X'=\text{Tang.}X$, et $1+X'^2=\dfrac{1}{\text{Cos.}^2X}$;

il viendra, en substituant,

$$dX=\text{Cos.}^2X\,d.\text{Tang.}X\,;$$

ce qui donnera

$$d.\text{Tang.}X=\frac{dX}{\text{Cos.}^2X}\,; \qquad (34)$$

c'est-à-dire : *la dérivée de la tangente tabulaire d'un angle fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée de l'angle par le quarré de son cosinus.*

La formule (33) donne

$$d.\text{Ang.}(\text{Cot.}=X')=-\frac{dX'}{1+X'}\,;$$

posant alors

$\text{Arc}(\text{Cot.}=X')=X$, d'où $X'=\text{Cot.}X$ et $1+X'^2=\dfrac{1}{\text{Sin.}^2X}$,

il viendra, en substituant,

$$dX=-\text{Sin.}^2X.d.\text{Cot.}X\,;$$

ce qui donnera

$$d.\text{Cot.}X=-\frac{dX}{\text{Sin.}^2X}\,; \qquad (35)$$

c'est-à-dire : *la dérivée de la cotangente tabulaire d'un angle fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée de l'angle, prise en signe contraire, par le quarré de son sinus.*

On sait que, X étant une fonction quelconque, on a

$$\text{Sin}.X=\frac{\text{Tang}\,X}{\sqrt{1+\text{Tang}.^2X}}\,,\qquad \text{Cos}.X=\frac{1}{\sqrt{1+\text{Tang}.^2X}}\;;$$

d'où l'on déduit d'abord, (19) et (20),

$$\text{d.Sin}.X=\frac{\sqrt{1+\text{Tang}.^2X}\,\text{d.Tang}\,X-\text{Tang}.X\text{d}\sqrt{1+\text{Tang}.^2X}}{1+\text{Tang}.^2X}\,,$$

$$\text{d.Cos}.X=-\frac{\text{d}\sqrt{1+\text{Tang}.^2X}}{1+\text{Tang}.^2X}\;;$$

mais on a (23)

$$\text{d}\sqrt{1+\text{Tang}.^2X}=\frac{\text{Tang}.X.\text{d.Tang}.X}{\sqrt{1+\text{Tang}.^2X}}\;;$$

ce qui donne, en substituant,

$$\text{d.Sin}.X=\frac{\sqrt{1+\text{Tang}.^2X}-\dfrac{\text{Tang}.^2X}{\sqrt{1+\text{Tang}.^2X}}}{1+\text{Tang}.^2X}\,\text{d.Tang}.X\,,$$

$$\text{d.Cos}.X=-\frac{\text{Tang}.X.\text{d.Tang}.X}{(1+\text{Tang}.^2X)^{\frac{3}{2}}}\;;$$

ou encore

$$\text{d.Sin}.X=\frac{\text{d.Tang}.X}{\text{Séc}.^3X}\,,\qquad \text{d.Cos}.X=-\frac{\text{Tang}.X.\text{d Tang}.X}{\text{Séc}.^3X}\;;$$

mettant dans ces formules pour d.Tang.X sa valeur (34), il viendra

$$\text{d.Sin}.X=-\frac{\text{d}X}{\text{Séc}.^3X\text{Cos}.^2X}\,,\qquad \text{d.Cos}.X=-\frac{\text{Tang}\,X\text{d}X}{\text{Séc}.^3X\text{Cos}.^2X}\;;$$

ou encore

$$\mathrm{d.Sin.}X = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{Séc.}X}, \qquad \mathrm{d.Cos.}X = -\frac{\mathrm{Tang.}X.\mathrm{d}X}{\mathrm{Séc.}X};$$

ou enfin

$$\mathrm{d.Sin.}X = \mathrm{d}X.\mathrm{Cos.}X, \quad (36) \qquad \mathrm{d.Cos.}X = -\mathrm{d}X.\mathrm{Sin.}X; \quad (37)$$

c'est-à-dire : *la dérivée du sinus tabulaire d'une fonction quelconque s'obtient en multipliant la dérivée de l'angle par son cosinus tabulaire ;*

La dérivée du cosinus tabulaire d'une fonction quelconque s'obtient en multipliant la dérivée de l'angle, prise en signe contraire, par son sinus tabulaire (*).

(*) On aurait pu parvenir directement à ces résultats, en partant des formules connues

$$\mathrm{Sin.}X = \frac{X}{1} - \frac{X^3}{1.2.3} + \frac{X^5}{1.2.3.4.5} - \frac{X^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots;$$

$$\mathrm{Cos.}X = 1 - \frac{X^2}{1.2} + \frac{X^4}{1.2.3.4} - \frac{X^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

qui donnent (2), (16), (18)

$$\mathrm{d.Sin.}X = \left(1 - \frac{X^2}{1.2} + \frac{X^4}{1.2.3.4} - \frac{X^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right)\mathrm{d}X,$$

$$\mathrm{d.Cos.}X = -\left(\frac{X}{1} - \frac{X^3}{1.2.3} + \frac{X^5}{1.2.3.4.5} - \frac{X^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\right)\mathrm{d}X;$$

c'est-à-dire, comme ci-dessus,

$$\mathrm{d.Sin}\,X = \mathrm{d}X.\mathrm{Cos.}X, \qquad \mathrm{d.Cos.}X = -\mathrm{d}X.\mathrm{Sin.}X;$$

La formule (36) donne

$$\mathrm{d\,Sin.}X'=\mathrm{d}X'.\mathrm{Cos}\;X'\;;$$

posant

$$\mathrm{Sin.}X'=X\;,\quad \text{d'où}\quad X'=\mathrm{Ang.(Sin.}=X)\;,\quad \text{et}\quad \mathrm{Cos}\;X'=\sqrt{1-X^2}\;;$$

il viendra, en substituant,

$$\mathrm{d}X=\sqrt{1-X^2}.\mathrm{d.Ang.(Sin}=X)\;;$$

ce qui donnera

---

on aurait pu partir aussi des définitions connues

$$\mathrm{Sin.}X=\frac{e^{X\sqrt{-1}}-e^{-X\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\;,\qquad \mathrm{Cos.}X=\frac{e^{X\sqrt{-1}}+e^{-X\sqrt{-1}}}{2}\;,$$

qui auraient conduit aux mêmes résultats. En considérant ensuite que

$$\mathrm{Tang.}X=\frac{\mathrm{Sin.}X}{\mathrm{Cos.}X}\;,$$

on en aurait conclu (19)

$$\mathrm{d.Tang.}X=\frac{\mathrm{Cos.}X.\mathrm{dSin}X-\mathrm{Sin.}X.\mathrm{d.Cos.}X}{\mathrm{Cos.}^2X}\;,$$

ou bien (36), (37)

$$\mathrm{d.Tang.}X=\frac{(\mathrm{Cos.}^2X+\mathrm{Sin.}^2X)\mathrm{d}X}{\mathrm{Cos.}^2X}=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{Cos.}^2X}\;;$$

comme nous l'avons déja trouvé ci-dessus (34).

$$\mathrm{d.Ang.(Sin.}=X)=\frac{\mathrm{d}X}{\sqrt{1-X^2}}\ ; \qquad (38)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'un angle dont le sinus tabulaire est une fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée du sinus par le cosinus.*

On a

$$\mathrm{Ang.(Cos.}=X)=\tfrac{1}{2}\varpi-\mathrm{Ang.(Sin.}=X)\ ,$$

d'où

$$\mathrm{d.Ang.(Cos.}=X)=-\mathrm{d.Ang\ (Sin.}=X)\ ;$$

ou bien (38)

$$\mathrm{d.Ang.(Cos.}=X)=-\frac{\mathrm{d}X}{\sqrt{1-X^2}}\ ; \qquad (39)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'un angle dont le cosinus tabulaire est une fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée du cosinus, prise en signe contraire, par le sinus.*

On a, quelle que soit X,

$$\mathrm{S\acute{e}c.}X=-\frac{1}{\mathrm{Cos.}X}\ , \qquad \mathrm{Cos\acute{e}c.}X=\frac{1}{\mathrm{Sin.}X}\ ;$$

donc (20)

$$\mathrm{d.S\acute{e}c.}X=-\frac{\mathrm{d.Cos.}X}{\mathrm{Cos.}^2X}\ , \qquad \mathrm{d.Cos\acute{e}c.}X=-\frac{\mathrm{d.Sin.}X}{\mathrm{Sin.}^2X}\ ;$$

ou encore (36), (37)

$$\mathrm{d.Séc.}X = \frac{\mathrm{d}X.\mathrm{Sin.}X}{\mathrm{Cos.}^2X}\ , \qquad \mathrm{d.Coséc.}X = -\frac{\mathrm{d}X.\mathrm{Cos.}X}{\mathrm{Sin.}^2X}\ ;$$

ou enfin

$$\mathrm{d.Séc.}X = \frac{\mathrm{Tang.}X}{\mathrm{Cos.}X}\mathrm{d}X\ , \quad (40) \qquad \mathrm{d.Coséc.}X = -\frac{\mathrm{Cot.}X}{\mathrm{Sin.}X}\mathrm{d}X; \quad (41)$$

c'est-à-dire : *la dérivée de la sécante tabulaire d'un angle s'obtient en multipliant la dérivée de l'angle par sa tangente, et en divisant le produit par son cosinus.*

La dérivée de la cosécante tabulaire d'un angle s'obtient en multipliant la dérivée de l'angle, prise en signe contraire, par sa cotangente, et en divisant le produit par son sinus.

La formule (40) donne

$$\mathrm{d\,Séc.}X' = \frac{\mathrm{Tang.}X'}{\mathrm{Cos.}X'}\mathrm{d}X'\ ;$$

posant alors

$$\mathrm{Séc.}X' = X\ , \quad \text{d'où} \quad X' = \mathrm{Ang.}(\mathrm{Séc.} = X)\ ;$$

on aura

$$\mathrm{Tang.}X' = \sqrt{X^2 - 1}\ , \qquad \mathrm{Cos.}X' = \frac{1}{X}\ ,$$

cela donnera, en substituant,

$$\mathrm{d}X = X\sqrt{X^2-1}.\mathrm{d}.\text{Ang}.(\text{Séc.}=X) \;;$$

d'où on tirera

$$\mathrm{d}.\text{Ang}.(\text{Séc.}=X) = \frac{\mathrm{d}X}{X\sqrt{X^2-1}} \;; \qquad (42)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'un angle dont la sécante tabulaire est une fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée de cette sécante par le produit de cette même sécante et de la tangente du même angle.*

On a

$$\text{Ang}.(\text{Coséc.}=X) = \tfrac{1}{2}\varpi - \text{Ang}.(\text{Séc.}=X) \;;$$

d'où

$$\mathrm{d}.\text{Ang}.(\text{Coséc.}=X) = -\mathrm{d}.\text{Ang}.(\text{Séc.}=X) \;;$$

ou bien (42)

$$\mathrm{d}.\text{Ang}.(\text{Coséc.}=X) = -\frac{\mathrm{d}X}{X\sqrt{X^2-1}} \;; \qquad (43)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'un angle dont la cosécante tabulaire est une fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée de cette cosécante, prise en signe contraire, par le produit de cette même cosécante et de la cotangente du même angle.*

Au moyen de ces formules, il n'est aucune fonction logarithmique, exponentielle ou circulaire, dont on ne parvienne facilement à calculer la dérivée.

§. II.

Dérivées successives des fonctions d'une seule variable.

En continuant de représenter par X une fonction quelconque de la seule variable x, on voit, par ce qui précède, que généralement $\mathrm{d}X$ sera aussi une fonction de x, dont on pourra se proposer de déterminer la dérivée comme celle de X. On pourrait représenter cette dérivée par $\mathrm{d.d}X$; mais on la représente plus simplement par d^2X; et c'est là ce qu'on appelle la *seconde dérivée* de la fonction X, tandis que $\mathrm{d}X$ en est dit la *première dérivée.* On peut dire également que d^2X est la première dérivée de $\mathrm{d}X$.

Cette seconde dérivée d^2X étant aussi, en général, une fonction de x, on peut pareillement se proposer d'en déterminer la dérivée, qui sera dite la *troisième dérivée* de X, ou la seconde dérivée de $\mathrm{d}X$, ou encore la première dérivée de d^2X. On pourrait la représenter par $\mathrm{d.d}^2X$ ou par $\mathrm{d}^2.\mathrm{d}X$; mais on trouve plus simple de la dénoter par d^3X.

Généralement, nous conviendrons de représenter par

$$X,\ \mathrm{d}X,\ \mathrm{d}^2X,\ \mathrm{d}^3X\ldots\ldots\mathrm{d}^nX,\ \ldots\ldots$$

une suite de fonctions de la seule variable x, dont la première peut être quelconque, et dont chacune des autres est la première dérivée de celle qui la précède immédiatement. En conséquence d^nX sera dite la $n.^{ieme}$ dérivée de x. On voit par là que l'expression $\mathrm{d}^{m+n}X$, qu'on pourrait remplacer par l'une ou l'autre de ces deux-ci $\mathrm{d}^m.\mathrm{d}^nX$ ou $\mathrm{d}^n.\mathrm{d}^mX$, pourra être dite indifféremment la $(m+n)^{ieme}$ dérivée de x, ou la $m.^{ieme}$ dérivée de sa $n.^{ieme}$ dérivée, ou enfin la $n.^{ieme}$ dérivée de sa $m.^{ieme}$ dérivée.

Au surplus, à cause de $\mathrm{d}x=1$; d'où il suit que $\mathrm{d}x^n$, équivalent de $(\mathrm{d}x)^n$, et qu'il faut bien (*Introd*) se garder de confondre soit avec $\mathrm{d}\ x^n$ soit avec d^nx, est aussi égal à l'unité; de même qu'au lieu de $\mathrm{d}X$ on peut écrire $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$, on pourrait aussi, au lieu de d^2X ou $\mathrm{d}.\mathrm{d}X$, écrire

$$\frac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}x}, \text{ ou simplement } \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}.$$

De même, au lieu de d^3X ou $\mathrm{d}.\mathrm{d}^2X$, on pourrait écrire

$$\frac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}}{\mathrm{d}x}, \text{ ou simplement } \frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3};$$

et ainsi de suite. Alors la série de fonctions, dont il a été question ci-dessus, serait dénotée comme il suit:

$$X, \ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}, \ \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}, \ \frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3}, \ \ldots\ldots\ldots \ \frac{\mathrm{d}^nX}{\mathrm{d}x^n}, \ldots\ldots;$$

mais dans le cas présent, où il n'est question que de fonctions d'une seule variable, ce serait là, comme nous l'avons déjà remarqué, une complication tout à fait sans objet.

Puisqu'en général $\mathrm{d}.Ax^{\alpha}=\alpha Ax^{\alpha-1}$; il s'ensuit que, si X est une fonction rationnelle et entière de x, du $m.^{\text{ième}}$ degré, sa première dérivée ne sera plus que du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré seulement, sa seconde dérivée du $(m-2)^{\text{ième}}$, la troisième du $(m-3)^{\text{ième}}$, et ainsi de suite; de sorte qu'en général d^nX ne sera plus que du $(m-n)^{\text{ième}}$ degré. La $m.^{\text{ième}}$ dérivée sera donc d'un degré nul, c'est-à-dire constante; et, par suite, toutes les dérivées ultérieures seront égales à zéro. Dans tous les autres cas, la fonction X aura une infinité de dérivées effectives.

Soit, en général,

$$X=Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\ldots\ldots=\mathrm{f}x;$$

$A, B, C, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant des constantes quelconques, positives ou négatives, entières ou fractionnaires, commensurables ou incommensurables, réelles ou imaginaires, on aura successivement

$$\mathrm{d}X = \alpha A x^{\alpha-2} + \beta B x^{\beta-1} + \gamma C x^{\gamma-1} + \dots\dots,$$

$$\mathrm{d}^2X = \alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-1} + \beta(\beta-1)Bx^{\beta-2} + \gamma(\gamma-1)Cx^{\gamma-2} + \dots\dots,$$

$$\mathrm{d}^3X = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)Ax^{\alpha-3} + \beta(\beta-1)(\beta-2)Bx^{\beta-3} + \gamma(\gamma-1)(\gamma-2)Cx^{\gamma-3} + \dots\dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et, en général,

$$\mathrm{d}^nX = \left\{ \begin{array}{l} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots\dots(\alpha-n+1)Ax^{\alpha-n} \\ +\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)\dots\dots(\beta-n+1)Bx^{\beta-n} \\ +\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)(\gamma-3)\dots\dots(\gamma-n+1)Cx^{\gamma-n} \\ +\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right\};$$

de là on conclura, quelle que soit la constante g,

$$X + \mathrm{d}X\frac{g}{1} + \mathrm{d}^2X\frac{g^2}{1.2} + \mathrm{d}^3X\frac{g^3}{1.2.3} + \dots\dots + \mathrm{d}^nX\frac{g^n}{1.2.3\dots n} + \dots\dots$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} A\left(x^{\alpha} + \frac{\alpha}{1}x^{\alpha-1}g + \frac{\alpha}{1}\,\frac{\alpha-1}{2}x^{\alpha-2}g^2 + \dots\dots + \frac{\alpha}{1}\,\frac{\alpha-1}{2}\dots\frac{\alpha-n+1}{n}x^{\alpha-n}g^n + \dots\right) \\ +B\left(x^{\beta} + \frac{\beta}{1}x^{\beta-1}g + \frac{\beta}{1}\,\frac{\beta-1}{2}x^{\beta-2}g^2 + \dots\dots + \frac{\beta}{1}\,\frac{\beta-1}{2}\dots\frac{\beta-n+1}{n}x^{\beta-n}g^n + \dots\right) \\ +C\left(x^{\gamma} + \frac{\gamma}{1}x^{\gamma-1}g + \frac{\gamma}{1}\,\frac{\gamma-1}{2}x^{\gamma-1}g^2 + \dots\dots + \frac{\gamma}{1}\,\frac{\gamma-1}{2}\dots\frac{\gamma-n+1}{n}x^{\gamma-n}g^n + \dots\right) \\ +\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right\};$$

ou, plus brièvement,

$$X+\mathrm{d}X\frac{g}{1}+\mathrm{d}^2X\frac{g^2}{1.2}+\mathrm{d}^3X\frac{g^3}{1.2.3}+\ldots\ldots=A(x+g)^\alpha+B(x+g)^\beta+C(x+g)^\gamma+\ldots\ldots;$$

or, puisqu'on a

$$X=Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+\ldots\ldots=\mathrm{f}x\ ,$$

on doit avoir

$$A(x+g)^\alpha+B(x+g)^\beta+C(x+g)^\gamma+\ldots\ldots=\mathrm{f}(x+g)\ ;$$

donc finalement

$$\mathrm{f}(x+g)=X+\mathrm{d}X\frac{g}{1}+\mathrm{d}^2X\frac{g^2}{1.2}+\mathrm{d}^3X\frac{g^3}{1.2.3}+\mathrm{d}^4X\frac{g^4}{1.2.3.4}+\ldots\ldots$$

ou bien, en remettant pour X sa valeur $\mathrm{f}x$;

$$\mathrm{f}(x+g)=\mathrm{f}x+\mathrm{d.f}x\frac{g}{1}+\mathrm{d}^2.\mathrm{f}x\frac{g^2}{1.2}+\mathrm{d}^3.\mathrm{f}x\frac{g^3}{1.2.3}+\ldots\ldots;\quad(44)$$

c'est en cela que consiste le *Théorème de Taylor*, qui se trouve ainsi très-simplement et très-rigoureusement démontré pour toute fonction développable en une suite de monomes; c'est-à-dire pour toutes les fonctions connues, algébriques ou transcendantes. Il est clair d'ailleurs qu'on pourrait écrire

$$\mathrm{f}(x+g)=X+\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\frac{g}{1}+\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}\frac{g^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3}\frac{g^3}{1.2.3}+\ldots\ldots;\quad(45)$$

nous aurons souvent besoin d'employer ce développement sous cette dernière forme.

Dans la formule (44), $\mathrm{f}x$ est ce qu'on appelle l'*état primitif* de la fonction; la constante quelconque g est dite l'*accroissement* ou la *différence* de la variable; et $\mathrm{f}(x+g)$ est ce qu'on appelle l'*état varié* de la fonction. Cette formule (44) donne donc le développement de l'état varié de la fonction, en série, procédant suivant les puissances entières et positives de l'accroissement; série dans laquelle les coefficiens des différens termes sont les dérivées successives de la fonction primitive, divisés respectivement par le produit d'autant des premiers nombres naturels qu'il y a d'unités dans l'exposant de dérivation.

De cette formule on tire

$$\mathrm{f}(x+g)-\mathrm{f}x=\mathrm{d.f}x.g+\mathrm{d}^2.\mathrm{f}x\frac{g^2}{1.2}+\mathrm{d}^3.\mathrm{f}x\frac{g^3}{1.2.3}+\ldots\ ; \quad (46)$$

formule au moyen de laquelle $\mathrm{f}(x+g)-\mathrm{f}x$, qu'on appelle la *différence* de la fonction, se trouve développée suivant les puissances ascendantes de l'accroissement g. Le premier terme $\mathrm{d.f}x.g$ de cette différence, qui est proprement une différence tronquée, est appelé la *différentielle* de la fonction $\mathrm{f}x$; et le coefficient $\mathrm{d.f}x$ de g, dans ce premier terme, est dit le *coefficient différentiel* de cette même fonction; d'où l'on voit que *le coefficient différentiel d'une fonction n'est autre chose que sa fonction dérivée.*

De la formule (46) on tire

$$\frac{\mathrm{f}(x+g)-\mathrm{f}x}{g}=\mathrm{d.f}x+\mathrm{d}^2.\mathrm{f}x\frac{g}{1.2}+\mathrm{d}^3.\mathrm{f}x\frac{g^2}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

Le premier membre de cette équation est le rapport entre l'accroissement de la fonction et celui de la variable; et comme, à mesure que g devient plus petit, son second membre tend sans cesse à se réduire à son premier terme $\mathrm{d.f}x$, on peut dire encore que *la dérivée ou le coefficient différentiel d'une fonction est la limite du rapport entre l'accroissement de la fonction et celui de la variable.*

Voilà donc, pour obtenir la dérivée d'une fonction, un procédé différent de celui que nous avons d'abord indiqué, mais qui doit nécessairement lui être équivalent. Il consiste à attribuer à la variable un accroissement arbitraire; à retrancher la fonction proposée de ce qu'elle devient par l'effet de cet accroissement ; à diviser le reste par cet accroissement et à faire enfin ce même accroissement nul dans le quotient.

Soit, par exemple, la fonction déjà considérée

$$Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\ldots$$

dont on se propose d'obtenir la fonction dérivée par ce nouveau procédé ; en désignant toujours l'accroissement par g, l'état varié de la fonction sera

$$A(x+g)^{\alpha}+B(x+g)^{\beta}+C(x+g)^{\gamma}+\ldots,$$

duquel, retranchant la fonction primitive, il viendra pour reste

$$A\{(x+g)^{\alpha}-x^{\alpha}\}+B\{(x+g)^{\beta}-x^{\beta}\}+C\{(x+g)^{\gamma}-x^{\gamma}\}+\ldots;$$

de sorte que la dérivée sera ce que devient la fraction

$$\frac{A\{(x+g)^{\alpha}-x^{\alpha}\}+B\{(x+g)^{\beta}-x^{\beta}\}+C\{(x+g)^{\gamma}-x^{\gamma}\}+\ldots\ldots}{g}$$

lorsque g est nul. Or, on a

$$\frac{(x+g)^{\alpha}-x^{\alpha}}{g}=\alpha x^{\alpha-1}+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\alpha-1}{2}\,x^{\alpha-2}g+\ldots\ldots,$$

$$\frac{(x+g)^{\beta}-x^{\beta}}{g}=\beta x^{\beta-x}+\frac{\beta}{1}\cdot\frac{\beta-1}{2}\,x^{\beta-x}g+\ldots\ldots,$$

$$\frac{(x+g)^{\gamma}-x^{\gamma}}{g}=\gamma x^{\gamma-1}+\frac{\gamma}{1}\cdot\frac{\gamma-1}{2}\,x^{\gamma-2}g+\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

substituant donc dans la fraction ci-dessus, elle deviendra

$$\alpha A x^{\alpha-1}+\beta B x^{\beta-1}+\gamma C x^{\gamma-1}+\ldots\ldots$$
$$+\left(\frac{\alpha}{1}\,\frac{\alpha-1}{2}\,A x^{\alpha-2}+\frac{\beta}{1}\,\frac{\beta-1}{2}\,B x^{\beta-2}+\frac{\gamma}{1}\,\frac{\gamma-1}{2}\,C x^{\gamma-2}+\ldots\right)g$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

posant enfin, dans ce résultat, $g=0$, on obtiendra, pour la dérivée demandée,

$$\alpha A x^{\alpha-1}+\beta B x^{\beta-1}+\gamma C x^{\gamma-1}+\ldots\ldots;$$

comme nous l'avions déjà obtenue par l'autre procédé.

Nous aurions donc pu, dès le début, adopter cette définition des fonctions dérivées, et en déduire les règles de dérivation des fonctions que nous aurions trouvées exactement telles que nous les avons déjà obtenues dans le paragraphe I; et c'est même ainsi qu'on en use communément; mais il nous a paru beaucoup plus naturel, et conséquemment plus convenable, de choisir de préférence, pour définition des dérivées, une opération fort simple que nos premiers pas dans l'analyse et dans son application à la géométrie des lignes et des surfaces courbes doivent nous avoir rendue tout à fait familière.

Les expressions *fonction dérivée* et *coefficient différentiel* étant, d'après ce qu'on vient de voir, rigoureusement synonymes, nous ferons, à l'avenir, exclusivement usage de la dernière comme étant la plus usitée, et, en conséquence, nous substituerons, aux mots *dérivation* et *dériver*, les mots *différentiation* et *dériver*.

SECTION II.

Différentiation des fonctions de plusieurs variables.

§. I.

Différentiation des fonctions explicites.

Soit S une fonction quelconque de tant de variables x, y, z,..... qu'on voudra; si on la différentie α fois consécutivement, par rapport à la seule variable x, on obtiendra son coefficient différentiel du α^{ieme} ordre relatif à cette variable, que nous sommes déjà convenus de représenter par $\frac{d^\alpha S}{dx^\alpha}$; lequel sera en général, comme S, une nouvelle fonction de $x, y, z, \ldots\ldots$

Si l'on différentie ce coefficient différentiel β fois, par rapport à la seule variable y, on obtiendra, en général, pour résultat, une autre fonction de $x, y, z, \ldots\ldots$, que l'on pourrait dénoter par

$$\frac{d^\beta . \frac{d^\alpha S}{dx^\alpha}}{dy^\beta};$$

mais que l'on est convenu de représenter plus simplement par

$$\frac{d^{\alpha+\beta} S}{dx^\alpha dy^\beta}.$$

On pourra, semblablement, différentier cette dernière fonction γ fois par rapport à la seule variable z, et au lieu de dénoter le résultat de cette dernière opération, comme on pourrait très-bien le faire, par

$$\frac{d^\gamma . \frac{d^{\alpha+\beta} S}{dx^\alpha dy^\beta}}{dz^\gamma},$$

on la représentera simplement par

$$\frac{d^{\alpha+\beta+\gamma} S}{dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma},$$

et ainsi de suite; de sorte qu'en général

$$\frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}S}{dx^{\alpha}dy^{\beta}dz^{\gamma}\ldots\ldots},$$

sera le symbole de la fonction à laquelle on parvient en différentiant d'abord α fois la fonction S par rapport à x seulement, puis la fonction résultante β fois par rapport à y seulement, puis la nouvelle fonction obtenue γ fois par rapport à z seulement, et ainsi du reste.

Ces choses ainsi entendues, soit

$$S = \mathrm{f}(x, y, z, \ldots\ldots) ;$$

d'après la formule (45) on aura

$$\mathrm{f}(x+g, y, z, \ldots) = S + \frac{dS}{dx}\,\frac{g}{1} + \frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2} + \frac{d^3S}{dx^3}\,\frac{g^3}{1.2.3} + \ldots ; \quad (47)$$

si, dans cette équation, on suppose que y se change en $y+h$, h étant une constante quelconque; en vertu de la même formule,

$$\left.\begin{array}{l} S \\[2ex] \dfrac{dS}{dx} \\[2ex] \dfrac{d^2S}{dx^2} \\[2ex] \dfrac{d^3S}{dx^3} \\[2ex] \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{deviendront} \left\{\begin{array}{l} S + \dfrac{dS}{dy}\,\dfrac{h}{1} + \dfrac{d^2S}{dy^2}\,\dfrac{h^2}{1.2} + \dfrac{d^3S}{dy^3}\,\dfrac{h^3}{1.2.3} + \ldots \\[2ex] \dfrac{dS}{dx} + \dfrac{d^2S}{dxdy}\,\dfrac{h}{1} + \dfrac{d^3S}{dxdy^2}\,\dfrac{h^2}{1.2} + \ldots \\[2ex] \dfrac{d^2S}{dx^2} + \dfrac{d^3S}{dx^2dy}\,\dfrac{h}{1} + \ldots \\[2ex] \dfrac{d^3S}{dx^3} + \ldots \\[2ex] \ldots\ldots \end{array}\right.$$

en conséquence la formule (47) deviendra

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{f}(x+g, y+h, z, \ldots..) = S &+ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\frac{g}{1} + \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}\frac{g^2}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^2}\frac{g^3}{1.2.3} + \ldots \\ &+ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\frac{h}{1} + 2\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\frac{gh}{1.2} + 3\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\frac{g^2h}{1.2.3} + \ldots \\ &+ \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}\frac{h^2}{1.2} + 3\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\frac{gh^2}{1.2.3} + \ldots \\ &+ \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}y^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

Remarquons présentement que l'on peut passer de la fonction $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots\ldots)$ à la fonction $\mathrm{f}(x+g, y+h, z, \ldots..)$ de deux manières qui, bien que différentes en apparence, doivent néanmoins conduire au même résultat; on peut, en effet, comme nous venons de le faire, supposer que, dans la première fonction, x se change en $x+g$, et qu'ensuite, dans la fonction résultante, y se change en $y+h$; ou bien on peut supposer que, dans cette même première fonction, c'est d'abord y qui se change en $y+h$, et qu'ensuite dans la fonction résultante, x se change en $x+g$; et le développement exécuté suivant cette dernière hypothèse devra être identiquement le même que le développement résultant de la première, quels que soient d'ailleurs les grandeur et rapport des accroissemens g et h; donc, en particulier, le coefficient de gh devra être le même dans l'un et dans l'autre. D'un autre côté, le second développement devra différer du premier en ce que y et h y auront pris respectivement les places de x et g, et *vice versâ*; donc, puisque, dans le premier, $\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$ est le coefficient de gh, ce coefficient sera $\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}$ dans le second; or, nous venons de voir que ces deux coefficiens doivent être identiquement les mêmes; on doit donc avoir identiquement

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}; \qquad (49).$$

c'est-à-dire que, *lorsqu'on différentie successivement une fonction de plusieurs variables, par rapport à deux d'entre elles, on parvient toujours au même résultat final, quel que soit l'ordre suivant lequel on fait succéder les différentiations l'une à l'autre.*

Supposons encore que, dans la fonction $f(x+g, y+h, z, \ldots..)$ z se change en $z+k$, k étant également une constante quelconque, alors, en vertu de la formule (45),

$$\left.\begin{array}{l}
S \\[2ex]
\frac{dS}{dx} \\[2ex]
\frac{dS}{dy} \\[2ex]
\frac{d^2S}{dx^2} \\[2ex]
\frac{d^2S}{dxdy} \\[2ex]
\frac{d^2S}{dy^2} \\[2ex]
\frac{d^3S}{dx^3} \\[2ex]
\frac{d^3S}{dx^2dy} \\[2ex]
\frac{d^3S}{dxdy^2} \\[2ex]
\frac{d^3S}{dy^3} \\[2ex]
\ldots\ldots
\end{array}\right\} \text{deviendront} \left\{\begin{array}{l}
S+\frac{dS}{dz}\frac{k}{1}+\frac{d^2S}{dz^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3S}{dz^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\ldots \\[2ex]
\frac{dS}{dx}+\frac{d^2S}{dxdz}\frac{k}{1}+\frac{d^3S}{dxdz^2}\frac{k^2}{1.2}+\ldots \\[2ex]
\frac{dS}{dy}+\frac{d^2S}{dydz}\frac{k}{1}+\frac{d^2S}{dydz^2}\frac{k^2}{1.2}+\ldots \\[2ex]
\frac{d^2S}{dx^2}+\frac{d^3S}{dx^2dz}\frac{k}{1}+\ldots \\[2ex]
\frac{d^2S}{dxdy}+\frac{d^3S}{dxdydz}\frac{k}{1}+\ldots \\[2ex]
\frac{d^2S}{dy^2}+\frac{d^3S}{dy^2dz}\frac{k}{1}+\ldots \\[2ex]
\frac{d^3S}{dx^3}+\ldots \\[2ex]
\frac{d^3S}{dx^2dy}+\ldots \\[2ex]
\frac{d^3S}{dxdy^2}+\ldots \\[2ex]
\frac{d^3S}{dy^3}+\ldots \\[2ex]
\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

en conséquence la formule (48) deviendra

$$
\begin{aligned}
\mathrm{f}(x+g,y+h,z+k,\ldots)=S&+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,\frac{g}{1}+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\,\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}\,\frac{g^2}{1.2}+2\,\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,\frac{gh}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}\,\frac{h^2}{1.2}\\
&+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\,\frac{k}{1}\qquad+2\,\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z}\,\frac{gk}{1.2}+2\,\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}\,\frac{hk}{1.2}\\
&+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z^2}\,\frac{k^2}{1.2}\\
&\left.\begin{aligned}
&+\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3}\,\frac{g^3}{1.2.3}+3\,\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\,\frac{g^2h}{1.2.3}+3\,\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2}\,\frac{gh^2}{1.2.3}+\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}y^3}\,\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\\
&+3\,\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}z}\,\frac{g^2k}{1.2.3}+6\,\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}\,\frac{ghk}{1.2.3}+3\,\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}y^2\mathrm{d}z}\,\frac{h^2k}{1.2.3}\\
&+3\,\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z^2}\,\frac{gk^2}{1.2.3}+3\,\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z^2}\,\frac{hk^2}{1.2.3}\\
&+\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}z^3}\,\frac{k^3}{1.2.3}
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}
\qquad (50)
$$

Remarquons présentement que l'on peut parvenir de la fonction primitive $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots.)$ à la fonction variée $\mathrm{f}(x+g, y+h, z+k, \ldots..)$ par des accroissemens successifs de variables, de six manières différentes, puisqu'on peut choisir de trois manières, parmi les trois variables x, y, z, la variable qui, la première, recevra son accroissement; et que, pour chaque choix qu'on en voudra faire, il restera encore deux manières de faire succéder l'une à l'autre les variations des deux restantes. Il est clair d'ailleurs que les six développemens résultants ne différeront les uns des autres que par les diverses permutations tant des variables x, y, z que de leurs accroissemens respectifs g, h, k. Il n'est pas moins évident que ces six développemens devront être identiquement les mêmes quels que soient les grandeurs et rapports des accroissemens g, h, k;

donc, en particlier, les coefficiens du terme ghk devront y être identiquement les mêmes; ce qui donnera

$$\frac{d^3S}{dxdydz}=\frac{d^3S}{dxdzdy}=\frac{d^3S}{dydxdz}=\frac{d^3S}{dydzdx}=\frac{d^3S}{dzdxdy}=\frac{d^3S}{dzdydx}\,; \quad (51)$$

c'est-à-dire que, *lorsqu'on différentie successivement une fonction de plusieurs variables par rapport à trois d'entre elles, on parvient toujours au même résultat final, quel que soit l'ordre suivant lequel on fait succéder les différentiations les unes aux autres.*

Supposons présentement que cette proposition, déjà démontrée pour deux et pour trois variables, l'ait été aussi pour tout nombre de variables inférieur à n; il sera facile de démontrer alors qu'elle devra l'être également pour n variables. En effet, considérons, au hasard, deux coefficiens différentiels du n^{ieme} ordre, dans lesquels les différentiations ne se succèdent pas de la même manière; ou bien la dernière différentiation y sera relative à la même variable, ou bien cette dernière différentiation sera relative à deux variables différentes.

Si la dernière différentiation y est relative à la même variable, les $n-1$ différentiations qui l'auront précédée auront dû être relatives aux $n-1$ mêmes variables, et auront pu, tout au plus, se succéder les unes aux autres dans un ordre différent; elles auront donc dû, suivant l'hypothèse, conduire au même avant dernier résultat qui, différentié de nouveau, par rapport à une même variable, aura dû donner aussi, pour l'une ou pour l'autre, le même résultat final.

Si, au contraire, dans ces deux coefficiens différentiels du $n.^{ieme}$ ordre, la dernière différentiation n'est point relative à la même variable, on pourra, sans rien changer à l'un ni à l'autre, garder pour l'avant-dernière, dans chacun, la différentiation qui sera la dernière dans l'autre, puisqu'on ne fera, de la sorte, qu'intervetir l'ordre des différentiations entre $n-1$ variables seulement. On pourra encore, pour la même raison, amener, de part et d'autre, la différentiation qui devra précéder immédiatement ces deux-là à être relative à une même troisième variable quelconque. Alors les différentiations qui précéderont les trois dernières conduiront, de part et d'autre, à une même fonction, puisqu'elles auront lieu par rapport aux $n-3$ mêmes variables. Il restera donc à différentier une même fonction par rapport aux trois mêmes variables; ce qui, d'après ce qui précède, devra conduire (51), quel que soit d'ailleurs l'ordre des différentiations, au même résultat final.

Si l'on suppose $n=4$, la proposition se trouvera vraie, (49) et (51), pour tous les nombres inférieurs à n; d'où il suit qu'elle est vraie aussi pour $n=4$. Supposons ensuite $n=5$, elle se trouvera vraie pour tous les nombres inférieurs; d'où l'on sera fondé à conclure qu'elle est également vraie pour celui-là, et ainsi de suite; cette proposition est donc générale, c'est-à-dire que, *dans quelque ordre que l'on différentie successivement une fonction de tant de variables qu'on voudra, par rapport à un nombre quelconque d'entre elles, on parviendra toujours au même résultat final* (*).

Il suit de là que, tandis qu'une fonction d'une seule variable n'a, dans chaque ordre, qu'un seul coefficient différentiel, savoir:

$$\frac{dS}{dx}\,,\quad \frac{d^2S}{dx^2}\,,\quad \frac{d^3S}{dx^3}\,,\quad \frac{d^4S}{dx^4}\,,\ \ldots\ldots\,;$$

une fonction de deux variables x et y a, dans le premier ordre, deux coefficiens différentiel, savoir:

$$\frac{dS}{dx}\,,\quad \frac{dS}{dy}\,;$$

dans le second, trois; savoir:

(*) Nous avions déjà indiqué ce tour de démonstration (*Annales*, tom. I, pag. 57).

$$\frac{d^2S}{dx^2}, \quad \frac{d^2S}{dxdy}, \quad \frac{d^2S}{dy^2};$$

dans le troisième, quatre; savoir:

$$\frac{d^3S}{dx^3}, \quad \frac{d^3S}{dx^2dy}, \quad \frac{d^3S}{dxdy^2}, \quad \frac{d^3S}{dy^3};$$

et ainsi de suite, c'est-à-dire, en général, $n+1$ pour n^{ieme} ordre, savoir:

$$\frac{d^nS}{dx^n}, \quad \frac{d^nS}{dx^{n-1}dy}, \quad \frac{d^nS}{dx^{n-2}dy^2}, \ldots\ldots \frac{d^nS}{dx^2dy^{n-2}}, \quad \frac{d^nS}{dxdy^{n-1}}, \quad \frac{d^nS}{dy^n}.$$

S'il s'agit d'une fonction de trois variables, elle aura, dans le premier ordre, trois coefficiens différentiel, savoir:

$$\frac{dS}{dx}, \quad \frac{dS}{dy},$$

$$\frac{dS}{dz};$$

dans le second, six; savoir:

$$\frac{d^2S}{dx^2}, \quad \frac{d^2S}{dxdy}, \quad \frac{d^2S}{dy^2};$$

$$\frac{d^2S}{dxdz}, \quad \frac{d^2S}{dydz};$$

$$\frac{d^2S}{dz^2};$$

dans le troisième, dix; savoir:

$$\frac{d^3S}{dx^3}\,,\quad \frac{d^3S}{dx^2dy}\,,\quad \frac{d^3S}{dxdy^2}\,,\quad \frac{d^3S}{dy^3}\,,$$

$$\frac{d^3S}{dx^2dz}\,,\quad \frac{d^3S}{dxdydz}\,,\quad \frac{d^3S}{dy^2dz}\,,$$

$$\frac{d^3S}{dxdz^3}\,,\quad \frac{d^3S}{dydz^2}\,,$$

$$\frac{d^3S}{dz^3}\,;$$

et ainsi de suite; c'est-à-dire, en général, dans le n.ieme ordre, $\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}$.

On voit, généralement, à l'inspection des dénominateurs, que le nombre des coefficiens différentiels du n.ieme ordre d'une fonction d'un nombre quelconque m de variables doit être le même que le nombre des termes d'un polynome homogène complet de n dimensions, formé avec m lettres; c'est-à-dire que ce nombre doit être (*)

$$\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\cdots\cdots\frac{n+m-1}{m-1}\,,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdots\cdots\frac{m+n-1}{n}\,. \qquad (52)$$

Soit, par exemple, la fonction de deux variables

$$S=Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F\,,$$

on aura

(*) Voy. *Annales*, tom. XIII, pag. 282.

$$\frac{dS}{dx}=2(Ax+Cy+D)\ , \qquad \frac{dS}{dy}=2(By+Cx+E)\ ,$$

$$\frac{d^2S}{dx^2}=2A\ , \quad \frac{d^2S}{dxdy}=2C\ , \quad \frac{d^2S}{dy^2}=2B\ ;$$

et tous les autres coefficiens différentiels seront nuls. S'il s'agit de la fonction de trois variables

$$S=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L\ ,$$

on trouvera

$$\frac{dS}{dx}=2(Ax+Ez+Fy+G)\,, \quad \frac{d^2S}{dx^2}=2A\,, \quad \frac{d^2S}{dydz}=2D\ ,$$

$$\frac{dS}{dy}=2(By+Fx+Dz+H)\,, \quad \frac{d^2S}{dy^2}=2B\,, \quad \frac{d^2S}{dzdx}=2E\,,$$

$$\frac{dS}{dz}=2(Cz+Dy+Ex+K)\,, \quad \frac{d^2S}{dz^2}=2C\,, \quad \frac{d^2S}{dxdy}=2F\ ;$$

et tous les autres coefficiens différentiels seront encore nuls.

Soit P une fonction donnée quelconque de la seule variable x, et soit S une fonction donnée quelconque de P; si x se change en $x+g$, P deviendra (45)

$$P+\frac{dP}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2P}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\frac{d^3P}{dx^3}\,\frac{g^3}{1.2.3}+\ldots.. ;$$

de sorte qu'en représentant par G son accroissement, on aura

$$G=\frac{dP}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2P}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\frac{d^3P}{dx^3}\,\frac{g^3}{1.2.3}+\ldots.. ;$$

mais P devenant ainsi $P+G$, S deviendra (45)

$$S+\frac{dS}{dP}\,\frac{G}{1}+\frac{d^2S}{dP^2}\,\frac{G^2}{1.2}+\frac{d^3S}{dP^3}\,\frac{G^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

ou bien, en remettant pour G sa valeur, développant et ordonnant par rapport à g,

$$S+\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}\,\frac{g}{1}+\left\{\frac{dS}{dP}\,\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2S}{dP^2}\left(\frac{dP}{dx}\right)^2\right\}\frac{g^2}{1.2}+\ldots\ldots\;;$$

mais, d'un autre côté, puisque, par l'intermédiaire de P, S est aussi fonction de x, il s'ensuit que, lorsque x se change en $x+g$, S doit devenir

$$S+\frac{dS}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\frac{d^3S}{dx^3}\,\frac{g^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\;;$$

et ce dernier développement doit être identiquement le même que celui qui le précède, quel que soit g; on doit donc avoir

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}\;; \qquad (53)$$

c'est-à-dire que *le coefficient différentiel d'une fonction d'une quantité qui est elle-même une fonction d'une variable s'obtient en multipliant le coefficient différentiel de la première fonction, pris par rapport à la seconde, considérée comme la variable, par le coefficient différentiel de celle-ci, pris par rapport à cette variable.* C'est ce que nous avions déjà vu.

Soient P et Q deux fonctions données quelconques de la seule variable x, et soit S une fonction donnée quelconque de P et Q; si x se change en $x+g$, P et Q deviendront respectivement

$$P+\frac{dP}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2P}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\ldots\ldots\;; \qquad Q+\frac{dQ}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2Q}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\ldots\;;$$

de sorte qu'en représentant par G et H les accroissemens respectifs de P et Q, on aura

$$G=\frac{dP}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2P}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\ldots\,;\quad H=\frac{dQ}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2Q}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\ldots\,;$$

mais P et Q devenant respectivement $P+G$ et $Q+H$, S doit devenir (48)

$$S+\frac{dS}{dP}\,\frac{G}{1}+\frac{d^2S}{dP^2}\,\frac{G^2}{1.2}+\ldots$$

$$+\frac{dS}{dQ}\,\frac{H}{1}+2\frac{d^2S}{dPdQ}\,\frac{GH}{1.2}+\ldots\,;$$

$$+\frac{d^2S}{dQ^2}\,\frac{H^2}{1.2}+\ldots$$

ou bien, en substituant pour G et H leurs valeurs, développant et ordonnant,

$$S+\left(\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{dQ}{dx}\right)\frac{g}{1}$$

$$+\left\{\frac{dS}{dP}\,\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^2S}{dP^2}\left(\frac{dP}{dx}\right)^2+2\frac{d^2S}{dPdQ}\,\frac{dP}{dx}\,\frac{dQ}{dx}+\frac{d^2S}{dQ^2}\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right\}\frac{g^2}{1.2}+\ldots\,;$$

mais, d'un autre côté, par l'intermédiaire de P et Q, S étant aussi fonction de x; lorsque x se change en $x+g$, S doit devenir

$$S+\frac{dS}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\ldots\ldots,$$

et ce dernier développement doit, quel que soit g, être identique avec celui qui le précède. On doit donc avoir

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{dQ}{dx}\,. \qquad (54)$$

Si S était fonction de trois quantités P, Q, R qui fussent elles-mêmes des fonctions de x, on trouverait semblablement

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dQ}\frac{dQ}{dx}+\frac{dS}{dR}\frac{dR}{dx}, \qquad (55)$$

et ainsi de suite; c'est-à-dire que *le coefficient différentiel d'une fonction de plusieurs quantités qui sont elles-mêmes des fonctions d'une même variable s'obtient en prenant la somme des produits respectifs des coefficiens différentiels partiels de la fonction, relatifs à ces diverses quantités, par les coefficiens différentiels de ces mêmes quantités, relatifs à la variable.*

Soit P une fonction donnée quelconque de deux variables x et y, et soit S une fonction donnée quelconque de P; si l'on suppose que x et y se changent respectivement en $x+g$ et $y+h$, P deviendra (48)

$$\begin{aligned} P+\frac{dP}{dx}\frac{g}{1}+\frac{d^2P}{dx^2}\frac{g^2}{1.2}+\dots \\ +\frac{dP}{dy}\frac{h}{1}+2\frac{d^2P}{dxdy}\frac{gh}{1.2}+\dots \\ +\frac{d^2P}{dy^2}\frac{h^2}{1.2}+\dots; \end{aligned}$$

de sorte qu'en représentant par G son accroissement, on aura

$$G=\frac{dP}{dx}\frac{g}{1}+\frac{dP}{dy}\frac{h}{1}+\frac{d^2P}{dx^2}\frac{g^2}{1.2}+2\frac{d^2P}{dxdy}\frac{gh}{1.2}+\frac{d^2P}{dy^2}\frac{h^2}{1.2}+\dots;$$

mais P devenant ainsi $P+G$, S doit devenir (45)

$$S+\frac{dS}{dP}\frac{G}{1}+\frac{d^2S}{dP^2}\frac{G^2}{1.2}+\frac{d^3S}{dP^3}\frac{G^3}{1.2.3}+\dots;$$

ou, en mettant pour G sa valeur, développant et ordonnant,

$$S+\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}\,\frac{g}{1}+\left\{\frac{dS}{dP}\,\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2S}{dP^2}\left(\frac{dP}{dx}\right)^2\right\}\frac{g^2}{1.2}+\ldots.$$

$$+\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dy}\,\frac{h}{1}+2\left\{\frac{dS}{dP}\,\frac{d^2P}{dxdy}+\frac{d^2S}{dP^2}\,\frac{dP}{dx}\,\frac{dP}{dy}\right\}\frac{gh}{1.2}+\ldots.$$

$$+\left\{\frac{dS}{dP}\,\frac{d^2P}{dy^2}+\frac{d^2S}{dP^2}\left(\frac{dP}{dy}\right)^2\right\}\frac{h^2}{1.2}+\ldots.$$

mais, d'un autre côté, S étant, par l'intermédiaire de P, fonction de x et y, doit, dans les mêmes circonstances, devenir

$$S+\frac{dS}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\ldots..$$

$$+\frac{dS}{dy}\,\frac{h}{1}+2\,\frac{d^2S}{dxdy}\,\frac{gh}{1.2}+\ldots.$$

$$+\frac{d^2S}{dy^2}\,\frac{h^2}{1.2}+\ldots.\,;$$

voilà donc deux développemens qui, quels que soient la grandeur et le rapport des deux accroissemens g et h, doivent être identiquement les mêmes; ce qui donne

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}\,,\qquad \frac{dS}{dy}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dy}\,; \qquad (56)$$

c'est-à-dire que *les coefficiens différentiels partiels d'une fonction d'une quantité qui est elle-même fonction de deux variables, s'obtient en multipliant respectivement le coefficient différentiel de la fonction, par rapport à cette quantité, par les coefficiens différentiels partiels de cette quantité relatifs aux deux variables.*

Soient P et Q deux fonctions données quelconques de deux variables x et y, et soit S une fonction donnée quelconque de P

et Q; si x et y deviennent respectivement $x+g$ et $y+h$, P et Q deviendront respectivement (48)

$$\begin{aligned}
&P+\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\,\frac{g}{1}+\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\ldots &\qquad& Q+\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\,\frac{g}{1}+\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\ldots\\
&\quad+\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\,\frac{h}{1}+2\,\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,\frac{gh}{1.2}+\ldots &\qquad& \quad+\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y}\,\frac{h}{1}+2\,\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,\frac{gh}{1.2}+\ldots\\
&\qquad\qquad+\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y^2}\,\frac{h^2}{1.2}+\ldots &\qquad& \qquad\qquad+\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}y^2}\,\frac{h^2}{1.2}+\ldots\,;
\end{aligned}$$

de sorte qu'en dénotant par G et H les accroissemens respectifs de P et Q, on aura

$$G=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\,\frac{g}{1}+\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\,\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x^2}\,\frac{g^2}{1.2}+2\,\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,\frac{gh}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y^2}\,\frac{h^2}{1.2}+\ldots$$

$$H=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\,\frac{g}{1}+\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y}\,\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x^2}\,\frac{g^2}{1.2}+2\,\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,\frac{gh}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}y^2}\,\frac{h^2}{1.2}+\ldots\,;$$

mais, P et Q devenant respectivement $P+F$ et $Q+H$, S doit devenir (48)

$$\begin{aligned}
&S+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}P}\,\frac{G}{1}+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}P^2}\,\frac{G^2}{1.2}+\ldots\\
&\quad+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}Q}\,\frac{H}{1}+2\,\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}P\,\mathrm{d}Q}\,\frac{GH}{1.2}+\ldots\\
&\qquad\qquad+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}Q^2}\,\frac{H^2}{1.2}+\ldots
\end{aligned}$$

ou, en mettant pour G et H leurs valeurs, développant et ordonnant,

$$S+\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}P}\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}Q}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\right)\frac{g}{1}+\ldots$$

$$+\left(\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dy}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{dQ}{dy}\right)\frac{h}{1}+\ldots;$$

mais, d'un autre côté, par l'intermédiaire de P et Q, S étant aussi fonction de x et y, doit devenir, dans les mêmes circonstances,

$$S+\frac{dS}{dx}\,\frac{g}{1}+\ldots$$

$$+\frac{dS}{dy}\,\frac{h}{1}+\ldots;$$

or, ces deux développemens doivent être identiquement les mêmes, quels que soient la grandeur et le rapport des accroissemens g et h; donc

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{dQ}{dx}, \qquad \frac{dS}{dy}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dy}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{dQ}{dy}. \quad (57)$$

Si S était fonction de trois quantités P, Q, R, dont chacune fût fonction de x et y, on trouverait semblablement

$$\left.\begin{aligned}\frac{dS}{dx}&=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{dQ}{dx}+\frac{dS}{dR}\,\frac{dR}{dx},\\ \frac{dS}{dy}&=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dy}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{dQ}{dy}+\frac{dS}{dR}\,\frac{dR}{dy};\end{aligned}\right\}\quad(58)$$

et ainsi de suite. En rapprochant ces résultats des formules (53), (54), (55) on en conclura que, *pour obtenir les coefficiens différentiels partiels d'une fonction de tant de quantités qu'on voudra, qui sont toutes fonctions de deux variables, il suffit d'opérer tour à tour, par rapport à chaque variable, comme si elle était seule.*

Si, P étant une fonction de trois variables x, y, z, S était une fonction de P, on trouverait, par de semblables considérations,

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dx}\,,\quad \frac{dS}{dy}=\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dy}\,,\quad \frac{dS}{dz}=\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dz}\,. \qquad (59)$$

Si P et Q étant des fonctions de x, y, z, S était fonction de P et Q, on trouverait

$$\left.\begin{aligned}\frac{dS}{dx}&=\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dQ}\frac{dQ}{dx}\,,\\ \frac{dS}{dy}&=\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dy}+\frac{dS}{dQ}\frac{dQ}{dy}\,,\\ \frac{dS}{dz}&=\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dz}+\frac{dS}{dQ}\frac{dQ}{dz}\,.\end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

Si P, Q, R étant des fonctions de x, y, z, S était une fonction de P, Q, R, on trouverait pareillement

$$\left.\begin{aligned}\frac{dS}{dx}&=\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dQ}\frac{dQ}{dx}+\frac{dS}{dR}\frac{dR}{dx}\,,\\ \frac{dS}{dy}&=\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dy}+\frac{dS}{dQ}\frac{dQ}{dy}+\frac{dS}{dR}\frac{dR}{dy}\,,\\ \frac{dS}{dz}&=\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dz}+\frac{dS}{dQ}\frac{dQ}{dz}+\frac{dS}{dR}\frac{dR}{dz}\,;\end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

et ainsi de suite; de sorte qu'en général, *pour obtenir les coefficiens différentiels partiels d'une fonction de tant de quantités qu'on voudra, qui sont elles-mêmes fonctions d'un nombre quelconque de variables, il suffit d'opérer tour à tour, par rapport à chaque variable, comme si toutes les autres étaient des constantes.*

Si, dans la formule (54), on suppose $Q=x$, elle deviendra

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dx}\,; \qquad (62)$$

et tel sera le coefficient différentiel d'une fonction S de x et d'une autre quantité P, qui sera elle-même fonction de x.

Il est essentiel de distinguer, dans cette formule, le $\frac{dS}{dx}$ qui se trouve dans le premier membre de celui qui se trouve dans le second; le premier est relatif à S, considérée tant par rapport à x que par rapport à sa fonction P, tandis que, pour déterminer l'autre, il faudra, dans S, considérer P comme une constante.

Pour éviter l'équivoque, dans tous les cas semblables, lesquels se représentent assez fréquemment, Euler renfermait constamment entre deux parenthèses les symboles de dérivées prises relativement à une variable, de manière à traiter comme constantes toutes les autres variables, fonctions ou non fonctions de celle-là. Ainsi, par exemple, en supposant

$$S=(P\,,\,Q\,,\,R\,,\ldots\ldots\,x\,,y\,,z\,,\ldots\ldots)\,,$$

et, en admettant que chacune des quantités P, Q, R, ... fût à la fois fonction des variables x, y, z, ..., $\left(\frac{dS}{dx}\right)$ signifiait la dérivée de S, prise en considérant P, Q, R, ... y, z, ... comme des constantes, tandis que $\frac{dS}{dx}$ représentait la dérivée de S prise non seulement par rapport à x, mais encore par rapport à P, Q, R, ... considérés comme des fonctions de x; de sorte que, suivant la manière de noter d'Euler, la formule (62) aurait été écrite comme il suit:

$$\frac{dS}{dx}=\left(\frac{dS}{dP}\right)\frac{dP}{dx}+\left(\frac{dS}{dx}\right).$$

Laplace a constamment employé la notation d'Euler; mais, peu à peu, l'usage des parenthèses s'est perdu, et c'est véritablement une chose fâcheuse; car la perfection des notations algébriques devrait consister principalement en ce qu'elles n'offrissent jamais d'équivoques et s'expliquassent toujours nettement d'elles-mêmes, sans avoir jamais besoin, pour être comprises, d'être interprétées par les mots de la langue vulgaire.

Si, dans les formules (58), on suppose $Q=x$, $R=y$, on aura, suivant la notation d'Euler, $\left(\frac{dQ}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{dR}{dx}\right)=0$; en conséquence ces formules deviendront

$$\frac{dS}{dx}=\left(\frac{dS}{dP}\right)\frac{dP}{dx}+\left(\frac{dS}{dx}\right), \quad \frac{dS}{dy}=\left(\frac{dS}{dP}\right)\frac{dP}{dy}+\left(\frac{dS}{dy}\right); \qquad (63)$$

formules qu'on écrit communément comme il suit:

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dx}, \qquad \frac{dS}{dy}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dy}+\frac{dS}{dy}.$$

Nous terminerons par observer que, si une fonction S d'une ou de plusieurs variables est constamment nulle, quelles que soient ces variables, tous les coefficiens différentiels de cette fonction devront aussi être nuls. Si, en effet, on a

$$S=\mathrm{f}(x, y, z, \ldots\ldots)=0,$$

quels que soient $x, y, z, \ldots\ldots$; on devra avoir aussi

$$\mathrm{f}(x+g, y+h, z+k, \ldots\ldots)=0,$$

quels que soient $g, h, k, \ldots\ldots$; d'où il suit qu'en développant, par le théorème de Taylor, les coefficiens des différens termes du développement devront séparément être nuls.

§. II.

De la différentiation des équations.

Dans tout ce qui précède, nous avons constamment considéré des fonctions d'une ou de plusieurs variables données explicitement, soit immédiatement soit médiatement, par l'intermédiaire d'autres fonctions de ces mêmes variables; mais on pourrait fort bien n'avoir, entre des variables et des fonctions de ces variables dont on se propose d'obtenir les divers coefficiens différentiels, que de simples équations de relation, auquel cas on dirait que ces fonctions sont données *implicitement*.

Pour commencer par le cas le plus simple, soit, entre les deux variables x et y l'équation quelconque

$$f(x, y)=0 \;;$$

en vertu de cette équation, y est une certaine fonction de x, qu'on obtiendrait *explicitement* par la résolution même de l'équation. On peut donc se proposer de déterminer les coefficiens différentiels des différens ordres de cette fonction.

Le première pensée qui se présente, pour résoudre cette question, est de résoudre l'équation proposée par rapport à y, ce qui ramenerait la question au cas des fonctions explicites, dont nous avons traité assez au long (SEC. I.^{er}, §. I.^{er}).

Mais, outre que l'équation pourrait être transcendante, et qu'il est bien peu d'équations de cette classe que nous sachions résoudre, quand bien même cette équation serait algébrique, nous ne saurions pas la résoudre si elle était d'un degré supérieur au quatrième, et même, passé le second, les valeurs que nous obtiendrions pour y seraient, en général, d'une excessive complication. Voilà donc une difficulté que nous devons nous attacher à éluder.

Que nous sachions ou que nous ne sachions pas résoudre cette équation, y n'en est pas moins une certaine fonction de x que nous pouvons représenter comme il suit:

$$y=\varphi x\ ,$$

et si nous substituons cette valeur dans la proposée, à la place de x, ce qui donnera

$$\mathrm{f}(x,\varphi x)=\psi x=0\ ,$$

nous en ferons une équation identique qui devra avoir lieu quel que soit x, et qui conséquemment devra encore avoir lieu quel que soit g, lorsqu'on y changera x en $x+g$.

Mais si l'on pose

$$\mathrm{f}(x,y)=\mathrm{f}(x,\varphi x)=\psi x=S\ ,$$

on aura

$$\psi(x+g)=S+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\ \frac{g}{1}+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}\ \frac{g^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3}\ \frac{g^3}{1.2\,3}+\ldots\ ;$$

et, puisque ce développement doit être nul, quel que soit g, on devra avoir cette suite d'équations

$$S=0\ ,\qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=0\ ,\qquad \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}=0\ ,\qquad \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3}=0\ \ldots\ ;$$

ainsi, *étant donnée une équation entre deux variables, on peut égaler à zéro les coefficiens différentiels successifs de son premier membre, pris par rapport à l'une d'elles, pourvu que, dans ce premier membre, on considère l'autre variable comme une fonction de celle-là.*

Il faudra donc, dans $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$, traiter y, comme nous avons traité P dans la formule (62), ce qui donnera

$$\frac{dS}{dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{dS}{dx}=0\,; \qquad (64)$$

c'est là ce qu'on appelle l'*équation différentielle* de la proposée $S=0$.

Ces deux équations sont de la forme

$$f(x,y)=0\,, \qquad F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0\,;$$

de sorte que si, après avoir éliminé y entre elles, on résolvait l'équation résultante par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on obtiendrait la valeur de ce coefficient différentiel en fonction de x, telle qu'on l'aurait obtenue par la résolution de la proposée, suivie de la différentiation; mais ce sont là des opérations le plus souvent aussi inutiles qu'elles seraient impraticables.

Remarquons que, puisque la proposée et sa différentielle ont lieu en même temps, il doit en être de même de toutes les combinaisons qu'on voudra faire de l'une et de l'autre; et, comme ces combinaisons sont en nombre infini, il s'ensuit qu'une même équation *primitive*, entre deux variables, peut avoir une infinité de différentielles différentes, mais qui toutes, par l'élimination de la fonction, au moyen de la proposée, conduiraient à la même valeur du coefficient différentiel de cette fonction, exprimé au moyen de la variable.

Si, dans l'équation $f(x,y)=0$, nous eussions considéré x comme fonction de y, ainsi que nous pouvions le faire; en représentant toujours son premier membre par S, son équation différentielle aurait été

$$\frac{dS}{dx}\,\frac{dx}{dy}+\frac{dS}{dy}=0\,. \qquad (65)$$

Au lieu des équations (64) et (65), où les deux variables x et y ne sont pas traitées de la même manière, on peut en obtenir une où elles soient traitées symétriquement. Pour cela, concevons que, outre l'équation proposée $f(x,y)=o$ ou $S=o$, on pose encore une autre équation arbitraire $F(x,y,r)=o$, r étant une nouvelle variable. Au moyen de ces deux équations, x et y seront des fonctions de r qu'on obtiendrait, par l'élimination, pour chaque forme particulière qu'on voudrait adopter pour la fonction F; on aura donc, au moyen de ces deux équations,

$$x=\varphi r\,, \qquad y=\psi r\;;$$

au moyen de quoi la proposée deviendra

$$S=f(\varphi r,\psi r)=o\;;$$

équation qui devra être identique quelle que soit r. On pourra donc égaler à zéro la différentielle de son premier membre, prise par rapport à r; on pourra donc aussi égaler à zéro la différentielle de S prise par rapport à r, pourvu qu'on y considère x et y comme des fonctions de cette variable; ce qui donnera (54)

$$\frac{dS}{dx}\cdot\frac{dx}{dr}+\frac{dS}{dy}\cdot\frac{dy}{dr}=o\;; \qquad (66)$$

équation qui comprend implicitement les équations (64) et (65) qui s'en déduisent, savoir: la première en posant $r=x$, et la seconde en posant $r=y$.

Si l'on convient de représenter par la caractéristique δ les différentielles de x et de y prises par rapport à r, le dénominateur $dr=1$ deviendra dès lors superflu, et l'on pourra écrire simplement

$$\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y=o\;; \qquad (67)$$

et c'est ainsi qu'il nous arrivera fréquemment d'en user par la suite. Mais on ne doit pas perdre de vue que ces deux dernières équations n'auront aucun sens, tant qu'on n'aura pas statué sur la forme de la fonction F; c'est-à-dire que le rapport de δx à δy demeurera tout à fait indéterminé. Ce δx et ce δy sont dits alors les *variations* de x et de y.

Soit présentement l'équation, entre trois variables,

$$S = \mathrm{f}(x, y, z) = 0\ ;$$

au moyen de cette équation, z sera une certaine fonction de x et y, que l'on obtiendrait en la résolvant par rapport à z; on peut donc poser

$$z = \varphi(x, y)\ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$S = \mathrm{f}[x, y, \varphi(x, y)] = 0\ ;$$

équation qui devra avoir lieu quels que soient les grandeur et rapport des variables x et y, et devra conséquemment subsister encore, quels que soient les grandeur et rapport de g et h, en y changeant respectivement ces variables en $x+g$ et $y+h$; de là on conclura, par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait ci-dessus, que l'on peut égaler à zéro les deux différentielles partielles de S, relatives à x et à y, pourvu qu'on y considère z comme une fonction de ces deux variables; ce qui donnera

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0\ , \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = 0\ , \qquad (68)$$

équations desquelles on tirera les valeurs des deux coefficiens différentiels partiels $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$ de la fonction z.

Au surplus, au lieu d'opérer de cette manière, on pourrait poser les deux équations arbitraires.

$$F(x,y,z,r)=0\ ,\qquad \Phi(x,y,z,r)=0\ ;$$

au moyen desquelles et de la proposée x, y, z deviendraient des fonctions de la seule variable r ; on aurait ainsi

$$\frac{dS}{dx}\frac{dx}{dr}+\frac{dS}{dy}\frac{dy}{dr}+\frac{dS}{dz}\frac{dz}{dr}=0\ ;$$

ou simplement

$$\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y+\frac{dS}{dz}\delta z=0\ ; \qquad (69)$$

équation qui n'aura de sens qu'autant qu'on aura statué sur la forme des fonctions F et Φ.

Soient entre les trois variables x, y, z les deux équations

$$M=\varphi(x,y,z)=0\ ,\qquad N=\psi(x,y,z)=0\ ;$$

en vertu de ces équations, x et y sont des fonctions de z ; d'où il suit, par les mêmes considérations que ci-dessus, qu'on pourra égaler à zéro les différentielles de M et de N, prises par rapport à z, pourvu qu'on y traite x et y comme des fonctions de cette variable, ce qui donnera

$$\frac{dM}{dx}\frac{dx}{dz}+\frac{dM}{dy}\frac{dy}{dz}+\frac{dM}{dz}=0\ ,\quad \frac{dN}{dx}\frac{dx}{dz}+\frac{dN}{dy}\frac{dy}{dz}+\frac{dN}{dz}=0\ ; \quad (70)$$

équations qui donneront les valeurs des coefficiens différentiels $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ des deux fonctions x et y de la variable z. On pourrait au surplus écrire, plus symétriquement,

$$\left.\begin{aligned}\frac{dM}{dx}\delta x+\frac{dM}{dy}\delta y+\frac{dM}{dz}\delta z=0\ ,\\ \frac{dN}{dx}\delta x+\frac{dN}{dy}\delta y+\frac{dN}{dz}\delta z=0\ ,\end{aligned}\right\}\qquad(71)$$

pourvu qu'il demeurât entendu que δx, δy, δz sont les différentielles de x, y, z prises par rapport à une quatrième variable r, liée aux trois autres par une équation arbitraire

$$F(x,y,z,r)=0\ .$$

Nous avons vu ci-dessus que, si l'on avait, entre les deux variables x et y, l'équation de relation

$$S=0\ ,$$

on avait aussi

$$\frac{dS}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dS}{dx}=0\ ;$$

au moyen de ces deux équations y et $\frac{dy}{dx}$ sont des fonctions de x; en différentiant donc la dernière sous ce point de vue, il viendra

$$\frac{dS}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2S}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{dS}{dxdy}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2S}{dx^2}=0\ ;\qquad(72)$$

équation qui donnerait $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de x, si l'on en chassait y et $\frac{dy}{dx}$, au moyen des deux premières. Par des différentiations ultérieures on trouverait successivement $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, ...

Nous avons également vu ci-dessus que si, entre les variables x, y, z, on avait l'équation de relation

$$S=0\,,$$

on avait aussi les deux suivantes

$$\frac{dS}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dS}{dx}=0\,,\qquad \frac{dS}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{dS}{dy}=0\,;$$

au moyen de ces trois équations, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ sont des fonctions de x et y; en différentiant donc les deux dernières sous ce point de vue, et remarquant que la différentielle de l'une par rapport à y est identique avec la différentielle de l'autre par rapport à x, il en résultera seulement ces trois-ci :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dS}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2S}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2\frac{d^2S}{dzdx}\frac{dz}{dx}+\frac{d^2S}{dx^2}=0\,,\\
\frac{dS}{dz}\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d^2S}{dz^2}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}&+\frac{d^2S}{dzdx}\frac{dz}{dy}+\frac{d^2S}{dzdy}\frac{dz}{dx}+\frac{d^2S}{dxdy}=0\,,\\
&\frac{dS}{dz}\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{d^2S}{dz^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+2\frac{d^2S}{dzdy}\frac{dz}{dy}+\frac{d^2S}{dy^2}=0\,;
\end{aligned}\right\}\quad(73)$$

équations qui donneraient les trois coefficiens différentiels du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ de la fonction z, au moyen des deux variables x et y, si l'on en chassait z, $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, au moyen des trois premières. Par des différentiations ultérieures on obtiendrait les coefficiens différentiels des ordres plus élevés.

Nous avons vu aussi que si, entre les trois mêmes variables x, y, z, on avait les deux équations

$$M=0\,,\qquad N=0\,;$$

on avait aussi les deux suivantes :

$$\frac{dM}{dx}\frac{dx}{dz}+\frac{dM}{dy}\frac{dy}{dz}+\frac{dM}{dz}=0\,,\quad \frac{dN}{dx}\frac{dx}{dz}+\frac{dN}{dy}\frac{dy}{dz}+\frac{dN}{dz}=0\,;$$

au moyen de ces quatre équations x, y, $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ sont des fonctions de z; en différentiant donc les deux dernières sous ce point de vue, on obtiendrait ces deux-ci:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dM}{dx}\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{dM}{dy}\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{d^2M}{dxdz}\frac{dx}{dz}+\frac{d^2M}{dydz}\frac{dy}{dz}+\frac{d^2M}{dz^2}=0\,,\\&\frac{dN}{dx}\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{dN}{dy}\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{d^2N}{dxdz}\frac{dx}{dz}+\frac{d^2N}{dydz}\frac{dy}{dz}+\frac{d^2N}{dz^2}=0\,;\end{aligned}\right\}\quad(74)$$

lesquelles donneront les deux coefficiens différentiels du second ordre $\frac{d^2x}{dz^2}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$, en fonction de z, lorsqu'on en aura chassé x, y, $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, au moyen des quatre premières. Par des différentiations ultérieures on obtiendrait successivement les coefficiens différentiels des ordres supérieurs.

Généralement, si, entre m variables, on a les n équations

$$S_1=0\,,\quad S_2=0\,,\quad S_3=0\,,\ldots\ldots S_n=0\,;$$

on pourra considérer n de ces variables comme des fonctions des $m-n$ autres, et, en différentiant successivement ces équations sous ce point de vue, on obtiendra les coefficiens différentiels de tous les ordres de ces mêmes fonctions.

Si nous écrivions pour des commençans, nous nous serions bien gardés d'entrer aussi avant dans la théorie, sans en avoir montré l'utilité par quelques applications simples, et sans avoir appuyé les préceptes par un nombre d'exemples suffisant pour faire bien comprendre le mécanisme du calcul pratique; mais nous avons pensé que ces précautions, qui auraient donné à cet exposé une étendue trop excessive, n'étaient point nécessaires pour nous faire comprendre de nos lecteurs. Il nous deviendra présentement fort commode de pouvoir nous livrer exclusivement aux applications, sans être obligés de les interrompre pour revenir sur les principes théoriques.

Nous avons eu principalement en vue, dans ce qui précède, 1.° de conserver les notations de Leibnitz, dont on ne saurait contester les avantages, et qu'on ne pourrait d'ailleurs changer sans rendre très-pénible la lecture d'un grand nombre d'excellens ouvrages; 2.° de ne nous appuyer néanmoins sur aucune sorte de considérations telles que celles des infiniment petits ou des limites, qui laissent toujours quelques nuages dans l'esprit; 3.° enfin, de ne nous pas appuyer, dès l'abord, sur la série de Taylor, qu'il paraît tout au moins difficile de bien établir *a priori*. Nous désirerions n'avoir pas trop imparfaitemement rempli ces trois objets.

Nous nous occuperons des applications dès que divers mémoires sur d'autres sujets, que peut-être déjà nous avons trop différé de faire connaître, auront été publiés.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de géométrie.

De ces *vingt-quatre* choses, les longueurs des six arêtes d'un tétraèdre quelconque, les six angles dièdres auxquels ces arêtes appartiennent et les douze angles plans de ses quatre faces, *six* quelconques étant données, construire graphiquement les *dix-huit* autres, lorsque cela est possible?

STATIQUE.

Démonstration du principe des vîtesses virtuelles dans les machines en équilibre;

Par M. Bobillier, chef des études à l'Ecole royale des arts et métiers d'Angers.

Soient A', A'', A''', ... et $A_{,}$, $A_{,,}$, $A_{,,,}$, ... divers points mobiles d'une machine quelconque, auxquels sont respectivement appliquées des puissances P', P'', P''', ..., et des résistances $P_{,}$, $P_{,,}$, $P_{,,,}$, ..., se faisant mutuellement équilibre. Si, par l'effet d'une cause quelconque, l'équilibre est infiniment peu troublé; en vertu de la liaison des parties du système, les points A', A'', A''', ..., $A_{,}$, $A_{,,}$, $A_{,,,}$, ..., décriront, dans l'espace, des arcs de courbes infiniment petits $A'a'$, $A''a''$, $A'''a'''$, ... $A_{,}a_{,}$, $A_{,,}a_{,,}$, $A_{,,,}a_{,,,}$, ..., dont on pourra représenter respectivement les projections sur les directions même des puissances et des résistances, par p', p'', p''', ..., $p_{,}$, $p_{,,}$, $p_{,,,}$, ... Nous nous proposons de démontrer qu'on aura nécessairement

$$P'p'+P''p''+P'''p'''+\ldots\ldots=P_{,}p_{,}+P_{,,}p_{,,}+P_{,,,}p_{,,,}+\ldots\ldots$$

Pour y parvenir, substituons à la machine, qui est quelconque, et dont la nature peut être variée d'une infinité de manières différentes, un appareil simple, dans lequel les conditions d'équilibre soient bien connues, et qui, du moins pour l'écart infiniment peu que nous supposons dans l'équilibre, lui soit exactement équivalent.

Pour cela, concevons d'abord que les arcs $A'a'$, $A''a''$, $A'''a'''$, ...; $A_{,}a_{,}$, $A_{,,}a_{,,}$, $A_{,,,}a_{,,,}$, ... que les points d'application des puissances et des résistances tendent à décrire, deviennent des arcs matériels fixes, sur lesquels ces points soient, en effet, assujétis à se mouvoir, et qui n'exerçent sur eux aucun frottement. Etablissons, en outre, dans l'espace, un axe fixe, de situation arbitraire, sur lequel soient pris arbitrairement des points O', O'', O''', ..., $O_{,}$, $O_{,,}$, $O_{,,,}$, ... Par ces points, soient conduits des plans indéfinis, perpendiculaires à l'axe fixe ; et, de ces mêmes points comme centres, soient décrits des cercles sur ces plans avec des rayons

$$R'=\frac{p'}{\omega}\,,\; R''=\frac{p''}{\omega}\,,\; R'''=\frac{p'''}{\omega}\,,\ldots\ldots,\; R_{,}=\frac{p_{,}}{\omega}\,,\; R_{,,}=\frac{p_{,,}}{\omega}\,,\; R_{,,,}=\frac{p_{,,,}}{\omega}\,,\ldots$$

ω étant un angle infiniment petit. Soient M', M'', M''', ..., $M_{,}$, $M_{,,}$, $M_{,,,}$, ... les points où les plans de ces cercles sont respectivement percés par les directions des puissances P', P'', P''', ... et des résistances $P_{,}$, $P_{,,}$, $P_{,,,}$, ... Concevons, en ces différens points, des anneaux infiniment petits, fixes dans l'espace, dans lesquels des fils puissent glisser sans frottement. Concevons, en effet, de tels fils, dont une extrémité soit liée à chacun des points A', A'', A''', ..., $A_{,}$, $A_{,,}$, $A_{,,,}$, ..., et qui, après avoir passé dans les anneaux M', M'', M''', ..., $M_{,}$, $M_{,,}$, $M_{,,,}$, ... aillent s'enrouler sur les cercles dont les rayons sont R', R'', R''', ..., $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$, ..., et que nous sopposons invariablement liés à leur axe commun. Supposons enfin qu'on ait eu le soin de choisir celle des deux directions tangentes à ces cercles que peuvent prendre ces fils, à partir des points M', M'', M''', ..., $M_{,}$, $M_{,,}$, $M_{,,,}$, ..., de telle sorte qu'en faisant tourner leur système autour de l'axe, dans un sens ou dans un autre, les fils qui se terminent aux points d'application des puissances et ceux qui se terminent aux points d'application des résistances marchent en sens inverses les uns des autres ; c'est-à-dire, de telle sorte que les uns se déroulent tandis que les autres s'enrouleront, et *vice versâ*.

Si l'on suppose ces fils parfaitement flexibles, incompressibles et inextensibles, il est clair que les puissances P', P'', P''', ..., et les résistances $P_{\prime}$, $P_{\prime\prime}$, $P_{\prime\prime\prime}$, ... exprimeront leurs tensions respectives. Il est de plus manifeste qu'en faisant tourner le treuil composé de tous les cercles, autour de leur axe commun, de la quantité angulaire infiniment petite ω, tout se passera exactement comme dans la machine proposée, quelle qu'elle puisse être ; de sorte que ce treuil pourra être considéré comme le parfait équivalent de cette machine, du moins tant qu'elle ne devra s'écarter qu'infiniment peu de l'état d'équilibre.

Mais, pour l'équilibre de ce treuil, il faudra qu'on ait

$$P'R'+P''R''+P'''R'''+\ldots\ldots=P_{\prime}R_{\prime}+P_{\prime\prime}R_{\prime\prime}+P_{\prime\prime\prime}R_{\prime\prime\prime}+\ldots\ldots\;;$$

mettant donc dans cette équation pour R', R'', R''', ..., $R_{\prime}$, $R_{\prime\prime}$, $R_{\prime\prime\prime}$, ..., les valeurs que nous leur avons assignées ci-dessus, et supprimant ensuite le dénominateur commun ω; il viendra pour la condition d'équilibre de la machine

$$P'p'+P''p''+P'''p'''+\ldots\ldots=P_{\prime}p_{\prime}+P_{\prime\prime}p_{\prime\prime}+P_{\prime\prime\prime}p_{\prime\prime\prime}+\ldots\ldots\;,$$

comme nous l'avions annoncé.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur la mesure du volume du tronc de pyramide ;

Par un ABONNÉ.

Au Rédacteur des *Annales ;*

MONSIEUR,

En examinant avec attention la plupart des Traités de géométrie élémentaire, il semble souvent que leurs auteurs aient pris à tâche de rendre, à dessein, difficile une étude qu'ils auraient dû s'efforcer, au contraire, de mettre à la portée du plus grand nombre. Indépendamment de ces continuelles réductions à l'absurde, dont on pourrait, tout au plus, donner un ou deux exemples en notes, par forme d'échantillon, et dont le moindre inconvénient est, comme vous l'avez fort bien observé vous-même (*Annales*, tom. V, pag. 183), de faire perdre tout à fait de vue la marche des inventeurs, dans l'investigation des vérités inconnues ; combien n'est-il pas d'autres parties des élémens qui pourraient être traitées d'une manière beaucoup plus naturelle et en même temps beaucoup plus simple ? On dit, en faveur de la pratique contraire, qu'elle est plus propre à développer et à exercer l'intelligence des commençans ; mais c'est là, ce me semble, une erreur manifeste ; et cette pratique ne me paraît propre qu'à faire briller l'adresse des auteurs qui devraient, au contraire, dans la composition de leurs ouvrages, s'oublier constamment, pour ne songer qu'à ceux qu'ils ont dessein d'instruire. Ce qui peut réellement développer et exercer l'intelligence des élèves, ce sont des théorèmes et des problèmes que, par forme d'exercice, on leur donne à démontrer et à résoudre, *proprio marte*. Leur application à retenir exactement des raisonnemens et des procédés qu'ils trouvent dans un livre n'exerce uniquement que leur mémoire. Ne vaudrait-il pas beaucoup mieux, d'ailleurs, leur présenter simplement ce qui est simple de sa nature, et réserver les forces de leur intelligence pour beaucoup d'importantes recherches qu'on ne fait point d'ordinaire figurer dans les élémens, et qui néanmoins devraient y trouver place, parce qu'elles sont, pour la plupart, fondamentales dans la science.

Pour donner un exemple, entre beaucoup d'autres, des choses que l'on pourrait facilement abréger et simplifier dans nos traités de géométrie, je citerai la mesure du volume du tronc de pyramide ou de cône à bases parallèles. Dans l'ouvrage de M. Legendre et dans plusieurs autres, on cherche d'abord le volume d'un tronc de tétraèdre ; ce qui exige une décomposition ingénieuse, si l'on veut, mais qui peut très-facilement échapper de la mémoire. Il faut d'ailleurs s'appuyer sur un lemme qui doit avoir été démontré auparavant, et qui n'est guère utile qu'en cette rencontre, et faire ensuite une combinaison de proportions dans laquelle Lagrange lui-même, surtout en présence d'un examinateur tant soit peu impatient, comme on peut fort bien en rencontrer par fois, aurait fort bien pu s'égarer, sans en être pour cela moins excellent géomètre. Alors tout n'est point fait encore; il faut prouver que ce qui est vrai pour le tronc de tétraèdre l'est aussi pour le tronc d'une pyramide quelconque ; et faire voir finalement, par une réduction à l'absurde, que la proposition subsiste encore pour le tronc d'un cône droit ou oblique. Examinons si quelque autre voie ne serait pas, à la fois, plus simple et plus naturelle.

Dès qu'on sait mesurer le volume soit d'une pyramide entière, soit d'un cône entier, ce qui s'offre naturellement à la pensée pour parvenir à l'évaluation du volume d'un tronc de pyramide, à bases parallèles ou non parallèles, est bien certainement de déterminer d'abord le volume de la pyramide entière ou du cône entier, puis celui de la pyramide ou du cône retranché, et de soustraire ensuite ce second volume du premier. On conçoit d'ailleurs, à l'avance, que le parallélisme des bases pourra fort bien permettre quelques simplifications, tant dans le calcul que dans son résultat final.

Supposons donc qu'en effet les deux bases du tronc soient parallèles; soient T ce tronc, P et P' les pyramides totales et retranchées, lesquelles peuvent également être des cônes, B et B' leurs bases, h et h' leurs hauteurs respectives, et enfin k la hauteur du tronc; nous aurons d'abord

$$T=P-P'=\tfrac{1}{3}Bh-\tfrac{1}{3}B'h'=\tfrac{1}{3}(Bh-B'h') .$$

Mais on peut désirer de faire entrer dans cette expression la hauteur k du tronc et d'en faire disparaître les hauteurs h et h', incommodes à mesurer; et on voit même, sur-le-champ, que la chose est possible; car il suffit, pour cela, qu'il existe deux relations distinctes entre h, h' et les autres données du problème; or, deux telles relations existent en effet, car on a d'abord évidemment

$$h-h'=k ;$$

ensuite, comme les aires des bases sont proportionnelles aux quarrés des hauteurs, en représentant par b et b' les côtés de deux carrés respectivement équivalens aux deux bases, on aura

$$\frac{h}{h'}=\frac{b}{b'} ;$$

ce qui donnera

$$h=\frac{bk}{b-b'}\ ,\qquad h'=\frac{b'k}{b-b'}\quad (*)\ ;$$

d'où, en substituant dans la valeur de T,

$$T=\tfrac{1}{3}k\,\frac{b^3-b'^3}{b-b'}=\tfrac{1}{3}k(b^2+bb'+b'^2)\ ;$$

mais on a

$$b^2=B\ ,\qquad bb'=\sqrt{BB'}\ ,\qquad b'^2=B'\ ;$$

donc finalement

$$T=\tfrac{1}{3}k(B+\sqrt{BB'}+B')\ ;$$

ce qui est l'expression connue. On parviendrait, par une marche analogue, et avec une bien plus grand facilité encore, à l'expression connue de la surface convexe du tronc de cône à bases parallèles.

On ne manquera pas sans doute de dire que je viens de faire de l'algèbre et non de la géométrie. Je me disculperai de ce grave reproche en faisant remarquer qu'on peut fort bien remplacer les équations dont je me suis servi par des proportions équivalentes, et mettre ensuite deux lettres partout où je n'en ai mis qu'une seule; car c'est là, aux yeux de beaucoup de gens, le caractère constitutif de la géométrie. Il en résultera seulement un peu plus de complication dans l'écriture, et voilà tout. Il est d'ailleurs très-facile de démontrer, par la géométrie pure, que $(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3$.

Quel peut être d'ailleurs le motif de cette gothique et inconceva-

(*) On pourrait traiter d'une manière analogue le problème des deux bougies, que l'on a coutume de donner comme un problème du second degré.

J. D. G.

ble obstination qui fait précéder, dans nos écoles, l'étude de l'algèbre par celle de la géométrie? Outre que l'étude de la géométrie exige la connaissance de l'arithmétique, que l'on ne possède parfaitement que lorsqu'on a vu un peu d'algèbre; comment ne voit-on pas que l'algèbre n'est qu'une langue, qu'elle n'est qu'un pur instrument qu'il est fort inutile d'apprendre à manier, lorsqu'on possède déjà les connaissances dont son emploi aurait pu faciliter l'acquisition? Qu'on fasse de la géométrie à la manière de Monge et de ses disciples, sans aucune sorte de calcul; qu'on pousse cette géométrie aussi loin qu'on le pourra, j'y souscris de très-grand cœur; mais qu'on cesse enfin de nous donner pour *géométrie pure* une géométrie toute encombrée de proportions, de *componendo* et de *dividendo*, dans lesquels je ne saurais voir que des équations et des éliminations, sous un déguisement suranné.

Agréez, etc.

Lyon, le 15 d'octobre 1829.

STATIQUE.

Note sur la démonstration du parallélogramme des forces;

Par M. VALLÈS, ingénieur des ponts et chaussées, ancien élève de l'école polytechnique.

Mon cher Professeur,

A la page 81, de votre XVIII.^{me} volume, vous avez signalée, comme très-simple et très-élégante, une démonstration du parallélogramme des forces, publiée par M. J. KING, dans les *Transac-*

tions de la société philosophique de Cambridge ; mais, en même temps, vous avez signalé cette démonstration comme incomplète. Il m'a paru qu'elle pouvait être complétée comme il suit :

Soient deux forces P, formant entre elles un angle 2θ, et soit R leur résultante. Cette résultante devant être nulle pour toutes les valeurs et pour les seules valeurs de θ qui rendent nuls les binomes, en nombre infini,

$$1-\frac{4\theta^2}{\varpi^2}\,,\qquad 1-\frac{4\theta^2}{9\varpi^2}\,,\qquad 1-\frac{4\theta^2}{25\varpi^2}\,,\ \ldots\ ;$$

il s'ensuit qu'on doit avoir

$$R=kP\left(1-\frac{4\theta^2}{\varpi^2}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{4\theta^2}{9\varpi^2}\right)^{\beta}\left(1-\frac{4\theta^2}{25\varpi^2}\right)^{\gamma}\ldots\ldots\ ;$$

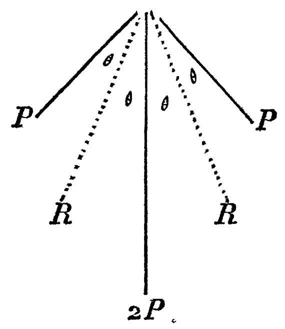
k étant un coefficient indépendant de P et θ, et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots..$ des exposans positifs.

D'abord, comme en faisant $\theta=0$, on doit avoir $R=2P$, il s'ensuit que, quel que soit θ, on doit avoir $k=2$, et conséquemment

$$R=2P\left(1-\frac{4\theta^2}{\varpi^2}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{4\theta^2}{9\varpi^2}\right)^{\beta}\left(1-\frac{4\theta^2}{25\varpi^2}\right)^{\gamma}\ldots\ldots\ ; \quad (1)$$

reste donc à déterminer les exposans $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$

Pour y parvenir, considérons trois forces P, P et $2P$, concourant en un même point ; les deux premières formant entre elles un angle 4θ, et la troisième divisant en deux parties égales l'angle de ces deux-là, ainsi qu'on le voit ici :



Pour avoir la résultante de ces trois forces, on pourra indifférem-ment ajouter à la force intermédiaire $2P$ la résultante des deux forces extrêmes, ou bien composer, tour à tour, chaque moitié de la force $2P$ avec l'une des forces extrêmes, pour avoir deux résultantes partielles égales à R, et composer ensuite ces deux résultantes en une seule force.

En procédant de la première de ces deux manières, on aura, pour la résultante des deux forces extrêmes, en vertu de la formule (1),

$$2P\left(1-\frac{16\theta^2}{\varpi^2}\right)^\alpha\left(1-\frac{16\theta^2}{9\varpi^2}\right)^\beta\left(1-\frac{16\theta^2}{25\varpi^2}\right)^\gamma\ldots\ldots;$$

de sorte que la résultante totale des trois forces sera

$$2P+2P\left(1-\frac{16\theta^2}{\varpi^2}\right)^\alpha\left(1-\frac{16\theta^2}{9\varpi^2}\right)^\beta\left(1-\frac{16\theta^2}{25\varpi^2}\right)^\gamma\ldots\ldots \quad (2)$$

En procédant de la seconde manière on aura, pour chacune des résultantes partielles R,

$$R=2P\left(1-\frac{4\theta^2}{\varpi^2}\right)^\alpha\left(1-\frac{4\theta^2}{9\varpi^2}\right)^\beta\left(1-\frac{4\theta^2}{25\varpi^2}\right)^\gamma\ldots\ldots,$$

et, pour la résultante générale,

$$2R\left(1-\frac{4\theta^2}{\varpi^2}\right)^\alpha\left(1-\frac{4\theta^2}{9\varpi^2}\right)^\beta\left(1-\frac{4\theta^2}{25\varpi^2}\right)^\gamma\ldots\ldots\ ;$$

ou bien, en remettant pour R sa valeur,

$$4P\left(1-\frac{4\theta^2}{\varpi^2}\right)^{2\alpha}\left(1-\frac{4\theta^2}{9\varpi^2}\right)^{2\beta}\left(1-\frac{4\theta^2}{25\varpi^2}\right)^{2\gamma}\ldots\ldots \qquad (3)$$

Les expressions (2) et (3) devront dònc être identiquement les mêmes, quel que soit θ ; ce qui donnera, en les égalant et en divisant par $2P$,

$$\left.\begin{aligned}&1+\left(1-\frac{16\theta^2}{\varpi^2}\right)^\alpha\left(1-\frac{16\theta^2}{9\varpi^2}\right)^\beta\left(1-\frac{16\theta^2}{25\varpi^2}\right)^\gamma\ldots\ldots\\&=2\left(1-\frac{4\theta^2}{\varpi^2}\right)^{2\alpha}\left(1-\frac{4\theta^2}{9\varpi^2}\right)^{2\beta}\left(1-\frac{4\theta^2}{25\varpi^2}\right)^{2\gamma}\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Or, on sait que (*)

$$\text{Cos.}2\theta=\left(1-\frac{16\theta^2}{\varpi^2}\right)\left(1-\frac{16\theta^2}{9\varpi^2}\right)\left(1-\frac{16\theta^2}{25\varpi^2}\right)\ldots\ldots\ ,$$

$$\text{Cos.}^2\theta=\left(1-\frac{4\theta^2}{\varpi^2}\right)^2\left(1-\frac{4\theta^2}{9\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4\theta^2}{25\varpi^2}\right)\ldots\ldots\ ;$$

au moyen de quoi l'équation (4) se change en celle-ci :

$$\left.\begin{aligned}&1+\text{Cos.}2\theta.\left(1-\frac{16\theta^2}{\varpi^2}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{16\theta^2}{9\varpi^2}\right)^{\beta-1}\left(1-\frac{16\theta^2}{25\varpi^2}\right)^{\gamma-1}\ldots\ldots\\&=2\text{Cos.}^2\theta.\left(1-\frac{4\theta^2}{\varpi^2}\right)^{2(\alpha-1)}\left(1-\frac{4\theta^2}{9\varpi^2}\right)^{2(\beta-1)}\left(1-\frac{4\theta^2}{25\varpi^2}\right)^{2(\gamma-1)}\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

(*) *Annales*, tom. I.er, pag. 120.

Cela posé, soit fait $\theta=\frac{\varpi}{4}$, il en résultera

$$2\theta=\frac{\varpi}{2}\ ,\quad \frac{2\theta}{\varpi}=\frac{1}{2}\ ,\quad \mathrm{Cos}.2\theta=0\ ,\quad 2\mathrm{Cos}.^2\theta=1\ ;$$

en conséquence l'équation (5) deviendra

$$1=\left(1-\frac{1}{4}\right)^{2(\alpha-1)}\left(1-\frac{1}{4.9}\right)^{2(\beta-1)}\left(1-\frac{1}{4.25}\right)^{2(\gamma-1)}\ldots\ldots;$$

or, comme les facteurs

$$1-\frac{1}{4}\ ,\quad 1-\frac{1}{4.9}\ ,\quad 1-\frac{1}{4.25}\ ,\ldots\ldots$$

sont tous moindres que l'unité, cette équation ne saurait subsister qu'autant qu'on aura

$$\alpha=\beta=\gamma=\ldots\ldots=1\ ;$$

donc on a simplement (1)

$$R=2P\left(1-\frac{4\theta^2}{\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4\theta^2}{9\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4\theta^2}{25\varpi^2}\right)\ldots\ldots\ ;$$

c'est-à-dire,

$$R=2P\mathrm{Cos}.\theta\ ,$$

comme il s'agissait de le prouver.

ANALYSE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur la limite supérieure des racines positives des équations numériques ;

Par M. Lenthéric, docteur ès sciences, professeur au collége royal de Montpellier.

La note que l'on va lire n'a d'autre but que de rendre un peu plus claire et plus briève la démonstration d'un théorème que l'on rencontre dans tous les Traités élémentaires.

Les racines réelles d'une équation numérique étant les seuls nombres qui, substitués dans son premier membre à la place de l'inconnue, réduisent ce premier membre à zéro ; il s'ensuit que, s'il existe un nombre positif duquel on puisse prouver que, soit ce nombre lui-même soit tout autre nombre plus grand que lui, substitué à la place de l'inconnue, dans le premier membre d'une équation, donne un résultat positif ; on pourra être certain que toutes les racines réelles de cette équation, si toutefois elle en admet de telles, sont plus petites que ce même nombre qui sera dit, pour cette raison, la *limite supérieure* des racines réelles de l'équation proposée.

On sera certain qu'un nombre est limite supérieure des racines réelles d'une équation, si ce nombre, et tout nombre plus grand que lui, mis à la place de l'inconnue, rend la somme des termes positifs plus grande que la somme des termes négatifs, prise positivement ; c'est donc un tel nombre qu'il s'agit d'obtenir.

Soient m le degré de l'équation proposée, n le nombre des termes qui précèdent le premier terme négatif et G le plus grand de tous les coefficiens négatifs pris positivement. Si nous trouvons une limite pour le cas le plus défavorable, à plus forte raison pourrons-nous l'admettre pour les cas qui le seront moins.

Or, le cas le plus défavorable est celui où les termes qui suivent le $n.^{ieme}$ seraient tous négatifs et auraient tous G pour coefficient, et où tous les termes entre le premier et le $(n+1)^{ieme}$ seraient nuls; de sorte qu'il suffit de trouver la plus petite des valeurs de x qui puissent satisfaire à l'inégalité

$$x^m > \mathrm{G}(x^{m-n}+x^{m-n-1}+\ldots\ldots+x^2+x+1) \ .$$

Or, cette inégalité peut être mise sous cette forme

$$x^m > \mathrm{G}.\frac{x^{m-n+1}-1}{x-1} \ ,$$

puis sous celle-ci

$$x-1 > \mathrm{G}.\frac{x^{m-n+1}-1}{x^m} \ ,$$

puis enfin sous cette autre

$$x- > \frac{\mathrm{G}}{x^{n-1}}.\frac{x^{m-n+1}-1}{x^{m+n-1}} \ ;$$

or, on satisfait évidemment à cette dernière inégalité en posant

$$x-1 > \frac{G}{x^{n-1}} \ ;$$

car alors, x étant plus grand que l'unité, $\frac{x^{m-n+1}-1}{x^{m+n-1}}$ sera une fraction proprement dite.

x étant ainsi >1, il s'ensuit qu'on doit avoir $x^{n-1} > (x-1)^{n-1}$, et, par suite,

$$\frac{G}{x^{n-1}} > \frac{G}{(x-1)^{n-1}} \ ;$$

donc, à plus forte raison, on aura

$$x-1>\frac{G}{(x-1)^{n-1}}\ ,$$

ou bien

$$(x-1)^n>G\ ,$$

ou encore

$$x-1>\sqrt[n]{G}\ ;$$

et, par suite,

$$x>1+\sqrt[n]{G}\ ,$$

le signe $>$ n'excluant par le signe d'égalité; ainsi *on peut prendre pour limite supérieure des racines réelles d'une équation proposée tout nombre qui ne sera pas moindre que l'unité augmentée d'une racine du plus grand coefficient négatif, pris positivement, dont l'exposant soit le nombre des termes qui précèdent le premier terme négatif.*

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

Note sur la recherche du point dont la somme des distances aux trois sommets d'un triangle est la moindre possible;

Par M. GERGONNE.

A la page 136, du V.^me^ volume de la *Correspondance* de M. QUETELET, M. Noël, principal de l'Athénée de Luxembourg, a proposé le problème suivant:

« La demeure d'un propriétaire, celle de son fermier et ses gran-
» ges, ont leurs portes aux sommets d'un triangle dont les côtés
» valent respectivement 210, 200 et 290 mètres. Le propriétaire
» veut joindre ces trois portes par trois chemins qui, pour les
» construire, coûteront 0 f. 50 c. par mètre quarré; la largeur de
» ces chemins devant être de 2 mètres. Il demande en quel point
» il faut établir le concours des trois chemins pour que le prix
» total de leur construction soit le moindre possible, et quel sera
» ce moindre prix ? »

En lisant cet énoncé, je m'étais figuré que M. Noël n'avait eu d'autre but que rendre un peu plus piquant le problème suivant: *Quel est le point de l'intérieur d'un triangle dont la somme des distances à ses trois sommets est la moindre possible?* Et, à la pag. 151 du présent volume, je témoignais ma surprise de ce qu'un tel problème, dont la solution m'était déjà connue, lorsque je n'étais encore qu'écolier, passât aujourd'hui pour nouveau aux yeux des estimables collaborateurs de la *Correspondance.*

Par une lettre en date du 11 janvier dernier, M. Noël m'apprend que j'étais dans l'erreur; qu'en proposant ce problème il savait très-bien que le point demandé doit être tellement situé que les droites qui le joignent aux trois sommets du triangle forment autour de lui des angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit, ayant conséquemment leurs sinus égaux à $\frac{\sqrt{3}}{2}$, et leurs cosinus égaux à $-\frac{1}{2}$; mais que son intention avait été de provoquer la recherche d'une formule qui donnât l'expression de la somme des trois distances en fonction des données du problème, comme on serait en effet obligé de le faire pour un devis qu'on aurait à dresser.

Envisagé sous ce point de vue, le problème paraît en effet être nouveau; et voici, ce nous semble, la manière la plus analytique de le résoudre.

Soient A, B, C les trois sommets du triangle donné et O le point cherché; posons

$$BC=a\ ,\quad CA=b\ ,\quad AB=c\ ,$$

$$OA=x\ ,\quad OB=y\ ,\quad OC=z\ ;$$

en vertu des formules fondamentales de la trigonométrie rectiligne, on aura

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Triangle BOC}\ , & y^2+yz+z^2=a^2\ ,\\ \text{Triangle COA}\ , & z^2+zx+x^2=b^2\ ,\\ \text{Triangle AOB}\ , & x^2+xy+y^2=c^2\ .\end{array}\right\}\quad(1)$$

Ces équations pourraient suffire, à la rigueur, pour résoudre le problème; en éliminant entre elles deux des inconnues, on obtiendrait pour la troisième une équation du quatrième degré, se résolvant à la manière de celles du second; mais cette équation serait excessivement compliquée. Nous éluderons cette difficulté en recourant à une équation auxiliaire.

Les droites OA, OB, OC partagent le triangle ABC en trois autres, dont la somme des aires est égale à la sienne; or, ces aires sont

$$\text{pour BOC}\ ,\quad \frac{yz\sqrt{3}}{4}\ ,$$

$$\text{pour COA}\ ,\quad \frac{zx\sqrt{3}}{4}\ ,$$

$$\text{pour AOB}\ ,\quad \frac{xy\sqrt{3}}{4}\ ;$$

de sorte qu'en désignant par T l'aire du triangle ABC, on a

$$T=\frac{(yz+zx+xy)\sqrt{3}}{4}\ ;$$

d'où

$$3(yz+zx+xy)=4T\sqrt{3}\ ; \qquad (2)$$

ajoutant cette équation à la somme des équations (1), il viendra

$$2(x+y+z)^2=a^2+b^2+c^2+4T\sqrt{3}\ ;$$

d'où

$$x+y+z=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+4T\sqrt{3}}{2}}\ ; \qquad (3)$$

comme l'a trouvé M. Heichen (*Correspondance*, tom. V, pag. 238).

Mais on peut désirer d'obtenir, en particulier, chacune des trois longueurs inconnues x, y, z ; et c'est là une chose très-facile. On tire, en effet, des équations (1) et (2)

$$3(b^2+c^2-a^2)+4T\sqrt{3}=6x(x+y+z)\ ;$$

donc, en vertu de la formule (3)

$$x=\frac{3(b^2+c^2-a^2)+4T\sqrt{3}}{3\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)+8T\sqrt{3}}}\ ;$$

on aura de même

$$y=\frac{3(c^2+a^2-b^2)+4T\sqrt{3}}{3\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)+8T\sqrt{3}}}\ ,$$

$$z=\frac{3(a^2+b^2-c^2)+4T\sqrt{3}}{3\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)+8T\sqrt{3}}}\ , \qquad (4)$$

Soient prolongées les droites AO, BO, CO, jusqu'à la rencontre des côtés BC, CA, AB en A′, B′, C′. La droite OA′ divisant en deux parties égales l'angle BOC, on aura

$$\frac{OB+OC}{BC}=\frac{OB}{A'B}=\frac{OC}{A'C}\ ;$$

d'où

$$A'B=\frac{OB.BC}{OB+OC}=\frac{ay}{y+z}\,,\quad A'C=\frac{OC.BC}{OB+OC}=\frac{az}{y+z}\ ;$$

or, on a

$$\frac{y}{y+z}=\frac{3(c^2+a^2-b^2)+4T\sqrt{3}}{2(3a^2+4T\sqrt{3})}\,,\quad \frac{z}{y+z}=\frac{3(a^2+b^2-c^2)+4T\sqrt{3}}{2(3a^2+4T\sqrt{3})}\ ;$$

donc

$$A'B=\frac{3a(c^2+a^2-b^2)+4aT\sqrt{3}}{2(3a^2+4T\sqrt{3})}\,,\quad A'C=\frac{3a(a^2+b^2-c^2)+4aT\sqrt{3}}{2(3a^2+4T\sqrt{3})}\ ;$$

on trouvera de même

$$B'C=\frac{3b(a^2+b^2-c^2)+4bT\sqrt{3}}{2(3b^2+4T\sqrt{3})}\,,\quad B'A=\frac{3b(b^2+c^2-a^2)+4bT\sqrt{3}}{2(3b^2+4T\sqrt{3})}\,,$$

$$C'A=\frac{3c(b^2+c^2-a^2)+4cT\sqrt{3}}{2(3c^2+4T\sqrt{3})}\,,\quad C'B=\frac{3c(c^2+a^2-b^2)+4cT\sqrt{3}}{2(3c^2+4T\sqrt{3})}\ .$$

Une fois les trois points A', B', C' déterminés, rien ne sera plus aisé que de déterminer le point O.

On pourrait tenter de résoudre, d'une manière analogue, les deux problèmes de trigonométrie sphérique proposés à la pag. 152 du présent volume; mais il est présumable que les calculs en seraient excessivement compliqués. En admettant les mêmes notations que ci-dessus, les trois équations à résoudre, pour le premier, seraient

$$2\text{Cos.}y\text{Cos}\,z-\text{Sin.}y\text{Sin.}z=2\text{Cos.}a\ ,$$

$$2\text{Cos.}z\text{Cos.}x-\text{Sin.}z\text{Sin}\,x=2\text{Cos.}b\ ,$$

$$2\text{Cos}\,x\text{Cos.}y-\text{Sin.}x\text{Sin.}y=2\text{Cos.}c\ .$$

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration d'un théorème d'analyse indéterminée énoncé à la pag. 256 du précédent volume ;

Par un ABONNÉ.

THÉORÈME. Tout nombre entier est diviseur d'un nombre exprimé par une suite de 9 suivis de plusieurs zéros.

Démonstration. Soit n un nombre entier quelconque, et soit converti la fraction $\frac{1}{n}$ en parties décimales; cette transformation conduira à une suite décimale périodique, laquelle pourra ensuite être convertie, suivant les principes connus, en une fraction ordinaire dont le dénominateur sera, en général, une suite de 9 suivis de plusieurs zéros; et cette nouvelle fraction devra être égale à la fraction irréductible $\frac{1}{n}$.

Or, lorsque deux fractions sont égales, et que l'une d'elle est irréductible, les deux termes de l'autre doivent être les produits des deux termes de celle-là par un même nombre entier; donc, en particulier, le dénominateur de la seconde fraction que nous venons de voir composé d'une suite de 9 suivis de plusieurs zéros, sera le produit de n par un nombre entier; d'où il résulte que n en sera un diviseur, comme l'annonce le théorème.

On voit par là que, pour que le théorème soit généralement vrai, il faut admettre 1.° que le nombre dont n est diviseur peut être simplement l'unité suivie de plusieurs zéros; 2.° que ce nombre peut être exprimé par une suite de 9 sans aucun zéro à sa droite. Le premier cas aura lieu lorsque n n'aura aucun facteur premier différent de 2 et 5 ; le seccond aura lieu lorsqu'au contraire n n'aura ni 2 ni 5 parmi ses facteurs premiers. Dans tous les autres cas, le nombre dont n sera diviseur aura à la fois des 9 et des zéros. On voit, au surplus, que, dans tous les cas, le nombre total des uns et des autres sera toujours inférieur à n.

Les mêmes considérations prouvent qu'en général, dans tout système de numération, il n'est aucun nombre entier qui n'ait, parmi ses multiples, un nombre exprimé par le plus grand chiffre du système, écrit plusieurs fois de suite, et suivi de plusieurs zéros ; ce qui revient à dire que l'équation $a^x(a^y-1)=bz$ est toujours résoluble en nombres entiers, quels que soient les nombres entiers a et b (*).

Lyon, le 17 novembre 1829.

Solution des problèmes de géométrie énoncés à la pag. 152 *du présent volume ;*

Par M. Vallès, ingénieur des ponts et chaussées, ancien élève de l'Ecole polytechnique,

Et MM. Camille Pagliani et Paul Martinelli, cadets au Corps royal des Pionniers, à Modène.

Il est bien connu, et il est d'ailleurs bien facile de démontrer (**),

1.° *Que le lieu de tous les points du plan de deux cercles desquels on voit ces deux cercles sous des angles égaux est la cir-*

(*) A la pag. 185 du V.me volume du *Journal* de M. Crelle, on trouve une démonstration de ce théorème qui, bien qu'assez briève, est beaucoup moins élémentaire que celle qu'on vient de lire ; mais, à la pag. 296 du même volume, on en trouve une autre démonstration directe fort simple, ainsi que celle d'un théorème plus général. *J. D. G.*

(**) *Annales*, tom. XI, pag. 364.

conférence d'un troisième cercle, ayant pour diamètre la droite qui joint les centres de similitude directe et inverse des deux premiers;

2.° *Que si, sur les droites qui joignent les centres de similitude directe et inverse de trois cercles, situés dans un même plan et considérés deux à deux, prises pour diamètres, on décrit trois nouveaux cercles, les circonférences de ces derniers se couperont toutes trois aux deux mêmes points, seuls points du plan des trois premiers desquels ils puissent être vus sous des angles égaux;*

3.° *Que le lieu des points de l'espace desquels on peut voir deux sphères données sous des angles égaux, est une troisième sphère, ayant pour diamètre la droite qui joint les centres de similitude directe et inverse des deux premières;*

4.° *Que si, sur les droites qui joignent les centres de similitude directe et inverse de trois sphères, considérées deux à deux, prises pour diamètres, on décrit trois nouvelles sphères, ces dernières se couperont toutes trois suivant une même circonférence, lieu des points de l'espace desquels les trois premières sphères pourront être vues sous des angles égaux;*

5.° *Qu'enfin si, sur les droites qui joignent les centres de similitude directe et inverse de quatre sphères, considérées tour à tour, deux à deux, prises pour diamètres, on décrit six nouvelles sphères, ces dernières se couperont trois à trois suivant quatre cercles passant tous par les deux seuls points de l'espace, desquels il soit possible de voir les quatre sphères données sous des angles égaux* (*).

Comme, dans la géométrie de situation, les angles circonscrits à des cercles et les surfaces coniques circonscrites à des sphères sont remplacés par des droites inscrites à ces cercles ou des cer-

(*) Des points infiniment distans de plusieurs cercles ou de plusieurs sphères sont aussi des points desquels ces cercles et ces sphères sont vus sous des angles égaux, puisqu'on les voit de là sous des angles nuls.

cles inscrits à ces sphères ; et, comme les points qui décrivent des courbes planes ou à double courbure s'y trouvent remplacés par des droites enveloppant une même courbe, ou par des plans enveloppant une même surface développable, on voit de suite que, dans cette même géométrie de situation, les cinq propositions que nous venons de rappeler doivent avoir leurs corrélatives, que les notes qui nous ont été adressées ont pour objet d'établir; ces notes ne présentant d'ailleurs, comparées les unes aux autres, que des différences assez légères, nous croyons faire une chose convenable en les fondant toutes dans une rédaction unique.

Soient C et C′ deux cercles donnés sur un même plan et desquels C′ soit le plus petit, s'ils sont inégaux. Soient r et r' leurs rayons respectifs ; soit pris le centre de C′ pour origine des coordonnées rectangulaires et soit (a, b) le centre de C.

Soit

$$y=Mx+G\,;$$

l'équation d'une droite mobile sur le plan de ces deux cercles, dans laquelle M et G sont deux paramètres. Si nous représentons par p et p' les longueurs des perpendiculaires abaissées sur cette droite des centres des deux cercles, nous aurons

$$p=\pm\frac{b-Ma-G}{\sqrt{1+M^2}}\,,\quad p'=\pm\frac{G}{\sqrt{1+M^2}}\,:$$

Si l'on veut que les deux cercles interceptent, sur cette droite, des cordes de même longueur, il faudra que la différence des quarrés des perpendiculaires p et p' soit égale à la différence des quarrés des rayons r et r', ce qui donnera

$$\frac{(b-Ma-G)^2-G^2}{1+M^2}=r^2-r'^2\,,$$

ou bien

$$(b-Ma)^2-2G(b-Ma)=(r^2-r'^2)(1+M^2)\ ;$$

telle est donc la relation qui doit exister entre les deux paramètres M et G, pour que cette condition soit satisfaite.

Puisque, dans cette équation, G n'entre plus qu'à la première puissance, on se trouve naturellement conduit à en tirer la valeur, pour la substituer dans l'équation de la droite mobile qui, de la sorte, ne renfermera plus que le seul paramètre M. On trouve ainsi

$$2(b-Ma)(y-Mx)=(b-Ma)^2-(r^2-r'^2)(1+M^2)\ ;$$

ou bien en développant et ordonnant

$$\{2ax-a^2+(r^2-r'^2)\}M^2-2(bx+ay-ab)M+\{2by-b^2+(r^2-r'^2)\}=0\ ;$$

On voit donc, à cause de l'indétermination de M, qu'il y a généralement sur le plan de deux cercles, une infinité de droites sur lesquelles ces cercles interceptent des cordes de même longueur.

Si présentement on veut savoir à quelle courbe toutes ces droites sont tangentes, il ne s'agira, comme l'on sait, que d'éliminer M entre cette équation et sa dérivée, prise uniquement par rapport à cette lettre. Or, cette dérivée est

$$\{2ax-a^2+(r^2-r'^2)\}M-(bx+ay-ab)=0\ ;$$

d'où, en multipliant par M et retranchant de l'équation ci-dessus,

$$(bx+ay-ab)M-\{2by-b^2+(r^2-r'^2)\}=0\ ;$$

et, en éliminant M entre ces deux-ci,

$$(bx+ay-ab)^2-\{2ax-a^2+(r^2-r'^2)\}\{2by-b^2+(r^2-r'^2)\}=0\ ;$$

ou bien encore

$$(bx-ay)^2-(2ax+2by-a^2-b^2)(r^2-r'^2)-(r^2-r'^2)^2=0\ ;$$

équation que l'on voit appartenir à une parabole.

Pour juger plus aisément de la grandeur et de la situation de la courbe, supposons que nous ayons fait passer l'axe des x par les centres des deux cercles ; alors nous aurons $b=0$, et a deviendra la distance entre ces centres ; l'équation sera, dans ce cas,

$$a^2y^2=(r^2-r'^2)\{2ax-a^2+(r^2-r'^2)\}\ ,$$

qu'on pourra écrire ainsi

$$y^2=\frac{r^2-r'^2}{\frac{1}{2}a}\left(x-\tfrac{1}{2}a+\frac{r^2-r'^2}{2a}\right).$$

L'équation, mise sous cette forme, nous montre que l'axe de la parabole est dirigé suivant la droite qui joint les centres des deux cercles, que son sommet se trouve sur cette droite, à une distance du centre du plus petit, exprimée par

$$\tfrac{1}{2}a-\frac{r^2-r'^2}{2a}\ ,$$

et que son paramètre a pour expression

$$\frac{r^2-r'^2}{\frac{1}{2}a}\ ;$$

d'où il suit que la distance de son sommet à son foyer est

$$\frac{r^2-r'^2}{2a},$$

et qu'ainsi son foyer se trouve à la distance $\frac{1}{2}a$ du centre du plus petit des deux cercles; c'est-à-dire, au milieu de la droite qui joint les centres de l'un et de l'autre.

Les équations des deux cercles sont, dans le cas actuel,

$$(x-a)^2+y^2=r^2\ , \qquad x^2+y^2=r'^2\ ;$$

en retranchant ces équations l'une de l'autre, on obtiendra, pour l'équation de leur corde commune, réelle ou idéale, c'est-à-dire, de leur *axe radical*

$$2ax-a^2+(r^2-r'^2)=0\ ,$$

qui donne, pour l'intersection de cet axe radical avec la droite qui joint les centres

$$x=\frac{1}{2}a-\frac{r^2-r'^2}{2a}\ ;$$

valeur identique avec celle que nous avons trouvé plus haut pour la position du sommet; et c'est qu'en effet la corde commune aux deux cercles est évidemment une droite sur laquelle ces deux cercles interceptent des segmens de même longueur. On voit aussi, sans qu'il soit besoin d'en faire le calcul, que toute tangente commune aux deux cercles sera aussi tangente à la parabole, puisqu'une tangente commune est une droite sur laquelle les deux cercles interceptent des segmens d'une longueur nulle.

On a donc ce théorème:

1. *La courbe que touche constamment une droite qui se meut*

sur le plan de deux cercles, de telle sorte que ces deux cercles interceptent sur elle des cordes de même longueur, est une parabole dont l'axe passe par les centres de ces deux cercles. Cette parabole a son foyer au milieu de la droite qui joint les centres des deux cercles, et son sommet au point où cette droite est coupée par leur axe radical.

Soient présentement trois cercles C, C', C'', tracés sur un même plan, et dont C'' soit le plus petit, s'ils sont inégaux. Soient décrites deux paraboles l'une P ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de C' et C'' et son sommet au point où cette droite est coupée par leur axe radical, et l'autre P', ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de C et C'' et son sommet au point où cette droite est coupée par leur radical.

D'après ce qui vient d'être dit ci-dessus, les cercles C' et C'' intercepteront des cordes de même longueur sur toute tangente à la parabole P; et les cercles C et C'' intercepteront pareillement des tangentes de même longueur sur toute tangente à la parabole P'; donc les trois cercles C, C', C'' intercepteront des tangentes de même longueur sur toute tangente commune aux deux paraboles P et P'.

Mais, si l'on construit une troisième parabole P'' ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de C et C', et son sommet au point où cette droite est coupée par leur axe radical; toute droite sur laquelle les cercles C et C' intercepteront des tangentes de même longueur, et par suite toute tangente commune aux paraboles P et P' devra être tangente à cette troisième parabole. Ces trois paraboles pourront donc être touchées par une même droite sur laquelle les trois cercles intercepteront des cordes de même longueur. Il est d'ailleurs aisé de voir qu'à deux paraboles tracées sur un même plan, on ne peut mener que trois tangentes communes au plus.

On a donc ce théorème :

II. *Trois cercles étant tracés sur un même plan ; si, pour chaque couple de cercles, on décrit une parabole dont le foyer soit le milieu de la droite qui joint leurs centres, et le sommet le point où cette droite est coupée par leur axe radical ; les trois paraboles ainsi décrites auront trois tangentes communes, au plus, sur chacune desquelles les trois cercles intercepteront des cordes de même longueur.*

Du théorème I.er il est facile de conclure le suivant :

III. *Si un plan se meut dans l'espace de telle sorte que deux sphères fixes interceptent constamment sur lui deux cercles de même rayon, ce plan sera, dans son mouvement, toujours tangent à un paraboloïde de révolution dont l'axe passera par les centres des deux sphères. Ce paraboloïde aura son foyer au milieu de la droite qui joint ces centres, et son sommet au point où cette droite sera coupée par le plan radical des deux sphères.*

Soit présentement trois sphères S, S′, S″, dont S″ soit la plus petite si elles sont inégales. Soient construits deux paraboloïdes de révolution, l'un P ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de S′ et S″, et son sommet au point où cette droite est coupée par leur plan radical, et l'autre P′, ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de S et S″, et son sommet au point où cette droite est coupée par leur plan radical.

D'après le théorème III, les deux sphères S′ et S″ intercepteront des cercles de même rayon sur tout plan tangent au paraboloïde P ; et les deux sphères S et S″ intercepteront pareillement des cercles de même rayon sur tout plan tangent au paraboloïde P′ ; donc les trois sphères S, S′, S″ intercepteront des cercles de même rayon sur tout plan tangent commun aux deux paraboloïdes P et P′, et par conséquent sur tout plan tangent à la surface développable circonscrite à ces deux paraboloïdes, laquelle aura trois nappes au plus.

Mais si l'on construit un troisième paraboloïde de révolution P'', dont le foyer soit le milieu de la droite qui joint les centres de S et S', et le sommet le point où cette droite est coupée par le plan radical de ces deux sphères, tout plan sur lequel S et S' intercepteront des cercles de même rayon, et par suite tout plan tangent commun aux paraboloïdes P et P', ou encore tout plan tangent à la surface développable circonscrite, devra être tangent à ce troisième paraboloïde; et par suite il devra être aussi tangent et à la surface développable circonscrite à P et P'' et à la surface développable circonscrite à P' et P'', lesquelles devront ainsi être les mêmes que la surface développable circonscrite à P et P'; les trois paraboloïdes P, P', P'' seront donc inscriptibles à une même surface développable; et les trois sphères S, S', S'' intercepteront sur tout plan tangent à cette dernière surface, lequel sera aussi tangent aux trois paraboloïdes des cercles de même rayon.

On a donc ce théorème :

IV. *Trois sphères étant données dans l'espace, si, pour chaque couple de sphère, on construit un paraboloïde de révolution, ayant pour foyer le milieu de la droite qui joint leurs centres, et pour sommet le point où cette droite est coupée par leur plan radical; les trois paraboloïdes ainsi conditionnés seront inscriptibles à une seule et même surface développable, ayant trois nappes au plus; et les trois sphères intercepteront sur tout plan tangent à cette surface, lequel sera aussi tangent aux trois paraboloïdes, des cercles de même rayon* (*).

Soient enfin S, S', S'', S''' quatre sphères données dans l'espace,

(*) M. Paul Martinelli, qui a pris la peine de calculer l'équation de cette surface développable, l'a trouvée du sixième degré; ce qui s'accorde parfaitement avec l'existence de ses trois nappes.

dont S''' soit la plus petite, si elles sont inégales. Soient construits trois paraboloïdes de révolution; savoir : un paraboloïde (PP''') ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de S et S''', et son sommet au point où cette droite est coupée par leur plan radical : un paraboloïde $(P'P''')$ ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de S' et S''', et son sommet au point où cette droite est coupée par leur plan radical; enfin un paraboloïde $(P''P''')$ ayant son foyer au milieu de la droite qui joint les centres de S'' et S''', et son sommet au point où cette droite est coupée par leur plan radical.

D'après ce qui précède, les deux sphères S et S''' intercepteront des cercles de même rayon sur tout plan tangent au paraboloïde (PP''') ; et il en sera de même des deux sphères S' et S''', par rapport à tout plan tangent au paraboloïde $(P'P''')$, ainsi que des deux sphères S'' et S''', par rapport au paraboloïde $(P''P''')$. Donc, si un même plan touche à la fois les trois paraboloïdes (PP'''), $(P'P''')$, $(P''P''')$, les quatre sphères S, S', S'', S''' intercepteront sur ce plan des cercles de même rayon.

Mais, parce que les trois sphères S, S', S'' intercepteront sur ce plan des cercles de même rayon, il devra toucher à la fois les trois paraboloïdes de révolution $(P'P'')$, $(P''P)$, (PP') ainsi que la surface développable qui peut leur être circonscrite ; donc, ce plan touchera à la fois les six paraboloïdes de révolution (PP'''), $(P'P''')$, $(P''P''')$, $(P'P'')$, $(P''P)$, (PP'), ainsi que les quatre surfaces développables qui peuvent être circonscrites à ces paraboloïdes pris trois à trois.

On a donc ce théorème :

V. *Quatre sphères étant données dans l'espace ; si, pour chaque couples de sphères, on construit un paraboloïde de révolution dont le foyer soit au milieu de la droite qui joint les centres de ces deux sphères, et dont le sommet soit au point où cette droite est coupée par leur plan radical ; les paraboloïdes relatifs aux* *trois mêmes sphères seront inscriptibles à une seule et même surface développable ; les surfaces développables ainsi déterminées pourront, toutes quatre, être touchées par un seul et même plan, lequel touchera aussi les six paraboloïdes, et les quatre sphères intercepteront, sur un tel plan, des cercles de même rayon* (*).

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de géométrie.

I. ÉTANT données les longueurs des droites qui joignent les trois sommets d'un triangle au centre du cercle inscrit, construire le triangle ?

II. Étant données les longueurs des perpendiculaires abaissées sur les directions des trois côtés d'un triangle du centre du cercle circonscrit, construire le triangle ?

III. Étant données les longueurs des perpendiculaires abaissées sur les directions des six arêtes d'un tétraèdre, soit du centre de la sphère inscrite, soit du centre de la sphère circonscrite, construire le tétraèdre ?

IV. Quelles sont les relations diverses qui existent entre les douze droites qui joignent les sommets des faces d'un tétraèdre aux centres des cercles inscrits à ces faces ?

V. Quelles sont les diverses relations qui existent entre les longueurs des douze perpendiculaires abaissées sur les directions des côtés des faces d'un tétraèdre des centres des cercles circonscrits à ces faces ?

(*) Il resterait à savoir combien, pour ces quatre sphères, il peut exister de pareils plans au plus.

I. Sur quelle courbe se trouvent tous les points d'une sphère qui, étant pris pour sommets d'angles sphériques circonscrits à deux cercles tracés sur cette sphère, donnent ces deux angles sphériques de même grandeur ?

II. Trois cercles étant donnés sur une sphère, trouver, sur cette sphère, un point qui étant pris pour sommet commun d'angles sphériques ciconscrits à ces trois cercles, ces trois angles sphériques soient de même grandeur ?

I. A quelle courbe est tangent un grand cercle qui se meut, sur une sphère, de telle sorte que deux cercles fixes, tracés sur cette sphère, interceptent constamment sur lui deux arcs égaux ?

II. Trois cercles étant donnés sur une sphère, tracer, sur cette sphère, un grand cercle sur lequel les trois cercles donnés interceptent des arcs de même longueur ?

III. Étant données les longueurs des arcs de grands cercles qui joignent les sommets d'un triangle sphérique au pôle du cercle inscrit à ce triangle, déterminer les longueurs de ses côtés ?

IV. Étant données les longueurs des arcs de grands cercles abaissés perpendiculairement sur les directions des trois côtés d'un triangle sphérique du pôle du cercle circonscrit à ce triangle, déterminer les longueurs de ces mêmes côtés ?

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Des Maxima *et* Minima (*), *dans les fonctions d'une ou de plusieurs variables ;*

Par M. GERGONNE.

DANS l'exposé que nous avons présenté, à la pag. 213 du présent volume, des principes de *calcul différentiel*, on trouve uniquement, comme on a pu le voir, 1.° la définition d'une nouvelle opération de calcul ; 2.° les règles pratiques de cette opération, sur toutes les fonctions connues, rigoureusement déduites de sa définition ; 3.° enfin, l'institution de quelques symboles généraux, propres à exprimer le résultat auquel on parvient, lorsqu'on exécute cette même opération, une ou plusieurs fois, sur des fonctions d'une ou de plusieurs variables, dont on suppose la forme tout à fait indéterminée.

Quand bien même ces procédés et ces symboles ne seraient susceptibles d'aucune application, tout ce que nous en avons dit n'en

(*) Il y a déjà long-temps que M. Lacroix s'est affranchi de la pédantesque coutume de parler latin en français ; et les mots *maximum* et *minimum* sont, en effet, d'un usage assez ancien et assez fréquent, dans notre langue, pour mériter des lettres de naturalisation. Mais je n'ai pas, comme M. Lacroix, l'honneur d'appartenir à l'Académie royale des sciences et aux hautes écoles de la capitale ; et, si j'écrivais, comme lui, *des maximums*, *des minimums*, beaucoup de gens pourraient en inférer que je n'ai point fait *mes classes*, ce qui me porterait un notable préjudice dans leur esprit.

demeurerait pas moins de la plus exacte vérité, et on ne pourrait, au plus, leur objecter que leur inutilité. Il ne nous reste donc plus maintenant qu'à montrer, par des applications variées, combien il s'en faut que ce reproche puisse leur être appliqué; et c'est là ce que nous nous proposons de faire dans l'article que l'on va lire et dans plusieurs autres qui le suivront.

Nous choisirons, pour première application, une classe de questions qui, bien qu'elles se présentent fréquemment à résoudre en géométrie et en mécanique, n'en sont pas moins, au fond, du simple domaine de l'analyse : ce sont les questions de *maxima* et de *minima*, dans les fonctions explicites ou implicites d'une ou de plusieurs variables, indépendantes les unes des autres ou liées entre elles par des relations plus ou moins nombreuses. La théorie qui les concerne se trouve exposée dans tous les traités de calcul différentiel; mais, outre qu'elle n'y est peut-être pas présentée d'une manière assez large, assez lumineuse et assez complète, il est, sur ce sujet, quelques points de doctrine qui paraissent avoir échappé jusqu'ici à l'attention des analystes, et que nous aurons soin de signaler, chemin faisant, de manière à offrir encore quelque chose de neuf, sur un sujet qu'on pourrait croire épuisé.

I. Considérons, en premier lieu, une fonction

$$X=\mathrm{f}(x)\ ,$$

de la seule variable x, et supposons qu'on donne à cette variable toutes les valeurs réelles comprises entre l'infini négatif et l'infini positif; il pourra d'abord se faire que, pour toutes ces valeurs, la fonction X soit constamment imaginaire ou constamment réelle; mais souvent aussi elle sera réelle, pour certaines séries de valeurs, et imaginaires pour toutes les autres.

Soient $x_{\prime}$, x' deux limites entre lesquelles les valeurs de x rendent constamment X réelle; il pourra se faire que, de la première à la seconde limite, X prenne des valeurs réelles constamment croissantes ou constamment décroissantes; mais il pourra se faire aussi que, x marchant d'une limite à l'autre, X prenne des valeurs tantôt croissantes et tantôt décroissantes. Alors si, après avoir d'abord crû, cette fonction vient ensuite à décroître, il y aura une certaine valeur de x qui l'aura rendue *plus grande* qu'elle ne l'était pour les valeurs qui précédaient et suivaient immédiatement celle-là; et l'on dira de cette valeur de x qu'elle rend X *maximum*. Si, au contraire, après avoir décru, cette fonction vient ensuite à croître, il y aura une certaine valeur de x qui l'aura rendue *plus petite* qu'elle ne l'était pour les valeurs qui précédaient et suivaient immédiatement celle-là; et l'on dira de cette valeur de x qu'elle rend X *minimum*. On conçoit d'ailleurs que, pour des valeurs de x comprises entre les limites $x_{,}$, x', la fonction X pourra souvent présenter plusieurs *maxima* et *minima*, les uns plus grands et les autres plus petits; sans pourtant que jamais deux *maxima* ni deux *minima* puissent se succéder l'un à l'autre consécutivement. La question que nous nous proposons ici est d'assigner, pour toute fonction donnée, toutes les valeurs et les seules valeurs de x auxquelles ces *maxima* et ces *minima* doivent répondre.

Soient $a_{,}$, a, a' trois valeurs de x, constamment croissantes ou décroissantes qui, substituées dans X, lui fassent prendre les trois valeurs $A_{,}$, A, A'; si toutes les valeurs de x comprises entre $a_{,}$ et a rendent X moindre que A, et qu'il en soit de même pour toutes ses valeurs comprises entre a et a', il sera vrai de dire que la valeur a de x rend X *maximum*, dans le sens que nous l'entendons ici. A l'inverse, si toutes les valeurs de x comprises entre $a_{,}$ et a rendent X *plus grande* que A, et qu'il en soit de même pour toutes ses valeurs comprises entre a et a', il sera vrai de dire que la valeur a de x rend X *minimum*.

On voit donc qu'une valeur de x n'en serait pas moins réputée répondre à un *maximum* de la fonction X, quand bien même une autre valeur de x rendrait cette fonction *plus grande*; et qu'elle n'en serait pas moins réputée appartenir à un *minimum* de cette même fonction X, quand bien même une autre valeur de x rendrait cette fonction *plus petite ;* et c'est là un point qu'il ne faut jamais perdre de vue dans la théorie qui nous occupe. L'essentiel est seulement pour un *maximum*, que les valeurs qui le précéderont et le suivront *immédiatement* soient, les unes et les autres, *moindres* que la sienne, et, pour un *minimum*, que les valeurs qui le précéderont et le suivront *immédiatement* soient, les unes et les autres, *plus grandes* que la sienne (*).

Ces choses ainsi entendues, soit i une grandeur indéterminée, homogène avec x, et susceptible de toutes les valeurs possibles, entre l'infini négatif et l'infini positif. Si l'on suppose que x se change en $x+i$, X ou $f(x)$ deviendra $f(x+i)$. Alors la valeur de x qui répondra à un *maximum* de X devra être déterminée par cette condition qu'on puisse toujours prendre i assez petit, sans être nul, pour que, pour toutes ses valeurs, jusqu'à $i=0$, on ait constamment, quel que soit son signe,

$$f(x+i)<f(x) \,, \qquad \text{ou} \qquad f(x+i)-f(x)<0 \;;$$

tandis qu'au contraire la valeur de x qui répondra à un *minimum* de X devra être déterminée, sous les mêmes restrictions, par la condition

$$f(x+i)>f(x) \,, \qquad \text{ou} \qquad f(x+i)-f(x)>0 \;.$$

En développant donc, comme à la pag. 252, par la série de Taylor, nous pourrons réunir les deux conditions ainsi qu'il suit :

(*) Tout cela devient manifeste, en considérant X comme l'ordonnée d'une courbe sinueuse, dont x est l'abscisse.

$$X\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}\text{ si l'on a }\frac{dX}{dx}\,\frac{i}{1}+\frac{d^2X}{dx^2}\,\frac{i^2}{1.2}+\ldots\left\{\begin{matrix}<\\ >\end{matrix}\right\}0\,. \quad (1)$$

Or, comme on peut toujours prendre i assez petit, sans être nul, pour ne faire dépendre le signe total de ce développement que du signe de son premier terme qu'on peut rendre, à volonté, positif ou négatif, en variant le signe de i; il s'ensuit que, si $\frac{dX}{dx}$ n'est pas nul de lui-même, ce développement ne pourra être ni constamment *négatif*, comme l'exige le *maximum*, ni constamment *positif*, comme l'exige le *minimum*, pour toutes les valeurs de i, jusqu'à zéro, et quel que soit le signe de cet accroissement. La condition également *nécessaire*, pour le *maximum* et pour le *minimum* de la fonction X, est donc qu'on ait, tout au moins,

$$\frac{dX}{dx}=0\,; \qquad (2)$$

mais nous allons bientôt voir que cette condition n'est pas toujours *suffisante*; c'est-à-dire, qu'il ne peut y avoir *maximum* ou *minimum* que pour des valeurs de x tirées de cette équation; mais que, parmi les valeurs qu'elle donne pour x, on peut fort bien en rencontrer qui n'appartiennent ni à un *maximum* ni à un *minimum*.

Supposons qu'une valeur de x tirée de l'équation (2) ne rende pas nul le coefficient différentiel $\frac{d^2X}{dx^2}$; pour cette valeur de x, les conditions (1) se réduiront à ce qui suit:

$$X\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}\text{ si l'on a }\frac{d^2X}{dx^2}\,\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3X}{dx^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+\ldots\left\{\begin{matrix}<\\ >\end{matrix}\right\}0\,.$$

Or, comme on peut toujours prendre i assez petit, sans être nul, pour ne faire dépendre le signe total de ce développement que du signe de son premier terme qu'on ne peut plus ici rendre, à volonté, positif ou négatif, en variant le signe de i, il s'ensuit que ce signe total sera ou constamment *négatif*, comme l'exige le *maximum*, ou constamment *positif*, comme l'exige le *minimum*, pour toutes les valeurs de i jusqu'à zéro, et quel que soit le signe de cet accroissement; cette valeur de x répondra donc, en effet, à un *maximum* ou à un *minimum* de la fonction X, suivant qu'elle rendra $\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}$ *négatif* ou *positif*; on peut donc écrire

$$X\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}\text{ si l'on a }\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}=0\quad\text{et}\quad\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}\left\{\begin{matrix}<\\ >\end{matrix}\right\}0\,.$$

Mais si une valeur de x, tirée de l'équation (2), rendait nul le coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}$, sans rendre nul le coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3}$, les conditions (1), pour cette valeur de x, se reduisant à

$$X\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}\text{ si l'on a }\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+\frac{\mathrm{d}^4X}{\mathrm{d}x^4}\,\frac{i^4}{1.2.3.4}+\ldots\left\{\begin{matrix}<\\ >\end{matrix}\right\}0\;;$$

ces conditions ne pourraient plus être satisfaites; car, comme on pourrait toujours prendre i assez petit, sans être nul, pour ne faire dépendre le signe de tout le développement que du signe de son premier terme que l'on peut ici rendre à volonté positif ou négatif, en variant le signe de i, il s'ensuit que ce développement ne pourrait plus être ni constamment *négatif*, comme l'exige le *maximum*, ni constamment *positif*, comme l'exige le *minimum*, pour toutes les valeurs de i, jusqu'à zéro, et quel que fût le signe de cet accroissement; cette valeur de x ne répondrait donc alors ni à un *maximum* ni à un *minimum* de la fonction X.

Supposons qu'une valeur de x, tirée de l'équation (2), rende nuls non seulement le coefficient différentiel $\frac{d^2X}{dx^2}$, mais encore le coefficient différentiel $\frac{d^3X}{dx^3}$, sans néanmoins rendre nul le coefficient différentiel $\frac{d^4X}{dx^4}$; alors, pour cette valeur de x, les conditions (1) se réduisant à

$$X\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}\text{ si l'on a }\frac{d^4X}{dx^4}\,\frac{i^4}{1.2.3.4}+\frac{d^5X}{dx^5}\,\frac{i^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\left\{\begin{matrix}<\\ >\end{matrix}\right\}0\,;$$

comme on pourrait toujours prendre i assez petit, sans être nul, pour ne faire dépendre le signe total du développement que du signe de son premier terme qu'on ne saurait ici rendre, à volonté, positif ou négatif, en variant le signe de i, il s'ensuit que ce développement serait ou constamment *négatif*, comme l'exige le *maximum*, ou constamment *positif*, comme l'exige le *minimum*, pour toutes les valeurs de i, jusqu'à zéro; et, quel que fût le signe de cet accroissement, cette valeur de x répondrait donc alors, en effet, à un *maximum* ou à un *minimum* de la fonction X, suivant qu'elle rendrait $\frac{d^4X}{dx^4}$ *négatif* ou *positif*.

Il n'est pas pas besoin d'aller plus loin pour voir qu'en général, si une valeur de x tirée de l'équation $\frac{dX}{dx}=0$ rend nuls, à la fois, tous les coefficiens différentiels

$$\frac{d^2X}{dx^2},\ \frac{d^3X}{dx^3},\ \frac{d^4X}{dx^4},\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{d^{2n-1}X}{dx^{2n-1}},$$

sans rendre nul le coefficient différentiel $\frac{d^{2n}X}{dx^{2n}}$, cette valeur de x répondra nécessairement à un *maximum* ou à un *minimum* de la fonction X, suivant qu'elle rendra ce dernier coefficient différentiel *négatif* ou *positif*; mais que, si cette même valeur de x rend nuls, à la fois, tous les coefficiens différentiels

$$\frac{d^2X}{dx^2}, \quad \frac{d^3X}{dx^3}, \quad \frac{d^4X}{dx^4}, \quad \dots\dots\dots \quad \frac{d^{2n}X}{dx^{2n}},$$

sans rendre nul le coefficient différentiel $\frac{d^{2n+1}X}{dx^{2n+1}}$, elle ne répondra dès lors ni à un *maximum* ni à un *minimum* de la fonction X.

De tout cela résulte la règle générale que voici :

Si l'on égale à zéro le coefficient différentiel du premier ordre d'une fonction quelconque d'une seule variable, il en résultera, pour cette variable, une ou plusieurs valeurs, parmi lesquelles seulement pourront se trouver celles qui rendront la fonction proposée maximum *ou* minimum.

Pour distinguer celles de ces valeurs qui jouissent de cette propriété de celles qui n'en jouissent pas, on les substituera, tour à tour, à la place de la variable, dans les coefficiens différentiels des ordres supérieurs de la fonction, jusqu'à ce qu'on en rencontre un que leur substitution ne fasse pas évanouir.

Si ce coefficient différentiel est d'un ordre impair, *la valeur substituée ne répondra ni à un* maximum *ni à un* minimum *de la fonction proposée.*

Si, au contraire, le premier coefficient différentiel que la substitution d'une valeur de la variable ne fait pas évanouir est d'un ordre pair, *cette valeur répondra à un* maximum *ou à un* minimum *de la fonction, suivant qu'elle rendra ce coefficient différentiel* négatif *ou* positif.

On obtiendra ensuite la valeur maximum *ou* minimum *de la fonction, en substituant dans la fonction cette même valeur de la variable* (*).

(*) Nous sommes loin de donner cette règle comme tout à fait complète, puisqu'elle n'embrasse pas le cas où une valeur substituée rendrait quelque

Soit, par exemple,

$$X=6x^7-70x^6+336x^5-861x^4+1274x^3-1092x^2+504x-27\ ;$$

cela donnera

$$\frac{dX}{dx}=42(x^6-10x^5+40x^4-82x^3+91x^2-52x+12)=42(x-1)^3(x-2)^2(x-3)\ ,$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}=84(3x^5-25x^4+80x^3-123x^2+91x-26)=84(x-1)^2(x-2)(3x^2-13x+13)\ ,$$

$$\frac{d^3X}{dx^3}=84(15x^4-100x^3+240x^2-246x+91)=84(x-1)(15x^3-85x^2+155x-91)\ ,$$

$$\frac{d^4X}{dx^4}=168(30x^3-150x^2+240x-123)\ ;$$

les valeurs de x qui peuvent rendre X *maximum* ou *minimum* sont donc données par l'équation

$$(x-1)^3(x-2)^2(x-3)=0\ ;$$

d'où l'on tire

$$x=1\ ,\quad x=2\ ,\quad x=3\ ;$$

le premier coefficient différentiel que la valeur $x=1$ ne fait pas évanouir est celui du quatrième ordre, qu'elle rend égal à -504; d'où il suit que cette valeur répond à un *maximum* qui est $X=+70$; le premier coefficient différentiel que la valeur $x=2$ ne

---

coefficient différentiel infini ou indéterminé ; mais on doit remarquer que nous avons beaucoup moins en vue d'écrire un traité, *ex professo*, sur la matière, que de faire comprendre l'utilité des notations différentielles. Ceux de nos lecteurs qui désireront de plus amples développemens sur ce sujet pourront consulter le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix (Tom. 1.er, pag. 365).

fait pas évanouir est celui du troisième ordre ; d'où il suit que cette valeur de x ne répond ni à un *maximum* ni à un *minimum*; enfin le premier coefficient différentiel que la valeur $x=3$ ne fait pas évanouir est celui du second ordre qu'elle rend égal à $+326$; d'où il suit que cette valeur répond à un *minimum* qui est $X=+54$.

II. Nous n'avons autant insisté sur ce qui concerne les fonctions d'une seule variable que pour avoir d'autant moins à dire sur celles qui en renferment plusieurs; on va voir, en effet, que ce qui les concerne peut facilement être ramené à ce que nous avons dit de celles-là.

Soit d'abord

$$S=\mathrm{f}(x,y) \ ,$$

une fonction quelconque de deux variables, absolument indépendantes l'une de l'autre. Si l'on prend, pour ces deux variables, divers systèmes de valeurs, la fonction S pourra devenir plus grande pour les unes et moindre pour les autres (*); et l'on pourra encore ici désirer de savoir quels sont, parmi ces systèmes de valeurs, en nombre infini, ceux qui sont propres à rendre la fonction S non pas la plus grande ou la moindre possible, mais plus grande ou moindre que ne la rendraient tous les systèmes de valeurs consécutifs avec chacun de ceux-là.

Pour y parvenir, remarquons que nous conserverons à x et y toute leur indépendance, si nous concevons qu'il existe deux équations entre ces deux variables et une troisième variable s, pourvu que nous supposions ces deux équations de forme tout à fait indéterminée ; car la relation que nous en déduirions, entre x et y par l'élimination de s, serait indéterminée comme elles ; et c'est

---

(*) Ceci devient manifeste, en considérant S comme l'ordonnée d'une surface ondulée, dont x et y seraient les deux abscisses.

dire, en d'autres termes, de deux variables qu'elles sont indépendantes l'une de l'autre, que de dire qu'il existe entre elles une relation qu'on peut supposer quelconque.

Au moyen de cette fiction, S sera, par l'intermédiaire de x et y, fonction, comme elles, de la seule variable s; et, si nous assignons les valeurs de s qui conviennent aux *maxima* et aux *minima* de S, il sera facile d'en conclure les systèmes de valeurs de x et de y qui conviennent à ces mêmes *maxima* et *minima*.

Nous voilà donc ramenés à la considération des fonctions d'une seule variable; et nous pourrons dire, comme ci-dessus, que les seules valeurs de s qui puissent rendre S *maximum* ou *minimum* doivent être données par l'équation $\frac{dS}{ds}=0$; que, si une valeur de s tirée de cette équation rend nuls tous les coefficiens différentiels

$$\frac{d^2S}{ds^2}\,,\quad \frac{d^3S}{ds^3}\,,\quad \frac{d^4S}{ds^4}\,,\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{d^{2n}S}{ds^{2n}}\,,$$

sans rendre nul le coefficient différentiel $\frac{d^{2n+1}S}{ds^{2n+1}}$, cette valeur n'appartiendra ni à un *maximum* ni à un *minimum* de la fonction S; mais que, si cette valeur rend nuls tous les coefficiens différentiels

$$\frac{d^2S}{ds^2}\,,\quad \frac{d^3S}{ds^3}\,,\quad \frac{d^4S}{ds^4}\,,\ \ldots\ldots\ \frac{d^{2n-1}S}{ds^{2n-1}}\,,$$

sans rendre nul le coefficient différentiel $\frac{d^{2n}S}{ds^{2n}}$, elle répondra à un *maximum* ou à un *minimum* de S, suivant qu'elle rendra ce dernier coefficient différentiel *négatif* ou *positif*.

Or, en représentant simplement par δ, comme nous en sommes convenus à la pag. 278, les différentielles ou variations relatives à s, et en remarquant que S n'est fonction de cette dernière variable que par l'intermédiaire de x et y, nous aurons, comme à l'endroit cité,

$$\frac{dS}{ds}=\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y\ ;$$

or, puisque les relations de x et y avec s sont indéterminées, les variations δx et δy doivent être absolument indépendantes l'une de l'autre, de sorte qu'on ne pourra avoir $\frac{dS}{ds}=0$, qu'autant qu'on aura séparément

$$\frac{dS}{dx}=0\ ,\quad \frac{dS}{dy}=0\ ; \qquad (3)$$

telles sont donc, dans tous les cas, les deux équations qui donneront les seuls systèmes de valeurs de x et y parmi lesquels devront se trouver ceux qui rendront la fonction S *maximum* ou *minimum*, si toutefois elle est susceptible de devenir l'un ou l'autre.

En ayant égard aux équations (3), on trouve simplement

$$\frac{d^2S}{ds^2}=\frac{d^2S}{dx^2}\delta x^2+2\frac{d^2S}{dxdy}\delta x\delta y+\frac{d^2S}{dy^2}\delta y^2\ ;$$

d'où l'on voit, à cause de l'indétermination et de l'indépendance de δx et δy, que $\frac{d^2S}{ds^2}$ ne pourra être nul pour un système de valeurs de x et y, tirées des équations (3), qu'autant que ce système de valeurs rendra nuls, à la fois, les trois coefficiens différentiels

$$\frac{d^2S}{dx^2}\ ,\quad \frac{d^2S}{dxdy}\ ,\quad \frac{d^2S}{dy^2}\ .$$

Si un système de valeurs de x et y, tirées des équations (3), ne rend pas, à la fois, ces trois coefficiens nuls, il pourra y avoir un *maximum* ou un *minimum* de la fonction S, répondant à ce système, mais il faudra pour cela que la fonction $\frac{d^2S}{ds^2}$ ou

$$\frac{d^2S}{dx^2}\delta x^2 + 2\frac{d^2S}{dxdy}\delta x\delta y + \frac{d^2S}{dy^2}\delta y^2\,, \qquad (4)$$

conserve constamment le même signe quelles que soient les variations δx et δy, et il y aura *maximum* ou *minimum* suivant que ce signe invariable sera *négatif* ou *positif*.

Cette condition sera infailliblement remplie, quels que soient δx et δy, si la fonction (4) n'est décomposable qu'en facteurs imaginaires du premier degré, c'est-à-dire si l'on a

$$\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{d^2S}{dy^2} < 0\,; \qquad (5)$$

ce qui exige évidemment que les deux coefficiens différentiels

$$\frac{d^2S}{dx^2}\,, \quad \frac{d^2S}{dy^2}\,,$$

soient de même signe; et, comme leur signe commun sera aussi évidemment le signe invariable de la fonction (4), il s'ensuit qu'il y aura *maximum* ou *minimum* suivant qu'ils seront tous deux *négatifs* ou tous deux *positifs*.

Euler n'avait indiqué que la nécessité d'avoir ces deux coefficiens différentiels de même signe, et c'est Lagrange qui a signalé le premier la condition (5). Mais on verra tout à l'heure que, si l'un n'exigeait pas assez, l'autre a exigé un peu trop.

En ayant égard aux équations (3), et en supposant nuls les trois coefficiens différentiels

$$\frac{d^2S}{dx^2}\,, \quad \frac{d^2S}{dxdy}\,, \quad \frac{d^2S}{dy^2}\,,$$

on trouve

$$\frac{d^3S}{ds^3} = \frac{d^3S}{dx^3}\delta x^3 + 3\frac{d^3S}{dx^2dy}\delta x^2\delta y + 3\frac{d^3S}{dxdy^2}\delta x\delta y^2 + \frac{d^3S}{dy^3}\delta y^3\,,$$

d'où l'on voit, à cause de l'indétermination et de l'indépendance des variations δx et δy, que, si un système de valeurs de x et y, tirées des équations (3), ne rend pas nuls à la fois les quatre coefficiens différentiels

$$\frac{d^3S}{dx^3}\,,\quad \frac{d^3S}{dx^2dy}\,,\quad \frac{d^3S}{dxdy^2}\,,\quad \frac{d^3S}{dy^3}\,,$$

le coefficient différentiel $\frac{d^3S}{ds^3}$ ne pourra devenir nul quels que soient δx et δy; et conséquemment ce système de valeurs ne répondra ni à un *maximum* ni à un *minimum* de la fonction S.

Mais si un système de valeurs de x et y, tirées des équations (3), rend ces quatre coefficiens différentiels nuls, comme ceux qui les précèdent, on trouvera alors

$$\frac{d^4S}{ds^4}=\frac{d^4S}{dx^4}\delta x^4+4\frac{d^4S}{dx^3dy}\delta x^3\delta y+6\frac{d^4S}{dx^2dy^2}\delta x^2\delta y^2+4\frac{d^4S}{dxdy^3}\delta x\delta y^3+\frac{d^4S}{dy^4}\delta y^4\,,$$

et il pourra y avoir, pour ce système de valeur, *maximum* ou *minimum* de la fonction S; mais il faudra, pour cela, que la fonction $\frac{d^4S}{ds^4}$ ou

$$\frac{d^4S}{dx^4}\delta x^4+4\frac{d^4S}{dx^3dy}\delta x^3\delta y+6\frac{d^4S}{dx^2dy^2}\delta x^2\delta y^2+4\frac{d^4S}{dxdy^3}\delta x\delta y^3+\frac{d^4S}{dy^4}\delta y^4\,,\quad (6)$$

conserve constamment le même signe quelles que soient les variations δx et δy; et il y aura *maximum* ou *minimum* suivant que ce signe invariable sera *négatif* ou *positif*.

Cette condition sera infailliblement remplie, quels que soient δx et δy, si les facteurs du premier degré de la fonction (6) sont tous quatre imaginaires; mais c'est là une circonstance que l'on ne sait point encore exprimer généralement d'une manière simple et symétrique, et sur laquelle nous pourrons revenir dans une autre occasion.

Si un système de valeurs de x et y, tirées des équations (3) rendait nuls, à la fois, les cinq coefficiens différentiels du quatrième ordre

$$\frac{d^4S}{dx^4}\,,\quad \frac{d^4S}{dx^3dy}\,,\quad \frac{d^4S}{dx^2dy^2}\,,\quad \frac{d^4S}{dxdy^3}\,,\quad \frac{d^4S}{dy^4}\,,$$

ainsi que tous ceux des ordres inférieurs, sans rendre nuls, à la fois, tous ceux du cinquième ordre, alors $\frac{d^5S}{ds^5}$ ne pourrait devenir nul, pour ce même système de valeur, quels que fussent δx et δy ; de sorte qu'il ne répondrait à ce système de valeurs ni *maximum* ni *minimum* de la fonction S.

Nous venons de présenter les conditions de *maxima* et de *minima* des fonctions de deux variables, telles qu'on les rencontre dans tous les traités sur la matière; mais nous allons voir que ces conditions exigent souvent trop, et qu'on n'a point fait, jusqu'ici, une analyse assez soigneuse de tous les cas qui peuvent s'offrir.

Supposons d'abord qu'en vertu de la substitution de l'un des systèmes de valeurs, tirés des équations (3), on ait

$$\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{d^2S}{dy^2}=0\,; \qquad (7)$$

tout ce qu'on en devra conclure, c'est que $\frac{d^2S}{ds^2}$ est de la forme

$$M(P\delta x+Q\delta y)^2\,,$$

et que conséquemment quelque valeur qu'on donne à δx et δy, $\frac{d^2S}{ds^2}$ ne prendra jamais un signe différent de celui de M.

Mais si l'on prend δx et δy de telle sorte que l'on ait $P\delta x+Q\delta y=0$; comme, en général, en vertu de cette hypothèse, $\frac{d^3S}{ds^3}$ ne deviendra pas identiquement nul, il s'ensuit qu'alors il n'y aura, généralement parlant, ni *maximum* ni *minimum*, ce qui est conforme aux théories connues.

Il pourrait se faire cependant que $\frac{d^3S}{ds^3}$ contient le facteur $P\delta x+Q\delta y$; et si d'ailleurs $\frac{d^4S}{ds^4}$ gardait invariablement le même signe que M, quels que pussent être δx et δy, on voit qu'alors, soit qu'on supposât $P\delta x+Q\delta y=0$, soit qu'on donnât à δx et δy des valeurs qui ne vérifiassent pas cette condition, le premier coefficient différentiel que la substitution ne ferait pas disparaître serait toujours un coefficient différentiel d'un ordre pair, conservant constamment le signe de M; il y aurait donc *maximum* ou *minimum*, bien que la condition (5) ne fût pas satisfaite, suivant que ce signe serait *négatif* ou *positif*.

Les mêmes considérations prouvent que, si un système de valeurs de x et y, tirées des équations (3), rend identiquement nuls $\frac{d^2S}{ds^2}$ et $\frac{d^3S}{ds^3}$, sans rendre identiquement nul $\frac{d^4S}{ds^4}$; il ne sera pas indispensable, pour le *maximum* ou le *minimum*, que les facteurs du premier degré de cette fonction soient tous quatre imaginaires. Si, par exemple, cette fonction a deux facteurs réels égaux et deux facteurs imaginaires, que l'un de ces facteurs égaux se trouve dans $\frac{d^5S}{ds^5}$, sans se trouver dans $\frac{d^6S}{ds^6}$, et si enfin cette dernière fonction conserve constamment le signe de $\frac{d^4S}{ds^4}$, quels que soient δx et δy, il y aura *maximum* ou *minimum*, suivant que ce signe commun sera *négatif* ou *positif*. Il en irait encore de même si, $\frac{d^4S}{ds^4}$ ayant deux couples de facteurs réels égaux, l'un des facteurs de l'un ou l'autre couple se trouvait dans $\frac{d^5S}{ds^5}$, sans se trouver dans $\frac{d^6S}{ds^6}$. On sent d'ailleurs ce qu'il y aurait à dire si l'on voulait étendre ces considérations aux coefficiens différentiels des ordres plus élevés.

Il peut souvent arriver que les équations (3) admettent un facteur commun, fonction de x et y ; et, si l'on admet un système de valeurs de ces variables qui rende ce facteur nul, ce qu'on pourra faire d'une infinité de manière différentes, on se trouvera précisément dans le cas dont il vient d'être question. Si, en effet, on a

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=FT\,,\qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}=FU\,,$$

et qu'on prenne x et y de manière à vérifier l'équation

$$F=0\,,$$

on aura, en ayant égard à cette condition

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}=T\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=T\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}=U\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}=U\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\,,$$

et conséquemment

$$2\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=T\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}+U\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\,;$$

il en résultera

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}s^2}=T\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\delta x^2+\left(T\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}+U\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right)\delta x\delta y+U\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\delta y^2\,;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}s^2}=(T\delta x+U\delta y)\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\delta x+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\delta y\right)\,;$$

mais les équations ci-dessus donnent

$$\frac{dF}{dx}=\frac{1}{U}\,\frac{d^2S}{dxdy}\ ,\quad \frac{dF}{dy}=\frac{1}{T}\,\frac{d^2S}{dxdy}\ ;$$

d'où résulte, en substituant

$$\frac{d^2S}{ds^2}=(T\delta x+U\delta y)\left(\frac{\delta x}{U}+\frac{\delta y}{T}\right)\frac{d^2S}{dxdy}=\frac{1}{TU}\,\frac{d^2S}{dxdy}(T\delta x+U\delta y)^2\ ;$$

la fonction $\frac{d^2S}{ds^2}$ aura donc deux facteurs égaux du premier degré, et conséquemment la condition (7) se trouvera remplie. Il est clair d'ailleurs que le facteur $T\delta x+U\delta y$ devra se trouver dans $\frac{d^3S}{ds^3}$; mais à la première puissance seulement.

Comme ici, pour tous les systèmes de valeurs de x et y déduits de l'équation $F=0$, on aura toujours la même valeur pour S ; on voit que, si l'on exigeait, pour le *maximum* de S, que les valeurs consécutives fussent *toutes plus petites*, et pour son *minimum* qu'elles fussent *toutes plus grandes*, il n'y aurait proprement alors ni *maximum* ni *minimum* ; mais si l'on exige seulement, pour le *maximum* de S, qu'*aucune* valeur consécutive ne soit *plus grande*, et pour son *minimum* qu'*aucune* d'elles ne soit *plus petite*, il y aura vraiment *maximum* ou *minimum*. Tout dépendra donc de l'idée, fort arbitraire d'ailleurs, qu'on voudra attacher à ces deux mots.

Ce cas singulier a été signalé, pour la première fois, par M. F. F. Français (*Annales*, tom. III, pag. 32) qui a ainsi prouvé le premier que la condition (5) n'était pas toujours nécessaire ; mais on voit que cet habile professeur n'avait aperçu qu'un côté de la question (*).

(*) Le cas signalé par M. Français est celui où la surface dont S est l'ordonnée est touchée dans toute l'étendue d'une ligne droite ou courbe par un plan parallèle à celui des xy.

III. D'après ce qui précède, il nous restera peu de choses à dire sur les *maxima* et *minima* des fonctions de plus de deux variables. Soit, par exemple, S une fonction des trois variables x, y, z; si l'on conçoit trois équations arbitraires entre ces variables et une quatrième variable s; par l'intermédiaire de ces équations, S ne sera plus fonction que de la seule variable s; et, pour que cette fonction soit *maximum* ou *minimum*, il faudra d'abord, tout au moins, qu'on ait

$$\frac{dS}{ds}=\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y+\frac{dS}{dz}\delta z=0\,,$$

quelles que soient les variations δx, δy, δz; ce qui exigera qu'on ait, à la fois,

$$\frac{dS}{dx}=0\,,\qquad \frac{dS}{dy}=0\,,\qquad \frac{dS}{dz}=0\,; \tag{8}$$

telles seront donc les équations qui donneront les systèmes de valeurs de x, y, z, parmi lesquels seulement pourront se trouver ceux qui rendront la fonction S *maximum* ou *minimum*, si toutefois elle est susceptible de le devenir.

Si un système de valeurs de x, y, z, déduit de ces équations, ne rend pas identiquement nulle, quels que soient δx, δy, δz, la fonction

$$\frac{d^2S}{ds^2}=\frac{d^2S}{dx^2}\delta x^2+\frac{d^2S}{dy^2}\delta y^2+\frac{d^2S}{dz^2}\delta z^2+2\frac{d^2S}{dydz}\delta y\delta z+2\frac{d^2S}{dzdx}\delta z\delta x+2\frac{d^2S}{dxdy}\delta x\delta y\,,$$

il faudra que cette fonction conserve constamment le même signe pour toutes les valeurs de ces variations, ce qui arrivera immanquablement, si elle se résout en deux facteurs imaginaires du premier degré. Il est aisé de s'assurer que cela exige que les trois coefficiens différentiels

$$\frac{d^2S}{dx^2}\,,\quad \frac{d^2S}{dy^2}\,,\quad \frac{d^2S}{dz^2}\,,$$

aient un même signe, contraire à celui de la fonction

$$\frac{d^2S}{dx^2}\left(\frac{d^2S}{dydz}\right)^2+\frac{d^2S}{dy^2}\left(\frac{d^2S}{dzdx}\right)^2+\frac{d^2S}{dz^2}\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{d^2S}{dy^2}\,\frac{d^2S}{dz^2}-2\,\frac{d^2S}{dydz}\,\frac{d^2S}{dzdx}\,\frac{d^2S}{dxdy}\,,$$

et qu'en outre on ait une quelconque des trois conditions

$$\left(\frac{d^2S}{dydz}\right)^2-\frac{d^2S}{dy^2}\,\frac{d^2S}{dz^2}<0\,,\quad \left(\frac{d^2S}{dzdx}\right)^2-\frac{d^2S}{dz^2}\,\frac{d^2S}{dx^2}<0\,,\quad \left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{d^2S}{dy^2}<0.$$

Il y aura d'ailleurs *maximum* ou *minimum* suivant que les coefficiens différentiels

$$\frac{d^2S}{dx^2}\,,\quad \frac{d^2S}{dy^2}\,,\quad \frac{d^2S}{dz^2}\,,$$

seront tous trois *négatifs* ou tous trois *positifs*.

Ce cas est sujet, au surplus, à une exception analogue à celle que nous avons signalée à l'égard des fonctions de deux variables. Si l'on a, à la fois, pour un système de valeurs de x, y, z,

$$\left(\frac{d^2S}{dydz}\right)^2=\frac{d^2S}{dy^2}\,\frac{d^2S}{dz^2}\,,\quad \left(\frac{d^2S}{dzdx}\right)^2=\frac{d^2S}{dz^2}\,\frac{d^2S}{dx^2}\,,\quad \left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)^2=\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{d^2S}{dy^2}\,,$$

la fonction $\frac{d^2S}{ds^2}$ renfermera le quarré d'une fonction du premier degré; or, si la racine de ce quarré se trouve facteur dans $\frac{d^3S}{ds^3}$, sans l'être dans $\frac{d^4S}{ds^4}$, et qu'en outre cette dernière fonction, pour toutes les valeurs des variations δx, δy, δz, conserve constamment le même signe que $\frac{d^2S}{ds^2}$, il y aura, pour ce système de valeurs, *maximum* ou *minimum*, suivant que ce signe sera *négatif* ou *positif*.

On voit que, dans tous les cas, et quel que soit le nombre des variables, les systèmes de valeurs de ces variables propres à rendre la fonction *maximum* ou *minimum* seront toujours donnés par les équations qu'on obtiendra en égalant séparément à zéro les coefficiens différentiels partiels de la fonction, pris tour à tour par rapport à toutes ces variables; mais qu'il pourra bien se faire que certains systèmes de valeurs, déduits de ces mêmes équations, ne rendent la fonction ni *maximum* ni *minimum*.

IV. Dans tout ce qui précède nous avons constamment supposé que les variables, dont se composait la fonction S, étaient absolument indépendantes les unes des autres; examinons présentement de quelle manière on devrait se conduire, si toutes ou partie de ces variables se trouvaient liées entre elles par des équations.

Supposons d'abord que S soit seulement fonction de deux variables liées entre elles par une équation telle que

$$\varphi(x,y)=V=0\,, \qquad (9)$$

et qu'on demande, parmi les systèmes de valeurs, en nombre infini, qui vérifient cette dernière équation, ceux qui rendent la fonction S *maximum* ou *minimum*.

Le moyen qui s'offre le premier à la pensée, pour résoudre cette question, consiste à tirer de l'équation (9) la valeur de l'une des variables, en fonction de l'autre, de y, par exemple, en fonction de x, pour la substituer dans S qui, dès lors, ne sera plus fonction que de cette dernière variable. La question se trouvera ainsi ramenée à celle que nous avons traitée (I), et, lorsqu'on aura déterminé la valeur de x qui rend S *maximum* ou *minimum*, la substitution de cette valeur, dans l'équation (9), fera connaître la valeur correspondante de y.

Mais, outre que l'équation (9) peut souvent être très-difficile ou même impossible à résoudre, par rapport à l'une ou à l'autre des deux variables qu'elle renferme, ce procédé manquerait tout à fait d'élégance et de symétrie, il vaudra donc beaucoup mieux lui substituer le suivant :

Si l'on conçoit une équation arbitraire entre x, y et une troisième variable s; à l'aide de cette équation et de l'équation (9), x et y, et conséquemment S, seront des fonctions de la seule variable s, et conséquemment la condition commune au *maximum* et au *minimum* de S sera, comme ci-dessus (II),

$$\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y=0\,; \qquad (10)$$

mais ici δx et δy ne seront plus indépendans; car, en différentiant l'équation (9) par rapport à s, on aura

$$\frac{dV}{dx}\delta x+\frac{dV}{dy}\delta y=0\,; \qquad (11)$$

éliminant donc, entre ces deux équations, une quelconque des deux variations δx et δy, l'autre disparaîtra aussi, et il viendra

$$\frac{dV}{dy}\,\frac{dS}{dx}-\frac{dV}{dx}\,\frac{dS}{dy}=0\,; \qquad (12)$$

équation qui, combinée avec (9), fera connaître les divers systèmes de valeurs de x et y parmi lesquels seulement pourront se trouver ceux qui rendront S *maximum* ou *minimum*.

V. Soit présentement S une fonction de trois variables x, y, z, liées entre elles par l'équation

$$\varphi(x,y,z)=V=0\;; \qquad (13)$$

et supposons qu'il soit question de déterminer, parmi les systèmes de valeurs, en nombre infini, de ces trois variables, qui vérifient l'équation (13), quels sont ceux qui rendent la fonction S *maximum* ou *minimum*.

En tirant de l'équation (13) la valeur de l'une des trois variables, de z, par exemple, en fonction des deux autres x, y, pour la substituer dans S, on ramenerait évidemment la question au cas des fonctions de deux variables indépendantes, que nous avons déjà traité (II); mais, pour les mêmes raisons que ci-dessus, il vaudra mieux procéder comme il suit.

Supposons que, outre l'équation (13), il existe deux autres équations, tout à fait arbitraires, entre les trois variables x, y, z et une quatrième variable s; au moyen de ces trois équations x, y, z, ainsi que S, se trouveront simplement fonctions de cette dernière variable; de sorte que la condition commune au *maximum* et au *minimum* sera, comme ci-dessus (III),

$$\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y+\frac{dS}{dz}\delta z=0\;; \qquad (14)$$

mais ici les variations δx, δy, δz ne sont pas absolument indépendantes, car l'équation (13) donne

$$\frac{dV}{dx}\delta x+\frac{dV}{dy}\delta y+\frac{dV}{dz}\delta z=0\;; \qquad (15)$$

éliminant une quelconque des trois variations, δz par exemple, entre ces deux équations, on aura

$$\left(\frac{dV}{dz}\,\frac{dS}{dx}-\frac{dV}{dx}\,\frac{dS}{dz}\right)\delta x+\left(\frac{dV}{dz}\,\frac{dS}{dy}-\frac{dV}{dy}\,\frac{dS}{dz}\right)\delta y=0\;;$$

equation qui doit évidemment laisser indéterminé le rapport entre δx et δy, et qui se résout conséquemment en ces deux-ci :

$$\frac{dV}{dz}\,\frac{dS}{dx}-\frac{dV}{dx}\,\frac{dS}{dz}=0\,, \qquad \frac{dV}{dz}\,\frac{dS}{dy}-\frac{dV}{dy}\,\frac{dS}{dz}=0\,;$$

ou, plus symétriquement,

$$\frac{\frac{dS}{dx}}{\frac{dV}{dx}}=\frac{\frac{dS}{dy}}{\frac{dV}{dy}}=\frac{\frac{dS}{dz}}{\frac{dV}{dz}}\,; \qquad (16)$$

équations qui, combinées avec l'équation (13), feront connaître les systèmes de valeurs de x, y, z parmi lesquels seulement devront se trouver ceux qui rendront S *maximum* ou *minimum*.

VI. S étant toujours fonction des trois variables x, y, z; si ces variables sont liées entre elles par les deux équations

$$\varphi(x,y,z)=V=0\,, \qquad \varphi'(x,y,z)=V'=0\,, \qquad (17)$$

pour suivre toujours la même marche que ci-dessus, au lieu de tirer des équations (17) les valeurs de deux des variables, y et z par exemple, en fonction de la troisième x, pour les substituer dans S qui deviendrait ainsi une simple fonction de x; on supposera une équation arbitraire entre x, y, z et une quatrième variable s; au moyen de cette équation et des équations (17), x, y, z, ainsi que S, se trouveront simplement fonctions de cette dernière variable ; de sorte que la condition commune au *maximum* et au *minimum* sera (III)

$$\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y+\frac{dS}{dz}\delta z=0\,;$$

les variations δx, δy, δz étant liées entre elles par les deux relations

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\delta x+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\delta y+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\delta z=0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}x}\delta x+\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}y}\delta y+\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}z}\delta z=0\,;$$

éliminant, entre ces trois équations, deux quelconques des trois variations δx, δy, δz, la troisième disparaîtra d'elle-même, et l'on aura

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}y}\right)\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}z}\right)\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}$$

$$+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}=0\,;\quad(18)$$

équation qui, combinée avec les équations (17), fera connaître les systèmes de valeurs de x, y, z parmi lesquels seulement devront se trouver ceux qui rendront la fonction S *maximum* ou *minimum*.

VII. Généralement, s'il s'agit de rendre *maximum* ou *minimum* une fonction S d'un nombre quelconque de variables $x, y, z, \ldots\ldots$, liées entre elles par un nombre quelconque d'équations $V=0$, $V'=0$, $V''=0$, ...; on égalera séparément à zéro les variations tant de S que de V, V', V'', ..., prises par rapport à toutes les variables $x, y, z, \ldots\ldots$, considérées comme fonctions d'une nouvelle variable s; on éliminera, entre les équations résultantes, autant des variations δx, δy, δz, ... qu'il se pourra; égalant alors séparément à zéro, dans l'équation finale, les coefficiens des variations restantes, il en résultera des équations en x, y, z, ... qui, jointes aux équations $V=0$, $V'=0$, $V''=0$, ..., se trouveront précisément en nombre égal à celui de ces variables; et ce sera parmi les systèmes de valeurs de ces mêmes variables, déduits de ces équations, que pourront se trouver ceux qui rendront la fonction S *maximum* ou *minimum*.

A ce procédé on pourra, au surplus, substituer le suivant qui n'en diffère que par la forme : à la variation de S, on ajoutera les produits respectifs des variations de V, V', V'', ... par des multiplicateurs λ, λ', λ'', ...; on égalera séparément à zéro, dans la somme, les coefficiens de δx, δy, δz, ...; et on éliminera ensuite les multiplicateurs λ, λ', λ'', ..., entre les équations résultantes.

VIII. Toutes les fonctions dont il a été question ci-dessus étaient des fonctions *explicites*; mais soit donnée, entre deux variables x et y, une équation

$$S=0\ ;$$

au moyen de cette équation, chacune des deux variables sera une fonction *implicite* de l'autre; et l'on pourra se proposer de déterminer cette dernière de manière à rendre la première *maximum* ou *minimum*.

Supposons, par exemple, qu'il soit question de déterminer x de manière à rendre y *maximum* ou *minimum*; la première pensée qui s'offrirait, pour résoudre cette question, serait de résoudre l'équation proposée par rapport à y qui deviendrait ainsi une fonction explicite de x, ce qui ramenerait la question à celle que nous avons déjà traitée (I); mais comme la proposée pourrait être difficile ou même impossible à résoudre, par rapport à y, il sera beaucoup plus convenable d'opérer de la manière suivante :

En considérant y comme fonction de la variable indépendante , la proposée donne (pag. 277)

$$\frac{dS}{dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{dS}{dx}=0\ ;$$

or, la condition commune au *maximum* et au *minimum* de y est $\frac{dy}{dx}$; on aura donc, dans ce cas,

$$\frac{dS}{dx}=0\ ;$$

équation de laquelle éliminant y, au moyen de la proposée, on aura l'équation en x qui donnera les valeurs de cette variable parmi lesquelles seulement pourront se trouver celles qui rendront y *maximum* ou *minimum*.

Il est aisé de conclure de là que si, au contraire, il s'agissait d'assigner les valeurs de y qui rendent x *maximum* ou *minimum*, on y parviendrait en éliminant x entre les deux équations

$$S=0\ , \qquad \frac{dS}{dy}=0\ .$$

IX. Supposons, en second lieu, que l'équation $S=0$ contienne trois variables x, y, z, et qu'il soit question d'assigner, parmi les systèmes de valeurs, en nombre infini, qu'on peut prendre pour x et y, ceux qui rendent z *maximum* ou *minimum*. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, au lieu de résoudre l'équation par rapport à z, ce qui ramenerait la question au cas des fonctions explicites de deux variables (II), on remarquera que la proposée, en y considérant z comme fonction de x et y, donne (pag. 279) les deux différentielles partielles.

$$\frac{dS}{dz}\,\frac{dz}{dx}+\frac{dS}{dx}=0\ , \qquad \frac{dS}{dz}\,\frac{dz}{dy}+\frac{dS}{dy}=0\ ;$$

or, les conditions communes au *maximum* et au *minimum* de z sont $\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{dz}{dy}=0$; on devra donc avoir, dans ce cas,

$$\frac{dS}{dx}=0\ ,\qquad \frac{dS}{dy}=0\ ;$$

en éliminant donc z de chacune de ces équations, au moyen de la proposée, on obtiendra entre x et y deux équations qui donneront les seuls systèmes de valeurs de ces variables parmi lesquels devront se trouver ceux qui rendront la fonction z *maximum* ou *minimum*.

Il est aisé de conclure de là qu'en éliminant y entre les trois équations

$$S=0\ ,\qquad \frac{dS}{dz}=0,\qquad \frac{dS}{dx}=0,$$

les deux équations résultantes donneront les systèmes de valeurs de z et x parmi lesquels doivent se trouver ceux qui conviennent aux *maxima* et *minima* de y ; et qu'en éliminant x entre ces trois-ci :

$$S=0\ ,\qquad \frac{dS}{dy}=0\ ,\qquad \frac{dS}{dz}=0\ ,$$

les deux équations résultantes donneront les systèmes de valeurs de y et z qui conviennent aux *maxima* et *minima* de x.

X. En général, quelque nombre de variables que renferme l'équation $S=0$; en éliminant une quelconque de ces variables entre elle et ses dérivées, prises tour à tour par rapport à toutes les autres, les équations résultantes donneront les systèmes de valeurs de ces dernières parmi lesquels seulement devront se trouver ceux qui pourront rendre la première *maximum* ou *minimum*.

XI. Soient encore, entre les trois variables x, y, z, les deux équations

$$S=0\ ,\qquad S'=0\ ,$$

au moyen desquelles deux quelconques de ces variables sont fonctions l'une de l'autre ; et supposons que, par exemple, il soit question de déterminer x de manière à rendre y *maximum* ou *minimum*. Pour suivre toujours la même marche, au lieu d'éliminer z entre ces deux équations, ce qui ramenerait la question à l'une des précédentes (VIII) ; on remarquera qu'au moyen de ces deux équations y et z étant des fonctions de x ; on doit avoir (pag. 281)

$$\frac{dS}{dx}+\frac{dS}{dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{dS}{dz}\,\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{dS'}{dx}+\frac{dS'}{dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{dS'}{dz}\,\frac{dz}{dx}=0;$$

or, la condition commune au *maximum* et au *minimum* de y est $\frac{dy}{dx}=0$, au moyen de laquelle ces deux équations se réduisent à

$$\frac{dS}{dx}+\frac{dS}{dz}\,\frac{dz}{dx}=0, \qquad \frac{dS'}{dx}+\frac{dS'}{dz}\,\frac{dz}{dx}=0;$$

entre lesquelles éliminant $\frac{dz}{dx}$, il viendra

$$\frac{dS}{dx}\,\frac{dS'}{dz}-\frac{dS}{dz}\,\frac{dS'}{dx}=0;$$

d'où éliminant y et z, au moyen des deux proposées, l'équation résultante donnera les valeurs de x qui conviennent aux *maxima* et aux *minima* de y.

Ce qui précède nous paraît plus que suffisant pour montrer de quelle manière on devra se conduire dans tous les cas qui pourront se présenter.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de géométrie.

QUEL est le plus grand de tous les quadrilatères plans qu'il soit possible de former, avec les trois mêmes côtés consécutifs, en variant la grandeur des deux angles compris ?

Problème d'arithmétique administrative.

Lorsqu'un impôt est établi sur un objet de première nécessité, dont l'usage ne peut être réduit en aucune sorte, ni soustrait aux investigations du fisc, si toutefois il existe quelque objet qui soit dans ce cas; il est manifeste qu'à moins d'un taux assez excessif pour faire décroître la population, le produit de l'impôt doit s'élever avec sa quotité, et même lui être rigoureusement proportionnel, si toutefois la population demeure stationnaire.

Mais, lorsqu'au contraire, comme il arrive le plus souvent, l'usage de l'objet imposé peut être restreint, ou lorsque cet objet est de nature à rendre la contrebande possible; à mesure que le gouvernement élève la quotité de l'impôt, un plus grand nombre de particuliers renoncent à la jouissance de l'objet imposé, ou du moins en usent avec plus de parcimonie, tandis que d'autres s'industrient pour se le procurer en fraude des droits du fisc; de sorte que, passé un certain terme, une nouvelle élévation du droit, loin d'en augmenter le produit, le ferait au contraire décroître.

Si, par exemple, le gouvernement portait excessivement haut la taxe des lettres, chacun réduirait sa correspondance au strict nécessaire; on adresserait à une seule personne, dans les villes populeuses, les lettres destinées pour plusieurs ; on emploîrait, pour sa correspondance, beaucoup plus qu'on ne le fait actuellement, la voie des voyageurs des messageries, et peut-être ne dédaignerait-on pas même celle du roulage ; ce qui ferait infailliblement baisser les recettes de l'administration des postes. De là cette maxime d'arithmétique sociale, qu'en finances, *deux et deux ne font pas toujours quatre;* et de là aussi cet adage populaire : *Si vous serrez trop l'anguille, elle vous échappera.*

Ces considérations donnent lieu à la question suivante :

L'expérience de n années consécutives a appris qu'en portant successivement une certaine taxe à a_1, a_2, a_3, ... a_n, ses produits étaient devenus respectivement A_1, A_2, A_3, ... A_n; on demande, d'après cette expérience, quel devrait être le montant de la taxe pour en obtenir le plus grand produit possible ?

Problème d'économie industrielle.

Il est beaucoup de travaux qui s'exécutent à l'aide de machines qui, pour être mises en jeu, n'exigent qu'une dépense de force de beaucoup inférieure à celle qu'un seul ouvrier peut déployer constamment, sans aucune fatigue; tels sont, par exemple, pour choisir l'un des cas les plus simples, la conversion des écheveaux en bobines ou des bobines en écheveaux.

De là naît, tout naturellement, l'idée d'un mécanisme au moyen duquel un seul ouvrier puisse faire marcher, à la fois, un grand nombre de pareilles machines, et exécuter ainsi à lui seul, dans un temps donné, autant de travail qu'en feraient ensemble, dans le même temps, des ouvriers appliqués individuellement à chacune de ces machines.

Si le travail était de nature à pouvoir s'exécuter sans aucune interruption forcée, on conçoit que plus grand serait le nombre des machines qu'un seul mécanisme ferait marcher en même temps, et plus grand serait aussi, dans un temps donné, le produit du travail d'un seul ouvrier appliqué à ce mécanisme.

Mais, le plus souvent, il n'en est pas ainsi ; et cela se voit évidemment dans l'exemple particulier que nous avons cité des écheveaux à mettre en bobines ou des bobines à mettre en écheveaux. Un fil peut, en effet, se rompre ; et lorsque cela arrive, il faut suspendre le travail commun à toutes les machines pour réparer l'accident. On voit même par là que, si le nombre des machines particulières, mises en jeu par un même mécanisme, était infini, le produit serait tout à fait nul, puisqu'alors tout le temps de l'ouvrier serait consommé à raccommoder des fils rompus.

Il y a donc ici, dans le nombre des machines qu'un même mécanisme doit mettre en jeu, un certain *maximum* à déterminer par l'expérience, et qu'on ne saurait impunément dépasser.

De là naît la question suivante :

On s'est assuré, par l'expérience, qu'un seul dévidoir, tant que le fil ne rompait pas, pouvait dévider à raison d'une longueur a de fil, par unité de temps.

On s'est également assuré, par expérience, que le fil d'un seul dévidoir se rompait, terme moyen, à chaque m unités de temps, et qu'il fallait alors n unités de temps pour réparer l'accident.

On demande, d'après ces données, quel est le nombre des dévidoirs qu'il faut faire marcher, par un même mécanisme, pour obtenir, dans un temps donné, le plus grand produit possible ?

ARITHMÉTIQUE.

Démonstration d'une propriété des nombres ;

Extraite du *Journal* de M. Crelle.

A la pag. 296, du V.me volume de son Journal, M. Crelle démontre le théoreme suivant.

THÉORÈME. Un nombre donné quelconque est toujours diviseur d'un autre nombre exprimé par des périodes de chiffres donnés, suivies d'un certain nombre de zéros.

Soit, par exemple, la période donnée 4813; il n'est absolument aucun nombre qui ne soit diviseur d'un nombre de la forme

$$48134813\ldots\ldots48134813 0000\ldots\ldots\ldots 0000\ ,$$

pourvu qu'on y varie, d'une manière convenable, et le nombre des périodes et le nombre des zéros.

En particulier, le nombre des zéros pourra être quelconque si le diviseur, dont il s'agit, est premier à *dix ;* il en sera de même du nombre des périodes, si ce diviseur est diviseur d'une puissance de dix; dans tous les autres cas, le nombre tant des périodes que des zéros aura un *minimum* au-dessous duquel il ne devra pas tomber.

La démonstration de ce théorème que donne M. Crelle, à l'endroit cité, revient, pour le fond, à ce qui suit :

Démonstration. Il est connu qu'en divisant les puissances successives $1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots\ldots\ldots$ d'un nombre quelconque a par un diviseur quelconque δ, les restes successifs, lesquels ne sauraient être de plus de δ sortes, sont immédiatement périodiques, ou du moins le deviennent, passé un certain terme, suivant que δ est ou n'est pas premier à a.

Soit a^{m+1} la puissance de a qui donne le premier reste de la période et n le nombre de ses termes $<\delta$; et représentons par

$$r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots r_n$$

les restes correspondant respectivement à

$$a^{m+1}, \quad a^{m+2}, \quad a^{m+3}, \ldots\ldots a^{m+n};$$

il s'ensuivra qu'en divisant

$$a^{m+1}+a^{m+2}+a^{m+3}+\ldots\ldots+a^{m+n},$$

par δ, on aura le même reste qu'en divisant

$$r_1+r_2+r_3+\ldots\ldots+r_n$$

par ce diviseur. Désignons par ρ ce reste ; à cause de la périodicité, ce sera aussi le reste qu'on obtiendra en divisant par δ la somme

$$a^{m+n+1}+a^{m+n+2}+a^{m+n+3}+\ldots\ldots+a^{m+2n}$$

puis celle-ci:

$$a^{m+2n+1}+a^{m+2n+2}+a^{m+2n+3}+\ldots\ldots+a^{m+3n},$$

et ainsi de suite.

Donc aussi, en divisant par δ la somme de puissances

$$a^{m+1}+a^{m+2}+\ldots+a^{m+n}+a^{m+n+1}+a^{m+n+2}+\ldots$$
$$+a^{m+2n}+a^{m+2n+1}+\ldots\ldots+a^{m+kn},$$

on obtiendra le même reste qu'en divisant $k\rho$ par ce diviseur ; donc, quand bien même δ serait premier avec ρ, en prenant $k=\delta$ on aurait là une somme de puissances consécutives exactement divisible par δ; on a donc ce théorème :

Il y a toujours une somme de puissances consécutives d'un nombre donné quelconque, exactement divisible par un diviseur quelconque.

Soit p le nombre des puissances dont se compose cette somme, de manière que

$$a^{m+1}+a^{m+2}+a^{m+3}+\dots\dots+a^{m+p-2}+a^{m+p-1}+a^{m+p},$$

soit divisible par δ; il en sera évidemment de même de

$$b(a^{m+1}+a^{m+2}+a^{m+3}+\dots\dots+a^{m+p-2}+a^{m+p-1}+a^{m+p}),$$

quel que soit b; or, c'est là la somme de p termes consécutifs d'une progression quelconque par quotiens ; donc

Dans une progression donnée, par quotiens, quelle qu'elle soit, on peut toujours choisir des termes consécutifs en nombre tel que leur somme soit exactement divisible par un diviseur donné quelconque.

Soit b un nombre de n chiffres au plus et soit $a=10^n$, cette somme de termes deviendra

$$b\{1+10^{n}+10^{2n}+10^{3n}+\dots\dots+10^{n(p-1)}\}10^{(m+1)n};$$

or, c'est là précisément un nombre formé de $p-1$ périodes égales à b, suivies de $n(m+1)$ zéros; ce nombre est donc divisible par δ; le théorème se trouve donc démontré.

Si l'on suppose, en particulier, $n=1$, on aura cet autre théorème :

Tout nombre est diviseur d'un nombre exprimé par un chiffre *significatif donné, écrit un certain nombre de fois et suivi d'un certain nombre de zéros.*

Le théorème démontré à la pag. 304 n'est, comme l'on voit, qu'un cas particulier de ce dernier, qui n'est, à son tour, qu'un cas particulier de celui de M. Crelle.

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Note sur quelques expressions algébriques peu connues ;

Par M. R. S.

1. DANS un mémoire sur l'intégration des équations linéaires, inséré à la pag. 269, du XI.me volume du présent recueil, M. Schmidten a fort judicieusement distingué la *résolution* des équations de l'*évaluation* des inconnues qu'elles renferment. Suivant ses principes, résoudre une équation à une seule inconnue, c'est lui faire subir une suite de tranformations permises, par l'effet desquelles l'inconnue se trouve seule dans son premier membre, tandis que son second membre se trouvera être une fonction de forme quelconque d'une ou de plusieurs quantités connues. Evaluer numériquement l'inconnue, c'est en outre exécuter, lorsque cela est possible, sur les quantités connues qui composent le second membre de l'équation résolue, et que nous supposons numériques, les opérations arithmétiques qui sont indiquées entre elles de manière à savoir, ou exactement ou du moins avec une approximation convenue à l'avance, quel est le nombre qui vérifie l'équation proposée.

2. Soient, par exemple, les deux équations

$$x^4-12x^2-64=0\,,\qquad x^2-x-6=0\;;$$

en les amenant à la forme

$$x=\sqrt{3+4\sqrt{-1}}+\sqrt{3-4\sqrt{-1}}\,,\qquad x=1+\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{1+\ldots\ldots}}}}\,,$$

elles se trouveront l'une et l'autre résolues; mais, ni dans l'une ni dans l'autre, l'évaluation de l'inconnue n'aura été effectuée ; cette évaluation se présente même sous une apparente impossibilité, quant à la première ; et quant à la seconde, elle semble exiger une infinité d'opérations.

3. Sous quelque forme que se présente l'inconnue, dans l'équation résolue, sa valeur numérique devra toujours être la même ; mais les opérations arithmétiques à exécuter pour obtenir cette valeur pourront être variées d'un grand nombre de manières différentes ; c'est-à-dire que la résolution de l'équation peut présenter l'inconnue sous un grand nombre de formes diverses. Ainsi, par exemple, l'équation

$$x^4-4ax^2-4b^2=0\,,$$

donne ces deux formes de solutions

$$x=\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}\,,\quad x=\sqrt{2(a+\sqrt{a^2+b^2})}\;;$$

l'équation

$$x^2-ax-b=0\,,$$

donne ces deux-ci:

$$x=a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\ldots\ldots}}}\,, \qquad x=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\,;$$

et l'équation

$$(1-a)x-2=0\,,$$

donne les deux suivantes:

$$x=1+a+a^2+a^3+\ldots\ldots\,, \qquad x=\frac{1}{1-a}\,.$$

4. On sait que, passé le quatrième degré, on ne peut, en général, présenter la solution d'une équation sous forme finie; que, dès le troisième degré, cette solution, indépendamment de sa complication, se trouve souvent impliquée d'imaginaires, lors même que la valeur de l'inconnue est réelle; et que même la forme finie de cette valeur, pour les quatre premiers degrés, est au fond plus apparente que réelle, puisque, toutes les fois que l'inconnue doit être incommensurable, on ne saurait en faire une évaluation rigoureuse qu'à l'aide d'un nombre infini d'opérations. C'est-à-dire qu'alors l'expression de l'inconnue ne se présente sous une forme finie qu'à la faveur de l'invention des radicaux qui, comme l'observe fort bien M. Schmidten, sont de véritables symboles de transcendantes; de telle sorte que Cos.a, par exemple, ne diffère pas essentiellement de $\sqrt{a}$, comme on le voit par ces deux expressions

$$\mathrm{Cos}.a=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1.2-a^2+\cfrac{1.2a^2}{3.4-a^2+\cfrac{3.4a^2}{5.6-a^2+\cfrac{5.6a^2}{7.8-a^2+\ldots\ldots}}}}}\,;$$

$$\sqrt{a}=k+\cfrac{a-k^2}{2k+\cfrac{a-k^2}{2k+\cfrac{a-k^2}{2k+\cfrac{a-k^2}{2k+\ldots\ldots}}}}\,;$$

dans la dernière desquelles k est une indéterminée introduite pour rendre au besoin la formule convergente.

5. d'après ces remarques, lorsqu'on a à résoudre une équation, il est fort inutile de chercher à mettre l'expression de l'inconnue sous une forme qui souvent ne serait finie qu'en apparence, et que plus souvent encore on chercherait vainement à lui faire acquérir L'essentiel est seulement que, lorsque cette expression se compose d'une infinité de termes, et nous prenons ici le mot *terme* dans toute sa généralité, la loi en soit manifeste et aussi simple que la nature de l'équation peut le comporter; et surtout qu'en bornant l'expression à un nombre fini de termes on obtienne une valeur d'autant plus approchée que le nombre de ces termes sera plus grand. On devra donc, autant qu'il sera possible, introduire dans cette expression une ou plusieurs indéterminées, à l'aide desquelles on puisse la rendre aussi convergente qu'on le voudra; enfin le comble de la perfection serait que les expressions obtenues, en prenant un nombre de termes de plus en plus grand, fussent alternativement plus grandes est plus petites que la véritable, puisqu'alors on aurait ainsi, à chaque pas, une mesure exacte de l'approximation à laquelle on serait parvenu.

6. Eclaircissons ces préceptes par quelques exemples simples; soit d'abord proposée à résoudre l'équation

$$mx=a\ ,$$

on pourra l'écrire ainsi

$$(m+k-k)x=a\ ;$$

k étant une indéterminée. Cela donnera, en transposant,

$$(m+k)x=a+kx\ ,$$

d'où

$$x=\frac{a+kx}{m+k}\ ;$$

En mettant continuellement pour x, dans le second membre de cette dernière, sa valeur donnée par ce même second membre, on aura

$$x=\frac{a}{m}=\cfrac{a+k\cfrac{a+k\cfrac{a+k\cfrac{a+k\cfrac{a+k\ldots\ldots}{m+k}}{m+k}}{m+k}}{m+k}}{m+k}$$

formule au moyen de laquelle une division par m se trouve transformée en une infinité de divisions par $m+k$, et réciproquement.

7. Si l'on représente généralement par x_n la valeur approchée qu'on obtient pour x, en se bornant à n termes de cette expression, on trouvera successivement

$$x_1=\frac{a}{m+k}\,,$$

$$x_2=\frac{(m+2k)a}{(m+k)^2}\,,\qquad x_2-x_1=\frac{ka}{(m+k)^2}\,;$$

$$x_3=\frac{(m^2+3mk+3k^2)a}{(m+k)^3}\,,\qquad x_3-x_2=\frac{k^2a}{(m+k)^3}\,;$$

$$x_3=\frac{(m^3+4m^2k+6mk^2+4k^3)a}{(m+k)^4}\,,\qquad x_4-x_3=\frac{k^3a}{(m+k)^4}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où l'on voit que les différences consécutives forment une progression par quotiens dont la raison est $\frac{k}{m+k}$; ces différences iront donc en diminuant, et conséquemment ces valeurs successives, toutes moindres que la véritable, tendront sans cesse vers elles si l'on prend k positif; elles tendront aussi sans cesse vers elles si k est négatif, pourvu qu'il soit moindre que la moitié de m; mais alors les valeurs successives seront alternativement plus grandes et plus petites que cette véritable valeur qui se trouvera ainsi constamment comprise entre deux approximations consécutives quelconques.

8. Au moyen de ces formules, on pourra transformer une seule division par m en une suite de divisions par $m \mp k$ et conséquemment une division par un nombre quelconque en une suite de divisions par l'unité, suivie de plusieurs zéros, qui seront d'une exécution très-facile. Si l'on prend $k = \mp 1$, il viendra

$$x = \frac{a}{m} = \cfrac{a \pm \cfrac{a \pm \cfrac{a \pm \cfrac{a \pm \cdots\cdots}{m \pm 1}}{m \pm 1}}{m \pm 1}}{m \pm 1} \;;$$

si m est un nombre impair, la division par m se trouvera donc ramenée à une suite de divisions par un nombre pair, c'est-à-dire à une suite de divisions par deux et par un autre nombre pour lequel, s'il est impair, on pourra faire encore une semblable transformation, de manière à n'avoir jamais à exécuter des divisions par deux.

9. Soit, pour second exemple, à résoudre l'équation

$$x^m = a \;;$$

en multipliant ses deux membres par x^k, k étant une indéterminée, elle deviendra

$$x^{m+k} = ax^k \;,$$

d'où on tirera

$$x=\sqrt[m+k]{ax^k}\,.$$

En mettant continuellement pour x, dans le second membre de cette dernière, sa valeur donnée par ce même second membre, on aura

$$x=\sqrt[m]{a}=\sqrt[m+k]{a\left(\sqrt[m+k]{a\left(\sqrt[m+k]{a\left(\sqrt[m+k]{a\left(\ldots\ldots\right)^k}\right)^k}\right)^k}\right)^k}.$$

10. Si l'on représente généralement par x_n la valeur approchée qu'on obtient pour x en se bornant à n termes de cette expression, on trouvera successivement

$$x_1=\sqrt[m+k]{a}\,,$$

$$x_2=\sqrt[(m+k)^2]{a^{m+2k}}\,, \qquad \frac{x_2}{x_1}=\sqrt[(m+k)^2]{a^k}\,,$$

$$x_3=\sqrt[(m+k)^3]{a^{m^2+3mk+3k^2}}\,, \qquad \frac{x_3}{x_2}=\sqrt[(m+k)^3]{a^{2k}}\,,$$

$$x_4=\sqrt[(m+k)^4]{a^{m^3+4m^2k+6mk^2+4k^3}}\,, \qquad \frac{x_4}{x_3}=\sqrt[(m+k)^4]{a^{3k}}\,,$$

. . . . ; . . . . ;

d'où l'on voit que les quotiens des termes consécutifs se déduisent les uns des autres en élevant constamment chacun d'eux à la puissance k, et en extrayant, de cette puissance, la racine du degré $m+k$; ces quotiens tendent donc sans cesse vers l'unité; les expressions successives, toujours moindres que les véritables, tendent donc sans cesse à devenir égales entre elles et à l'expression exacte de x.

11. Si, dans ces diverses formules, on suppose k négatif elles deviendront

$$x=\sqrt[m]{a}=\sqrt[m-k]{\frac{a}{\left(\sqrt[m-k]{\frac{a}{\left(\sqrt[m-k]{\frac{a}{\left(\sqrt[m-k]{\cdots\cdots\cdots}\right)^k}}\right)^k}}\right)^k}},$$

$$x_1=\sqrt[m-k]{a}, \qquad \frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{\sqrt[(m-k)^2]{a^k}},$$

$$x_2=\sqrt[(m-k)^2]{a^{m-2k}}, \qquad \frac{x_3}{x_2}=\frac{1}{\sqrt[(m-k)^3]{a^{2k}}},$$

$$x_3=\sqrt[(m-k)^3]{a^{m^2-3mk+3k^2}}, \qquad \frac{x_4}{x_3}=\frac{1}{\sqrt[(m-k)^4]{a^{3k}}};$$

$$x_4=\sqrt[(m-k)^4]{a^{m^3-4m^2k+6mk^2-4k^3}},$$

. . . .

Ici les quotiens des expressions consécutives ne tendront sans cesse vers l'unité et en conséquence ces expressions ne tendront sans cesse à devenir égales entre elles et à la véritable valeur de x qu'autant que k sera moindre que la moitié de m ; mais alors les valeurs successives seront alternativement plus grandes et plus petites que cette véritable valeur qui se trouvera ainsi constamment comprise entre deux approximations consécutives quelconques.

12. Au moyen des formules des deux numéros précédens on pourra donc transformer l'extraction d'une seule racine du degré m, en une suite d'extraction de racines du degré $m \pm k$, et conséquemment on pourra transformer une seule extraction de racine de degré quelconque en une suite d'extractions de racines dont l'exposant soit une puissance de deux ; ce qui ramenera la question à une suite d'extractions de racines quarrées.

13. Si, dans ces mêmes formules, on suppose $k=1$, elles deviendront simplement

$$x=\sqrt[m]{k}=\sqrt[m+1]{a\sqrt[m+1]{a\sqrt[m+1]{a\sqrt[m+1]{a\ldots\ldots}}}}\,,$$

$$x=\sqrt[m]{k}=\sqrt[m-1]{\frac{a}{\sqrt[m-1]{\frac{a}{\sqrt[m-1]{\frac{a}{\sqrt[m-1]{\ldots\ldots\ldots}}}}}}}\;;$$

formules au moyen desquelles on pourra transformer une seule extraction de racine de degré impair en une suite d'extractions de racines de degrés pairs, c'est-à-dire en une suite d'extractions de racines quarrées et de racines d'un autre degré qui, s'il est impair, sera susceptible d'une semblable transformation.

14. Soit, en général, l'équation quelconque en x

$$Fx=0\,, \qquad (1)$$

on pourra, d'une infinité de manières différentes, lui faire prendre la forme

$$x=A+\text{f}x\;; \qquad (2)$$

A étant une fonction des constantes de l'équation (1) et de tant d'autres constantes arbitraires qu'on voudra, lesquelles auront été introduites par la transformation, et pourront aussi se trouver, en tout ou en partie, sous le signe f.

15. En mettant successivement pour x, sous ce signe, sa valeur donnée par l'équation (2) elle-même, on aura

$$x=A+\text{f}(A+\text{f}(A+\text{f}(A+\ldots\ldots))). \qquad (3)$$

16. Si prenant successivement

$$x_1=A\,,$$

$$x_2=A+\text{f}A\,,$$

$$x_3=A+\text{f}(A+\text{f}A)\,,$$

$$x_4=A+\text{f}(A+\text{f}(A+\text{f}A))\;;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;;$$

on aperçoit que les différences consécutives de ces valeurs vont sans cesse en diminuant, soit d'elles-mêmes, soit par une détermination convenable des constantes arbitrairement introduites, on sera fondé à les considérer comme une suite de valeurs de plus en plus approchées de l'inconnue x. Si, de plus, ces différences sont alternativement positives et négatives, chacune d'elles sera une limite de l'approximation à laquelle elle se trouvera correspondre.

16. Si, au lieu de mettre l'équation (1) sous la forme (2), on la mettait sous celle-ci

$$x=A\mathrm{f}x\,, \qquad (4)$$

on en déduirait

$$x=A\mathrm{f}(A\mathrm{f}(A\mathrm{f}(A\ldots\ldots)))\,, \qquad (5)$$

ce qui donnerait cette suite d'approximations

$$x_1=A\,,$$
$$x_2=A\mathrm{f}A\,,$$
$$x_3=A\mathrm{f}(A\mathrm{f}A)\,,$$
$$x_4=A\mathrm{f}(A\mathrm{f}(A\mathrm{f}A))\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

On pourrait aussi la mettre sous cette forme

$$x=A^{\mathrm{f}x}\,, \qquad (6)$$

d'où résulterait

$$x=a^{\mathrm{f}(A^{\mathrm{f}(A^{\mathrm{f}(A\ldots\ldots)})})}\,, \qquad (7)$$

ce qui donnerait cette suite d'approximations

$$x_1=A$$
$$x_2=A^{\mathrm{f}A}$$
$$x_3=A^{\mathrm{f}(A^{\mathrm{f}A})}$$
$$x_4=A^{\mathrm{f}(A^{\mathrm{f}(A^{\mathrm{f}A})})}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

17. On pourrait aussi mettre l'équation (1) sous la forme

$$x=A+\mathrm{f}(B+\varphi x)\ , \qquad (8)$$

d'où résulterait

$$x=A+\mathrm{f}(B+\varphi(A+\mathrm{f}(B+\varphi(A+\ldots\ldots)))) \ ; \qquad (9)$$

fonction périodique à périodes de deux termes, et l'on voit aisément ce qu'il y aurait à faire pour obtenir la valeur de x sous forme de fonction périodique ayant des périodes de tant de termes qu'on le désirerait.

18. Réciproquement, si un problème conduit à une équation en x de quelqu'une des formes (3), (5), (7), (9), on pourra d'abord mettre cette équation sous l'une des formes (2), (4), (6), (8), puis ensuite sous la forme (1), ce qui permettra souvent d'obtenir la valeur de x sous forme finie.

19. La sommation des termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini se déduit bien simplement de ce qui précède; si, en effet, on a

$$x=a+aq+aq^2+aq^3+aq^4+\ldots\ldots ,$$

on pourra d'abord écrire

$$x=a+q(a+aq+aq^2+aq^3+\ldots\ldots) ,$$

puis,

$$x=a+qx\ , \qquad \text{ou} \qquad (1-q)x=a\ ,$$

d'où

$$x=\frac{a}{1-q} .$$

20. D'après la remarque que nous avons faite (5), l'équation

$$x=a-a+a-a+a-a+\dots\dots,$$

ne pourrait servir à l'approximation de la valeur de x, puisqu'elle donne successivement les valeurs approchées a, 0, a, 0, a, 0, ... dont les différences sont constantes ; mais, sans recourir au subtile raisonnement de Leibnitz, on voit, sur-le-champ, que cette équation revient à

$$x=a-x\,, \qquad \text{d'où} \qquad x=\tfrac{1}{2}a\,.$$

Pareillement, si l'on avait

$$x=1-2+4-8+16-32+64-\dots\dots\dots$$

qui donne les approximations successives

$$1\,,\quad -1\,,\quad +3\,,\quad -5\,,\quad +11\,,\quad -21\,,\ \dots\dots$$

dont les différences

$$-2\,,\quad +4\,,\quad -8\,,\quad +16\,,\quad -32$$

sont divergentes ; on trouverait, sur-le-champ, par nos méthodes,

$$x=1-2x\,, \qquad \text{d'où} \qquad x=\tfrac{1}{3}\,.$$

21. Si l'on avait

$$x=\cfrac{a}{\cfrac{a}{\cfrac{a}{\cfrac{a}{\cfrac{a}{\vdots}}}}}\;;$$

on trouverait les approximations périodiques et conséquemment illusoires

$$a\,,\quad 1\,,\quad a\,,\quad 1\,,\quad a\,,\quad 1\,,\ \ldots\ldots\,;$$

d'où, par l'application du raisonnement de Leibnitz, on serait tenté de conclure $x=\frac{1}{2}(a+1)$, tandis que, par nos procédés, il vient

$$x=\frac{a}{x}\,,\qquad \text{d'où}\qquad x=\sqrt{a}\,.$$

Si l'on avait

$$x=\cfrac{a}{\cfrac{a^2}{\cfrac{a^4}{\cfrac{a^8}{\cfrac{a^{16}}{\vdots}}}}}$$

il viendrait, par l'application des mêmes procédés,

$$x=\frac{a}{x^2}\,,\qquad \text{d'où}\qquad x=\sqrt[3]{a}\,.$$

20. Si l'on avait

$$x=a^{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

on écrirait de suite

$$x=a^x\,;$$

équation de forme finie en x, mais qui ne peut donner la valeur de x en a que par les séries. Il en serait de même si l'on avait

$$x = a\text{Sin}.(a\text{Sin}.(a\text{Sin}\,(a\text{Sin}\,(a\,\ldots\ldots)))) \;;$$

car on en tirerait

$$x = a\text{Sin}.x \;.$$

Il y aurait encore une multitude de choses à dire sur ce sujet; mais nous pourrons y revenir dans une autre occasion.

ARITHMÉTIQUE.

Note sur la recherche des logarithmes des grands nombres ;

Par M. Le Barbier.

Dans les tables logarithmiques dont on fait communément usage, les logarithmes sont calculés avec une approximation telle que les différences des logarithmes consécutifs sont sensiblement constantes, ce qui permet d'obtenir les logarithmes des grands nombres, avec le même degré d'approximation, par le simple emploi des parties proportionnelles.

Mais il n'en est plus ainsi lorsqu'on a besoin de calculer les logarithmes avec un grand nombre de décimales ; les tables qui donnent ces sortes de logarithmes ne sont pas poussées assez loin pour que les différences consécutives y soient constantes ; il faut donc alors, dans les interpolations faire usage des divers ordres de différences, ce qui doit nécessairement entraîner des longueurs et une complication qu'on peut désirer d'éviter. Tel est aussi le but que nous nous proposons dans la note qu'on va lire.

Soit A un nombre entier de $n+1$ chiffres, excédant les limites des tables, et dont on se propose d'obtenir le logarithme avec le même degré d'approximation qu'offrent ces tables. On sait que d'abord la caractéristique de ce logarithme sera n, et que sa partie décimale sera la même que celle du logarithme de $\frac{A}{10^n}$; tout se réduit donc à calculer la partie décimale du logarithme de ce dernier nombre.

Soit développée la fraction $\frac{A}{10^n}$ en fraction continue; soient calculées les réduites successives qui naissent de son développement, jusqu'à celle dont le numérateur excédera les limites des tables exclusivement; soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ les deux qui la précèdent immédiatement; on cherchera les logarithmes de ces deux fractions, auxquels on donnera n pour caractéristique; et tous les chiffres décimaux communs à ces deux logarithmes pourront être admis comme exacts dans le logarithme de A.

Supposons, par exemple, qu'avec les tables de Callet, à vingt chiffres décimaux, qui ne s'étende que jusqu'à 1200, on ait besoin du logarithme de 58321; on développera d'abord 5,8321 en fraction continue, ce qui donnera

$$\frac{58321}{10000}=5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{21+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}}}}$$

d'où résulteront les réduites consécutives

$$\frac{5}{1},\ \frac{6}{1},\ \frac{29}{5},\ \frac{35}{6},\ \frac{764}{131},\ \frac{799}{137},\ \frac{2362}{405}\ \frac{10247}{1757},\ \frac{12609}{2162},\ \ldots\ldots$$

Nous prendrons donc ici les deux réduites consécutives $\frac{764}{131}$, $\frac{799}{137}$, dont nous chercherons les logarithmes ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{lllll}
\text{Log } 764 = 2{,}88309 & 33585 & 75689 & 92806 \\
\text{Log. } 131 = 2{,}11727 & 12956 & 55764 & 26081 \\
\hline
\text{Log. } \frac{764}{131} = 0{,}76582 & 20629 & 19925 & 66725 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
\text{Log. } 799 = 2{,}90254 & 67793 & 13991 & 39295 \\
\text{Log. } 137 = 2{,}13672 & 05671 & 56406 & 76856 \\
\hline
\text{Log } \frac{799}{137} = 0{,}76582 & 62121 & 57584 & 62439 \\
\hline
\end{array}$$

logarithmes qui ne s'accordent encore que dans les cinq premiers chiffres décimaux ; mais nous verrons bientôt ce qu'il faut faire pour aller plus avant.

Lorsque les réduites, dont les deux termes excèdent les limites des tables, sont telles que ces termes sont décomposables en facteurs qui ne les excèdent pas, on peut prendre deux réduites consécutives plus éloignées, et on obtient ainsi une plus grande approximation.

Ainsi, dans le cas présent, comme $\frac{2362}{405} = \frac{2.1181}{405}$, on pourra prendre cette réduite avec la dernière des précédentes. En calculant son logarithme, on trouve

$$\begin{array}{lllll}
\text{Log. } 2 = 0{,}30102 & 99956 & 63981 & 19521 \\
\text{Log. } 1181 = 3{,}07224 & 98976 & 13514 & 79908 \\
\text{Comp. Arith. Log. } 405 = 7{,}39254 & 49767 & 85331 & 44603 \\
\hline
\text{Log. } \frac{2362}{405} = 0{,}76582 & 48700 & 62827 & 44032 \\
\hline
\end{array}$$

ce qui ne nous donnerait toujours que cinq chiffres décimaux exacts du logarithme de 5,8321.

Retournons présentement au cas général et soit $\frac{a}{b}$ la dernière réduite, dont les termes, ou du moins aucun de leurs facteurs premiers, n'excèdent les limites des tables. Soit posé

$$\frac{A}{10^n}=\frac{a}{b}\left(\frac{1+x}{1-x}\right); \qquad (1)$$

il en résultera

$$x=\frac{Ab-10^n.a}{Ab+10^n.a}.$$

Il est facile de voir que x sera une quantité fort petite, car sa valeur peut être écrite comme il suit :

$$x=\frac{\frac{A}{10^n}-\frac{a}{b}}{\frac{A}{10^n}+\frac{a}{b}};$$

or, on sait que

$$\frac{A}{10^n}-\frac{a}{b}<\frac{1}{b^2};$$

d'où résulte

$$x<\frac{1}{b^2\left(\frac{A}{10^n}+\frac{a}{b}\right)};$$

et comme on a aussi

$$\frac{A}{10^n}+\frac{a}{b}>1,$$

on aura, à plus fort raison,

$$x < \frac{1}{b^2}.$$

Cela posé, la formule (1) donne

$$\text{Log.}\frac{A}{10^n} = \text{Log.}\frac{a}{b} + \text{Log}\frac{1+x}{1-x} = \text{Log.}\frac{a}{b} + 2M\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right);$$

c'est-à-dire,

$$\text{Log.}A = n + \text{Log}\,a - \text{Log}\,b + 2M\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right);$$

M étant le module des tables pour lesquelles on calcule. Or, x étant, ainsi que nous venons de le voir, une fort petite quantité, un ou deux termes de la série suffiront le plus souvent pour obtenir une valeur fort approchée de Log.A.

Par exemple, dans le cas que nous avons considéré tout à l'heure, en prenant $\frac{2362}{405}$ pour $\frac{a}{b}$, on aura

$$x = \frac{58321 \times 405 - 23620000}{58321 \times 405 - 23620000},$$

c'est-à-dire,

$$x = \frac{5}{47240005} = \frac{1}{9448001};$$

d'où il est aisé de voir que $\frac{x^3}{3}$ multiplié par $2M$, qui est moindre que l'unité, et réduit en décimales aura au moins vingt zéros entre la virgule et le premier chiffre significatif, de sorte qu'on peut se dispenser d'y avoir égard, et écrire simplement

$$\text{Log.}58321 = 4 + \text{Log.}\frac{2362}{405} + \frac{2M}{9448001};$$

or, on a

$$M = 0{,}43429\ \ 44819\ \ 03251\ \ 82765,$$

ce qui donne

$$\frac{2M}{9448001}=0,00000\ 00919\ 44207\ 43675$$

or, nous avons trouvé tout à l'heure

$$\text{Log}\ \frac{2362}{405}=0,76582\ 48700\ 62827\ 44032\,;$$

nous aurons donc exactement à vingt chiffres décimaux

$$\text{Log}\ 58321=4,76582\ 49620\ 07034\ 87707\,. \qquad (*)$$

(*) Voici encore un moyen assez simple qui peut être employé dans bien des cas. Soit p un très-grand nombre premier dont on veut obtenir le logarithme ; ce nombre est la demi-somme des deux nombres $p+1$ et $p-1$. Or, on sait que, lorsque deux nombres sont très-grands et très-peu différens, leur demi-somme diffère très-peu de la racine quarrée de leur produit ; de sorte qu'à Log.p on pourra, sans erreur sensible, substituer Log.$\sqrt{(p+1)(p-1)}$, c'est-à-dire $\frac{\text{Log}\,(p+1)+\text{Log}.(p-1)}{2}$; or, comme $p+1$ et $p-1$ ne sont premiers ni l'un ni l'autre, il est fort possible qu'ils soient tous deux décomposables en facteurs qui n'excèdent point les limites des tables ; et alors on pourra, sans difficulté, obtenir le logarithme de p.

Pour connaître à quelle erreur on s'expose, en employant ce procédé, on remarquera que

$$\text{Log}\,p-\frac{\text{Log}.(p+1)+\text{Log}.(p-1)}{2}=\tfrac{1}{2}\text{Log}.\frac{p^2}{p^2-1}=M\left\{\frac{1}{2p^2-1}+\frac{1}{3(2p^2-1)^3}+\ldots\right\};$$

d'où l'on voit que l'erreur sera d'autant moindre que p sera plus grand, et qu'on pourra compter sur un nombre de chiffres décimaux double du nombre des chiffres de p.

Dans le cas de l'exemple du texte, on aura

$$p+1=58322=241.242\,,$$

$$p-1=58320=216.270\,;$$

ce qui donnera sensiblement

$$\text{Log}.58321=\frac{\text{Log}.216+\text{Log}.241+\text{Log}.242+\text{Log}.270}{2}\,,$$

que l'on calculera comme il suit :

MÉTÉOROLOGIE.

Résumé des observations barométriques, thermométriques, hygrométriques et magnétiques faites à Montpellier, en 1829;

Par M. Gergonne.

Les observations météorologiques que je publie ici peuvent être considérées comme faisant suite à celles que j'ai publiées aux pag. 9 et 308 du précédent volume, pour 1827 et 1828; elles ont été faites aux mêmes heures, avec les mêmes instrumens, placés de la même manière, et les observations barométriques ont subi les mêmes réductions; seulement j'ai eu cette fois plus de sujets de distraction que la précédente, car, sur les 1460 observations de l'année, j'en ai omis 56, savoir :

11 de sept heures du matin,
26 de midi,
16 de cinq heures du soir,
3 de dix heures du soir.

Les omissions, toutefois, sont assez uniformément reparties sur tout le cours de l'année pour n'exercer qu'une très faible influence même sur les moyennes des mois.

Log 216=2,33445	37511	50930	89753,
Log.241=2,38201	70425	74868	38408,
Log.242=2,38381	53651	80431	27671,
Log.270=2,43136	37641	58987	31189,
2Log 58321=9,53164	99238	65217	86021,
Log.58321=4,76582	49619	32608	93510;

valeur exacte dans les neuf premiers chiffres décimaux.

J. D. G.

§. I. Baromètre.

1.° *Tableau des moyennes barométriques.*

1829.	7 heures.	midi.	5 heures.	10 heures.	Moyennes.
Janvier.	752,11	752,03	751,83	752,32	752,07
Février.	760 96	760,36	760,40	760,55	760,57
Mars.	753,46	753,04	752,46	753,25	753,05
Avril.	752,98	752,59	752,73	753,44	752,94
Mai.	757,25	757,07	756,15	757,27	756,93
Juin.	759.44	758,96	758,67	759,55	759,15
Juillet.	758,80	758,91	758,14	758,93	758,69
Août.	560,59	759 91	759 73	759 98	760,05
Septembre.	757,05	756,99	756,39	757,17	756,90
Octobre.	760,22	760,26	759,83	760,09	760,10
Novembre.	758,94	758,59	758,02	758,97	758,63
Décembre.	759,48	759,05	758,77	759,80	759 28
Moyennes.	757,61	757,31	756,93	757,61	757,36

La moyenne barométrique, à Montpellier, pour l'année 1829, est donc 757,36, au lieu de 758,10 qu'elle avait été pour 1828.

2.° *Tableau des mouvemens barométriques.*

1829.	Maxima.	Moyennes.	Minima.	Oscillations
Janvier.	760,45	752,07	742,65	17,80
Février.	768,01	760,57	747,03	20,98
Mars.	761,71	753,05	739,27	22,44
Avril.	761,41	752,94	742,63	18,78
Mai.	764,55	756,93	749,39	15,16
Juin.	763,90	759,15	751,69	12,21
Juillet.	764,05	758,69	752,44	11,61
Août.	764,11	760,05	754,24	9,87
Septembre.	764,12	756,90	745,22	16,90
Octobre.	769,37	760,10	750,39	18,98
Novembre.	766,35	758,63	739,47	26,88
Décembre.	770,33	759,28	748,60	21,73
Maximum.	770,33	760,57	754,24	26,88
Moyennes.	764,86	757,36	746,91	18,61
Minimum.	760,45	752,07	739 27	9,87
Oscillations.	9,88	8,50	14,97	17,01

Ce tableau donne, pour le plus grand maximum, 770,33
Et pour le plus petit minimum, 739,27

D'où résulte, pour l'étendue des excursions, ... 31,06

§. II. Thermomètre.

1°. *Tableau des moyennes thermométriques.*

1829.	7 heures.	midi.	5 heures.	10 heures.	Moyennes.
Janvier.	2,32	5,09	4,30	2,98	3,67
Février.	3,58	8,92	7,44	4,45	6,10
Mars.	8,68	13,04	12,21	9,74	10,92
Avril.	11,92	16,38	14,54	12,18	13,75
Mai.	16,40	20,89	19,67	16,02	18,24
Juin.	19,71	22,61	22,36	18,48	20,79
Juillet.	22,25	24,93	24,68	21,62	23,37
Août.	19,80	24,24	23,19	20,12	21,84
Septembre.	15,78	20,29	19,16	16,48	17,93
Octobre.	11,02	15,39	14,46	12,21	13,27
Novembre.	7,00	10,60	9,80	7,93	8,83
Décembre.	1,28	3,63	2,47	2,01	2,35
Moyennes.	11,64	15,50	14,52	12,02	13,42

Ainsi, à Montpellier, la température moyenne de l'année 1829 a été 13°,42, au lieu de 15°,96 qu'elle avait été en 1828; on voit que cette température est un peu supérieure à la moyenne 13°,27 du mois d'octobre.

2.° *Tableau des mouvemens thermométriques.*

1829.	Maxima.	Moyennes.	Minima.	Oscillations.
Janvier.	12,90	3,67	— 4,70	17,60
Février.	18,00	6,10	— 4,20	22,20
Mars.	18,20	10,92	— 0,25	18,45
Avril.	23,50	13,75	+ 6,15	17,35
Mai.	24,55	18,24	+ 9,75	14,80
Juin.	28,50	20,79	+11,40	17,10
Juillet.	28,05	23,37	+19,15	8,90
Août.	27,60	23,34	+15,35	12,25
Septembre.	24,45	17,93	+12,30	12,15
Octobre.	24,45	13,27	+ 4,30	20,15
Novembre.	15,75	8,83	— 2,60	18,35
Décembre.	13,85	2,35	—10,25	24,10
Maximum.	28,50	23,37	+19,15	24,10
Moyennes.	21,65	13,55	+ 4,70	16,95
Minimum.	12,90	2,35	—10,25	8,90
Oscillations.	15,60	21,02	29,40	15,20

Ce tableau donne, pour le plus grand maximum, +28°50
Et pour le plus petit minimum, —10,25

D'où résulte, pour l'étendue des excursions, . . . 38°,75

§ III. Hygrométrie.

1.° *Tableau des moyennes hygrométriques.*

1829.	7 heures.	midi	5 heures.	10 heures.	Moyennes.
Janvier.	86,1	85,7	85,7	86,0	85,9
Février.	83,7	83,2	82,1	83,1	83,0
Mars.	85,3	84,6	85,0	85,5	85,1
Avril.	86,7	85,9	84,9	85,4	85,7
Mai.	82,0	81,5	81,3	82,1	81,7
Juin.	70,4	69,0	67,6	69,1	69,0
Juillet.	70,0	69,4	68,4	69,8	69,4
Août.	67,6	66,2	66,1	66,7	66,6
Septembre.	77,9	77,4	77,4	77,7	77,6
Octobre.	76,2	76,1	76,1	76,7	76,3
Novembre.	80,9	80,1	80,8	81,3	80,8
Décembre.	85,7	84,8	84,8	85,3	85,2
Moyennes.	79,4	78,7	78,6	79,1	78,9

On voit donc qu'à Montpellier la moyenne hygrométrique, pour 1829, a été 78°,9, au lieu de 75,9 qu'elle avait été en 1828.

2° *Tableau des mouvemens hygrométriques.*

1829.	Maxima.	Moyennes.	Minima.	Oscillations.
Janvier.	96,5	85,9	72,0	24,5
Février.	91,5	83,0	70,0	21,5
Mars.	93,0	85,1	70,0	23,0
Avril.	92,0	85,7	70,0	22,0
Mai.	87,0	81,7	72,0	15,0
Juin.	82,0	69,0	58,5	23,5
Juillet.	84,5	69,4	55,5	29,0
Août.	80,0	66,6	54,0	26,0
Septembre.	86,0	77,6	61,0	25,0
Octobre.	86,0	76,3	64,0	22,0
Novembre.	92,5	80,8	68,0	24,5
Décembre.	93,0	85,2	75,5	17,5
Maximum.	96,5	85,9	75,5	29,0
Moyenne.	88,7	78,9	65,9	22,8
Minimum.	80,0	66,6	54,0	15,0
Oscillations.	16,5	19,3	21,5	14,0

Ce dernier tableau donne, pour le plus grand maximum, 96°,5
Et pour le plus petit minimum, 54,0

D'où résulte pour l'étendue des excursions 42,5

§. IV. Magnétisme.

1.° *Inclinaison magnétique.*

Inclinaison du 16 septembre 1829 . . . . 64° 23′

2.° *Déclinaison magnétique.*

Déclinaison à l'ouest, le 18 mai 1830 . . . . 20° 29′

Cette dernière a été déterminée avec un instrument de Jecker aîné, à Paris, en comparant l'azimuth du centre du soleil, déterminé par une moyenne entre les azimuths de ses deux bords, avec l'azimuth de l'aiguille, et en opérant, tour à tour, sur ses deux faces.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème d'analyse indéterminée énoncé à la pag. 212 du présent volume;

Par M. Lenthéric, docteur ès sciences, professeur au collége royal de Montpellier.

THÉORÈME. *Si trois nombres entiers positifs sont tels que le quarré du plus grand soit égal à la somme des quarrés des deux autres, le produit de ces trois nombres sera nécessairement divisible par* soixante.

Démonstration. Considérons d'abord un produit tel que

$$P=mn(m-n)(m+n) ,$$

dans lequel m et n sont supposés deux nombres entiers positifs. Ces nombres pourront être ou tous deux pairs ou tous deux impairs, ou bien l'un pair et l'autre impair.

Dans le premier cas, $m-n$ et $m+n$ seront aussi de nombres pairs, de sorte que le produit P sera divisible par 16.

Dans le second cas, $m-n$ et $m+n$ seront encore deux nombres pairs, de sorte que le produit P sera divisible par 4.

Enfin, dans le troisième cas, $m-n$ et $m+n$ seront tous deux des nombres impairs; de sorte que le produit P ne sera plus divisible que par 2; ainsi ce produit sera pair dans tous les cas.

Je dis présentement que ce même produit sera aussi, dans tous les cas, divisible par 3. Cela est d'abord manifeste si m ou n et à plus forte raison si l'un et l'autre sont divisibles par 3; de sorte qu'il ne peut y avoir lieu à discussion que lorsqu'ils ne le sont ni l'un ni l'autre.

Or, dans cette hypothèse, m et n ne peuvent présenter chacun que ces deux formes; savoir :

$$m \text{ les formes } 3p+1 \quad \text{et} \quad 3p+2,$$

$$n \text{ les formes } 3q+1 \quad \text{et} \quad 3q+2;$$

s'ils sont des deux premières ou des deux dernières, $m-n$ sera divisible par 3; et ce sera $m+n$ qui le sera s'ils sont l'un de la première et l'autre de la seconde; d'où l'on voit que, dans tous les cas, le produit P sera divisible par 3; et puisque, dans tous les cas, il est aussi divisible par 2, il sera, dans tous les cas, divisible par 6.

Je dis en outre que si, ni m, ni n, ni $m+n$, ni $m-n$ ne sont divisibles par 5, m^2+n^2 sera nécessairement divisible par 5; en effet, dans ce cas, m et n ne pourront avoir que les formes respectives $5p+\alpha$ et $5q+\beta$, α et β étant l'un et l'autre moindres que 5, et l'on aura alors

$$m-n=5(p-q)+(\alpha-\beta) \ ,$$
$$m+n=5(p+q)+(\alpha+\beta) \ ,$$
$$m^2+n^2=5(5p^2+5q^2+2p\alpha+2q\beta)+(\alpha^2+\beta^2) \ ;$$

d'où l'on voit que tout se réduit à démontrer que, α et β étant deux nombres moindres que 5, si $\alpha-\beta$ ni $\alpha+\beta$ ne sont divisibles par 5, $\alpha^2+\beta^2$ le sera nécessairement.

Or, sur les dix systèmes de valeurs qu'on peut admettre pour α et β, les quatre systèmes 1 et 1, 2 et 2, 3 et 3, 4 et 4 se trouvent exclus par la condition que $\alpha-\beta$ ne soit pas divisible par 5; les deux systèmes 1 et 4, 2 et 3 le sont aussi, par la condition que $\alpha+\beta$ ne soit pas divisible par 5; de sorte qu'il ne reste d'admissibles que les quatre hypothèses 1 et 2, 1 et 3, 2 et 4, 3 et 4; or, on a

$$1^2+2^2=5 \ ,$$
$$1^2+3^2=10 \ ,$$
$$2^2+4^2=20 \ ,$$
$$3^2+4^2=25 \ ;$$

donc, dans toutes les hypothèses admissibles, $\alpha^2+\beta^2$ et par suite m^2+n^2 sont divisibles par 5.

Donc, dans tous les cas, le produit

$$mn(m-n)(m+n)(m^2+n^2) \ ,$$

est divisible par 5; et comme il l'est aussi, dans tous les cas, par 6; il doit l'être, dans tous les cas, par 30; et conséquemment son double

$$2mn(m-n)(m+n)(m^2+n^2)=2mn(m^2-n^2)(m^2+n^2) \ ,$$

doit, dans tous les cas, être divisible par 60.

Cela posé soient x, y, z trois nombres entiers positifs, tels qu'on ait

$$z^2=x^2+y^2 \ ;$$

il est connu que l'on devra avoir

$$x=m^2-n^2 \ , \quad y=2mn \ , \quad z=m^2+n^2 \ ,$$

donc on aura

$$xyz=2mn(m^2-n^2)(m^2+n^2)\ ;$$

donc, d'après ce qui précède, xyz sera divisible par 60 ; ce qu'il s'agissait de démontrer (*).

Solution du problème d'analyse indéterminée énoncé à la pag. 212 du présent volume ;

Par M. Camille PAGLIANI, cadet au corps royal des Pionniers, à Modène.

PROBLÈME. *Trouver, dans la suite naturelle, mille nombres consécutifs, tels que la somme de leurs cubes soit elle-même un cube ?*

Solution. Voyons d'abord comment on pourrait traiter le problème pour le cas général de m nombres consécutifs ; nous passerons ensuite au cas particulier de la question proposée.

Soit $x+1$ le plus petit de ces nombres, le plus grand sera $x+m$; la somme de leurs cubes sera évidemment égale à la somme des cubes des $x+m$ premiers nombres naturels, moins la somme des cubes des x premiers nombres naturels.

Or, il est connu que généralement la somme des cubes des k, premiers nombres naturels, est égale au quarré de la somme de ces mêmes nombres, et a, conséquemment, pour expression

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4}\ .$$

(*) MM. Vallès, ingénieur à Rodez, et François Paulet, de Genève, se sont aussi occupés de ce théorème. Ce dernier observe que la quatrième puissance d'un nombre non divisible par 5, ne pouvant avoir, pour son dernier chiffre à droite, que 1 ou 6, il s'ensuit immédiatement que, si deux nombres m et n ne sont, ni l'un ni l'autre, divisibles par 5, $m^4-n^4=(m^2-n^2)(m^2+n^2)$ le sera nécessairement. *J. D. G.*

En représentant donc par S_3 la somme des cubes de nos m nombres consécutifs, nous aurons

$$S_3=\frac{(x+m)^2(x+m+1)^2-x^2(x+1)^2}{4} ;$$

ou, en décomposant, par la formule $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$,

$$S_3=\frac{m}{8}\{(2x+m)+1\}\{(2x+m)^2+2(2x+m)+m^2\} ;$$

en faisant donc, pour abréger,

$$2x+m=y , \quad \text{d'où} \quad x=\frac{y-m}{2} ,$$

on aura

$$S_3=\frac{m}{8}(y+1)(y^2+2y+m^2)=\frac{m}{8}\{y^3+3y^2+(m^2+2)y+m^2\} .$$

Si m est le cube d'un nombre pair, et c'est le cas particulier de la question proposée, en représentant ce nombre pair par $2n$, nous pourrons faire $m=8n^3$, ce qui donnera

$$S_3=n^3\{y^3+3y^2+2(32n^6+1)y+64n^6\} ;$$

il s'agira donc de rendre un cube parfait le polynome que multiplie n^3 dans cette valeur de S_3 ; or, comme les termes extrêmes de ce polynome sont les cubes respectifs de y et de $4n^2$, on est tout naturellement conduit à supposer que ce polynome est le cube de $y+4n^2$, ce qui donne d'abord

$$S_3=\{n(y+4n^2)\}^3 ,$$

et ensuite

$$y^3+3y^2+2(32n^6+1)y+64n^6=(y+4n^2)^3 ;$$

d'où, en développant et réduisant

$$3(4n^2-1)y^2-2(32n^6-24n^4+1)y=0 ,$$

ce qui donne

$$y=0 , \qquad y=\frac{2(32n^6-24n^4+1)}{3(4n^2-1)} ;$$

de là

$$y+4n^2=4n^2\ ,\qquad y+4n^2=\frac{2(32n^6-6n^2+1)}{3(4n^2-1)}\ ;$$

d'où

$$S_3=(4n^3)^3\ ,\qquad S_3=\left\{\frac{2n(32n^6-6n^2+1)}{3(4n^2-1)}\right\}^3\ .$$

Présentement, la valeur de x en y devient

$$x=\frac{y-m}{2}=\frac{y-8n^3}{2}\ ;$$

d'où, en substituant, tour à sour, les deux valeurs de y

$$x=-4n^3\ ,\qquad x=\frac{32n^6+48n^5-24n^4-12n^3+1}{3(4n^2-1)}\ .$$

Dans le cas particulier de la question proposée on a $n=5$; il en résulte,

$$x=-500\ ,\qquad x=1133\ ,$$
$$S_3=(500)^3\ ,\qquad S_3=(16830)^3\ ;$$

on a, en conséquence,

$$x+1=-499\ ,\qquad x+1=1134\ ,$$
$$x+1000=+500\ ,\qquad x+1000=2133\ ;$$

et conséquemment,

$$(-499)^3+(-498)^3+(-497)^3+\ldots\ldots+(+497)^3+(+498)^3+(+499)^3+(+500)^3=(500)^3\ ,$$
$$(1134)^3+(1135)^3+(1136)^3+\ldots\ldots\ldots+(2131)^3+(2131)^3+(2133)^3=(16830)^3\ ;$$

le premier de ces résultats est d'ailleurs évident de lui-même, puisque tous les cubes qui précèdent le dernier se détruisent deux à deux par l'opposition des signes.

Il est possible que le problème admette encore d'autres solutions ; mais il est probable qu'on ne pourrait les déduire que d'une analyse très-laborieuse.

FIN DU VINGTIÈME VOLUME.

TABLE

Des matières contenues dans le XX.me volume des Annales.

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

ANALYSE ÉLÉMENTAIRE.

ANALYSE INDÉTERMINÉE.

ANALYSE TRANSCENDANTE.

ARITHMÉTIQUE.

ASTRONOMIE.

DYNAMIQUE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

HYDRODYNAMIQUE.

HYDROSTATIQUE.

MÉTÉOROLOGIE.

OPTIQUE.

STATIQUE.

TRIGONOMETRIE.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et les* questions résolues.

Tome VIII,	pag. 116,	Problème, résolu, tome XX, pages	175—183
Tom. XIX,	pag. 128,	Théorèmes.	——
	pag. 156,	Théorèmes.	——
	pag. 182,	Théorèmes I, II.	——
		Problèmes I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII.	——
		Problème de M. W. H. T.	183—185
		Problèmes I, II, III de M. L. P. E. R.	——
	pag. 224,	Problèmes I, II.	59—64
		Problème III.	——
	pag. 256,	Théorème I.	304—305
		Théorème II.	——
		Problème.	——
	pag. 315,	Théorème.	128—134
		Problème. I.	31—34
		Problème. II.	——
	pag. 378,	Problèmes I, II, III, IV.	——
		Problème V.	134—137
		Théorèmes I, II.	——
Tom. XX,	pag. 36,	Problème.	——
	pag. 64,	Problèmes I, II.	137—152
	pag. 116,	Problèmes I, II.	——
	pag. 152,	Problèmes I, II.	——
		Problème III.	137—152
		Problèmes IV, V.	305—315
	pag. 212,	Problème I.	——
		Théorème.	380—382
		Problèmes II.	382—385.

ERRATA

Pour le vingtième volume des Annales.

PAGE 68, ligne 11, en remontant, — *supprimez la virgule après* gazeuse.
Pag. 69, ligne 7, en remontant — *mettez une virgule après* continuellement.
ligne 5, en remontant — *supprimez la virgule après* trajectoire.
ligne 4 en remontant — *supprimez la virgule après* quelconque.
Pag. 71, ligne 4, en remontant — *supprimez la virgule après* décriront.
Pag. 99, équation (1) — au lieu de $ds=dr+\text{Sin}.\theta$; lisez : $ds=dr+dS\text{Sin}.\theta$.
Pag. 119, ligne 4, en remontant — au lieu de $=\frac{d^2X'}{dx^2}=$; lisez : $\frac{d^2X}{dx^2}=$.
Pag. 120, ligne 6, en remontant — au lieu de $x^{r\ m}$; lisez : x^{r+m}.
Pag. 213, ligne 6, en remontant — plein pied ; *lisez* : plain pied.
Pag. 298, ligne 9, en remontant — au lieu de $x->$; lisez : $x-1>$.
même page — remplacez le dernier alinéa par ce qui suit ;

Cette inégalité peut ensuite être mise sous cette forme :

$$x->\frac{G}{(x-1)^{n-1}}\cdot\left(\frac{x-1}{x}\right)^{n-1}\ ;$$

et, puisqu'on a $x>1$, on y satisfera en posant simplement

$$x-1>\frac{G}{(x-1)^{n-1}}\ ,$$

ou bien

$$(x-1)^n>G\ ;$$

ce qui donne

$$x>1+\sqrt[n]{G}\ ;$$

le signe $>$ n'excluant par l'égalité ; ainsi, (*le reste comme dans le texte* , *pag*. 299.)

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

LIVRES NOUVEAUX.

Démonstration et développemens des principes fondamentaux de la théorie des caustiques secondaires; par M QUETELET, de l'Institut des Pays-Bas, directeur de l'observatoire et membre de l'Académie royale des sciences de Bruxelles, etc In-4.° de 52 pag, plus une planche, chez M. *Hayez*, imprimeur de l'Académie, à Bruxelles.

Ce mémoire offre un intéressant résumé des recherches tout-à-fait neuve de l'auteur sur les caustiques; recherches qui ont tant avancé et simplifié la théorie de ces sortes de courbes. M. Quetelet y traite en outre des courbes qui ont deux foyers conjugués, tels que les rayons émanés de l'un d'eux, après s'être réfractés ou réfléchis à la rencontre de la courbe, vont se réunir à l'autre. Il prouve l'identité de ces courbes avec les trajectoires orthogonales des rayons réfractés ou réfléchis par le cercle.

Correspondance mathématique et physique; recueil périodique publié par M. QUETELET; tom. V, 2.me livraison; in-8.° de 50 pages, plus une planche; chez M. *Hayez*, rue de la Montagne, n.° 1023, à Bruxelles.

Les principaux articles mathématiques contenus dans cette livraison sont: de M. *Chasles*, un mémoire sur les transformations polaires et sur les propriétés générales des surfaces du second degré, et un autre sur les centres des moyennes distances des points d'application de plusieurs forces. — De M. *de Montferrier*, une méthode pour reconnaître les nombres premiers, et la recherche de trois nombres dont la somme soit égale à leur produit. — De M. *A. Meyer*, sur l'élimination d'une inconnue entre deux équations. — De M. *Le Français*, sur la surface touchée constamment par un plan assujéti à certaines conditions, et sur les courbes d'intersection apparente de deux lignes qui tournent avec rapidité autour de deux points fixes. — De M. *Quetelet*, sur les lignes dirimantes à deux foyers conjugués.

TABLE SOMMAIRE

Des matières contenues dans cette livraison.

LIVRES NOUVEAUX.

Correspondance mathématique et physique ; recueil périodique publié à Bruxelles par M. A. QUETELET, Directeur de l'Observatoire, etc., tom. V, 3.^{me} et 4.^{me} livraisons, formant ensemble près de 150 pages in-8.°, plus une planche, chez *Bachelier*, à Paris.

Les principaux articles mathématiques contenus dans ces deux livraisons sont : de M. *Chasles*, sur les propriétés des diamètres conjugués des hyperboloïdes, sur les surfaces du second degré, sur les lignes aplanétiques, sur les courbes des 3.^{me} et 4.^{me} degrés. — De M. le professeur *Thilo*, de Francfort, sur l'explication des formes cristalines. De M. *Reiss*, sur les fonctions semblables de plusieurs groupes d'un certain nombre de fonctions. — De M. *Noël*, de la division d'une droite en parties égales, par des jalons et une fausse équerre. — De M. *Manderlier*, un théorème sur le quadrilatère complet. — De M. *Plateau*, des recherches sur la durée de la sensation de la lumière. — De M. *Pagani*, une méthode très-simple pour parvenir aux équations du mouvement de la lumière dans un milieu de densité variable ; une note sur les vibrations d'une membrane circulaire élastique. — De M. *Heichen*, la recherche d'un point dont la somme des distances à trois autres est un *minimum*.

Ce dernier problème n'est qu'un cas très-particulier du problème traité à la pag. 377 du premier volume des *Annales*, où il s'agit de lier entre eux des points, en nombre quelconque, par des droites dont la longueur totale soit un *minimum*.

On reproduit, dans la dernière des deux livraisons que nous annonçons (pag. 279), l'équation de la courbe de poursuite, déjà donnée il y dix-huit ans, par M. Dubois-Aymé, dans la *Correspondance* de M. Hachette (tom. II, pag. 275), équation que M. de St-Laurent a signalée comme inexacte, à la pag. 145 du XIII.^{me} volume des *Annales*.

Conditions d'existence des racines réelles et imaginaires dans les équations ; par M. *Athanase* DUPRÉ ; in-8.° de 12 pag.; chez *Joly*, à Dôle.

Cet opuscule n'est qu'un développement de l'article de la pag. 68 du XVIII.^{e} volume des *Annales*.

TABLE SOMMAIRE

Des matières contenues dans cette livraison.

CONCOURS ACADÉMIQUES.

Afin de donner plus d'extension et de variété aux travaux sur lesquels le choix pourrait porter, et en même temps plus de latitude aux concurrens, *l'Académie royale des sciences de Paris* a arrêté que le prix qu'elle doit décerner, dans sa séance publique du mois de juin 1830, sera adjugé à celui des ouvrages, manuscrits ou imprimés, qui présentera l'application la plus importante des théories mathématiques, soit à la physique générale, soit à l'astronomie, ou qui contiendra une découverte analytique très-remarquable. On considérera comme admises au concours toutes les pièces qui auront été rendues publiques, ou séparément ou dans des recueils scientifiques, depuis le 1.er janvier 1828 jusqu'au 1.er janvier 1830. Le concours sera établi entre ces pièces et les mémoires, imprimés ou manuscrits, que les auteurs auraient fait parvenir au secrétariat de l'Institut, soit qu'ils aient fait connaître leur nom, soit qu'ils l'aient enfermé dans un billet cacheté, qui alors ne sera ouvert qu'autant que la pièce sera couronnée. Les ouvrages ou mémoires devront être déposés avant le 1.er mars 1830. Le prix sera une médaille d'or de la valeur de 3,000 fr.

L'académie royale des sciences de Bruxelles propose de nouveau cette question piquante et difficile qu'elle avait déjà proposée il y a quelques années, sans en obtenir de solution : *Trouver et démontrer, pour les surfaces du second ordre, les analogues des théorèmes de* Pascal *et* Brianchon, *relatifs aux courbes de ce degré?* Les mémoires doivent être parvenus, franc de port, avant le 1.er février 1830.

La même société savante propose encore, pour le sujet d'un prix à décerner en 1831, la question suivante : *Donner la théorie mathématique des vibrations intestines des corps élastiques, en ayant égard aux circonstances physiques qui atténuent d'abord et qui finissent par détruire le mouvement primitif?* Les mémoires doivent être parvenus, franc de port, avant le 1.er février 1831.

Le prix, pour chacune de ces deux questions, sera une médaille d'or de la valeur de 30 ducats (357 fr. 90 c.)

TABLE SOMMAIRE

Des matières contenues dans cette livraison.

LIVRES NOUVEAUX.

Mémoires de mathématiques et de physique; par GUILLAUME LIBRI, tom. I.er, grand in-4.° de plus de 200 pages; chez *Léonard Ciardetti*, à Florence (1829).

Les mémoires contenus dans ce premier volume, au nombre de six, ont pour objet, 1.° la recherche de quelques formules générales d'analyse; 2.° la théorie de la chaleur; 3.° les fonctions discontinues; 4.° la théorie des nombres; 5.° la résolution de quelques équations indéterminées; 6.° la résolution des équations indéterminées à l'aide des séries.

L'auteur annonce, comme devant principalement faire partie des volumes subséquens, des mémoires, 1.° sur les transcendantes numériques; 2.° sur les congruences du troisième et du quatrième degrés et des degrés supérieurs; 3.° sur les intégrales définies qui dépendent de la théorie des nombres; 4.° sur la résolution des équations numériques; 5.° sur le calcul des probabilités; 6.° sur la comparaison des différens ordres d'irrationnels.

Tous ceux qui cultivent avec quelque zèle les sciences exactes s'empresseront sans doute de se procurer l'ouvrage de M. le comte Libri qui, très-jeune encore, a su se placer dans un rang très-distingué entre les premiers géomètres de l'Europe; ils y feront une ample récolte de faits et de procédés analytiques non moins curieux que nouveaux.

Mémoire sur la partie du coefficient de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne qui dépend du quarré de la force perturbatrice; par M. PLANA, de l'Académie royale des sciences de Turin, etc.; suivi de notes et éclaircissemens; formant en tout plus de 120 pages in-4.°; à Turin, de l'imprimerie royale (décembre 1828 — avril 1829).

Ce mémoire ainsi que les notes insérées par M. Poisson dans les volumes de la *Connaissance des temps* pour 1829 et 1831, devront être consultés par tous ceux qui voudront se faire une opinion motivée sur la discussion qui s'est élevée, dans ces derniers temps, entre Laplace et M. Plana, sur le sujet auquel ils sont relatifs.

TABLE SOMMAIRE

Des matières contenues dans cette livraison.

(Une Planche).

LIVRES NOUVEAUX.

Essai sur une nouvelle théorie des courbes, déduite de la considération de leurs rayons de courbure successifs; par M. TIMMERMANS, docteur ès sciences, professeur de physique et de mathématiques supérieures, à l'Athénée de Tournay. Brochure in-8.° de 42 pag., plus une planche; chez *Daniël*, imprimeur, à Lille.

L'usage généralement adopté par les géomètres d'exprimer les courbes par une relation entre les coordonnées soit rectilignes, soit polaires de leurs différens points, usage dont on ne saurait d'ailleurs contester les avantages, présente pourtant l'inconvénient d'une sorte d'arbitraire dans le choix des points et des droites auxquels on rapporte les courbes dont on veut étudier les propriétés, et dont l'équation varie de forme, suivant la manière dont on choisit ces points et ces droites.

Il y a déjà long-temps que l'on s'occupe des moyens d'exprimer les courbes d'une manière plus *intrinsèque*, s'il est permis de s'exprimer ainsi; MM. *Lacroix*, *Carnot* et *Ampère* ont exposé leurs vues sur ce sujet. Postérieurement nous avons proposé (*Annales*, tom. IV, pag. 42) d'exprimer chaque courbe, soit algébrique, soit transcendante, par la relation constante entre le rayon de courbure de chacun de ces points et le rayon de courbure du point correspondant de sa développée.

Tel est aussi le système adopté par M. *Timmermans* dans l'opuscule que nous annonçons; mais tandis que nous avions dû nous borner, pour l'objet que nous avions en vue, à la relation entre le rayon de courbure de la courbe et celui de sa développée, l'auteur étudie les relations entre les rayons de courbure d'une suite illimitée de courbe, développées les unes des autres. Il parvient ainsi à un assez grand nombre de théorèmes fort curieux, et notamment à un théorème dont le beau théorème de *Jean Bernouilli* (*Annales*, tom. IX, pag. 73) n'est qu'un cas particulier.

TABLE SOMMAIRE

Des matières contenues dans cette livraison.

LIVRES NOUVEAUX.

Traité de la lumière; par J. F. W. HERSCHEL, président de la société astronomique de Londres, traduit de l'anglais, avec des notes; par MM. P. F. VERHULST, docteur ès sciences, et A. QUETELET, directeur de l'observatoire de Bruxelles. Tom. I, 1.re partie, in-8.o de plus de 200 pag., plus quatre planches; à la librairie scientifique-industrielle de *Malher et Comp*.e passage Dauphine, à Paris.

Il se publie présentement en Angleterre, sous le titre d'*Encyclopédie métropolitaine*, un ouvrage qui ne doit pas avoir moins de 50 volumes in-4.°, et qui, même pour les souscripteurs, coûtera plus de 1,200 fr. Bien que cette grande entreprise compte au nombre de ses collaborateurs les savans les plus distingués de l'Angleterre, peu de particuliers néanmoins, surtout hors de la Grande Bretagne, se détermineront à faire l'acquisition d'un ouvrage d'un prix aussi élevé, écrit dans une langue qui peut leur être, si non inconnue, du moins peu familière; ouvrage qui d'ailleurs se trouverait contenir un grand nombre de traités sur des matières qui leur présenteraient peu d'intérêt.

C'est donc une idée très-heureuse, et en même temps éminemment utile à la propagation des lumières, que de publier, sous la forme d'autant de traités séparés, les diverses parties de cette immense collection, en les traduisant dans une langue qui, comme la langue latine, il y a quelques siècles, est entendue et parlée dans toute l'Europe.

Ce que d'autres savans s'empresseront sans doute de faire pour les autres parties de l'*Encyclopédie métropolitaine*, MM. Verhulst et Quetelet l'ont entrepris pour la partie optique, due à M. Herschel, et on doit leur en savoir beaucoup de gré, puisque, depuis la publication de l'*Optique* de Schmit, aujourd'hui très-incomplète, rien d'un peu étendu n'avait paru sur cet intéressant sujet. La manière dont est traitée la livraison que nous avons sous les yeux ne peut que faire désirer vivement de voir bientôt, conduit à sa fin, un ouvrage que tous les vrais physiciens voudront à l'envie se procurer.

TABLE SOMMAIRE

Des matières contenues dans cette livraison.

LIVRES NOUVEAUX.

Correspondance mathématique et physique, publiée par M. QUETELET, directeur de l'observatoire de Bruxelles, etc., etc. Tom. V, 5.me et 6.me livraisons, formant ensemble environ 130 pag. in-8.°, plus une planche; chez Bachelier à Paris.

Les principaux articles mathématiques contenus dans cette livraison sont : 1.° de M. *Chasle*, une extension nouvelle donnée au principe de dualité; 2.° de M. *Olivier*, des recherches sur la division des surfaces et des corps; 3.° du *même*, sur une propriété des foyers des sections coniques; 4.° de M. *Verhulst*, sur l'intégration de quelques formules différentielles relatives aux oscillations du pendule; 5.° de M. *Thilo*, sur la mesure de la hauteur des montagnes à l'aide du pendule; 6.° de M. *Van Rees*, sur le lieu des foyers des sections faites dans une surface conique du second ordre, par des plans perpendiculaires à celui de sa section principale, passant tous par un même point de l'une des deux génératrices que déterminent le plan de cette section principale; 7.° de M. *Le Français*, sur le lieu de l'intersection variable de deux droites mobiles, tournant dans un même plan, autour de deux centres fixes, avec des vîtesses constantes données; 8.° de *divers auteurs*, des recherches sur les piles de boulets à base hexagone.

A la fin de la dernière de ces deux livraisons, M *Quetelet* se plaint de ce que nous avons reproché un peu durement, *peut-être*, à M. Noël, d'avoir proposé dernièrement, dans la *Correspondance*, comme nouveau, un problème déjà résolu dans notre 1.er volume. Telle n'a pu être notre intention, et nous nous sommes sans doute mal expliqués. Notre étonnement n'est point de ce que M. *Noël* ignore que telle ou telle question a été traitée dans notre recueil; car nous ne voudrions pas répondre pour nous-même d'échapper constamment à ce reproche; mais nous répéterons de nouveau que nous sommes fort surpris que ce théorème: *Le point du plan d'un triangle duquel on voit ses trois côtés sous des angles égaux, est aussi celui dont la somme des distances à ces trois sommets est la moindre possible*; théorème qui nous était connu il y a quarante ans, et dont la vérité s'aperçoit d'ailleurs d'une manière presque intuitive, par des considérations mécaniques, soit encore aujourd'hui même chose nouvelle pour les géomètres.

TABLE SOMMAIRE

Des matières contenues dans cette livraison.

LIVRES NOUVEAUX.

Expériences sur la forme et sur la direction des veines et des courans d'eau lancés par diverses ouvertures; mémoire de 136 pag. in-4.°, plus cinq planches, lu à l'académie royale des sciences de Turin, le 4 janvier 1829.

Mémoire sur la détermination théorique de la section contractée des veines liquides; in-4.°, de 27 pag., lu à l'académie royale des sciences de Turin, le 26 avril 1829.

Par M. *Georges* BIDONE, membre de ladite académie, et professeur à l'Université de Turin. De l'imprimerie royale.

Le premier de ces deux mémoires présente les résultats d'un grand nombre d'expériences faites avec beaucoup de soin, sur la figure de la veine liquide qui s'échappe d'un vase, sous différentes charges, par des orifices de figures très-variées, percés en minces parois, et armés ou non sur tout ou partie de leur périmètre. L'auteur expose ses conjectures sur la cause des changemens qu'éprouve successivement la figure de la section transversale de la veine, à diverses distances de l'orifice. Il applique son hypothèse sur ce sujet à l'explication des divers phénomènes que présente le cours des fleuves, gêné par des obstacles, tels par exemple que les piles d'un pont. Il fait enfin un ingénieux rapprochement entre les résultats de ses expériences et les circonstances du mouvement de la lumière, dans l'hypothèse des ondulations.

Dans le second mémoire, M. Bidone, en combinant les résultats théoriques obtenus par Euler avec ceux auxquels M. Venturoli est récemment parvenu, prouve, comme des mesures directes dont on paraissait suspecter l'exactitude l'avaient déjà appris depuis long-temps, que l'aire de la section contractée est exactement les *deux tiers* de celle de l'orifice; et que, si l'emploi de cette donnée a conduit jusqu'ici à une évaluation fautive de la dépense d'eau, c'est que la vîtesse moyenne des filets, à leur passage par la section contractée, n'est point, comme on l'avait supposé, égale à celle qui serait due à la charge du filet central.

TABLE SOMMAIRE

Des matières contenues dans cette livraison.

LIVRES NOUVEAUX.

Journal für die reine und angewandte Mathematik ; c'est-à-dire : *Journal de Mathématiques pures et appliquées*; par M. A. L. CRELLE , membre du Conseil supérieur des bâtimens civils du royaume de Prusse. Tom. V.me , 1.re et 2.me livraisons ; ensemble 222 pag., plus deux planches. Chez *G. Reimer* , à Berlin.

Des négligences, des méprises et des surtaxes , résultat inévitable du peu d'uniformité et de stabilité des relations entre les administrations des postes des divers états de l'Europe , nous ont privés , à notre très-grand regret, des deux dernières livraisons du IV.me volume de cette précieuse collection. Voici de quoi se composent principalement les deux livraisons que nous annonçons.

De M. le professeur *Plucker*, de Bonn , un mémoire sur un nouveau système de coordonnées. — De M. le professeur *Grunert* , de Brandebourg , des recherches de stéréotomie , et la démonstration d'un théorème proposé dans les *Annales.* — De M. le docteur *Ohm* , de Berlin , une théorie générale et complète du frottement dans les tourillons. — De M. le capitaine *Thermine* , des recherches (en français) sur la figure et le mouvement d'une bulle d'air dans un liquide pesant et homogène. — De M. le professeur *A. F. Möbius* , de Leipzig , des recherches sur les propriétés d'un système de lentilles. — De M. le docteur *A. A. Cournot* , à Paris, un mémoire (en français) sur le mouvement d'un corps rigide, soutenu par un plan fixe. — De M. le professeur *Garbinski* , directeur de l'Ecole polytechnique , à Warsovie , quelques observations (en français) sur la recherche de la droite qui en touche quatre autres données dans l'espace. — De M. *A. Burg* , professeur à l'Institut polytechnique de Vienne , sur l'existence d'une racine dans toute équation à une inconnue. — De M. le docteur *Crelle* , éditeur , deux mémoires (en français) , l'un sur la convergence de la série du binome , et l'autre sur les expressions des puissances des sinus et cosinus en sinus et cosinus d'arcs multiples et leurs inverses. — Des questions résolues et proposées par divers auteurs.

TABLE SOMMAIRE

Des matières contenues dans cette livraison.

LIVRES NOUVEAUX.

Correspondance mathématique et physique, publiée par M. QUETELET, directeur de l'observatoire de Bruxelles, etc. Tom. VI, livraisons 1 et 2; ensemble 160 pag. in-8.°, plus trois planches; chez *Bachelier*, à Paris.

Les principaux articles dont se compose cette livraison, sont : de M. *Chasles*, trois mémoires, le premier, sur la transformation parabolique des relations métriques des figures; le second, sur un nouveau système de coordonnées, et le troisième, sur les systèmes de forces et d'aires planes, les polygones, les polyèdres et les centres des moyennes distances. — De M. *Pagani*, deux mémoires sur le mouvement vibratoire. — De M. *Reiss*, sur la recherche du point du plan d'une courbe dont la somme des distances à tous ses points est *maximum* ou *minimum*. — De M. *Noël*, sur la mesure du volume du corps engendré par un demi-segment, un segment et un secteur circulaire tournant autour d'un axe extérieur. — De M. *Verhulst*, sur l'expression de l'aire du quadrilatère.

Journal de Mathématiques de M. CRELLE, tom. V.^{me}, 3.^{me} livraison, in-8.° d'environ 100 pag., plus une planche; de l'imprimerie de *G. Reimer*, à Berlin.

Les principaux articles contenus dans cette livraison sont : De M. *A. A. Cournot*, docteur ès sciences, à Paris, la fin d'un mémoire (en français) sur le mouvement d'un corps sur un plan qu'il ne touche que par un point, en ayant égard au frottement. — De M. *Richelot*, étudiant de l'université de Konigsberg, l'application de la théorie des transcendantes elliptiques à la solution d'un problème de polygonométrie sphérique. — De M. le professeur *Plucker*, de Bonn, la démonstration d'un théorème proposé dans les *Annales de Mathématiques* et d'un nouveau principe de *géométrie de situation*. — De M. le professeur *Lejeune-Dirichelet*, la solution (en français) d'une question relative à la théorie de la chaleur. — D'un *Abonné* et de M. *Crelle*, la démonstration d'un théorème proposé dans les *Annales* et d'un autre plus général. — De M. le docteur *F. Minding*, sur la courbe de moindre périmètre sur une surface courbe. — De M. *Th. Clausen*, sur l'interpolation et sur la force centrifuge dans les pendules des horloges.

TABLE SOMMAIRE

Des matières contenues dans cette livraison.

LIVRES NOUVEAUX.

Traité de la lumière, par J. F. W. HERSCHEL, président de la société astronomique de Londres; traduit de l'anglais, avec des notes, par MM. P. F. VERHULST, docteur ès sciences, et A. QUETELET, directeur de l'observatoire de Bruxelles; tom. 1.er, 2.me partie; in-8.o de 308 pag., plus six planches; chez *Malher* et Comp.e, passage Dauphine, à Paris.

Dans la première partie de ce volume, que nous avons annoncée il y a quelque temps, il est successivement question de la lumière, en général, de la photométrie, de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la rencontre d'une ou de plusieurs surfaces planes ou courbes, et des caustiques qui en résultent, des foyers des rayons centraux, lorsque les surfaces sont sphériques, des foyers des rayons obliques, de la formation des images, de la structure de l'œil et de la vision.

Dans la seconde partie, que nous annonçons aujourd'hui, il est successivement traité de la dispersion de la lumière, de son absorbtion par les milieux, de la lunette achromatique, de la théorie de l'émission, de celle des ondulations, de l'interférence, des couleurs produites soit par des lames minces, soit par des lames épaisses, soit par la combinaison des unes et des autres, des couleurs produites par les surfaces striées et enfin du phénomène de la diffraction.

Nous ne pourrons que répéter ce que nous avons déjà dit sur le mérite éminent et sur l'évidente utilité de cet excellent ouvrage, qu'aucun autre ne saurait suppléer, et que nous espérons voir terminer par une table alphabétique bien ample, qui le rendra d'un usage plus commode encore. L'auteur n'a pas eu la ridicule pretention, si souvent affichée aujourd'hui, d'enseigner l'optique sans le secours des mathématiques; mais il n'use pas de l'analyse mathématique avec moins de sobriété que de goût. Il developpe d'ailleurs les deux systèmes de l'emission et des ondulations avec une impartialite tout à fait digne d'eloge.

TABLE SOMMAIRE

Des matières contenues dans cette livraison.

LIVRES NOUVEAUX.

Traité élémentaire de physique ; par E. Péclet, maître de conférences de physique, à l'école préparatoire de Paris, professeur de physique à l'école centrale des arts et manufactures. Deuxième édition, tome 1.er, in-8.o de 634 pag., plus 18 planches ; chez *Malher* et Comp.e, libraires de l'Ecole centrale des arts et manufactures, passage Dauphine, à Paris.

Huygens cherchant à déterminer l'aire de la cycloïde, s'avisa, dit-on, de tailler une cycloïde et son cercle générateur dans une même feuille de cuivre, et d'en comparer les poids, procédé qui fut regardé avec raison, par les géomètres de l'époque, comme tout à fait indigne de la haute réputation de celui qui avait eu la faiblesse d'y recourir.

Huygens faisait ainsi de la géométrie expérimentale ; et n'est-ce pas de la sorte qu'on traite encore aujourd'hui la physique dans la plupart de nos livres et de nos cours publics sur cette science ? Il devra même en être ainsi tout aussi long-temps que quelque reforme radicale dans nos plans d'études, que rien encore ne fait espérer, n'aura pas rendu l'analyse transcendante et la haute géométrie tout à fait vulgaires. Sans doute une saine physique ne saurait avoir d'autre base que des faits déduits de l'expérience ; mais on ne devrait y admettre que des expériences peu nombreuses et tout à fait décisives, et tout le reste devrait en être rigoureusement déduit, à l'aide du calcul et de la géométrie.

L'obligation où se trouvent les auteurs d'élémens de condescendre à l'infirmité du plus grand nombre des lecteurs, incapables de suivre une méthode aussi rationnelle, sans pourtant refuser aux autres un enseignement plus sérieux, est pour eux la source d'un véritable embarras. M. Péclet a éludé cette difficulté, autant qu'il était en lui, en rejetant dans des notes, au bas des pages, tout ce qui aurait pu paraître trop scientifique aux yeux des lecteurs peu instruits en mathématiques ; mais peut-être ceux-ci trouveront-ils qu'il y a encore trop de calcul et de géométrie dans le texte, tandis que les autres trouveront qu'il y en a trop peu dans les notes. Tous néanmoins trouveront dans l'ouvrage une instruction solide et variée.

TABLE SOMMAIRE

Des matières contenues dans cette livraison.
