ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LEBARBIER

Dynamique. Solution d'un problème de dynamique

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 285-293
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__285_0>

DYNAMIQUE.

Solution d'un problème de dynamique ;

Par M. Le Barbier.

Problème. Un tube cylindrique rectiligne, d'une longueur indéfinie, est lié d'une manière invariable à un axe horizontal fixe, auquel il est perpendiculaire, de telle sorte que l'axe de rotation passe par l'axe du tube qui se trouve ainsi contraint de se mouvoir, comme une lunette méridienne, dans un plan vertical fixe.

On introduit dans l'intérieur de ce tube une sphère pesante, d'un diamètre égal au sien, dont le centre de gravité coïncide avec son centre de figure, qui, de la sorte, se trouve constamment dans l'axe du tube.

On suppose que ce tube est contraint à tourner d'un mouvement uniforme sur l'axe horizontal fixe qui le supporte, et l'on demande de déterminer les circonstances du mouvement du centre de la sphère dans le plan vertical, en faisant d'ailleurs abstraction de la résistance de l'air et du frottement ?

Solution. Rien n'étant plus aisé que de combiner le mouvement de rotation uniforme de l'axe du tube avec le mouvement varié du centre de la sphère, le long de cet axe supposé fixe, occupons-nous d'abord uniquement de ce dernier.

Par le centre du mouvement, et à droite de ce centre, soit menée, dans le plan vertical fixe que doit parcourir l'axe du tube, une horizontale indéfinie ; la position initiale de cet axe sera déterminée par l'angle que fera alors sa direction avec l'horizontale ;

angle que nous désignerons par α et que nous mesurerons constamment au-dessus de cette horizontale, et de droite à gauche. Nous n'aurons jamais besoin d'ailleurs de le supposer plus grand que deux angles droits, puisque, si cela arrivait, nous pourrions lui substituer l'angle que formerait, avec l'horizontale, le prolongement de l'axe du tube au-delà du centre du mouvement.

Supposons qu'à l'origine des temps, le centre de la sphère mobile soit à une distance R du centre du mouvement et qu'on lui ait imprimé, suivant l'axe du tube, une vîtessse V, positive ou négative, suivant que sa projection sur l'horizontale sera elle-même positive ou négative. Soit enfin T la durée d'une révolution du tube sur son axe.

Durant l'intervalle de temps t, l'axe du tube décrira dans le plan vertical fixe un angle $2\varpi\frac{t}{T}$; de sorte que si l'on suppose, pour fixer les idées, que son mouvement tende à faire croître l'angle α, cet angle sera, à l'époque t, $\alpha+2\varpi\frac{t}{T}$.

Soit g la gravité, seule force accélératrice du système; si l'on décompose cette force en deux autres, l'une perpendiculaire à l'axe du tube et l'autre dans le sens de cet axe, le mouvement de rotation du tube étant tout à fait déterminé, indépendamment de la pesanteur, la première de ces deux composantes sera détruite, et la seconde aura seule son plein effet; or, cette dernière a évidemment pour expression $g\text{Sin.}\left(\alpha+2\varpi\frac{t}{T}\right)$; en désignant donc par r la distance variable du centre de la sphère mobile au centre du mouvement, on aura

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-g\text{Sin.}\left(\alpha+2\varpi\frac{t}{T}\right). \qquad (1)$$

Nous donnons ici le signe *moins* au second membre, attendu que, dans le cas $t=0$, la gravité tend à diminuer la distance r.

On voit donc que la force accélératrice, suivant l'axe du tube, est à la fois variable et périodique ; elle sera nulle, quel que soit le nombre entier n, toutes les fois qu'on aura

$$\alpha+2\varpi\frac{t}{T}=n\varpi\,,\qquad \text{d'où}\qquad t=\frac{T(n\varpi-\alpha)}{2\varpi}\ ;$$

elle atteindra sa plus grande valeur négative, toutes les fois qu'on aura

$$\alpha+2\varpi\frac{t}{T}=\frac{(4n+1)\varpi}{2}\,,\qquad \text{d'où}\qquad t=\frac{T\{(4n+1)\varpi-2\alpha\}}{4\varpi}\ ;$$

et cette valeur positive sera $-g$; elle atteindra enfin sa plus grande valeur lorsqu'on aura

$$\alpha+2\varpi\frac{t}{T}=\frac{(4n+3)\varpi}{2}\,,\qquad \text{d'où}\qquad t=\frac{T\{(4n+3)\varpi-2\alpha\}}{4\varpi}\ ;$$

et cette valeur sera $+g$.

Si l'on intègre une première fois l'équation (1), en se rappelant que V est la vîtesse initiale du centre de la sphère mobile, et qu'on représente par v la vîtesse de ce centre, suivant l'axe du tube à l'époque t, on aura

$$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\left(V-\frac{gT}{2\varpi}\,\text{Cos.}\alpha\right)+\frac{gT}{2\varpi}\,\text{Cos.}\left(\alpha+2\varpi\frac{T}{t}\right). \qquad (2)$$

Ainsi la vîtesse du centre de la sphère mobile, suivant l'axe du tube, tout comme la force accélératrice, sera à la fois variable et périodique.

Pour que cette vîtesse soit nulle, il faudra qu'on ait

$$\left(V-\frac{gT}{2\varpi}\,\text{Cos.}\alpha\right)+\frac{gT}{2\varpi}\,\text{Cos.}\left(\alpha+2\varpi\frac{t}{T}\right)=0\ ; \qquad (3)$$

ce qui donnera

$$t=\frac{T}{2\varpi}\left\{\text{Arc.}\left[\text{Cos.}=\left(\text{Cos.}\alpha-\frac{2\varpi}{T}\cdot\frac{V}{g}\right)\right]-\alpha\right\}:$$

Ces époques seront aussi évidemment celles des *maxima* et *minima* de la distance r; mais, pour que ces époques soient réelles, encore faudra-t-il que

$$\text{Cos.}\alpha-\frac{2\varpi}{T}\cdot\frac{V}{g}$$

soit compris entre $+1$ et -1, ou, ce qui revient au même, que V soit compris entre les deux limites

$$\pm\frac{gT}{2\varpi}(1\mp\text{Cos.}\alpha)\ .$$

Quant aux époques des *maxima* et des *minima* de la vîtesse v, elles seront les mêmes que celles pour lesquelles on aura $\frac{dv}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}=0$; c'est-à-dire, comme nous l'avons vu ci-dessus, celles où on aura

$$\alpha+2\varpi\frac{t}{T}=n\varpi\ ;$$

ce qui donnera (2)

$$v=\left(V-\frac{gT}{2\varpi}\text{Cos.}\alpha\right)\pm\frac{gT}{2\varpi}=V\pm\frac{gT}{2\varpi}(1\mp\text{Cos.}\alpha)\ .$$

On voit par là que, si V est positif, il y aura toujours des époques où le centre de la sphère mobile ira en s'éloignant du centre du mouvement dans le sens de V, et il en sera même toujours ainsi, si l'on a

$$V>\frac{gT}{2\varpi}(1+\text{Cos.}\alpha)\ .$$

Si, au contraire, V est négatif, il y aura toujours des époques où le centre de la sphère mobile s'éloignera du centre du mouvement, dans le sens de V, et il en sera même toujours ainsi, dans ce cas, si l'on a

$$V > \frac{gT}{2\varpi}(1-\text{Cos}.\alpha)\,;$$

Si V étant positif, on avait

$$V = \frac{gT}{2\varpi}(1+\text{Cos}.\alpha)\,,$$

ou bien si, V étant négatif, on avait

$$V = \frac{gT}{2\varpi}(1-\text{Cos}.\alpha)\,,$$

le minimum de vîtesse dans le sens de V se réduirait à une vîtesse nulle.

En intégrant de nouveau l'équation (2), et se rappelant qu'à $t=0$ doit répondre $r=R$, on trouvera

$$r = \left(R - \frac{gT^2}{4\varpi^2}\text{Sin}.\alpha\right) + \left(V - \frac{gT}{2\varpi}\text{Cos}.\alpha\right)t + \frac{gT^2}{4\varpi^2}\text{Sin}.\left(\alpha + 2\varpi\frac{t}{T}\right)\,; \quad (4)$$

d'où l'on voit que la valeur de r se compose de trois parties, savoir: une partie constante, une autre qui croît indéfiniment avec le temps, et enfin une troisième qui est périodique. Il suit de là qu'en général on pourra toujours assigner une époque à laquelle le centre de la sphère mobile sera aussi éloigné qu'on le voudra du centre du mouvement.

Nous disons *en général*, car, si l'on avait

$$V = \frac{gT}{2\varpi}\text{Cos}.\alpha\,,$$

ce qui ne peut arriver lorsqu'il n'y a point de vîtesse initiale ; qu'autant que le tube part de la direction verticale; la valeur de r se réduisant alors simplement à

$$r=\left(R-\frac{gT^2}{4\varpi^2}\,\text{Sin.}\alpha\right)+\frac{gT^2}{4\varpi^2}\,\text{Sin.}\left(\alpha+2\varpi\frac{t}{T}\right), \quad (5)$$

et étant conséquemment périodique, elle se trouverait ainsi comprise entre les deux limites

$$r=\left(R-\frac{gT^2}{4\varpi^2}\,\text{Sin.}\alpha\right)\pm\frac{gT^2}{4\varpi^2}=R\pm\frac{gT^2}{4\varpi^2}(1\mp\text{Sin.}\alpha)\ ;$$

d'où l'on voit que le centre de la sphère mobile demeurerait alors constamment d'un même côté du centre du mouvement, si R étant positif on avait

$$R>\frac{gT^2}{4\varpi^2}(1+\text{Sin.}\alpha)\ ,$$

ou bien si, R étant négatif, on avait

$$R>\frac{gT^2}{4\varpi^2}(1-\text{Sin.}\alpha)\ .$$

Si, dans la même hypothèse, on voulait connaître les époques où le centre de la sphère mobile passera par le centre du mouvement, il ne s'agirait que de poser $r=0$ dans l'équation (5), et de la résoudre ensuite par rapport à t; ce qui donnerait

$$t=\frac{T}{2\varpi}\left\{\text{Arc.}\left[\text{Sin.}=\left(\text{Sin.}\alpha-\frac{4\varpi^2}{T^2}\cdot\frac{R}{g}\right)\right]-\alpha\right\}\ ;$$

mais encore faudrait-il, pour que ces époques fussent réelles, que

$$\text{Sin.}\alpha-\frac{4\varpi^2}{T^2}\cdot\frac{R}{g}\ ,$$

fût compris entre les limites $+1$ et -1, ou, ce qui revient au même, que R fût compris entre ces deux-ci :

$$\pm\frac{gT^2}{4\varpi^2}(1\pm\text{Sin}\,\alpha)\;;$$

ce qui concorde exactement avec ce qui vient d'être dit ci-dessus.

Si, pour le cas général, on se demandait les époques où le centre de la sphère mobile passera par le centre du mouvement, il faudrait, dans l'équation (4), poser $r=0$, et la résoudre ensuite par rapport à t; et l'on voit qu'on aurait ainsi à résoudre un problème du même genre que le problème de Képler, puisque t entre à la fois, dans cette équation, algébriquement et sous le signe sinus.

Il sera plus aisé, dans le cas général, de connaître les *maxima* et *minima* de la distance r; il suffira en effet, pour cela, d'introduire dans la formule (4) la valeur de $V-\frac{gT}{2\varpi}$ donnée par l'équation (5); ce qui donnera

$$r=\left(R-\frac{gT^2}{4\varpi^2}\,\text{Sin.}\alpha\right)-\frac{gT}{2\varpi}\left\{t\,\text{Cos.}\left(\alpha+2\varpi\frac{t}{T}\right)-\frac{T}{2\varpi}\,\text{Sin.}\left(\alpha+2\varpi\frac{t}{T}\right)\right\}.$$

Si l'on prend pour pôle le centre du mouvement, et que l'on représente par θ l'angle que fait le rayon vecteur avec l'horizontale menée dans le plan vertical fixe, par le centre du mouvement, on aura

$$\theta=\alpha+2\varpi\frac{t}{T}\,,\quad \text{d'où}\quad t=\frac{T(\theta-\alpha)}{2\varpi}\;;$$

substituant donc cette valeur dans l'équation (4), on obtiendra pour l'équation polaire de la trajectoire décrite par le centre de la sphère mobile dans le plan vertical fixe,

$$r=\left(R-\frac{gT^2}{4\varpi^2}\mathrm{Sin.}\alpha\right)+\left(V-\frac{gT}{2\varpi}\mathrm{Cos.}\alpha\right)\frac{T(\theta-\alpha)}{2\varpi}+\frac{gT^2}{4\varpi^2}\mathrm{Sin.}\theta\ ;$$

équation qui servira à construire la courbe par points, et de laquelle on conclurait aisément l'équation en coordonnées rectangulaires.

Ces résultats deviennent plus simples lorsqu'on suppose que le tube part de la direction verticale et que la sphère mobile n'a reçu aucune impulsion ; on a alors $V=0$, $\alpha=\frac{1}{2}\varpi$, d'où $\mathrm{Sin.}\alpha=1$ et $\mathrm{Cos.}\alpha=0$; en conséquence on trouve, d'abord pour la force accélératrice,

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=-g\mathrm{Sin.}\frac{2\varpi t}{T}\ ;$$

cette force accélératrice sera nulle, et conséquemment la vîtesse du centre de la sphère mobile aura atteint son maximum ou son minimum, lorsqu'on aura $t=\frac{nT}{2}$, c'est-à-dire à chaque demi-révolution ; on trouvera ensuite, pour la vîtesse du mobile, à l'époque t,

$$v=\frac{gT}{2\varpi}\mathrm{Cos.}\frac{2\varpi}{T}\ ;$$

cette vîtesse sera nulle, et conséquemment le rayon vecteur r atteindra son maximum ou son minimum, lorsqu'on aura $t=\frac{(2n+1)T}{4}$, c'est-à-dire, toutes les fois que le tube parviendra à la situation horizontale. Si, dans cette valeur de v, on fait $t=\frac{nT}{2}$, on aura pour le maximum et le minimum de vîtesse, répondant à la situation verticale du tube,

$$v=\pm\frac{gT}{2\varpi}\ .$$

On trouvera enfin, dans la même hypothèse,

$$r=R-\frac{gT^2}{4\varpi^2}\left(1-\frac{\text{Sin.}2\varpi t}{T}\right), \qquad (6)$$

on conclura de là les plus grandes et les moindres valeurs de r, en y mettant pour t la valeur $\frac{(2n+1)T}{4}$ qui répond aux *maxima* et *minima*, ce qui donnera

$$r=R-\frac{gT^2}{4\varpi^2}(1\pm1)$$

c'est-à-dire,

$$r=R\,, \qquad r=R-\frac{gT^2}{2\varpi^2}\,,$$

de sorte que le centre de la sphère mobile passera ou ne passera pas par le centre du mouvement, suivant que $\frac{gT^2}{2\varpi^2}$ sera plus grand ou plus petit que R. Quant aux époques de ces passages, on les trouvera en résolvant l'équation (6) par rapport à t, après y avoir fait $r=0$, ce qui donnera

$$t=\frac{T}{2\varpi}\left\{\text{Arc.}\left[\text{Sin.}=\left(1+\frac{4\pi^2R}{gT}\right)\right]\right\}.$$

Ajoutons que, dans le cas actuel, l'équation polaire de la trajectoire se réduira simplement à

$$r=R-\frac{gT^2}{4\pi^2}(1-\text{Sin.}\theta)=R-\frac{gT^2}{2\varpi^2}\text{Cos.}^2\left(\tfrac{1}{4}\varpi+\tfrac{1}{2}\theta\right).$$

Il est entendu que, dans tout ce qui précède, on doit supposer le diamètre de la sphère mobile assez petit, pour qu'on puisse se dispenser d'avoir égard aux momens d'inertie.