CHASLES

Géométrie de situation. Démonstration de quelques propriétés du triangle, de l'angle trièdre et du tétraèdre, considérés par rapport aux lignes et surfaces du second ordre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 65-85
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__65_0>

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Démonstration de quelques propriétés du triangle, de l'angle trièdre et du tétraèdre, considérés par rapport aux lignes et surfaces du second ordre;

Par M. CHASLES, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

DES théorèmes sur les hexagones inscrit et circonscrit aux lignes du second ordre, on déduit immédiatement comme corollaires les deux propositions suivantes :

1. *Deux triangles étant inscrits et circonscrits à une ligne du second ordre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact des côtés du circonscrit,*

Les points de concours des directions des côtés respectivement opposés des deux triangles appartiennent tous trois à une même droite.

Les droites qui joignent les sommets respectivement opposés des deux triangles concourent toutes trois en un même point.

Cette droite et ce point sont polaire et pôle, l'un de l'autre, par rapport à la courbe dont il s'agit.

De cette double proposition résulte immédiatement la suivante:

2. *Deux angles trièdres de même sommet étant inscrits et circonscrits à une surface conique du second ordre, de telle sorte*

que les arêtes de l'inscrit soient les lignes de contact des faces du circonscrit,

Les intersections des plans des faces respectivement opposées des deux tétraèdres sont situées toutes trois dans un même plan.

Les plans déterminés par les arêtes respectivement opposées des deux tétraèdres se coupent tous trois suivant une même droite.

Ce plan et cette droite sont polaire et pôle, l'un de l'autre, par rapport à la surface conique dont il s'agit.

Soit inscrite à la surface conique une autre surface quelconque du second ordre, cette nouvelle surface se trouvera aussi inscrite à l'angle trièdre circonscrit à la première, et ses points de contact avec les faces de cet angle trièdre se trouveront sur les arêtes de l'inscrit. De là résulte cet autre théorème :

3. *Un triangle et un angle trièdre étant inscrits et circonscrits à une même surface quelconque du second ordre, de telle sorte que les sommets du triangle soient les points de contact des faces du tétraèdre,*

Les points où les directions des côtés du triangle sont coupées par les plans des faces respectivement opposées de l'angle trièdre appartiennent tous trois à une même droite.

Les plans déterminés par les sommets du triangle et par les arêtes respectivement opposées de l'angle trièdre se coupent tous trois suivant une même droite.

Ces deux droites sont polaires conjuguées l'une de l'autre, par rapport à la surface du second ordre dont il s'agit.

Il est clair que, réciproquement, quand trois points seront pris respectivement sur les faces d'un angle trièdre, de telle sorte que l'une des deux parties du théorème ait lieu, l'autre aura lieu également, et alors une infinité de surfaces du second ordre pourront toucher les faces de l'angle trièdre en ces trois points; toutes ces surfaces se couperont suivant une même ligne du second ordre, circonscrite au triangle qui a ses sommets en ces trois points, et inscrite à celui suivant lequel l'angle trièdre est coupé par le plan de celui-là.

4. *THÉORÈME. Deux tétraèdres étant l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même surface quelconque du second ordre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit.*

Les droites qui joignent les sommets respectivement opposés dans les deux tétraèdres sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une même surface du second ordre.

Et les quatre droites, suivant lesquelles se coupent trois à trois les douze plans conduits par les arêtes du circonscrit et par les sommets de l'inscrit non situés dans les faces du circonscrit qui déterminent ces arêtes, sont quatre génératrices du deuxième mode de génération de cette même surface du second ordre (*).

Les droites suivant lesquelles se coupent les plans des faces respectivement opposées dans les deux tétraèdres sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une même surface du second ordre.

Et les quatre droites que déterminent trois à trois les douze points suivant lesquels les arêtes de l'inscrit sont coupées par les plans des faces du circonscrit qui ne contiennent pas les extrémités de ces arêtes, sont quatre génératrices du deuxième mode de génération de cette même surface du second ordre (*).

(*) Voilà le complément que nous avions désiré à la pag. 35 du présent volume pour cet élégant théorème. Ce complément peut aussi se déduire assez simplement de l'analyse de M. Bobillier.

On a vu, en effet, à la page 328 du précédent volume, que les faces d'un tétraèdre étant données par les équations linéaires en x, y, z, $A=o$, $B=o$, $C=o$, $D=o$, une surface quelconque du second ordre, circonscrite à ce tétraèdre, était donnée par l'équation

$$aBC+bCA+cAB+\alpha AD+\beta BD+\gamma CD=o\,,$$

Et, non seulement ces deux surfaces sont polaires réciproques l'une de l'autre, par rapport à la surface du second ordre dont il s'agit, mais leurs huit génératrices sont, chacune à chacune, polaires conjuguées ou réciproques, par rapport à cette même surface.

---

et qu'alors les équations des faces du tétraèdre circonscrit dont les points de contact étaient les sommets de l'inscrit étaient

$$bC+cB+\alpha D=0\ ,$$

$$cA+aC+\beta D=0\ ,$$

$$aB+bA+\gamma D=0\ ,$$

$$\alpha A+\beta B+\gamma C=0\ ,$$

On a vu, de plus, que les plans des faces respectivement opposées des deux tétraèdres se coupaient suivant quatre droites appartenant à une même surface du second ordre donnée par l'équation

$$\left.\begin{array}{r}\alpha\beta\gamma D^2+\alpha(\beta b+\gamma c)A\\ +\beta(\gamma c+\alpha a)B\\ +\gamma(\alpha a+\beta b)C\end{array}\right| D+(\alpha A+\beta b+\gamma C)(bcA+caB+abC)=0\ ,$$

et que les droites joignant les sommets respectivement opposés appartenaient toutes quatre à une autre surface du second ordre ayant pour équation

$$\left.\begin{array}{r}(\beta b-\gamma c)(\beta b+\gamma c-\alpha a)(aBC+\alpha AD)\\ +(\gamma c-\alpha a)(\gamma c+\alpha a-\beta b)(bCA+\beta BD)\\ +(\alpha a-\beta b)(\alpha a+\beta b-\gamma c)(cAB+\gamma CD)\end{array}\right\}=0\ ;$$

or, la première de ces deux équations est également satisfaite par chacun des quatre systèmes d'équations

Démonstration. Chacune des deux parties du théorème est facile à démontrer directement ; mais, attendu qu'elles se déduisent l'une de l'autre par la théorie des polaires réciproques ; nous nous bornerons à donner la démonstration de la première ; démonstration susceptible d'ailleurs d'une traduction pareille à celle de l'énoncé.

$$\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}=0\ , \qquad D=0\ ,$$

$$\frac{B}{\gamma}+\frac{C}{\beta}+\frac{D}{\alpha}=0\ , \qquad A=0\ ,$$

$$\frac{C}{\alpha}+\frac{A}{\gamma}+\frac{D}{b}=0\ , \qquad B=0\ ,$$

$$\frac{A}{\beta}+\frac{B}{\alpha}+\frac{D}{c}=0\ , \qquad C=0\ ,$$

équations que l'on reconnaîtra facilement pour être celles des quatre génératrices du deuxième mode de génération de la seconde partie du théorème.

On s'assurera de même que l'autre équation du second degré est satisfaite par chacun des quatre systèmes d'équations

$$(\beta b-\gamma c)A+a(\beta B-\gamma C)=0\ , \quad (\gamma c-\alpha a)B+b(\gamma C-\alpha A)=0\ , \quad (\alpha a-\beta b)C+c(\alpha A-\beta B)=0\ ,$$

$$(\gamma c-\alpha a)A+\beta(\gamma D-aB)=0\ , \quad (\alpha a-\beta b)B+\gamma(\alpha D-bC)=0\ , \quad (\beta b-\gamma c)C+\alpha(\beta D-cA)=0\ ,$$

$$(\alpha a-\beta b)A+\gamma(aC-\beta D)=0\ , \quad (\beta b-\gamma c)B+\alpha(bA-\gamma D)=0\ , \quad (\gamma c-\alpha a)C+\beta(cB-\alpha D)=0\ ,$$

$$(\beta b-\gamma c)D+a(bC-cB)\ ,$$

$$(\gamma c-\alpha a)D+b(cA-aC)\ ,$$

$$(\alpha a-\beta b)D+c(aB-bA)\ ;$$

lesquelles sont celles des douze plans qui se coupent trois à trois suivant les quatre génératrices du deuxième mode de génération de la première partie du théorème.

J. D. G.

Les droites qui vont de trois sommets du tétraèdre circonscrit à leurs opposés respectifs dans l'inscrit sont dans trois plans qui se coupent (3) suivant une même droite, passant par le quatrième sommet; la droite qui va de ce sommet à son opposé dans l'inscrit rencontre aussi cette droite; donc les quatre droites qui joignent les sommets respectivement opposés dans les deux tétraèdres s'appuyent sur quatre autres droites partant de ces mêmes sommets; ce qui prouve qu'elles appartiennent à une surface du second ordre, donc ces quatre autres droites sont des génératrices du deuxième mode de génération.

Les quatre droites qui joignent les sommets respectivement opposés, dans les deux tétraèdres, étant des génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre, on en peut déduire les conséquences suivantes :

5. *Si deux de ces quatre droites concourent en un même point, les deux autres devront concourir en un autre point ; et, si trois d'entre elles concourent en un même point, la quatrième devra aussi passer par ce point.*

Les quatre droites suivant lesquelles se coupent les plans des faces opposées, dans les deux tétraèdres, étant des génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre, on en peut déduire les conséquences suivantes:

5. *Si deux de ces quatre droites sont situées dans un même plan, les deux autres devront aussi être situées dans un autre plan ; et, si trois d'entre elles sont dans un même plan, la quatrième devra aussi être dans ce plan.*

Ces dispositions sont en effet les seules qui puissent permettre alors de mener, par chacun des points de l'une quelconque des quatre droites, une droite qui s'appuye à la fois sur les trois autres. Dans ces circonstances particulières, la surface du second ordre, lieu de ces quatre droites, se trouve remplacée par deux plans ou par un plan unique. On doit aussi remarquer que, quand les quatre dernières droites sont dans un même plan, les quatre premières concourent en un même point, pôle de ce plan.

Les théorèmes ci-dessus (4) ont leurs réciproques qui peuvent être énoncés comme il suit :

6. *Si, par les sommets d'un tétraèdre, on mène quatre droites qui soient des génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre, ces droites perceront les plans des faces respectivement opposées en quatre points par lesquels on pourra faire passer une surface du second ordre inscrite au tétraèdre dont il s'agit.*

6. *Si, dans les plans des faces d'un tétraèdre, on trace quatre droites qui soient des génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre, ces droites, avec les sommets respectivement opposés, détermineront quatre plans que pourra toucher une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre dont il sagit.*

Ces deux théorèmes pouvant être déduits l'un de l'autre par la théorie des polaires réciproques, il nous suffira de démontrer le premier.

Soient A, B, C, D les quatre sommets du tétraèdre ; puisque les droites menées par les trois premiers A, B, C, appartiennent à une surface du second ordre dont une génératrice du même mode de génération passe par le quatrième sommet D, on pourra, par ce dernier sommet, mener une génératrice du deuxième mode de génération, laquelle s'appuyera sur les trois droites conduites par les sommets A, B, C ; donc, par les points où ces trois droites perceront les plans des faces opposées, on pourra (3) faire passer une infinité de surfaces du second ordre touchant ces plans en ces trois points ; l'une de ces surfaces pourra donc être choisie de manière à toucher aussi la quatrième face du tétraèdre ; et la droite qui joindra le point de contact au sommet D, qui lui est opposé, appartiendra (4) à la surface du second ordre déterminée par les trois premières droites ; ce sera donc précisément la quatrième droite ; le théorème est donc démontré.

Les propriétés des angles trièdres et des tétraèdres inscrits et circonscrits aux surfaces du second ordre, que nous venons, comme on le voit, de déduire d'une manière fort simple des propriétés analogues et bien connues des triangles inscrits et circonscrits aux coniques, ne sont que des cas très particuliers de théorèmes généraux, relatifs à l'angle trièdre et au tétraèdre, placés d'une manière quelconque, par rapport à une surface du second ordre.

7. *THÉORÈME. Si, par rapport à une même surface fixe quelconque du second ordre, on prend*

Les pôles des trois faces d'un angle trièdre, les plans conduits par ses arêtes et par les pôles des faces respectivement opposées se couperont tous trois suivant une même droite.

Les polaires des trois arêtes d'un angle trièdre, les polaires relatives à chacune des arêtes perceront les plans des faces respectivement opposées en trois points qui appartiendront à une même droite.

Les deux droites seront polaires l'une de l'autre, par rapport à la surface du second ordre dont il s'agit.

Démonstration. Chacune des deux parties de ce théorème résultant de l'autre, par la théorie des polaires réciproques, il nous suffira de démontrer la première.

Pour y parvenir, prenons les trois arêtes de l'angle trièdre dont il s'agit pour les axes des coordonnées, et supposons qu'alors l'équation de la surface du second ordre soit

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L=0;$$

les plans conduits par les arêtes et par les pôles des faces respectivement opposées auront respectivement pour équations

$$\{EH^2-(DG+FK)H+BKG+L(FD-BE)\}y-\{FK^2-(EH+DG)K+CGH+L(DE-CF)\}z=0,$$

$$\{FK^2-(EH+DG)K+CGH+L(DE-CF)\}z-\{DG^2-(FK+EH)G+AHK+L(EF-AD)\}x=0,$$

$$\{DG^2-(FK+EH)G+AHK+L(EF-AD)\}x-\{EH^2-(DG+FK)H+BKG+L(FD-BE)\}y=0;$$

or, il est manifeste que chacune de ces trois équations est comportée par les deux autres ; donc les plans qu'elles expriment se coupent tous trois suivant une même droite dont la double équation est

$$\{DG^2-(EH+FK)G+AHK+L(EF-AD)\}x$$

$$=\{EH^2-(FK+DG)H+BKG+L(FD-BE)\}y$$

$$=\{FK^2-(DG+EH)K+CGH+L(DE-CF)\}z\,;$$

ce qui démontre le théorème.

Si le sommet de l'angle trièdre est au centre de la surface directrice, le théorème devient celui-ci :

8. *Si un angle trièdre a son sommet au centre d'une surface du second ordre,*

Les plans conduits par ses arêtes et par les diamètres conjugués aux plans des faces respectivement opposées se coupent tous trois suivant une même droite.

Les plans diamètraux conjugués aux trois arêtes coupent les plans des faces respectivement opposées suivant trois droites qui sont situées dans un même plan.

Ce plan est le diamètral conjugué de la droite dont il s'agit.

Si la surface du second ordre est une sphère, on a alors ce théorème :

Les plans conduits par les arêtes d'un angle trièdre, perpendiculairement à ceux des faces respectivement opposées, se coupent tous trois suivant une même droite.

Les plans conduits par le sommet d'un angle trièdre, perpendiculairement à ses arêtes, coupent les plans des faces respectivement opposées suivant trois droites situées dans un même plan.

Le plan et la droite dont il s'agit sont perpendiculaires l'un à l'autre.

En d'autres termes :

Deux angles trièdres SUPPLÉMENTAIRES *l'un de l'autre ayant même sommet,*

Les plans qui contiennent leurs arêtes correspondantes se coupent tous trois suivant une même droite.

Les droites suivant lesquelles se coupent les plans des faces correspondantes sont toutes trois dans un même plan.

Et ce plan et cette droite sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Supposons que, dans le théorème (7), la surface du second ordre soit une surface conique, de même sommet que l'angle trièdre, et soit mené un plan transversal quelconque ; ce plan coupera la surface conique suivant une ligne du second ordre et l'angle trièdre suivant un triangle ; il coupera en outre les droites conjuguées aux trois faces de l'angle trièdre en trois points qui seront, par rapport à la courbe, les pôles des trois côtés du triangle ; il coupera enfin les plans conjugués aux arêtes suivant trois droites qui seront, par rapport à la même courbe, les polaires des sommets du triangle ; on aura donc ce théorème de géométrie plane :

9. *Un triangle et une ligne du second ordre étant situés dans un même plan,*

Les droites qui joignent les sommets du triangle aux pôles des côtés respectivement opposés se coupent toutes trois au même point.

Les points de concours des directions des côtés du triangle et des polaires des sommets respectivement opposés appartiennent tous trois à une même droite.

Et cette droite et ce point sont polaires l'un de l'autre.

Ce théorème donne naissance à plusieurs autres.

Si, par exemple, le triangle est inscrit ou circonscrit à la courbe ; on retombe sur le théorème (1) qui n'est ainsi qu'un cas particulier de celui-ci.

Si l'un des sommets du triangle est au centre de la courbe, on obtient ce théorème :

10. *Les droites menées par les sommets d'un triangle, paral-*

lèlement aux conjugués des diamètres d'une conique parallèles à ses côtés, concourent toutes trois en un même point.

Et, si cette conique est remplacée par deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, le théorème se changera en celui-ci :

11. *Si, par les sommets d'un triangle, on mène des droites faisant, avec une droite quelconque, des angles supplémentaires respectifs de ceux que font les côtés opposés avec cette même droite, ces trois droites concourront en un même point.*

Si dans le théorème (9) la conique devient infiniment petite, en restant homothétique avec une autre conique donnée, on aura ce théorème :

12. *Si, par les sommets d'un triangle on mène des diamètres à une conique tracée sur son plan, les conjugués de ces diamètres couperont les directions des côtés respectivement opposés en trois points qui appartiendront à une même droite.*

Si l'on remplace la conique par deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, le théorème se changera en celui-ci :

13. *Si l'on mène des droites aux trois sommets d'un triangle, de l'un quelconque des points de son plan, les perpendiculaires menées à ces droites, par ce même point, rencontreront les directions des côtés respectivement opposés en trois points qui appartiendront à une même droite.*

Considérons une conique tracée sur une surface du second ordre et un triangle dans son plan ; les plans polaires des sommets du triangle, pris par rapport à la surface courbe, passeront par les polaires de ces mêmes sommets, prises dans la conique ; et les polaires des côtés du triangle, prises par rapport à la surface courbe, passeront par les pôles de ces mêmes côtés, pris dans la conique ; or, ces trois polaires doivent concourir en un même point, pôle du plan du triangle, par rapport à la surface courbe ; d'où il suit que le théorème (9) peut prendre cet énoncé plus général :

14. *Un triangle et une surface quelconque du second ordre existant ensemble dans l'espace,*

Les plans déterminés par les sommets du triangle et par les polaires des côtés respectivement opposés se coupent tous trois suivant une même droite.

Les points où les plans polaires des sommets du triangle coupent les directions des côtés respectivement opposés appartiennent tous trois à une même droite.

Et ces deux droites sont polaires réciproques par rapport à la surface du second ordre dont il s'agit.

Nous pourrions démontrer ce théorème d'une autre manière qui consisterait à le déduire, par une transformation polaire, du théorème (7); nous en conclurions alors le théorème (9) de géométrie plane.

En supposant que la surface du second ordre devient infiniment petite, en restant homothétique avec une surface donnée, on obtient une nouvelle démonstration du théorème (8); et, en supposant que le plan de la conique soit tangent à la surface du second ordre, on obtient une nouvelle démonstration du théorème (12).

On pourrait ajouter à ce qui précède plusieurs autres théorèmes relatifs au système d'une conique et d'un triangle tracés dans son plan; mais nous préférons passer de suite à une proposition plus importante.

15. *THÉORÈME. Une surface quelconque du second ordre et un tétraèdre quelconque étant situés d'une manière quelconque dans l'espace,*

Les droites qui joignent les sommets du tétraèdre aux pôles des faces respectivement opposées sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.

Les droites, suivant lesquelles les plans des faces du tétraèdre sont coupés par les plans polaires des sommets respectivement opposés, sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.

Et, non seulement, ces deux nouvelles surfaces du second ordre sont polaires réciproques l'une de l'autre, par rapport à la surface du second ordre proposée, mais en outre les quatre génératrices de l'une sont polaires réciproques des quatre génératrices de l'autre, chacune à chacune.

Démonstration. Les deux parties de ce théorème résultant l'une de l'autre, par la théorie des polaires réciproques, il doit nous suffire de démontrer la première.

Par la première partie du théorème (7), les droites qui joignent trois sommets du tétraèdre aux pôles des faces respectivement opposées sont comprises dans trois plans se coupant suivant une même droite qui passe par le quatrième sommet; d'où il suit que cette dernière s'appuye à la fois sur les trois autres. Or, la droite qui joint le quatrième sommet au pôle de la face opposée a aussi ce sommet pour point commun avec cette quatrième droite; d'où il suit que celle-ci s'appuye à la fois sur les droites qui joignent les quatre sommets aux pôles des faces respectivement opposées. On peut donc mener, par chaque sommet du tétraèdre, une droite qui s'appuye à la fois sur les quatre droites dont il s'agit; ces quatre droites sont donc, en effet, quatre génératrices d'un même mode de génération d'une même surface du second ordre.

Les quatre droites qui, menées par les sommets du tétraèdre, s'appuyent ainsi, à la fois, sur les quatre autres, sont, comme nous en avons déjà fait la remarque (4), quatre génératrices du deuxième mode de génération de la surface du second ordre déterminée par les quatre premières.

Ce théorème est d'une grande généralité, et conduit à une multitude de propriétés nouvelles du tétraèdre.

Et, d'abord, si une ou plusieurs faces du tétraèdre dont il s'agit, sont tangentes à la surface du second ordre, ces faces auront pour pôles leurs points de contact avec elles; comme à l'inverse, si un ou plusieurs de ses sommets sont sur cette surface, leurs plans polaires seront les plans tangens à ces sommets, d'où l'on voit déjà que ce théorème comprend, comme cas particulier, celui que nous avons démontré directement ci-dessus (4).

Si l'on suppose un des sommets placé au centre de la surface, la première partie de ce théorème (15) donne celui-ci :

16. *Les parallèles menées, par les sommets d'un tétraèdre, aux conjugués des plans diamétraux d'une surface quelconque du second ordre, respectivement parallèles à ses faces, sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.*

Nous pouvons donc ajouter, d'après le théorème (6) que,

Par les points où ces quatre droites sont respectivement coupées par les plans des faces opposées, on peut faire passer une surface du second ordre tangente à ces quatre faces.

Si la surface du second ordre est supposée sphérique, on aura ce théorème :

Les perpendiculaires abaissées des sommets d'un tétraèdre sur les plans des faces respectivement opposées, sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une même surface du second ordre.

Si, dans le théorème (15), la surface du second ordre devient infiniment petite, en restant homothétique avec une surface donnée du même ordre, on en conclura celui-ci :

17. *Les plans diamétraux d'une surface du second ordre, conjugués aux diamètres de cette surface dont les directions passent par les sommets d'un tétraèdre, coupent les plans des faces respectivement opposées de ce tétraèdre suivant quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.*

Si la surface du second ordre est sphérique, ce théorème se modifiera comme il suit :

Les plans conduits par un même point quelconque de l'espace, perpendiculairement aux droites menées de ce point aux sommets d'un tétraèdre, coupent les plans des faces respectivement oppo-

tées de ce tétraèdre suivant quatre génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre.

Si les six arêtes du tétraèdre sont tangentes à la surface du second ordre, le théorème (15) devient celui-ci :

18. *Une surface du second ordre touchant à la fois les six arêtes d'un tétraèdre,*

Dans l'hexaèdre octogone circonscrit, dont les faces seront les plans tangens aux six points de contact, les diagonales joignant les sommets respectivement opposés seront quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.

Dans l'octaèdre hexagone inscrit, qui aura ses sommets aux six points de contact, les droites suivant lesquelles se couperont les plans des faces respectivement opposés seront quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.

Et ces deux surfaces seront polaires réciproques l'une de l'autre, relativement à la surface proposée.

Les pôles des faces d'un tétraèdre sont les sommets d'un deuxième tétraèdre dont les faces ont respectivement pour pôles les sommets du premier. Si les arêtes de celui-ci sont tangentes à la surface directrice du second ordre, les arêtes correspondantes de l'autre en seront les tangentes conjuguées, et le précédent théorème pourra s'énoncer ainsi :

19. *Si les six arêtes d'un tétraèdre sont toutes tangentes à une même surface du second ordre, les conjuguées de ces tangentes sont les six arêtes d'un nouveau tétraèdre qui pourra être dit conjugué au premier.*

Les droites qui joindront les sommets respectivement opposés, dans les deux tétraèdres, seront quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.

Les intersections des plans des faces respectivement opposées, dans les deux tétraèdres, seront quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.

Et ces deux surfaces seront polaires réciproques l'une de l'autre, relativement à celle que touchent les douze arêtes des deux tétraèdres.

Si l'on suppose, dans le théorème (15), que la surface directrice se réduit à une conique, on en conclura celui-ci :

20. *Une conique et un tétraèdre existant ensemble dans l'espace, les droites qui joignent les sommets du tétraèdre avec les pôles des droites suivant lesquelles le plan de cette conique coupe les plans des faces respectivement opposées, sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une même surface du second ordre.*

Si l'un des axes de la conique devient nul, elle se réduit à une droite d'une longueur limitée, et le théorème se change dans celui qui suit :

21. *Une transversale perçant les plans des quatre faces d'un tétraèdre, et deux points fixes étant pris arbitrairement sur cette transversale ; si l'on joint par une droite chaque sommet du tétraèdre avec le point de cette transversale, quatrième harmonique, aux deux points fixes et à celui où elle perce le plan de la face opposée, on obtiendra ainsi quatre génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre.*

Si l'un des points fixes était à l'infini, on aurait une autre proposition que nous nous dispenserons d'énoncer.

Si la surface directrice du théorème (15) est une surface conique, on obtiendra le théorème suivant :

22. *Les plans diamétraux d'une surface conique du second ordre, conjugués aux droites qui joignent son sommet aux quatre sommets d'un tétraèdre, coupent les plans des faces respectivement opposées suivant quatre génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre.*

Ce théorème aurait pu être déduit de celui qui le précède (20), au moyen d'une transformation polaire. Il n'est, au surplus, qu'un cas particulier du théorème (17).

On peut supposer que la surface conique devient le système de deux plans, que ces plans se coupent à angles droits, qu'ils sont parallèles, que l'un d'eux passe à l'infini; ce qui offrira tout autant de théorèmes différens.

Les théorèmes (20) et (22) donnent lieu à deux autres théorèmes plus généraux, susceptibles de diverses conséquences.

Si, en effet, par la conique, on conçoit une surface quelconque du second ordre, la polaire, par rapport à cette surface du second ordre, d'une droite située dans le plan de la conique, percera ce plan en un point qui sera précisément le pôle de cette droite, par rapport à cette même conique; et si, dans la surface conique, on inscrit une surface quelconque du second ordre, la polaire, par rapport à cette dernière surface, d'une droite menée par le sommet du cône, sera comprise dans le plan diamètral de ce même cône conjugué à la droite dont il s'agit; nos deux théorèmes prendront donc la forme suivante :

23. *Une surface du second ordre et un tètraèdre existant ensemble dans l'espace,*

Les droites menées des sommets du tètraèdre aux points où un plan fixe quelconque est percé par les polaires de ses intersections, avec les plans des faces respectivement opposées, sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'une autre surface du second ordre.

Les droites suivant lesquelles les plans des faces du tètraèdre sont coupés par les plans conduits par un point fixe quelconque, et par les polaires des droites qui joignent ce point fixe aux sommets respectivement opposés, sont quatre gènèratrices d'un même mode de gènèration d'une autre surface du second ordre.

Si le plan et le point fixe sont polaires réciproques l'un de l'autre, il en sera de même des deux nouvelles surfaces du second ordre.

Si, dans la première partie du théorème, le plan transversal passe à l'infini, on retombe de nouveau sur le théorème (16), et si, dans la seconde, on suppose que le point fixe coïncide avec le centre de la surface, on retrouve le théorème (17).

Si, dans ce qui précède, les faces du tétraèdre avaient pour pôles, relativement à la surface du second ordre, les sommets repectivement opposés, ce qui, pour une même surface fixe du second ordre, peut avoir lieu dans une infinité de tétraèdre; chaque arête aurait pour polaire l'arête opposée, et alors les théorèmes ci-dessus n'auraient plus d'application. Mais, en considérant ces tétraèdres relativement à une deuxième surface fixe du second ordre, ils se trouveront jouir de diverses propriétés bien remarquables, dont l'examen fera partie d'un autre travail. Nous nous bornerons, pour le présent, à en extraire, sans les démontrer, les propositions suivantes :

24. *Deux surfaces du second ordre étant données dans l'espace, si l'on conçoit un angle trièdre mobile et variable autour de son sommet fixe, tel que les polaires de ses arêtes, relatives à la première de ces deux surfaces, soient constamment dans les plans des faces respectivement opposées;*

1.° *Les points où les arêtes de l'angle trièdre variable perceront la deuxième surface seront les sommets d'un octaèdre hexagone variable, inscrit à cette deuxième surface, lequel sera constamment circonscrit à une troisième surface fixe du second ordre.*

2.° *Les surfaces coniques circonscrites à la deuxième surface, suivant ses intersections avec les trois faces de l'angle trièdre variable, envelopperont constam-*

1.° *Les plans tangens menés à la deuxième surface par les polaires des arêtes de l'angle trièdre variable seront les faces d'un hexaèdre octogone variable, circonscrit à cette deuxième surface, lequel sera constamment inscrit à une troisième surface fixe du second ordre.*

2.° *Les surfaces coniques circonscrites à la deuxième surface, dont les sommets seront les pôles des faces de l'angle trièdre variable, se couperont constam-*

ment une quatrième surface fixe du second ordre.	*ment sur une quatrième surface fixe du second ordre.*

Si le sommet fixe de l'angle trièdre variable est le centre même de la première surface fixe du second ordre, ses arêtes seront évidemment trois diamètres conjugués de cette surface, et il en résultera les propositions suivantes :

1.° *Si, par un point fixe, on conduit trois droites mobiles, constamment parallèles à trois diamètres conjugués d'une surface fixe du second ordre, ces droites perceront une deuxième surface fixe du second ordre aux sommets d'un octaèdre hexagone variable inscrit, lequel sera constamment circonscrit à une troisième surface fixe du même ordre.*

2.° *Si, par un point fixe, on conduit trois plans mobiles, constamment parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'une surface fixe du second ordre, les surfaces coniques circonscrites à une deuxième surface fixe du second ordre, suivant ses intersections avec ses plans mobiles, envelopperont constamment une troisième surface fixe du même ordre.*

3.° *Si, six plans mobiles dans l'espace et parallèles deux à deux sont constamment parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'une première surface fixe du second ordre, et tangens à une deuxième surface fixe de cet ordre, ces plans formeront un parallélipipède variable circonscrit, lequel sera constamment inscrit à une troisième surface fixe du même ordre.*

4.° *Le lieu des points de l'espace par lesquels on peut mener, à une surface fixe du second ordre, trois tangentes respectivement parallèles à trois diamètres conjugués d'une deuxième surface fixe de cet ordre, est une troisième surface fixe du même ordre.*

Ces théorèmes sont susceptibles de nombreuses conséquences que nous nous réservons de développer dans un autre article où nous ferons connaître diverses autres propriétés de l'angle dièdre, de l'angle trièdre et du tétraèdre, considérés par rapport à une surface du second ordre (*).

P. S. Nous nous apercevons, en terminant, d'une inadvertance que nous devons nous empresser de réparer.

Immédiatement avant le n.° 13, il faut lire ce qui suit :

12 bis. *Si des rayons incidens, partant des trois sommets d'un triangle, vont concourir en un même point d'une droite réfléchissante, située d'une manière quelconque dans son plan, les rayons réfléchis rencontreront les directions des côtés respectivement opposés en trois points qui appartiendront à une même droite.*

Si l'on remplace la conique par un cercle, on obtiendra cet autre théorème, déjà énoncé par M. Bobillier (*Annales*, tom. XVIII, pag. 185).

13. *Si, de l'un quelconque des points du plan d'un triangle, on mène des droites à ses sommets, etc., etc.*

Les théorèmes (12 *bis*) et (13), ont leurs analogues dans l'espace, qui se

---

(*) M. Chasles désire que, dès aujourd'hui, nous fassions savoir à nos lecteurs, 1.° qu'il nous a adressé, sous la date du 8 juillet dernier, un mémoire sur les *projections stéréographiques*, dont le contenu renferme quelques propositions déjà publiées par M. Bobillier dans la *Correspondance* de M. Quetelet (tom. IV, pag. 153); 2.° que, par une lettre de Nice, en date du 15 janvier dernier, il nous avait déjà annoncé être depuis longtemps en possession de ces propositions et d'autres analogues. Nous nous empressons de faire cette déclaration pour conserver les droits de M. Chasles, dans le cas où l'abondance des matières nous contraindrait de différer la publication de son travail.

M. Chasles désire également qu'on sache qu'il est en état de remplacer par de la géométrie pure les quelques lignes de calcul que renferme le présent mémoire.

J. D. G.

déduisent du théorème (22), comme ceux-là se déduisent du théorème (12); les voici :

Si des plans, conduits par les quatre sommets d'un tétraèdre, se coupent suivant une même droite tracée dans un plan fixe quelconque les plans conduits par cette droite, de manière à faire, dans un autre sens, les mêmes angles avec le plan fixe, couperont les plans des faces respectivement opposées du tétraèdre, suivant quatre génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre.

Si, de l'un quelconque des points de l'espace, on mène des droites aux quatre sommets d'un tétraèdre, les plans conduits par le même point, perpendiculairement à ces droites, couperont les plans des faces respectivement opposées, suivant quatre génératrices d'un même mode de génération d'une surface du second ordre.