ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

J. STEINER

Géométrie pure. Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 37-64

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__37_0>

GÉOMÉTRIE PURE.

Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques ;

Par M. J. Steiner.

1.

Si, de l'un quelconque P des points du plan d'un triangle ABC (fig. 1), on abaisse, sur les directions de ses côtés BC, CA, AB, respectivement, les perpendiculaires PA', PB', PC', et qu'on joigne le même point à ses sommets par des droites, on aura

$$\overline{BA'}^2-\overline{CA'}^2=\overline{BP}^2-\overline{CP}^2 \ ,$$

$$\overline{CB'}^2-\overline{AB'}^2=\overline{CP}^2-\overline{AP}^2 \ ,$$

$$\overline{AC'}^2-\overline{BC'}^2=\overline{AP}^2-\overline{BP}^2 \ ;$$

d'où, en ajoutant, réduisant et transposant,

$$\overline{AB'}^2+\overline{BC'}^2+\overline{CA'}^2=\overline{BA'}^2+\overline{CB'}^2+\overline{AC'}^2 \ ; \qquad (*)$$

(*) Pour un triangle sphérique, on aurait

$$\mathrm{Cos.}AB'.\mathrm{Cos.}BC'.\mathrm{Cos.}CA'=\mathrm{Cos.}BA'.\mathrm{Cos.}CB'.\mathrm{Cos.}AC' \ ;$$

d'où on déduirait des conséquences analogues.

telle est donc la condition nécessaire et suffisante pour que des perpendiculaires élevées aux trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, par des points A′, B′, C′ de leurs directions respectives, concourent toutes trois en un même point P.

Il en résulte immédiatement 1.° que les perpendiculaires élevées aux côtés d'un triangle, par leurs milieux, concourent toutes trois en un même point; 2.° que les perpendiculaires abaissées sur les directions de ces mêmes côtés, des sommets respectivement opposés, concourent aussi toutes trois en un même point.

2.

Par les pieds A′, B′, C′ des trois perpendiculaires, concevons un cercle dont O soit le centre, lequel coupera de nouveau les mêmes côtés du triangle aux points A″, B″, C″. Par les points P et O soit conduite une droite, et soit prolongée cette droite au-delà du point O d'une quantité OP′=OP. Parce que les perpendiculaires qu'on abaisserait du point O sur les directions des trois côtés du triangle tomberaient sur les milieux des cordes interceptées A′A″, B′B″, C′C″; il s'ensuit que les perpendiculaires élevées à ces mêmes côtés, par les points A″, B″, C″, doivent concourir toutes trois au point P′. On a donc ce théorème:

« Si, de l'un quelconque P des points du plan d'un triangle » ABC, on abaisse, sur les directions respectives des côtés BC, » CA, AB de ce triangle, les perpendiculaires PA′, PB′, PC′, et » si, par les pieds A′, B′, C′ de ces perpendiculaires, on fait » passer une circonférence dont O soit le centre et qui coupe » de nouveau les directions de ces mêmes côtés en A″, B″, C″, » les perpendiculaires élevées respectivement à ces mêmes côtés, par » ces trois derniers points, se couperont toutes trois en un même » point P′ tel que le point O sera le milieu de la droite PP′ ».

3.

Soient menées les droites $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ ainsi que $B''C''$. Les angles $AB'C'$ et $AC''B''$ qui ayant leurs sommets à la circonférence s'appuient sur le même arc $B''C'$, sont égaux; mais à cause des quadrilatères $B'PC'A$, $C''P'B''A$ inscriptibles au cercle, ces angles sont respectivement égaux aux angles APC', $AP'B''$; donc ces derniers sont aussi égaux entre eux. D'un autre côté, les angles $B'PC'$, $B''P'C''$, supplémens d'un même angle A, sont égaux entre eux ; donc, par soustraction, les angles APB' et $AB'C''$ sont aussi égaux ; et il en doit être de même de leurs complémens PAB' et $P'AC''$; mais à cause du quadrilatère inscriptible au cercle, à PAB' on peut substituer son égal $PC'B'$; donc ce dernier est égal à $P'AC''$; puis donc que les côtés $C'P$ et AC'' de ces deux angles sont perpendiculaires l'un à l'autre, leurs côtés $C'B'$ et AP' seront aussi perpendiculaires l'un à l'autre ; et il devra en être de même des droites $C'A'$, $A'B'$, comparées respectivement aux droites $P'B$, $P'C$.

Soit a le milieu de la corde $B'C'$, la droite Oa devra être perpendiculaire à $B'C'$, et, par suite, parallèle à $P'A$. Pour les mêmes raisons si b et c sont les milieux respectifs de $C'A'$ et $A'B'$, les droites Ob et Oc seront respectivement perpendiculaires à celles-là.

On a donc ce théorème :

« Si, de l'un quelconque P des points du plan d'un triangle ABC, » on abaisse, sur les directions de ses côtés BA, CA, AB, les per- » pendiculaires PA', PB', PC', et si, des sommets du triangle, » on abaisse, respectivement sur les directions des côtés $B'C'$, $C'A'$, » $A'B'$ du triangle $A'B'C'$, d'autres perpendiculaires, ces trois der- » nières concourront en un même point P' (*). En outre, si l'on

(*) Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un autre que nous avons proposé de démontrer, sous le n.° 54, dans le II.e volume du *Journal* de M. Crelle (pag. 287) où on trouvera aussi ses analogues, sous les n.os 55 et 56.

» abaisse de ce dernier point, sur les directions des mêmes côtés
» du triangle ABC, des perpendiculaires P′A″, P′B″, P′C″, les six
» points A′, B′, C′, A″, B″, C″ appartiendront à une même cir-
» conférence ayant son centre O au milieu de la droite PP′ ».

De là on déduira facilement la solution de ce problème :

« Des droites PA, PB, PC étant menées de l'un quelconque P
» des points du plan d'un triangle ABC à ses trois sommets; ins-
» crire à ce triangle un autre triangle A′B′C′, dont les trois cô-
» tés B′C′, C′A′, A′B′ soient respectivement perpendiculaires à ces
» droites ? »

4.

Nous venons de faire voir que les angles PAC et P′AB sont égaux; or, comme les circonstances sont les mêmes relativement aux trois sommets du triangle ABC, on doit avoir

$$\text{Ang.}PAC=\text{Ang.}P'AB\ ,$$

$$\text{Ang.}PBA=\text{Ang}\ P'BC\ ,$$

$$\text{Ang.}PCB=\text{Ang}\ P'CA\ ;$$

d'où résulte ce théorème :

« Par l'un quelconque P, des points du plan d'un triangle ABC,
» soient menées à ses sommets des droites PA, PB, PC; si, par
» les mêmes sommets, on mène trois nouvelles droites faisant
» respectivement, avec les côtés AB, BC, CA, des angles égaux aux
» angles PAC, PBA, PCB, ces trois dernières droites concourront
» en un même point P′; et si, des points P, P′ on abaisse sur
» les directions des côtés BC, CA, BA du triangle les perpendicu-
» laires PA′, PB′, PC′ P′A″, P′B″, P′C″, leurs pieds A′, B′,
» C′, A″, B″, C″ appartiendront tous six à une même circon-
» férence ayant son centre O au milieu de la droite PP′ ».

5.

Soit prolongée la perpendiculaire PA', au-delà de A', d'une quantité $A'Q=A'P$, et soient menées QP', coupant BC en M, OA', qui sera parallèle à $P'Q$ et d'une longueur moitié moindre, et enfin PM ; d'après cette construction on aura $MP=MQ$, et, par suite, $MP+MP'=P'Q=2OA'$; en outre les angles $P'MB$, PMA, tous deux égaux à l'angle QMC, seront conséquemment égaux entre eux. Il résulte de tout cela que les points P, P' sont les deux foyers d'une ellipse tangente en M au côté BC, laquelle a son centre en O et son grand axe égal au diamètre du cercle dont le point O est le centre ; d'où il résulte qu'elle touche ce cercle aux deux extrémités de son grand axe ; et, comme ce que nous venons de prouver, relativement au côté BC du triangle, se prouverait également des deux autres, on a le théorème suivant :

« 1.° Chacun des points de l'intérieur d'un triangle peut être con-
» sidéré comme l'un des foyers d'une ellipse inscrite à ce trian-
» gle ;

» 2.° Les pieds des perpendiculaires abaissées des deux foyers
» d'une ellipse sur ses tangentes sont tous situés sur une même
» circonférence, ayant le grand axe de cette ellipse pour diamètre ;

» 3.° Un angle étant arbitrairement circonscrit à une ellipse,
» les droites menées de ses deux foyers au sommet de cet angle
» font des angles respectivement égaux avec ses deux côtés ».

En conséquence de cette dernière propriété et de l'égalité des angles $B'PC'$, $B''P'C''$, les triangles rectangles $P'C''A$, $P'B''A$ sont respectivement semblables aux triangles rectangles $PB'A$, $PC'A$, ce qui donne

$$P'B'' : PC' : AP' : AP \,,$$

$$PB' : P'C'' : AP : AP' \,,$$

et, par suite,

$$PB'.P'B''=P'C'' ,$$

c'est-à-dire,

« 4.° Le rectangle des perpendiculaires abaissées des deux foyers » d'une ellipse sur une quelconque de ses tangentes est constant, » et conséquemment égal au carré du demi-petit axe de l'ellipse ».

6.

Entre divers cas particuliers nous signalerons seulement le suivant :

Supposons que le point P (fig. 2) soit le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ; les pieds A', B', C' des perpendiculaires PA', PB', PC', abaissées de ce point sur les directions des côtés BC, CA, AB, en seront respectivement les milieux ; et, par conséquent, les droites B'C', C'A', A'B' seront respectivement parallèles aux côtés BC, CA, AB ; et comme, par exemple, la droite AP' est (3) perpendiculaire à B'C', elle sera aussi perpendiculaire à BC, et, par conséquent, le point P' sera le point de concours des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle ABC sur les directions des côtés respectivement opposés. On a donc ce théorème :

« Les milieux A', B', C' des côtés d'un triangle ABC, et les pieds » A'', B'', C'' des perpendiculaires abaissées de ses sommets sur les » directions de ces mêmes côtés, sont six points situés sur la circonférence d'un même cercle dont le centre O est au milieu » de la droite PP' qui joint le centre P du cercle circonscrit au » triangle ABC avec le point P' de concours des perpendiculaires » abaissées de ses sommets sur les directions des côtés opposés. Ces » deux points P, P' sont les foyers d'une ellipse inscrite au triangle ABC, laquelle est concentrique avec le cercle circonscrit au » triangle A'B'C' et a son grand axe égal au diamètre de ce cer-

» cle, ou, ce qui revient au même (puisque les côtés du triangle $A'B'C'$ sont moitié de ceux du triangle ABC), égal au rayon » du cercle circonscrit au triangle ABC. En outre, les trois rayons » PA, PB, PC seront respectivement perpendiculaires aux côtés » $B''C''$, $C''A''$, $A''B''$ du triangle $A''B''C''$; enfin ces rayons se- » ront tellement dirigés que les angles PAB, PBC, PCA, sont respectivement égaux aux angles $A''AC$, $P''AB$, $B''BA$, $C''CB$ ».

Sur la droite PP' il existe un quatrième point G (*Carnot*), intersection des droites AA', BB', CC' qui joignent les sommets du triangle ABC aux milieux des côtés respectivement opposés, et les quatre points P, G, O, P' sont situés harmoniquement, c'est-à-dire, de telle sorte qu'on a $GO:GP::P'O:P'P$, ce qui revient à $1:2::3:6$. En outre, les points P', G sont les centres de similitude des deux cercles qui ont leurs centres en O et P; donc le cercle qui a son centre en O passe par les milieux des droites $P'A$, $P'B$, $P'C$; et les points A'', B'', C'', sont les milieux respectifs des droites $P'A'''$, $P'B'''$, $P'C'''$, prolongemens des droites $P'A''$, $P'B''$, $P'C''$, jusqu'à la rencontre de la circonférence qui a son centre en P (*).

Le cercle qui a son centre en O jouit, en particulier, de cette propriété bien digne de remarque: « il touche chacun des qua-

(*) De là, en particulier, on conclura facilement ce théorème:
« Si, sur la circonférence du cercle qui a son centre en P, on prend ar- » bitrairement quatre points A, B, C, D; ces quatre points seront, trois » à trois, les sommets de quatre triangles inscrits auxquels correspondront » quatre points P', quatre points O et quatre points G. Or, les quatre » points de chaque sorte appartiendront à une même circonférence dont » le rayon sera, pour les quatre points P', égal à celui du cercle donné; » moitié de ce rayon, pour les quatre points O, et son tiers seulement pour » les quatre points G. En outre, les centres de ces trois nouveaux cercles » seront, avec le point P harmoniquement situés sur une même droite, » comme le sont les quatre points P', O, G, P; de sorte que le centre P » sera le centre de similitude commun de ces trois nouveaux cercles ».

» tre cercles inscrits et ex-inscrits au triangle ABC ; c'est-à-dire,
» chacun des quatre cercles qui peuvent toucher à la fois les trois
» côtés de ce triangle ».

7.

Comme les propriétés de l'ellipse démontrées ci-dessus (5) ont lieu d'une manière analogue pour toutes les autres coniques, ce qui se prouve par de semblables considérations, on peut établir ce théorème plus général :

« Chaque point pris à volonté dans le plan d'un triangle donné,
» est le foyer d'une conique inscrite ou ex-inscrite à ce triangle ;
» conique de laquelle on peut, par une construction facile, dé-
» terminer l'autre foyer, le centre et le premier axe ».

Proposons-nous d'abord de découvrir quelle relation il peut y avoir entre la nature de la conique et la situation, par rapport au triangle, du point pris arbitrairement pour foyer.

8.

Soit ABC (fig. 3) le triangle donné, et soit P un point pris arbitrairement sur son plan pour foyer d'une conique touchant à la fois les trois côtés de ce triangle.

De ce point P soient menées les droites PA, PB aux deux sommets A, B de ce triangle. Pour déterminer l'autre foyer P′ de la courbe, il faudra (5) conduire par les points A, B deux droites AP′, BP′ formant, respectivement avec CA, CB ou leurs prolongemens, des angles égaux à PAB, PBA ; et le point P′ de concours de ces deux droites sera le second foyer cherché. Afin donc que la courbe soit une parabole, il faudra que ce second foyer soit infiniment distant du premier, ou, ce qui revient au même, il faudra que les deux droites AP′, BP′ soient parallèles ; et réciproquement, toutes les fois que ces deux droites seront parallèles, la courbe sera une parabole.

Si alors on conçoit par le sommet C une parallèle à ces deux droites, cette parallèle divisera l'angle ACB en deux parties respectivement égales aux angles que forment AP et BP avec les prolongemens de CA et CB ; donc la somme de ces deux derniers angles, est égale à l'angle C ; donc aussi la somme des deux angles PAB et PBA, respectivement égaux à ces deux-là, doit aussi être égale à l'angle ACB ; mais l'angle APB est supplément de la somme des deux angles PAB et PBA, donc il doit être aussi supplément de l'angle ACB ; d'où il suit que les quatre points A, B, C, P appartiennent à une même circonférence ; on a donc ce théorème :

« Toutes les paraboles, touchant à la fois les trois côtés d'un » même triangle, ont leurs foyers sur la circonférence du cercle » circonscrit, et, réciproquement, tout point de la circonférence du » cercle circonscrit à un triangle est le foyer d'une parabole tou» chée à la fois par les trois côtés de ce triangle ».

D'après ce qui a été démontré ci-dessus (5, 2°), les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer d'une parabole sur ses tangentes sont tous situés sur la tangente au sommet de la courbe, et conséquemment en ligne droite; en combinant donc cette proposition avec celle qui vient d'être démontrée, on parviendra à ce théorème connu (*) :

« Les pieds des perpendiculaires abaissées sur les directions des » trois côtés d'un triangle, de l'un quelconque des points de la » circonférence du cercle circonscrit, appartiennent tous trois à une » même droite ».

Il ne sera pas difficile de parvenir par les mêmes considérations à ce théorème plus général :

« Si, de l'un quelconque des points de la circonférence du cer-

(*) Voy. *Annales*, tom. IV, pag. 251.

J. D. G.

» cle circonscrit à un triangle, on conduit, sur les directions de ses
» côtés, des obliques faisant, dans le même sens, avec ces mê-
» mes côtés, des angles égaux quelconques, les pieds de ces obli-
» ques appartiendront tous trois à une même droite. En outre,
» toutes les droites qu'on obtiendra, en variant l'angle des obli-
» ques, envelopperont une parabole qui aura pour foyer le point
» de départ de ces obliques ».

9.

Revenons au problème que nous nous étions proposé (7). Observons d'abord que le plan de la figure se trouve partagé tant par les trois côtés du triangle ABC, considérés comme des droites indéfinies, que par la circonférence du cercle, en *dix* régions dont quatre finies et six indéfinies. Les quatre finies sont le triangle lui-même que nous désignerons par T, et les trois segmens que nous désignerons respectivement par S_a, S_b, S_c. Les six indéfinies sont les opposées au sommet des trois angles du triangle que nous désignerons respectivement par A′, B′, C′, et trois autres régions terminées chacune par un arc de cercle et par les prolongemens de deux côtés du triangle. Nous désignerons ces dernières par T_a, T_b, T_c.

En supposant les deux droites AP′, BP′ parallèles, nous avions l'angle ACB égal à la somme des deux angles PAB et PBA ; mais, si la somme de ces deux angles croît de manière à devenir plus grande que l'angle ACB, les droites AP′, BP′ convergeront en un point P′, situé dans la région T_c, et le point P passera aussi dans cette même région ; de sorte que *la conique ne pourra être qu'une ellipse.*

Si au contraire la somme des angles PAB et PBA diminue, le point P passera dans la région ou segment S_c, tandis que le point P′ passera dans la région C′; d'où il est aisé de conclure que *la conique ne pourra être qu'une hyperbole.*

Donc (8) on a le théorème suivant :

« Tout point P, pris arbitrairement dans le plan d'un triangle » ABC, est le foyer d'une conique touchant à la fois les trois cô- » tés de ce triangle ; or, 1.° cette conique sera une *parabole* si » le point P est sur la circonférence du cercle circonscrit au trian- » gle ; 2.° ce sera une *ellipse* si le point P est intérieur au trian- » gle, ou bien si, étant extérieur au cercle, il se trouve situé dans » l'espace terminé par un quelconque des côtés de ce triangle, et » les prolongemens des deux autres ; 3.° enfin la courbe sera une » *hyperbole* si le point P est à la fois intérieur au cercle et ex- » térieur au triangle, ou bien s'il se trouve situé dans l'opposé au » sommet de l'un des angles de ce triangle (*) ».

Et réciproquement,

« Une conique touchant à la fois les trois côtés d'un triangle » ABC ; 1.° si cette conique est une *parabole*, son foyer sera si- » tué sur la circonférence du cercle circonscrit ; 2.° si cette coni- » que est une *ellipse*, ou bien elle aura ses deux foyers intérieurs » au triangle, ou bien ils seront tous deux extérieurs au cercle et » situés dans l'espace circonscrit par l'un des côtés de ce triangle, » et les prolongemens des deux autres ; 3.° enfin, si cette conique » est une *hyperbole*, un de ses foyers sera compris dans l'un des » trois segmens du cercle circonscrit extérieur au triangle, tandis » que l'autre se trouvera situé dans l'opposé au sommet de l'an- » gle respectivement opposé de ce triangle ».

Ce que nous avons dit ci-dessus (5, 3°) permet de préciser mieux encore la situation relative des deux foyers dans le cas de l'ellipse et dans celui de l'hyperbole ; il en résulte, en effet, que deux tangentes étant menées d'un même point à la courbe, et étant menées les deux droites qui divisent en deux parties égales les qua-

---

(*) C'est le théorème 32 que nous avions proposé à démontrer à la pag. 191 du II.^{me} volume du *Journal* de M. Crelle.

tre angles formés par ces deux tangentes, les deux foyers se trouveront toujours situés d'un même côté de l'une de ces droites et de différens côtés de l'autre.

10

Nous avons déjà remarqué (pag. 3) que si, par un point P pris arbitrairement dans le plan d'un triangle ABC, et par chacun de ses sommets, on mène trois droites AP, BP, CP, rencontrant les directions des côtés respectivement opposés en A′, B′, C′, il existe toujours une conique qui touche les trois côtés du triangle en ces trois points. Examinons présentement *quelle doit être la situation du point* P *sur le plan du triangle, pour que la courbe soit une parabole, une ellipse ou une hyperbole.* Commençons par le cas de la parabole dont la discussion n'offre aucune difficulté.

Soit P (fig. 4) le foyer d'une parabole, et soit AB une tangente quelconque à la courbe, dont le point de contact soit en C′. Sur la droite PC′ soit pris un point C quelconque par lequel soit menée la droite CDP′, parallèle à l'axe de la parabole, coupant la tangente AB en D; alors les droites CC′P et CDP′ couperont la tangente AB sous le même angle; de telle sorte que le triangle DCC′ sera isocèle.

Par le point C soient menées à la courbe deux nouvelles tangentes CA, CB, lesquelles (8) formeront respectivement des angles égaux avec les droites CP, CP′; d'où on conclura que le trian- ACB est isocèle. Donc

« Si une parabole touche les trois côtés d'un triangle isocèle,
» la droite menée par le sommet de ce triangle et par le point de
» contact de sa base passera constamment par le foyer de la courbe ».

De ce théorème on conclut, sur-le-champ, le suivant :

« Si une parabole touche les trois côtés d'un triangle équilaté-
» ral, les droites qui joindront les points de contact des côtés du

» triangle avec les sommets respectivement opposés concourront tou-
» tes trois au foyer de la courbe » ; et, par conséquent (8),

« Si une parabole touche les trois côtés d'un triangle équilaté-
» ral, les droites menées par les sommets et par les points de con-
» tact des côtés respectivement opposés se coupent toutes trois en
» un même point, et le lieu de ce point est la circonférence du
» cercle circonscrit ».

Soit donc ABC (fig. 4) un triangle équilatéral, et soient menées par ses sommets et par un quelconque P des points de la circonférence du cercle circonscrit, les droites AP, BP, CP rencontrant en A', B', C' les directions des côtés respectivement opposés ; la conique qui touchera les trois côtés du triangle en A', B', C' sera donc une parabole dont le point P sera le foyer ; et les droites AA'', BB'', CC'', menées par les sommets du triangle et par les milieux A'', B'', C'' des cordes de contact $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, que l'on sait être parallèles à l'axe, seront ainsi parallèles entre elles.

Supposons présentement que le point P se déplace sur la droite CP, et que, par exemple, il passe en p dans l'intérieur du cercle ; les points de contact A', B' passeront respectivement en a', b' ; les cordes de contact $C'A'$, $C'B'$ deviendront $C'a'$, $C'b'$ dont les milieux seront en b'' et a'' ; et les droites Aa'', Bb'' se rencontreront nécessairement dans l'angle $A'CB'$, ce qui s'aperçoit aisément si l'on considère le parallélisme de AA'' et BB'' de $A''a''$ et $B'b'$ et de $B''b''$ et $A'a'$; et le point de concours k de ces deux droites sera le centre de la conique ; d'où il est aisé de voir que *cette courbe ne saurait être alors qu'une ellipse*. Si, au contraire, on suppose que le point P sort du cercle, les deux mêmes droites Aa'', Bb'' iront concourir dans l'opposé au sommet de l'angle $A'CP'$; d'où on conclura qu'alors *la courbe ne saurait être qu'une hyperbole*. Donc

« Si, par un quelconque P des points du plan d'un triangle équila-
» téral ABC, et par ses sommets, on mène les droites AP, BP, CP,

» rencontrant les directions des côtés respectivement opposés en A′, » B′, C′, la conique touchant les côtés du triangle en ces trois » points sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant » que le point P sera intérieur au cercle circonscrit, extérieur à » ce cercle ou sur sa circonférence, et *vice versâ* ».

Ce théorème est susceptible de généralisation et d'application diverses qui vont présentement nous occuper.

11.

Par une projection parallèle sur un plan quelconque, la figure dont les propriétés viennent de nous occuper se modifie comme il suit :

1.° Le triangle équilatéral ABC devient un triangle d'espèce quelconque ;

2.° Le cercle circonscrit devient la plus petite ellipse circonscrite au nouveau triangle, c'est-à-dire, celle dont le centre coïncide avec son centre de gravité, point de concours des droites qui joignent ses sommets aux milieux des côtés respectivement opposés ;

3.° Les coniques touchant les trois côtés du triangle changent de forme, mais conservent leur caractère, c'est-à-dire, qu'elles demeurent ellipses, hyperboles ou paraboles, comme dans la figure projetée.

Réciproquement, tout triangle donné quelconque peut être considéré comme une projection parallèle d'un certain triangle équilatéral. En conséquence le théorème démontré (10) pourra être généralisé comme il suit :

« Si, par un quelconque P des points du plan d'un triangle » quelconque ABC et par ses sommets, on mène des droites AP, » BP, CP, rencontrant les directions des côtés respectivement op- » posés en A′, B′, C′, la conique qui touchera les trois côtés du » triangle en ces trois points sera une ellipse, une hyperbole ou » parabole, suivant que le point P sera intérieur à la plus petite

» ellipse circonscrite au triangle ABC, extérieur à cette ellipse ou » sur son périmètre même, et *vice versâ* ».

12.

De ce théorème on en déduit un autre encore plus général :

Par une projection centrale ou perspective, sur un plan quelconque, la figure dont il vient d'être question se modifie comme il suit :

1.° Le triangle donné devient un triangle quelconque ABC (fig. 5); la plus petite ellipse circonscrite devient une conique quelconque S circonscrite au nouveau triangle ; les tangentes à l'ellipse, par les sommets du triangle, lesquelles sont parallèles aux côtés respectivement opposés, deviennent des tangentes à la conique S par les sommets du nouveau triangle, lesquelles rencontrent les directions des côtés respectivement opposés de ce triangle en trois points A', B', C', appartenant à une même droite, laquelle forme, avec les côtés du triangle ABC, un quadrilatère complet dont ces trois tangentes sont les diagonales.

2.° Toutes les paraboles touchant les trois côtés du triangle donné deviennent des coniques inscrites à ce quadrilatère complet ;

3.° Les droites Aa, Bb, Cc joignant les sommets A, B, C du triangle inscrit aux sommets respectivement opposés a, b, c du triangle circonscrit, formé par les tangentes aux sommets du premier, diagonales du quadrilatère complet, se coupent toutes trois en un même point S, pôle de la droite A'B'C', relativement à la conique circonscrite au triangle ABC ; enfin les polaires de ce point S, relatives aux coniques inscrites au quadrilatère complet, enveloppent cette même conique circonscrite au triangle ABC. Donc

« 1.° Etant donné un quadrilatère complet, ses côtés pris trois » à trois forment quatre triangles ; et on peut inscrire à ce qua- » drilatère une infinité de coniques différentes ; 2.° les droites Aα, » Bβ, Cγ menées par les points de contact de l'une de ces coni-

» ques avec les côtés de l'un ABC de ces quatre triangles, et par
» les sommets respectivement opposés se coupent toutes trois en un
» même point D; et le lieu de ce point D est une certaine conique
» circonscrite à ce triangle ABC, et en même temps inscrite au trian-
» *abc* formé par les trois diagonales du quadrilatère complet, de
» telle sorte qu'elle touche les côtés de ce dernier triangle aux som-
» mets du premier ABC; 3.° les droites A*a*, B*b*, C*c* qui joignent
» les sommets respectivement opposés de ces deux triangles se cou-
» pent toutes trois en un même point S, pôle du quatrième côté
» A′B′C′ du quadrilatère complet; et les polaires de ce point, re-
» latives aux coniques inscrites au quadrilatère complet, envelop-
» pent la conique circonscrite au triangle ABC; en outre, les trois
» points α', β', γ', où se coupent les côtés correspondans des deux
» triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$, appartiennent à une même droite, la-
» quelle passe constamment par le point S; 4.° enfin les coniques
» à la fois circonscrites aux quatre triangles formés par les côtés
» du quadrilatère complet, pris trois à trois, et inscrites au trian-
» gle formé par ses diagonales, se touchent deux à deux aux six
» sommets A, B, C, A′, B′, C′ de ce quadrilatère complet, et el-
» les sont touchées en ces mêmes points de contact par ses trois
» diagonales ».

13.

Et réciproquement,

« Si, à un triangle donné quelconque ABC, on circonscrit une
» conique quelconque, et qu'ensuite par un point D, pris arbi-
» trairement sur le périmètre de cette conique et par chacun des
» sommets du triangle, on mène trois droites AD, BD, CD ren-
» contrant les côtés respectivement opposés en trois points α, β,
» γ où ces côtés sont touchés par une deuxième conique, cette
» conique et toutes les autres, déterminées par une semblable cons-
» truction, seront touchées par une même droite A′B′C′, déter-

» minée par les intersections respectives des directions des côtés du » triangle ABC avec les tangentes menées à la première conique » par ses sommets respectivement opposés »

14.

Supposons que le triangle ABC, le point D et la conique inscrite, touchant ses côtés en α, β, γ restant fixe, la conique passant par les quatre points A, B, C, D, varie de toutes les manières possibles, la droite A′B′C′ roulera alors (13) sur la conique invariable, d'où résulte le théorème suivant :

» 1.° Etant donné un quadrilatère quelconque ABCD, on peut » lui circonscrire une infinité de coniques différentes, lesquelles » seront aussi inscrites à chacun des quatre triangles formés par » les côtés du quadrilatère pris trois à trois ; 2.° les tangentes AA′, » BB′, CC′, menées à une quelconque de ces coniques par les » sommets de l'un quelconque ABC des quatre triangles, ont leurs » intersections A′, B′, C′, avec les directions des côtés respective- » ment opposés de ce même triangle situées sur une même droite ; » et l'enveloppe de cette droite est une certaine conique passant » par les trois points α, β, γ d'intersection des trois systèmes de » deux droites joignant deux à deux les quatre sommets du qua- » drilatère ABCD, et touchant, en ces trois points, les côtés du » triangle ABC ; 3.° les points α', β', γ' d'intersection des côtés » correspondans des deux triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ appartiennent tous » trois à une même droite $\alpha'\beta'\gamma'$, polaire du quatrième sommet » D, relativement à la conique circonscrite au quadrilatère ; en » outre, les pôles de cette droite, relativement à toutes les coni- » ques qui peuvent être circonscrites à ce même quadrilatère, sont » sur le périmètre de la conique enveloppe de la droite A′B′C′ ; » 4.° enfin, les coniques à la fois inscrites aux quatre triangles formés » par les sommets du quadrilatère ABCD, pris trois à trois, et cir- » conscrites au triangle $\alpha\beta\gamma$, se touchent deux à deux aux trois points

» α, β, γ; de telle sorte que chacun de ces points est le point de » contact de deux différentes paires de coniques ; et en même temps » ces coniques sont touchées deux à deux, à leur point de contact, « par les six droites qui joignent deux à deux les quatre sommets » du quadrilatère donné ABCD ».

Par la théorie des *polaires réciproques* on aurait pu déduire ce théorème de celui que nous avons précédemment démontré (12).

15.

Du théorème précédemment démontré (6) on peut, par la considération des projections, en déduire un grand nombre d'autres. En remarquant, par exemple, que les perpendiculaires, abaissées d'un point quelconque de la circonférence du cercle circonscrit au triangle ABC (fig. 2) sur les directions des côtés de ce triangle, sont respectivement parallèles aux trois hauteurs AA$''$, BB$''$, CC$''$, ainsi qu'aux trois perpendiculaires PA$'$, PB$'$, PC$'$, abaissées du centre de ce cercle sur ces mêmes côtés, on en conclura que

« I. Une conique quelconque étant circonscrite à un triangle » donné ABC, et étant menée par son centre P et par les mi- » lieux A$'$, B$'$, C$'$ des côtés du triangle, les droites PA$'$, PB$'$, » PC$'$, les droites AA$''$, BB$''$, CC$''$ menées par les sommets du « même triangle, parallèlement à celles-là, se couperont toutes trois » en un même point P$'$; les six points A$'$, B$'$, C$'$, A$''$; B$''$, C$''$ » appartiendront à une seconde conique semblable à la première » et semblablement située (*homothétique*) ; le point P$'$, les deux » centres P, O et le centre de gravité G du triangle donné ap- » partiendront à une même droite, et seront situés harmoniquement, » de telle sorte qu'on aura OG : GP : OP$'$: PP$'$: : 1 : 2 : 3 : 6 ; en » outre (8), si de l'un quelconque D des points de la conique » circonscrite au triangle ABC on abaisse, sur les directions de » ses côtés, des obliques respectivement parallèles aux droites PA$'$, » PB$'$, PC$'$, leurs pieds seront situés sur une même droite ».

Et réciproquement,

« II. Si, par l'un quelconque P' des points du plan d'un triangle donné ABC et par ses sommets, on mène les droites AP', BP', CP', il y aura une infinité de points D tels qu'en menant, de l'un de ces points sur les côtés du triangle, des obliques respectivement parallèles à ces droites, leurs pieds appartiendront tous trois à une même droite; et tous ces points D seront situés sur une même conique circonscrite au triangle donné; le centre P de cette conique sera le point de concours des droites conduites par les milieux A', B', C' des côtés du triangle, parallèlement aux droites AP', BP', CP'; etc.

Comme le point P' de concours des trois hauteurs du triangle ABC peut être situé ou dans l'intérieur de ce triangle, ou dans l'une des trois régions α, β, γ, il s'ensuit que

« III. Les deux coniques semblables et semblablement situées dont les centres sont P et O sont 1.° des ellipses, si le point P' est situé dans l'intérieur du triangle ABC, ou dans l'une des trois régions α, β, γ; 2.° des hyperboles, si ce point P' est situé dans l'une des trois régions α', β', γ'; 3.° des paraboles, si ce point est infiniment distant du triangle ABC. En outre les points P et P' sont des points homologues des deux triangles ABC et $A'B'C'$ ».

Dans le cas de la parabole où le point P' est à l'infini, les droites AA'', BB'', CC'' sont parallèles, d'où il suit que

« IV. Si, par les sommets d'un triangle donné ABC, on mène, dans une direction arbitraire, trois parallèles AA'', BB'', CC'' rencontrant les directions des côtés opposés en A'', B'', C''; ces points et les milieux A', B', C' des mêmes côtés appartiendront tous six à une même parabole ». Et réciproquement « si, par les milieux A', B', C' des côtés d'un triangle donné ABC, on fait passer une parabole quelconque, coupant de nouveau ces mêmes côtés en A'', B'', C'', les droites AA'', BB'', CC'' seront nécessairement parallèles ».

16.

A l'aide de la projection centrale, des précédens théorèmes (15), on déduira les suivans :

« I. Une conique quelconque étant circonscrite à un triangle donné » ABC (fig. 6), et étant menées par un point G quelconque et » par les sommets du triangle des droites AG, BG, CG, coupant » les directions des côtés opposés en A′, B′, C′, et étant menées » de plus les droites B′C′α, C′A′β, A′B′γ, coupant les directions » des côtés correspondans du triangle donné en α, β, γ, situés sur » une même droite αβγ ; enfin P étant le pôle de cette droite, et » étant menées les droites PA′α′, PB′β′, PC′γ′ coupant respective- » ment la droite αβγ en α′, β′, γ′ ; les droites AA″α′, BB″β′, » CC″γ′, coupant les côtés du triangle donné en A″, B″, C″, » concourront toutes trois en un même point P′ ; les six points A′, » B′, C′, A″, B″, C″ appartiendront à une seconde conique ; la » droite αβγ sera une sécante commune à cette seconde conique » et à la première ; les pôles P, O de cette droite, par rapport » aux deux coniques, et les deux points G et P′ appartiendront à » une même droite PGOP′ sur laquelle ils seront harmonique- » ment situés ; en outre, si, par l'un quelconque D des points du » périmètre de la conique circonscrite au triangle donné et par » chacun des points α′, β′, γ′, on mène des droites, leurs points » d'intersection avec les côtés correspondans du triangle donné ap- » partiendront tous trois à une même droite ».

Et réciproquement,

« II. Par un quelconque G des points du plan d'un triangle » donné ABC et par chacun de ses sommets, soient menées les » droites AGA′, BGB′, CGC′ coupant respectivement en A′, B′, » C′ les directions des côtés opposés ; et soient ensuite menées les » droites B′C′α, C′A′β, A′B′γ, coupant les directions de ces mêmes

» côtés en α, β, γ, points qui appartiendront tous trois à une » même droite $\alpha\beta\gamma$; si, par un autre point quelconque P, on mène » les droite $PA'\alpha'$, $PB'\beta'$, $PC'\gamma'$, lesquelles coupent la droite $\alpha\beta\gamma$ » en α', β', γ', les droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ concourront en un même » point P'. Or, si des points α', β', γ' on abaisse des obliques sur » les directions des côtés opposés du triangle donné, de manière » qu'elles se coupent en un même point D, et que leurs pieds ap- » partiennent à une même droite, le lieu de ce point D sera une » certaine conique circonscrite au triangle donné; le point P sera » le pôle de la droite $\alpha\beta\gamma$ relativement à cette conique, etc. ». Ou, en d'autres termes : « Si, par un quelconque P' des points » du plan d'un triangle donné ABC et par ses sommets, on mène » des droites AP', BP', CP', et qu'ensuite on mène arbitrairement » une droite $\alpha'\beta'\gamma'$ coupant respectivement celles-là en α', β', γ', il » y aura alors une infinité de points D tels que les droites $D\alpha'$, » $D\beta'$, $D\gamma'$ coupent les côtés correspondans du triangle donné en » trois points appartenant à une même droite; et le lieu de ces » points D sera une une certaine conique circonscrite au triangle » donné, etc. »

« III. Les deux points P, P' (1) sont des points homologues par » rapport aux triangles ABC, A'B'C'; quand l'un d'eux tombe sur » la droite $\alpha\beta\gamma$, l'autre coïncide avec lui, et alors la conique qui » passe par les six points A', B', C', A'', B'', C'' touche cette droite » $\alpha\beta\gamma$ en ce point P ou P' ». Et réciproquement, « si une coni- » que passe par trois points donnés A', B', C' et touche une droite » donnée $\alpha\beta\gamma$, en un certain point Q, elle coupera les directions » des côtés du triangle ABC, déterminé par les droites $A'\alpha$, $B'\beta$, » $C'\gamma$, en trois points A'', B'', C'' lesquels seront situés sur les droi- » tes AQ, BQ, CQ, et *vice versâ*, etc. ».

C'est là une propriété commune à toutes les coniques qui passent par les trois mêmes points donnés A', B', C' et touchent la même droite donnée $\alpha\beta\gamma$.

17.

Les précédens théorèmes ont leurs *polaires réciproques ;* tel est, par exemple, le suivant :

« Soit menée une droite quelconque, coupant les côtés d'un
» triangle donné ABC en α, β, γ; et, par un quelconque D des
» points du plan de ce triangle, soient menées les droites Dα, Dβ,
» Dγ, alors on peut abaisser, des sommets du triangle donné, sur
» les droites respectivement opposées, des obliques Aα', Bβ', Cγ',
» telles qu'elles se coupent en un même point E, et que leurs
» pieds α', β', γ', appartiennent à une même droite; cette droite
» enveloppera une certaine conique inscrite au triangle donné; etc. »

Etc., etc.

18

Soit circonscrite une conique quelconque à un triangle donné ABC fig. 7). Par les sommets de ce triangle, et par un quelconque P$'$ des points de son plan, soient menées les droites AP$''$A$''\alpha$, BP$'$B$''\beta$, CP$'$C$''\gamma$, coupant respectivement les directions des côtés opposés du triangle en A$''$, B$''$, C$''$, et la courbe en α, β, γ. Si, par un quelconque D des points du périmètre de cette conique, on mène les droites Dα, Dβ, Dγ, coupant les côtés opposés du triangle donné en α', β', γ', ces trois points seront toujours situés sur une même droite $\alpha'\beta'\gamma'$, passant par le point P$'$; car, à cause de l'hexagone inscrit DβBCAαD, par exemple (Pascal), les trois points α', β', P$'$ appartiendront à une même droite.

Lorsque le point D se meut sur le périmètre de la courbe, la droite $\alpha'\beta'\gamma'$ tourne sur son point P$'$, et *vice versâ.*

19.

Supposons que la conique soit un cercle, et que les droites Aα, Bβ, Cγ soient respectivement perpendiculaires aux côtés du triangle donné, alors le point D sera le foyer d'une parabole inscrite à ce triangle, et l'on aura (6)

$$P'A''=A''\alpha\ , \qquad P'B''=B''\beta\ , \qquad P'C''=C''\gamma\ .$$

Soit menée la droite DE, parallèle à $\gamma P'$; elle sera perpendiculaire à la tangente AB ; et, en supposant qu'elle coupe $\alpha'\beta'\gamma'$ en E et AB en F, on aura $DF=FE$, car $\gamma C''=C''P'$; d'où il suit que le point E est situé sur la directrice de la parabole, et que par conséquent la droite $\alpha'\beta'\gamma'$ est elle-même cette directrice ; donc

« Les directrices de toutes les paraboles inscrites à un même
» triangle donné ABC se coupent toutes en un même point P'
» intersection des trois hauteurs de ce triangle ; et

» Les intersections des trois hauteurs de tous les triangles circons-
» crits à une même parabole sont toutes situées sur la directrice
» de cette courbe (*) ».

En remarquant que quatre droites données sur un plan peuvent être touchées par une même parabole, on conclura de là la démonstration du 4.e théorème de la pag. 302 du précédent volume, savoir :

« Dans les quatre triangles que forment trois à trois quatre droi-
» tes tracées sur un même plan, les points de concours des trois
» hauteurs appartiennent tous quatre à une même droite (**) ».

20.

En observant que les pieds F.... des perpendiculaires abaissées du foyer D sur les directions des côtés du triangle ABC appar-

---

(*) C'est le théorème 29, proposé à démontrer à la pag. 191 du II.me volume du Journal de M. Crelle.

(**) C'est le théorème 8 de l'endroit cité du Journal de M. Crelle.

tiennent à une même droite parallèle à la directrice $\alpha'\beta'\gamma'$, cette circonstance fournit un moyen très-simple de résoudre, par projection, le problème suivant :

« Une conique quelconque étant circonscrite à un triangle donné
» ABC ; si de l'un quelconque D des points du périmètre de la
» courbe on abaisse, sur les côtés du triangle, des obliques respec-
» tivement parallèles aux diamètres qui passent par les milieux de
» ces côtés, leurs pieds F..... appartiendront à une même droite.
» Cela posé, quelle doit être la situation du point D sur la courbe,
» pour que cette droite soit parallèle à une droite donnée » ?

Si, en effet, on mène les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ respectivement parallèles aux diamètres dont il s'agit, et qu'ensuite, par le point de concours P' de ces trois droites, on mène la droite $\alpha'\beta'\gamma'$, parallèle à la droite donnée, les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ se couperont au point cherché D.

21.

De ce qui précède il suit encore, comme cas particulier, que

« Les centres de tous les triangles équilatéraux circonscrits à une
» même parabole sont situés sur la directrice de cette parabole », et

« Les directrices de toutes les paraboles inscrites à un même
» triangle équilatéral donné passent toutes par le centre de ce
» triangle ».

De là on conclura (5 et 11), par la projection parallèle, que

« Un triangle quelconque ABC étant circonscrit à une parabole
» donnée, et Q étant le point de concours des droites qui joignent
» ses sommets aux points de contact des côtés respectivement op-
» posés ; si l'on imagine tous les triangles pour lesquels ce point
» Q est le même, les centres de gravité de tous ces triangles ap-
» partiendront à une même droite, polaire du point Q ; les plus
» petites ellipses circonscrites à ces mêmes triangles seront sembla-
» bles et semblablement situées, et se couperont toutes en ce même
» point Q ».

Et réciproquement,

« A chaque parabole inscrite à un même triangle donné ABC » correspond un point Q de concours des droites menées des sommets aux points de contact des côtés opposés ; et les polaires » de tous les points Q, relatives aux paraboles correspondantes » se coupent toutes en un même point G, centre de gravité de » ce triangle ».

22.

Si, par les points A″, B″, C″, milieux respectifs des droites $P'\alpha$, $P'\beta$, $P'\gamma$ (fig. 7), on mène des droites respectivement parallèles à $D\alpha$, $D\beta$, $D\gamma$, elles passeront par les milieux respectifs des droites $P'\alpha'$, $P'\beta'$, $P'\gamma'$, et concourront en un même point D′ situé sur la conique qui passerait par les six points A′, B′, C′, A″, B″, C″ (6) ; de sorte que les trois points D, D′, P′ seront en ligne droite. De là résulte ce théorème dû à M. Lamé.

« Quatre points A, B, C, P′ donnés sur un même plan déterminent trois systèmes de deux droites AP′ et BP′, BP′ et » AC, CP′ et AB, qui se coupent respectivement en A″, B″, » C″. Si l'on coupe ces systèmes par une droite quelconque $\alpha'\beta'\gamma'P'$, » conduite par P′, et si, par les points A″, B″, C″, et par les milieux des segmens de cette droite, on mène des droites A″D′, » B″D′, C″D′, ces droites concourront en un même point D′, et » le lieu de ce point sera une conique passant par les points A″, » B″, C″, et par les milieux des droites BC, CA, AB, AP′, BP′, » CP′, etc. ».

23.

Revenons de nouveau au cas où la conique circonscrite au triangle donné ABC est un cercle. Dans ce cas, le point D est le foyer et la droite $\alpha'\beta'\gamma'P'$ la directrice d'une parabole inscrite au triangle ; et conséquemment la polaire du point P′, relative à la parabole, passe par le point D, et est perpendiculaire à la droite P′D; cette polaire enveloppera donc une certaine conique dont P′ sera le foyer, et dont l'axe principal coïncidera (5) avec le diamètre PP′ du cercle circonscrit au triangle. Donc

« Les polaires du point de concours P′, des trois hauteurs d'un » triangle donné ABC, relatives à toutes les paraboles inscrites à » ce triangle, enveloppent une certaine conique dont le point P′ » est le foyer, dont l'axe principal passe par le centre du cercle cir- » conscrit au triangle donné, et qui est inscrite au triangle formé » par les parallèles menées aux côtés du triangle donné par les » sommets de ce triangle ».

Ou plus généralement, par les projections,

« Les polaires de l'un quelconque P′ des points du plan d'un » triangle donné ABC, relatives à toutes les paraboles inscrites à » ce triangle, enveloppent une conique inscrite au triangle formé » par des parallèles aux trois côtés du triangle donné, conduites » par les sommets de ce triangle ».

24.

Il résulte encore de là, par la projection centrale (12),

« Les polaires de l'un quelconque des points du plan d'un qua- » drilatère complet, relatives à toutes les coniques inscrites à ce » quadrilatère, enveloppent une nouvelle conique touchant les » trois diagonales du même quadrilatère ».

25.

Lorsque le point P′ passe à l'infini, ses polaires deviennent des diamètres dont les conjugués, concourant en ce Point P′, sont alors parallèles, et, comme les premiers sont tangens à une certaine conique (24), ils seront parallèles deux à deux; d'où l'on conclut que

« Entre les coniques inscrites à un même quadrilatère donné,

» on n'en saurait trouver trois ayant un système de diamètres con-
» jugués parallèles ; mais, si l'on trace arbitrairement, pour l'une
» de ces coniques, un système de diamètres conjugués, il existera
» une autre conique inscrite dont deux diamètres conjugués seront
» parallèles à ceux-là ». Donc

« Si l'on propose d'inscrire à un quadrilatère une conique dont
» deux diamètres conjugués soient parallèles à deux droites don-
» nées, le problème n'aura que deux solutions au plus ».

26.

On sait que les centres de toutes les coniques C, C′, C″, ... inscrites à un même quadrilatère complet donné, sont situés sur la droite D qui joint les milieux de ses trois diagonales. Les conjugués Δ, Δ', Δ'', ... de ce diamètre commun D touchent une certaine conique S (25), d'où il suit qu'en général, entre les diamètres Δ, Δ', Δ'', ... il doit y en avoir deux parallèles à une droite arbitraire L. Et réciproquement, entre les conjugués des diamètres parallèles à une droite donnée L, il s'en trouve généralement deux qui coïncident avec la droite D ; d'où l'on conclut que cette droite touche la conique S. Donc

« Dans les coniques inscrites à un même quadrilatère donné, les
» conjugués des diamètres parallèles à une même droite envelop-
» pent une même conique, et *toutes les coniques enveloppées qui*
» *résultent des diverses directions de cette droite*, *sont inscrites au*
» *quadrilatère complet formé par le lieu des centres des coniques de*
» *la première série et par les trois diagonales du quadrilatère com-*
» *plet donné* ».

27.

Les diamètres parallèles se coupent en un même point à l'infini, et lorsqu'on varie leur direction commune, tous les points de concours appartiennent à une même droite également à l'infini. Les pôles de cette droite, par rapport aux mêmes coniques, en sont les centres situés sur la droite qui joint les milieux des trois diagonales du quadrilatère complet donné. De là, par les projections centrales, on conclura les théorèmes suivans :

« 1.° Les pôles d'une droite quelconque, relatifs à toutes les » coniques inscrites à un même quadrilatère complet donné, sont » situés sur une même droite ; 2.° les polaires de l'un quelconque » que des points de cette droite enveloppent une certaine conique, » et *toutes les coniques enveloppées qu'on obtient*, *en variant la* » *situation de ce point sur cette droite*, *sont inscrites au qua-* » *drilatère dont les côtés seront cette même droite et les trois dia-* » *gonales du quadrilatère complet donné ;* 3.° si la polaire tourne » sur l'un des points de sa direction, la droite des pôles enve- » loppera une nouvelle conique, etc. »

28.

Ces divers théorèmes ont leurs *polaires réciproques* ; tel est, par exemple, le suivant :

« 1.° Les polaires d'un point quelconque, relatives à toutes les » coniques circonscrites à un même quadrilatère donné, concourent » toutes en un même point ; 2.° les pôles d'une droite quelcon- » que passant par ce point sont situés sur une certaine conique, » et *toutes les coniques de cette sorte que l'on obtient*, *en variant* » *la direction de la droite conduite par ce point*, *sont circonscrites* » *au quadrilatère dont les sommets sont ce même point*, *et les trois* » *points où concourent les systèmes de droites qui joignent deux* » *à deux les quatre sommets du quadrilatère donné ;* 3.° si le pôle » décrit une droite, le point de concours des polaires décrira une » nouvelle conique, etc. »