ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Géométrie analytique. Démonstration de deux théorèmes sur les lignes et surfaces du second ordre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 317-333
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__317_0>

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Démonstration de deux théorèmes sur les lignes et surfaces du second ordre ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Nous nous proposons de faire voir, dans ce qui va suivre, que quatre théorèmes déjà connus, dont deux relatifs aux lignes et les deux autres aux surfaces du second ordre, ne sont que des cas particuliers de deux autres théorèmes plus généraux qui paraissent n'avoir point encore été remarqués.

I. Soient deux ellipses concentriques dont les diamètres principaux coïncident, et supposons que leurs équations relatives à ces deux droites soient

$$Ax^2+By^2=1\ , \qquad A'x^2+B'y^2=1\ .$$

Soit un angle droit mobile, sur le plan de ces courbes, dont les côtés les touchent respectivement ; en désignant par (α,β), (α',β') les points de contact variables, nous aurons d'abord

$$A\alpha^2+B\beta^2=1\ , \qquad A'\alpha'^2+B'\beta'^2=1\ . \qquad (1)$$

Les équations des deux côtés de cet angle seront respectivement

$$A\alpha x+B\beta y=1\ , \qquad A'\alpha' x+B'\beta' y=1\ ; \qquad (2)$$

et, parce que l'angle est droit, nous aurons en outre

$$AA'\alpha\alpha'+BB'\beta\beta'=0\ ; \qquad (3)$$

et l'on voit que l'équation en x et y, résultant de l'élimination de α, β, α', β' entre ces cinq dernières équations, serait celle de la courbe décrite par le sommet de l'angle mobile.

Soient posés

$$A\alpha=a\ , \quad B\beta=b\ , \qquad A'\alpha'=a'\ , \quad B'\beta'=b'\ , \qquad (4)$$

$$a^2+b^2=r^2\ , \qquad a'^2+b'^2=r'^2\ ; \qquad (5)$$

les équations (1), (2), (3) deviendront ainsi

$$\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}=1\ , \qquad \frac{a'^2}{A'}+\frac{b'^2}{B'}=1\ , \qquad (6)$$

$$ax+by=1\ , \qquad a'x+b'y=1\ , \qquad (7)$$

$$aa'+bb'=0\ . \qquad (8)$$

Les équations (5) et (8) pourront alors être écrites comme il suit:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{b}{r}\right)^2=1\ , \quad \left(\frac{a'}{r'}\right)^2+\left(\frac{b'}{r'}\right)^2=1\ , \quad \left(\frac{a}{r}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)+\left(\frac{b}{r}\right)\left(\frac{b'}{r'}\right)=0\ ; \quad (9)$$

or, il est connu qu'à trois pareilles relations, entre quatre quantités, on peut, comme équivalentes, substituer les trois suivantes (*) :

(*) Soient, en effet, deux systèmes de coordonnées rectangulaires, de même origine, et soient (x, y), (t, u) un même point considéré, tour à tour, dans les deux systèmes. Le carré de sa distance à l'origine devant être le même

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{a'}{r'}\right)^2=1\,,\quad \left(\frac{b}{r}\right)^2+\left(\frac{b'}{r'}\right)^2=1\,,\quad \left(\frac{a}{r}\right)\left(\frac{b}{r}\right)+\left(\frac{a'}{r'}\right)\left(\frac{b'}{r'}\right)=0\,. \quad (10)$$

Cela posé, les équations (7) peuvent être écrites ainsi:

$$\frac{a}{r}x+\frac{b}{r}y+\frac{1}{r}\,,\qquad \frac{a'}{r}x+\frac{b'}{r}y=\frac{1}{r'}\,;$$

---

pour les deux systèmes, on devra avoir, quel que soit ce point,

$$x^2+y^2=t^2+u^2\,. \qquad (1)$$

Présentement les coordonnées x et y devant être des fonctions linéaires de t et u qui doivent s'évanouir en même temps que ces dernières, on peut écrire

$$x=pt+p'u\,,\qquad y=qt+q'u\,; \qquad (2)$$

ce qui donnera, en substituant dans (1), transposant et développant,

$$(p^2+q^2-1)t^2+(p'^2+q'^2-1)u^2+2(pp'+qq')tu=0\,;$$

équation qui, par ce qu'elle doit être identique, donne

$$p^2+q^2=1\,,\qquad p'^2+q'^2=1\,,\qquad pp'+qq'=0\,. \qquad (3)$$

D'un autre côté, si l'on prend, tour à tour, la somme des produits des équations (2), d'abord par p et q, puis par p' et q', en ayant égard aux relations (3), il viendra

$$t=px+qy\,,\qquad u=p'x+q'y\,; \qquad (4)$$

substituant dans (1), transposant et développant, on aura

$$(p^2+p'^2-1)x^2+(q^2+q'^2-1)y^2+2(pq+p'q)xy=0\,;$$

équation qui, devant aussi être identique, donne

$$p^2+p'^2=1\,,\qquad q^2+q'^2=1\,,\qquad pq+p'q'=0\,; \qquad (5)$$

relations qui, conséquemment, doivent être équivalentes aux relations (3). Nous nous sommes déjà appuyés sur cette équivalence à la pag. 159 du XII.e volume du présent recueil.

J. D. G.

prenant alors la somme de leurs carrés, ayant égard aux relations (10), il viendra simplement

$$x^2+y^2=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}\,. \qquad (11)$$

Supposons présentement que les deux ellipses aient les mêmes foyers, et conséquemment la même excentricité, on aura ainsi

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{1}{A'}-\frac{1}{B'}\,, \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{A}-\frac{1}{A'}=\frac{1}{B}-\frac{1}{B'}\,; \quad (12)$$

et, par suite,

$$\frac{a'^2}{A'}+\frac{b'^2}{B'}=\frac{a'^2}{A}+\frac{b'^2}{B}+\left(\frac{1}{A'}-\frac{1}{A}\right)a'^2+\left(\frac{1}{B'}-\frac{1}{B}\right)b'^2=\frac{a'^2}{A}+\frac{b'^2}{B}+\left(\frac{1}{B'}-\frac{1}{B}\right)r'^2\,;$$

c'est-à-dire (6),

$$\frac{a'^2}{A^2}+\frac{b'^2}{B^2}=1+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{B'}\right)r'^2\,;$$

ou bien encore

$$\frac{1}{A}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2+\frac{1}{B}\left(\frac{b'}{r'}\right)^2=\frac{1}{r'^2}+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{B'}\right)\,;$$

mais on a aussi (6)

$$\frac{1}{A}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{1}{B}\left(\frac{b}{r}\right)^2=\frac{1}{r^2}\,;$$

ajoutant ces deux équations membre à membre, et ayant égard aux relations (10), il viendra

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{B}-\frac{1}{B'}\,;$$

c'est-à-dire, en réduisant et ayant égard à la relation (12),

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B'}=\frac{1}{A'}+\frac{1}{B} \quad ;$$

au moyen de quoi l'équation (11) deviendra

$$x^2+y^2=\frac{1}{A}+\frac{1}{B'}=\frac{1}{A'}+\frac{1}{B} \quad ;$$

ce qui permet d'écrire, pour plus de symétrie,

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)+\left(\frac{1}{A'}+\frac{1}{B'}\right)\right\} ; \qquad (13)$$

équation d'un cercle qui a son centre à l'origine.

Si, au lieu de deux ellipses, on avait deux hyperboles, ou bien une ellipse et une hyperbole, il n'y aurait rien de changé que les signes de B et de B', ou de l'un d'eux seulement, ce qui pourrait quelquefois réduire le cercle à un point, ou même le rendre imaginaire. On a donc ce théorème :

THÉORÈME I. Si un angle droit se meut sur un plan, de telle sorte que les côtés touchent respectivement deux coniques bi-confocales, son sommet décrira la circonférence qui leur sera concentrique.

Le carré du rayon de ce cercle sera égal à la demi-somme des carrés des cordes qui, dans les deux coniques, joindront deux sommets consécutifs.

Soit e l'excentricité commune aux deux courbes, et soient respectivement f et f' les distances de leurs sommets à un même foyer, nous aurons

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=e^2 , \qquad \frac{1}{A'}-\frac{1}{B'}=e^2 ,$$

$$\frac{1}{A}=(e+f)^2 , \qquad \frac{1}{A'}=(e+f')^2 ,$$

doù nous conclurons

$$\frac{1}{B}=f(2e+f)\,,\qquad \frac{1}{B'}=f'(2e+f')\,;$$

Si nous substituons ces valeurs dans les équations des deux courbes, en y changeant x en $x-e$ pour transporter l'origine au foyer commun négatif, elles deviendront

$$\frac{(x-e)^2}{(e+f)^2}+\frac{y^2}{f(2e+f)}=1\,,\qquad \frac{(x-e)^2}{(e+f')^2}+\frac{y^2}{f'(2e+f')}=1\,;$$

ou, en chassant les dénominateurs, développant, ordonnant et divisant par e^2

$$\frac{f}{e}\left(2+\frac{f}{e}\right)x^2-2f\left(2+\frac{f}{e}\right)x+\left(1+\frac{f}{e}\right)^2y^2=f^2\left(2+\frac{f}{e}\right)^2\,;$$

$$\frac{f'}{e}\left(2+\frac{f'}{e}\right)x^2-2f'\left(2+\frac{f'}{e}\right)x+\left(1+\frac{f'}{e}\right)^2y^2=f'^2\left(2+\frac{f'}{e}\right)^2\,.$$

Avec les mêmes données l'équation (13) du cercle décrit par le sommet de l'angle deviendra

$$\frac{x^2+y^2}{e}-2x=\frac{f^2+f'^2}{e}+2(f+f')\,.$$

Si l'on suppose ensuite que e devient infini, les équations des deux courbes deviennent celles de deux paraboles données par les équations

$$y^2=4f(x+f)\,,\qquad y^2=4f'(x+f')\,;$$

et celle du cercle devient

$$x=-(f+f')\,;$$

c'est-à-dire, celle d'une perpendiculaire à l'axe commun des deux courbes.

D'un autre côté, en égalant entre elles les valeurs de y^2, l'équation résultante

$$4f(x+f)=4f'(x+f'),$$

qui doit être celle de la corde commune ou de l'axe de symptose des deux courbes, donne aussi la même valeur pour x ; on a donc ce théorème :

THÉORÈME II. Si un angle droit se meut sur un plan, de telle sorte que ses côtés touchent respectivement deux paraboles de même axe et de même foyer, son sommet décrira l'axe de symptose des deux courbes.

Le *théorème I* peut encore être énoncé comme il suit :

THÉORÈME III. Si deux coniques bi-confocales se meuvent, dans le plan d'un angle droit, de manière à toucher respectivement ses deux côtés, leur centre commun décrira une circonférence qui aura pour centre le sommet de cet angle.

On peut supposer, tour à tour, dans le *théorème I*, 1.° que les deux coniques se confondent en une seule ; 2.° que, sans qu'elles se confondent, leurs foyers communs se confondent en un seul ; on obtient ainsi ces deux théorèmes connus, qui ne sont, comme on le voit, que des cas particuliers de celui-là ;

Si un angle droit se meut, sur un plan, de manière à être constamment circonscrit à une même conique, ou de manière que ses côtés touchent respectivement deux cercles concentriques ; son sommet décrira une circonférence qui aura pour centre le centre de la conique ou le centre commun des deux cercles directeurs.

Son sommet décrira donc une ligne droite si la courbe est une parabole.

Il est encore facile de conclure des *théorèmes I* et *II* qu'*une ellipse et une hyperbole de mêmes foyers, ou bien deux paraboles de même axe et de même foyer, se coupent toujours orthogonalement.*

II. Soient trois ellipsoïdes concentriques, dont les diamètres principaux coïncident ; et supposons que leurs équations, relatives à ces trois droites, soient

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1\ ,\quad A'x^2+B'y^2+C'z^2=1\ ,\quad A''x^2+B''y^2+C''z^2=1\ .$$

Soit un angle trièdre tri-rectangle, mobile dans l'espace, dont les faces touchent respectivement ces trois ellipsoïdes ; en désignant par (α,β,γ), (α',β',γ'), $(\alpha'',\beta'',\gamma'')$ les trois points de contact variables, nous aurons d'abord

$$A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2=1\ ,\quad A'\alpha'^2+B'\beta'^2+C'\gamma'^2=1\ ,\quad A''\alpha''^2+B''\beta''^2+C''\gamma''^2=1\ . \quad (1)$$

Les équations des trois faces de cet angle trièdre seront respectivement

$$A\alpha x+B\beta y+C\gamma z=1\ ,\quad A'\alpha'x+B'\beta'y+C'\gamma'z=1\ ,\quad A''\alpha''x+B''\beta''y+C''\gamma''z=1\ ; \quad (2)$$

et, parce que l'angle trièdre est tri-rectangle, nous aurons, en outre,

$$A'A''\alpha'\alpha''+B'B''\beta'\beta''+C'C''\gamma'\gamma''=0\ ,\quad A''A\alpha''\alpha+B''B\beta''\beta+C''C\gamma''\gamma=0\ ,$$
$$AA'\alpha\alpha'+BB'\beta\beta'+CC'\gamma\gamma'=0\ , \quad (3)$$

or, bien que ces équations ne soient qu'au nombre de neuf seulement, on peut néanmoins éliminer entre elles les neufs coordonnées des trois points de contact, et l'équation résultante, en x, y, z, sera celle de la surface décrite dans l'espace par le sommet de l'angle trièdre mobile.

Soient posés

$$A\alpha=a\ ,\ B\beta=b\ ,\ C\gamma=c\ ,\ A'\alpha'=a'\ ,\ B'\beta'=b'\ ,\ C'\gamma'=c'\ ,\ A''\alpha''=a''\ ,\ B''\beta''=b''\ ,\ C''\gamma''=c''\ , \quad (4)$$

$$a^2+b^2+c^2=r^2\ ,\quad a'^2+b'^2+c'^2=r'^2\ ,\quad a''^2+b''^2+c''^2=r''^2\ ; \quad (5)$$

les équations (1), (2), (3) deviendront ainsi

$$\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}+\frac{c^2}{C}=1\,,\qquad \frac{a'^2}{A'}+\frac{b'^2}{B'}+\frac{c'^2}{C'}=1\,,\qquad \frac{a''^2}{A''}+\frac{b''^2}{B''}+\frac{c''^2}{C''}=1\,,\quad (6)$$

$$ax+by+cz=1\,,\quad a'x+b'y+c'z=1\,,\quad a''x+b''y+c''z=1\,,\quad (7)$$

$$a'a''+b'b''+c'c''=0\,,\quad a''a+b''b+c''c=0\,,\quad aa'+bb'+cc'=0\,;\quad (8)$$

les équations (5) et (8) pourront alors être écrites comme il suit :

$$\left.\begin{array}{ll}
\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{b}{r}\right)^2+\left(\frac{c}{r}\right)^2=1\,, & \left(\frac{a'}{r'}\right)\left(\frac{a''}{r''}\right)+\left(\frac{b'}{r'}\right)\left(\frac{b''}{r''}\right)+\left(\frac{c'}{r'}\right)\left(\frac{c''}{r''}\right)=0\,,\\
\left(\frac{a'}{r'}\right)^2+\left(\frac{b'}{r'}\right)^2+\left(\frac{c'}{r'}\right)^2=1\,, & \left(\frac{a''}{r''}\right)\left(\frac{a}{r}\right)+\left(\frac{b''}{r''}\right)\left(\frac{b}{r}\right)+\left(\frac{c''}{r''}\right)\left(\frac{c}{r}\right)=0\,,\\
\left(\frac{a''}{r''}\right)^2+\left(\frac{b''}{r''}\right)^2+\left(\frac{c''}{r''}\right)^2=1\,, & \left(\frac{a}{r}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)+\left(\frac{b}{r}\right)\left(\frac{b'}{r'}\right)+\left(\frac{c}{r}\right)\left(\frac{c'}{r'}\right)=0\,;
\end{array}\right\}\ (9)$$

or, il est connu qu'à six pareilles relations entre neuf quantités, on peut, comme équivalentes, substituer les suivantes (*) :

(*) Soient, en effet, deux systèmes de coordonnées rectangulaires de même origine, et soient (x,y,z), (t,u,v) un même point considéré, tour à tour, dans les deux systèmes. Le carré de sa distance à l'origine devant être le même pour ces deux systèmes, on devra avoir, quel que soit ce point,

$$x^2+y^2+z^2=t^2+u^2+v^2\,. \qquad (1)$$

Présentement, les coordonnées x, y, z devant être des fonctions linéaires de t, u, v qui doivent s'évanouir en même temps que ces dernières, on peut écrire

$$x=pt+p'u+p''v\,,\quad y=qt+q'u+q''v\,,\quad z=rt+r'u+r''v\,; \qquad (2)$$

ce qui donnera en substituant dans (1), transposant et développant

$$\left.\begin{array}{ll}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{a'}{r'}\right)^2+\left(\frac{a''}{r''}\right)^2=1\,, & \left(\frac{b}{r}\right)\left(\frac{c}{r}\right)+\left(\frac{b'}{r'}\right)\left(\frac{c'}{r'}\right)+\left(\frac{b''}{r''}\right)\left(\frac{c''}{r''}\right)=0\,,\\ \left(\frac{b}{r}\right)^2+\left(\frac{b'}{r'}\right)^2+\left(\frac{b''}{r''}\right)^2=1\,, & \left(\frac{c}{r}\right)\left(\frac{a}{r}\right)+\left(\frac{c'}{r'}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)+\left(\frac{c''}{r''}\right)\left(\frac{a''}{r''}\right)=0\,,\\ \left(\frac{c}{r}\right)^2+\left(\frac{c'}{r'}\right)^2+\left(\frac{c''}{r''}\right)^2=1\,, & \left(\frac{a}{r}\right)\left(\frac{b}{r}\right)+\left(\frac{a'}{r'}\right)\left(\frac{b'}{r'}\right)+\left(\frac{a''}{r''}\right)\left(\frac{b''}{r''}\right)=0\,,\end{array}\right\}\quad(10)$$

$$\left.\begin{array}{r}(p^2+q^2+r^2-1)t^2+2(p'p''+q'q''+r'r'')uv\\ +(p'^2+q'^2+r'^2-1)u^2+2(p''p+q''q+r''r)vt\\ +(p''^2+q''^2+r''^2-1)v^2+2(pp'+qq'+rr')tu\end{array}\right\}=0\,,$$

équation qui, parce qu'elle doit être identique, donne

$$\left.\begin{array}{ll}p^2+q^2+r^2=1\,, & p'p''+q'q''+r'r''=0\,,\\ p'^2+q'^2+r'^2=1\,, & p''p+q''q+r''r=0\,,\\ p''^2+q''^2+r''^2=1\,, & pp'+qq'+rr'=0\,.\end{array}\right\}\quad(3)$$

D'un autre côté, si l'on prend, tour à tour, la somme des produits respectifs des équations (2), d'abord par p, q, r, ensuite par p', q', r', puis enfin par p'', q'', r'', en ayant égard aux relations (3), il viendra

$$t=px+qy+rz\,,\qquad u=p'x+q'y+r'z\,,\qquad v=p''x+q''y+r''z\,;\quad(4)$$

substituant dans (1), transposant et développant, on aura

$$\left.\begin{array}{r}(p^2+p'^2+p''^2-1)x^2+2(qr+q'r'+q''r'')yz\\ +(q^2+q'^2+q''^2-1)y^2+2(rp+r'p'+r''p'')zx\\ +(r^2+r'^2+r''^2-1)z^2+2(pq+p'q'+p''q'')xy\end{array}\right\}=0\,,$$

équation qui, devant aussi être identique, donne

Cela posé, les équations (7) peuvent être écrites ainsi:

$$\frac{a}{r}x+\frac{b}{r}y+\frac{c}{r}z=\frac{1}{r}\,,\quad \frac{a'}{r'}x+\frac{b'}{r'}y+\frac{c'}{r'}z=\frac{1}{r'}\,,\quad \frac{a''}{r''}x+\frac{b''}{r''}y+\frac{c''}{r''}z=\frac{1}{r''}\;;$$

prenant alors la somme de leurs carrés, en ayant égard aux relations (10), il viendra simplement

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\,. \qquad (11)$$

Supposons présentement que deux des sections principales des trois ellipsoïdes aient les mêmes foyers, et, par suite, même excentricité, on aura ainsi

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{C}=\frac{1}{A'}-\frac{1}{C'}=\frac{1}{A''}-\frac{1}{C''}\,,\quad \frac{1}{B}-\frac{1}{C}=\frac{1}{B'}-\frac{1}{C'}=\frac{1}{B''}-\frac{1}{C''}\;;$$

d'où, en retranchant,

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{1}{A'}-\frac{1}{B'}=\frac{1}{A''}-\frac{1}{B''}\;;$$

$$\left.\begin{array}{ll} p^2+p'^2+p''^2=1\,, & qr+q'r'+q''r''=0\,,\\ q^2+q'^2+q''^2=1\,, & rp+r'p'+r''p''=0\,,\\ r^2+r'^2+r''^2=1\,, & pq+p'q'+p''q''=0\;; \end{array}\right\} \quad (5)$$

relations qui, conséquemment, doivent être équivalentes avec les relations (3). Nous nous sommes déjà appuyés (*Annales*, tom. XII, pag. 163) sur cette équivalence signalée, pour la première fois, par Lagrange dans sa *Mécanique analytique*, et dont M. Poisson a donné postérieurement une démonstration fort élégante dans la *Correspondance* de M. Hachette (tom. I, pag. 237).

J. D. G.

c'est-à-dire, que les troisièmes sections principales auront aussi la même excentricité, et, par suite, les mêmes foyers. On tirera de là

$$\frac{1}{A'}-\frac{1}{A}=\frac{1}{B'}-\frac{1}{B}=\frac{1}{C'}-\frac{1}{C}\ ,\qquad \frac{1}{A''}-\frac{1}{A}=\frac{1}{B''}-\frac{1}{B}=\frac{1}{C''}-\frac{1}{C}\ ;\quad (12)$$

au moyen de quoi on aura

$$\frac{a'^2}{A'}+\frac{b'^2}{B'}+\frac{c'^2}{C'}=\frac{a'^2}{A}+\frac{b'^2}{B}+\frac{c'^2}{C}+\left(\frac{1}{A'}-\frac{1}{A}\right)a'^2+\left(\frac{1}{B'}-\frac{1}{B}\right)b'^2+\left(\frac{1}{C'}-\frac{1}{C}\right)c'^2\ ,$$

$$\frac{a''^2}{A''}+\frac{b''^2}{B''}+\frac{c''^2}{C''}=\frac{a''^2}{A}+\frac{b''^2}{B}+\frac{c''^2}{C}+\left(\frac{1}{A''}-\frac{1}{A}\right)a''^2+\left(\frac{1}{B''}-\frac{1}{B}\right)b''^2+\left(\frac{1}{C''}-\frac{1}{C}\right)c''^2\ ;$$

c'est-à-dire (5), (6), (12),

$$\frac{a'^2}{A}+\frac{b''^2}{B}+\frac{c''^2}{C}=1+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{B'}\right)r'^2\ ,$$

$$\frac{a''^2}{A}+\frac{b''^2}{B}+\frac{c''^2}{C}=1+\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{C''}\right)r''\ ;$$

ou bien encore

$$\frac{1}{A}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2+\frac{1}{B}\left(\frac{b'}{r'}\right)^2+\frac{1}{C}\left(\frac{c'}{r'}\right)^2=\frac{1}{r'^2}+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{B'}\right)\ ,$$

$$\frac{1}{A}\left(\frac{a''}{r''}\right)^2+\frac{1}{B}\left(\frac{b''}{r''}\right)^2+\frac{1}{C}\left(\frac{c''}{r''}\right)^2=\frac{1}{r''^2}+\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{C''}\right)\ ;$$

mais on a aussi (6)

$$\frac{1}{A}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{1}{B}\left(\frac{b}{r}\right)^2+\frac{1}{C}\left(\frac{c}{r}\right)^2=\frac{1}{r^2}\ ;$$

ajoutant ces trois équations membre à membre, en ayant égard aux relations (10), il viendra

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{B'}-\frac{1}{C''}\ ;$$

c'est-à-dire, en réduisant et ayant égard aux relations (12),

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B'}+\frac{1}{C''}=\frac{1}{A'}+\frac{1}{B''}+\frac{1}{C}=\frac{1}{A''}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C'}\ ,$$

au moyen de quoi l'équation (11) deviendra

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{A}+\frac{1}{B'}+\frac{1}{C''}=\frac{1}{A'}+\frac{1}{B''}+\frac{1}{C}=\frac{1}{A''}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C'}\ ;$$

ce qui permet d'écrire, pour plus de symétrie,

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)+\left(\frac{1}{A'}+\frac{1}{B'}+\frac{1}{C'}\right)+\left(\frac{1}{A''}+\frac{1}{B''}+\frac{1}{C''}\right)\right\}; \qquad (13)$$

équation d'une sphère qui a son centre à l'origine.

Si, au lieu de trois ellipsoïdes on avait trois hyperboloïdes, ou bien deux ellipsoïdes avec une hyperboloïde, ou encore deux hyperboloïdes avec un ellipsoïde, il n'en résulterait que de simples changemens de signes dans quelqu'un des neuf coefficiens A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''; le lieu cherché serait donc toujours une sphère, qui pourrait seulement se réduire quelquefois à un point, ou même devenir imaginaire. On a donc ce théorème :

THÉORÈME I. Si un angle trièdre tri-rectangle se meut dans l'espace, de manière que ses faces touchent respectivement trois surfaces du second ordre dont les sections principales soient bi-confocales, son sommet décrira une sphère qui leur sera concentrique.

De là on conclura facilement cet autre théorème :

THÉORÈME II. Si un angle trièdre tri-rectangle se meut dans l'espace, de manière que ses faces touchent respectivement trois surfaces du second ordre dépourvues de centres, dont les sections *paraboliques principales aient même axe et même foyer, son sommet décrira un plan perpendiculaire à leur axe commun.*

Le *théorème I* peut encore être énoncé comme il suit :

THÉORÈME III. Si trois surfaces du second ordre, invariablement liées entre elles, et ayant leurs sections principales bi-confocales, se meuvent dans l'espace, de manière à toucher respectivement les trois faces d'un angle trièdre tri-rectangle fixe, leur centre commun décrira une sphère ayant son centre au sommet de l'angle trièdre.

Si, dans les *théorèmes I* et *II*, on suppose que deux des surfaces du second ordre se confondent, on obtiendra ces deux-ci :

THÉORÈME IV. Si deux surfaces du second ordre ont leurs sections principales bi-confocales, et qu'un angle trièdre tri-rectangle se meuve dans l'espace, de telle sorte que deux de ses faces touchent constamment une de ces surfaces, tandis que la troisième touche constamment l'autre, le sommet de cet angle trièdre décrira une sphère concentrique avec ces deux surfaces.

THÉORÈME V. Si deux surfaces du second ordre dépourvues de centre ont même axe et même foyer, et qu'un angle trièdre se meuve dans l'espace, de telle sorte que deux de ses faces touchent constamment une de ces surfaces, tandis que la troisième touche constamment l'autre, le sommet de cet angle trièdre décrira un plan perpendiculaire à l'axe commun de ces deux surfaces.

On peut supposer, tour à tour, dans le *théorème I*, 1.° que les trois surfaces se confondent en une seule ; 2.° que, sans qu'elles se confondent, les foyers communs de leurs sections principales se confondent en un seul, on obtient ainsi ce double théorème démontré par M. Poisson, dans la correspondance de M. Hachette (tom. I, pag. 237), et qui n'est, comme on le voit, qu'un cas particulier de notre théorème général :

Si un angle trièdre tri-rectangle se meut, dans l'espace, de manière à être constamment circonscrit à une même surface du second ordre, ou de manière que ses faces touchent respectivement *trois sphères concentriques, son sommet décrira une sphère qui aura pour centre le centre de la surface du second ordre ou le centre commun des trois sphères directrices* (*).

Son sommet décrira donc un plan, si la surface du second ordre est dépourvue de centre.

Il est encore facile de conclure, de notre théorème général, que *trois surfaces du second ordre, dont les sections principales sont bi-confocales, se coupent deux à deux à angles droits.*

(*) Dans le dernier numéro de la *Correspondance* de Bruxelles (tom. V, pag. 32), le cas de trois sphères concentriques a été considéré par divers géomètres, et deux d'entre eux ont observé avec raison que, sans faire aucune dépense de calcul, ce cas pouvait être démontré très-simplement par des considérations purement géométriques; mais on peut dire plus encore, et il nous paraît que c'est méconnaître tout à fait la nature du cercle et celle de la sphère, que de ne point admettre, sans démonstration, et comme conséquences immédiates de leurs définitions, les propositions plus générales que voici :

I. *Si une droite d'une longueur invariable se meut sur un plan, de manière que ses deux extrémités soient constamment sur les circonférences de deux cercles concentriques, cette droite enveloppera, dans son mouvement, une troisième circonférence concentrique aux deux premières.*

II. *Si un triangle équilatéral se meut dans l'espace, de manière que ses sommets soient constamment sur trois sphères concentriques, ou de manière que ses côtés touchent constamment ces trois sphères, le plan de ce triangle enveloppera, dans son mouvement, une quatrième sphère concentrique aux trois autres.*

I. *Si un angle d'une grandeur invariable se meut sur un plan, de manière que ses deux côtés soient constamment tangens à deux cercles concentriques, son sommet décrira, dans son mouvement, la circonférence d'un troisième cercle concentrique aux deux premières.*

II. *Si un angle trièdre équilatéral se meut dans l'espace, de manière que ses faces soient constamment tangentes à trois sphères concentriques, ou de manière que ses arêtes touchent constamment ces trois sphères, le sommet de cet angle trièdre décrira, dans son mouvement, une quatrième sphère concentrique aux trois autres.*

J. D. G.

III. De ces divers théorèmes on peut aisément, par la théorie des polaires réciproques, conclure les suivans :

THÉORÈME I. Si un angle droit, mobile sur le plan de deux cercles qui se touchent, a constamment son sommet à leur point d'intersection, la droite mobile qui joindra les points de contact respectifs des deux côtés de cet angle avec les deux cercles, passera constamment par leur autre centre de similitude ou d'homologie.

THÉORÈME II. Si un angle trièdre tri-rectangle, mobile dans l'espace, a constamment son sommet au point de contact de trois sphères, le plan mobile qui passera par les points où les trois arêtes de cet angle trièdre percent respectivement ces sphères, passera constamment par un même point fixe de la droite qui joint leurs centres.

THÉORÈME III. Si un angle droit, mobile sur le plan de deux coniques fixes, a son sommet en un point fixe de ce plan, et que ce point soit tellement situé que, dans quatre des situations de l'angle mobile, les droites qui joindront les points d'intersection respectifs de ses côtés avec les deux coniques se confondent avec leurs quatre tangentes communes, cette droite, dans toutes ses positions, cette droite mobile enveloppera une troisième conique ayant pour foyer le sommet de l'angle mobile.

THÉORÈME IV. Si un angle trièdre tri-rectangle, mobile dans l'espace, a son sommet en un point fixe, et que, dans huit de ses positions, en conduisant des plans par les trois points où ses arêtes percent respectivement trois surfaces fixes du second ordre, ces plans coïncident avec les huit plans tangens communs à ces trois surfaces, dans toutes les autres situations de l'angle trièdre, le plan mobile enveloppera une surface de révolution du second ordre, ayant pour foyer le sommet fixe de cet angle trièdre.

On peut consulter, sur la démonstration de ces divers théorèmes, un article inséré à la pag. 185 du précédent volume des *Annales*.

Nous terminerons par un théorème assez remarquable sur les co-

coniques bi-confocales; ce théorème consiste en ce que *trois coniques bi-confocales étant données, si un triangle mobile et variable de forme est constamment circonscrit à l'une d'elles, de telle sorte que deux de ses sommets décrivent les deux autres, son troisième sommet décrira une quatrième conique bi-confocale avec les trois premières.*

Ce théorème résulte de ce que 1.° en plaçant le centre du cercle directeur à l'un des foyers, les trois premières coniques se transforment en trois cercles ayant un axe de symptose commun; 2.° trois cercles tracés sur un même plan, ayant un axe de symptose commun, si l'on inscrit à l'un d'eux un triangle mobile et variable de forme, dont deux côtés enveloppent respectivement les deux autres, son troisième côté enveloppera un quatrième cercle ayant un axe de symptose commun avec les trois premiers (PONCELET, *Propriétés projectives*, pag. 323).

Châlons-sur-Marne, le 10 novembre 1828.