ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Géométrie des courbes. Mémoire sur l'hyperbole équilatère

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 349-359

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__349_0>

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Mémoire sur l'hyperbole équilatère (*);

Par M. BOBILLIER, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

ON sait que deux diamètres conjugués quelconques d'une hyperbole équilatère font avec son axe transverse deux angles aigus complément l'un de l'autre, et que conséquemment les deux asymptotes divisent en deux parties égales les quatre angles formés par ces deux diamètres; d'où il suit encore que l'angle de deux quelconques des diamètres d'une telle hyperbole est le même que celui de leurs conjugués.

Donc aussi, *l'angle de deux droites, tracées arbitrairement sur le plan d'une hyperbole équilatère, est le même que celui des deux diamètres de la courbe qui en contiennent les pôles respectifs.* Ainsi tout ce qui a été démontré pour le cas d'une directrice circulaire peut se dire également du cas où cette directrice est une hyperbole équilatère (**); on pourra dire, en particulier, *que la polaire d'un cercle, par rapport à une hyperbole équilatère, est une conique qui a pour foyer le centre de cette courbe et pour directrice la polaire du centre du cercle;* si donc ce cercle est concen-

(*) Voy., sur le même sujet, la pag. 205 du XI.me volume du présent recueil.

(**) Voy. *Annales*, tom. XVIII, pag. 185.

J. D. G.

trique avec l'hyperbole, sa polaire réciproque sera un autre cercle qui lui sera concentrique ; et si, en outre, il a pour diamètres les axes de l'hyperbole, il sera lui-même sa polaire réciproque. Il est visible, en outre, que, réciproquement, la polaire réciproque de l'hyperbole, par rapport à ce cercle, sera une hyperbole qui aura le même centre, les mêmes sommets et les mêmes asymptotes, et qui, par suite, se confondra avec elle.

On peut prouver, plus généralement, que *si, sur les mêmes diamètres conjugués, on décrit une ellipse et une hyperbole, chacune de ces deux courbes sera à elle-même sa polaire réciproque, par rapport à l'autre courbe prise pour directrice.* En effet, les équations de ces deux courbes seront comprises dans la formule

$$Ax'^2 \pm By'^2 = C\ ,$$

l'équation de la tangente à l'une d'elles, en un point (x', y'), sera

$$Ax'x \pm By'y = C\ ,$$

et l'équation de la polaire, relative à l'autre, d'un point quelconque (x'', y'') sera

$$Ax''x \mp By''y = C\ ;$$

or, si l'on veut que cette polaire coïncide avec la tangente, il faudra prendre $x''=x'$, $y''=-x'$, d'où $x''^2=x'^2$, $y''^2=y'^2$. Ainsi l'équation de la polaire réciproque sera

$$Ax''^2 \pm By''^2 = C\ ;$$

c'est-à-dire, la même que celle de la courbe proposée.

Il résulte évidemment de là que, *si deux paraboles de même paramètre, et tournées en sens inverse, se touchent de telle sorte que leurs axes soient parallèles, chacune d'elle sera à elle-même sa polaire réciproque, par rapport à l'autre, considérée comme directrice.*

En rapportant les propriétés angulaires d'une hyperbole équilatère à cette courbe elle-même, considérée comme sa propre polaire réciproque, on parvient à un grand nombre de théorèmes, parmi lesquels nous nous bornerons à signaler les suivans :

La droite qui divise l'angle des rayons vecteurs d'un même point d'une hyperbole équilatère en deux parties égales, lui est tangente en ce point.

Le diamètre qui va au point de contact d'une tangente à une hyperbole équilatère divise, en deux parties égales, deux des quatre angles formés par les deux diamètres qui vont aux points d'intersection de cette même tangente avec les polaires des deux foyers.

Les deux côtés d'un angle circonscrit à une hyperbole équilatère, font respectivement des angles égaux avec les droites qui joignent le sommet de cet angle aux deux foyers.

Les diamètres qui vont aux deux extrémités d'une corde d'une hyperbole équilatère, font respectivement des angles égaux avec ceux qui vont aux intersections de cette même corde avec les polaires des deux foyers.

La demi-différence des angles, sous lesquels une même corde d'une hyperbole équilatère est vue de ses deux foyers, est supplément de l'angle circonscrit suivant cette même corde.

Le supplément de l'angle, sous lequel une corde d'une hyperbole équilatère est vue de son centre, est égal à la demi-différence des angles sous lesquels on voit du même point les portions des polaires des deux foyers interceptées par l'angle circonscrit suivant cette corde.

La portion d'une tangente quelconque à une hyperbole équilatère, interceptée entre les tangentes à ses deux sommets, est vue sous un angle droit de l'un et de l'autre foyers.

La portion de l'une ou de l'autre polaire des foyers d'une hyperbole équilatère interceptée entre deux cordes supplémentaires, *relatives à l'axe transverse de la courbe, est vue de son centre sous un angle droit.*

Si un angle droit se meut sur le plan d'une hyperbole équilatère, de manière que l'un de ses côtés soit constamment tangent à la courbe et que l'autre passe constamment par un de ses foyers, son sommet décrira un cercle qui aura pour diamètre l'axe transverse de la courbe.

La droite qui joint un des foyers d'une hyperbole équilatère au pôle d'une corde qui passe par ce foyer, est perpendiculaire sur cette même corde.

L'angle sous lequel on voit, du centre d'une hyperbole équilatère, la portion de la polaire de l'un de ses foyers, comprise entre l'un quelconque des points de la direction de cette polaire, et la polaire de ce point est un angle droit.

Si, de l'un des foyers d'une hyperbole équilatère, on mène des droites, 1.° *au sommet d'un angle circonscrit et au point d'intersection de sa corde de contact avec la polaire de ce foyer;* 2.° *aux deux extrémités de la corde de contact; les deux premières droites seront rectangulaires et diviseront en deux parties égales les quatre angles formés par les deux dernières.*

Si, du centre d'une hyperbole équilatère, on mène des diamètres aux quatre points d'intersection de la polaire de l'un de ses foyers, 1.° *avec les deux côtés de l'angle circonscrit;* 2.° *avec sa corde de contact et avec la droite qui va du foyer à son sommet; les deux derniers diamètres seront rectangulaires et diviseront en deux parties égales les quatre angles formés par les deux premiers.*

Pour parvenir à un autre principe qui conduit à un grand nombre de propriétés nouvelles de l'hyperbole équilatère, nous ferons remarquer que, lorsqu'un angle droit tourne autour de son sommet, fixé en un point du périmètre d'une conique, les cordes de tous les arcs interceptés par cet angle concourent en un point fixe situé sur la normale de son sommet. Or, si la conique est une hyperbole équilatère, on pourra disposer l'angle droit de manière que ses côtés soient parallèles aux asymptotes. La corde de l'arc intercepté sera alors située à l'infini; le point invariable de la normale du sommet passera donc aussi à l'infini; ce qui revient à dire que les cordes des arcs interceptés par l'angle mobile seront constamment parallèles aux normales du sommet, ou, si l'on aime mieux, perpendiculaires aux tangentes en ce même sommet. Il est visible d'ailleurs, d'après ce qui a été démontré au commencemant de cet article, que le diamètre non transverse qui contient les pôles de ces cordes est perpendiculaire à celui qui contient le sommet, on a donc ce théorème :

Toutes les cordes d'une hyperbole équilatère, perpendiculaires à une même tangente, sont vues du point de contact sous un angle droit; en outre, le diamètre non transverse qui contient le pôle de l'une de ces cordes est perpendiculaire au diamètre transverse qui va au point de contact de la tangente.

A ce théorème correspond celui-ci : *Les angles circonscrits à une hyperbole équilatère, dont les cordes de contact sont perpendiculaires à une même tangente, interceptent, sur cette tangente, des parties qui sont vues du centre de la courbe sous des angles droits.*

Si, présentement, on rapporte l'hyperbole équilatère à un cercle directeur, de rayon arbitraire, ayant son centre sur le périmètre de la courbe, sa polaire réciproque sera une parabole qui, d'après ce qui a été démontré ci-dessus, sera telle que tous les angles droits qui lui seront circonscrits auront leur sommet sur la tangente menée à l'hyperbole par le centre du cercle directeur, et que leurs cordes de contact passeront par le pôle du diamètre non transverse, perpendiculaire à celui qui ira au centre de ce cercle. Il s'ensuit que *la polaire réciproque d'une hyperbole équilatère, par rapport à tout cercle directeur dont le centre est situé sur cette courbe, est une parabole qui a pour directrice la tangente menée à l'hyperbole par le centre du cercle directeur, et pour foyer le pôle du dia-*

mètre non transverse de cette hyperbole perpendiculaire à celui qui va au centre de ce cercle.

Il est facile aussi de reconnaître que l'axe de cette parabole sera la polaire du point k, de concours de la tangente au centre du cercle et du diamètre non transverse dont il vient d'être question; que son sommet sera le pôle de la seconde tangente que l'on pourra mener à l'hyperbole par le point k, et qu'enfin le point de contact de cette dernière sera sur la normale à l'hyperbole; de sorte que le lieu des points k sera la polaire réciproque de la développée de cette courbe, l'hyperbole étant prise pour courbe directrice; d'où il suit que ce lieu est du quatrième degré.

Voici présentement quelques applications.

Deux arcs interceptés sur un cercle par deux parallèles, sont vus sous des angles supplémentaires ou égaux des différens points de la circonférence, suivant que ces points sont entre ces parallèles ou hors d'elles. Si donc on prend un cercle directeur dont le centre soit sur la circonférence du premier, on pourra conclure de là que, *dans tout quadrilatère circonscrit à une parabole, de telle sorte que l'une de ses diagonales contienne le foyer; les angles dont les sommets sont aux extrémités de l'autre diagonale sont égaux ou supplémentaires.*

Donc, *deux cordes égales et parallèles d'une hyperbole équilatère sont vues d'un point de cette courbe sous des angles égaux ou supplémentaires, suivant que l'œil est compris ou non compris entre les deux droites.*

Ce théorème, indiqué dans la *Correspondance* de Bruxelles, est dû à M. Vaure. On pourrait le généraliser, en considérant dans le cercle deux cordes non parallèles; mais cela exigerait trop de développemens.

Le supplément d'un angle circonscrit à la parabole est moitié de l'angle sous lequel sa corde de contact est vue du foyer.

Donc, *l'angle sous lequel on voit une corde de l'hyperbole équilatère, de l'un des points de son périmètre, est double de celui sous lequel est vue, du même point, la portion du diamètre non* *transverse, perpendiculaire à celui qui passe par l'œil, interceptée entre les tangentes aux extrémités de cette corde.*

La portion d'une tangente mobile à la parabole, comprise entre deux tangentes fixes, est vue du foyer sous un angle constant.

Donc, *les angles inscrits à une hyperbole équilatère qui s'appuyent sur une corde fixe, interceptent, sur un diamètre non transverse fixe, des portions qui sont vues sous des angles égaux de l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à celui-là.*

Si un angle invariable se meut de manière que l'un de ses côtés passe constamment par le foyer d'une parabole et que l'autre lui soit constamment tangent, son sommet décrira une tangente à la courbe. Cette tangente sera celle du sommet si l'angle invariable est droit.

Donc, *si un angle de grandeur invariable tourne sur son sommet, fixé en un point du périmètre d'une hyperbole équilatère, la corde mobile qui joindra le point où l'un de ses côtés rencontra cette courbe avec celui où l'autre coupe le diamètre non transverse perpendiculaire à celui qui va au sommet de l'angle, passera constamment par un même point fixe situé sur la courbe. Ce point fixe sera celui où la normale du sommet de l'angle coupe la courbe si l'angle invariable est droit.*

Ce théorème offre un moyen facile de construire tant de points qu'on voudra d'une hyperbole équilatère, lorsqu'on connaîtra son centre et deux de ses points. Soient O le centre et A, B les deux points donnés; en prolongeant AO d'une quantité OC=OA, le point C sera un nouveau point de la courbe. Soit menée la corde BC et soit D le point où elle est coupée par la perpendiculaire menée à AC par le point O; en menant AD, nous pourrons considérer l'angle CAD comme un angle mobile et invariable, ayant son sommet A en un point de la courbe cherché, et alors BC sera la corde mobile qui joindra le point C d'intersection de la courbe avec l'un AC des côtés de l'angle, au point D d'intersection de son autre côté AD avec le diamètre transverse OD, perpendiculaire au diamètre AC de son sommet. En faisant donc varier la position de l'angle autour de son sommet, le point D, ainsi que les deux droites AC et BD, varieront sans cesse, et ces deux droites donneront, par leur intersection C, tant de points de la courbe qu'on voudra.

On démontrera facilement que, pour déterminer les asymptotes, il faudra décrire sur AB un segment capable de l'angle invariable CAD; mener des droites du point B aux points où ce segment est coupé par OD, et enfin conduire par le centre O des parallèles à ces deux droites.

Parmi divers théorèmes que l'on peut démontrer à l'aide des considérations qui précèdent, le suivant mérite d'être particulièrement remarqué. On sait que toute circonférence circonscrite à un triangle dont les trois côtés sont tangens à une parabole, contient le foyer de cette courbe (*). Il en résulte que toute conique qui a pour foyer un point d'une hyperbole équilatère qui touche les trois côtés d'un triangle inscrit, touche aussi le diamètre non transverse perpendiculaire à celui de ce foyer. De là on peut conclure que les pieds des quatre perpendiculaires abaissées de l'un des points d'une hyperbole équilatère, sur les trois côtés d'un triangle inscrit et sur le diamètre non transverse perpendiculaire à celui de ce point, se trouvent sur une même circonférence; or, le pied de cette dernière perpendiculaire n'est autre chose que le centre de la courbe.

Donc, *si, de l'un quelconque des points d'une hyperbole équilatère, on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés d'un triangle inscrit, la circonférence qui passera par les pieds de ces perpendiculaires contiendra aussi le centre de l'hyperbole.*

(*) Voy. la pag. 45 du présent volume.

J. D. G.

Si l'on remarque présentement que, par quatre points donnés, on peut, en général, faire passer une hyperbole équilatère, on obtiendra ce nouveau théorème:

Quatre points étant donnés sur un plan; si, de chacun d'eux, on abaisse des perpendiculaires sur les directions des trois côtés du triangle qui a ses sommets aux trois autres points, les circonférences, qui passeront par les pieds des perpendiculaires relatives à ces triangles, se couperont toutes quatre en un même point, centre de l'hyperbole équilatère contenant les quatre points donnés.

Il est visible que, si les quatre points donnés appartiennent à une même circonférence, les quatre circonférences dont il s'agit se réduiront à quatre droites concourant en un même point (*).

Voilà donc un procédé fort simple pour construire le centre d'une hyperbole équilatère, assujétie à passer par quatre points donnés. Une fois ce centre obtenu, on obtiendra tant d'autres points de la courbe qu'on voudra, par le procédé indiqué plus haut.

L'hyperbole équilatère étant à elle-même sa directrice, la polaire réciproque de l'avant-dernier théorème sera le suivant :

Si l'on circonscrit arbitrairement un triangle à une hyperbole équilatère et qu'on lui mène une tangente également arbitraire, en construisant ensuite, sur les droites qui joignent le centre de la courbe aux trois sommets du triangle, comme côtés de l'angle droit, trois triangles rectangles dans lesquels l'autre côté de l'angle droit soit dirigé de ce centre vers la tangente, et s'y termine, le cercle circonscrit au triangle formé par les hypothénuses de ces trois triangles passera par le centre de l'hyperbole.

Concevons présentement que le triangle inscrit à l'hyperbole équilatère, dont il a été question ci-dessus, ait deux de ses côtés parallèles aux asymptotes de la courbe, son troisième côté passera à l'infini, et nous aurons cet autre théorème:

(*) Voy. la pag. 45 du présent volume.

J. D. G.

Si un rectangle a ses côtés respectivement parallèles aux asymptotes d'une hyperbole équilatère, et deux sommets opposés sur cette courbe, la diagonale qui joindra les deux sommets restans passera par le centre de l'hyperbole.

Ce théorème, de nature projective, peut être ensuite généralisé comme il suit :

Si un parallélogramme a ses côtés respectivement parallèles aux deux asymptotes d'une hyperbole quelconque, et deux sommets opposés sur la courbe, la diagonale, joignant les deux côtés restans, contiendra le centre de l'hyperbole.

De là résulte un procédé fort simple pour déterminer le centre d'une hyperbole lorsqu'on en donne trois points et qu'on donne en outre des parallèles à ses deux asymptotes.

Soit P le point où se croisent les cordes d'une conique C vues de l'un O de ses points sous un angle droit, et soit D la droite polaire de ce point; en plaçant le centre du cercle directeur au point O, et représentant par C' la polaire réciproque de C, par P' celle du point P, et par D' le pôle de D, il est visible que C' sera une parabole qui aura P' pour directrice et D' pour foyer; par un raisonnement analogue à l'un des précédens, on pourra donc prouver que les pieds des perpendiculaires abaissées du point O, sur les trois côtés d'un triangle inscrit à C et sur la droite D, sont situés sur la même circonférence ; or, le dernier de ces points est invariable ;

Donc, 1.° *si, d'un point fixe, pris sur une conique, on abaisse des perpendiculaires sur les directions des côtés de tant de triangles inscrits qu'on voudra, les circonférences déterminées par les pieds des perpendiculaires relatives à ces différens triangles se couperont toutes au même point ; 2.° la perpendiculaire élevée de ce point à la droite qui le joint au point de départ des perpendiculaires, sera la polaire du point où se croisent toutes les cordes de la conique vues du premier de ces points sous un angle droit.*

Au lieu d'abaisser des perpendiculaires, on pourrait abaisser des obliques faisant, dans le même sens, des angles égaux quelconques.

Il est visible aussi que, si un angle mobile invariable tourne autour de son sommet fixé en O, et si l'on joint par des droites les points où ses côtés rencontrent respectivement la conique C et la droite D ; la droite mobile, obtenue par cette construction, passera constamment par un point fixe situé sur la conique C.

Si l'angle mobile est droit, le point fixe sera en outre sur la normale du point O.

De tout cela résultent deux nouveaux procédés pour décrire une conique assujétie à passer par cinq points donnés ; mais ils sont plus compliqués que les procédés connus.

En imaginant que le triangle inscrit se change en une tangente et une corde menée par le point de contact, on parvient aussi aisément à déduire de ceci un procédé pour mener une tangente à une conique.

Châlons, le 11 novembre 1828.