
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

CHASLES

**Géométrie de situation. Additions et corrections au mémoire
sur les propriétés des systèmes de coniques, inséré à la
pag. 277 du précédent volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 26-32

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__26_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1828-1829, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Additions et corrections au mémoire sur les propriétés des systèmes de coniques, inséré à la pag. 277 du précédent volume ;

Par M. CHASLES, ancien élève de l'École polytechnique.



LES circonstances dans lesquelles nous avons écrit le mémoire inséré à la pag. 277 du précédent volume ne nous ayant pas laissé toute la liberté d'esprit que nous aurions désiré, il en est résulté diverses sortes d'omissions plus ou moins graves et quelques inexactitudes de rédaction. Nous destinons cette note à les signaler, ainsi que quelques incorrections qui se sont glissées dans l'impression.

47. Nous avons dit (20) : M. Poncelet a discuté très-clairement l'existence des centres d'homologie et des *axes de symptose* ; il faut lire : *cordes communes réelles ou idéales* au lieu de : *axes de symptose*, parce qu'il a y une distinction à faire entre les six cordes communes à deux coniques qui se coupent en quatre points ; il est possible, en effet, qu'elles ne soient pas toutes des axes de symptose. C'est ce que nous allons faire voir, en reprenant la discussion des axes de symptose et des centres d'homologie de deux coniques ; et en examinant un cas qui n'est pas énoncé dans l'art. 20 : celui où les deux coniques se coupent en quatre points, sans avoir de tangentes communes. Cela nous justifiera pleinement d'avoir eu

recours à une expression nouvelle : celle d'*axe de symptose*, en prouvant qu'elle était indispensable.

48. Les théorèmes (17) ou (19) constituent la propriété fondamentale des axes de symptose et des centres d'homologie de deux coniques situées dans un même plan.

D'après les théorèmes de la première colonne on voit que, pour que le point de concours de deux tangentes communes à deux coniques soit un de leurs centres d'homologie, il faut que toute droite qui, menée par ce point, rencontre l'une des coniques, rencontre également l'autre. Cette condition exige que les deux coniques soient dans un même angle de ces deux tangentes, ou partie dans un angle et partie dans son opposé au sommet.

Cela fait voir que, *quand deux coniques sont extérieures l'une à l'autre, elles n'ont que deux centres d'homologie, et, par suite, deux axes de symptose, bien qu'il y ait six points de concours de leurs quatre tangentes communes.*

Pour quatre de ces points de concours, une droite menée par l'un d'eux ne pourrait à la fois rencontrer les deux coniques ; la construction des théorèmes (17) et (19) (1.^{re} colonne), n'aurait donc plus lieu ; ces quatre points, par conséquent, ne sont pas des centres d'homologie.

La méthode, par laquelle nous avons déduit les propriétés de deux coniques quelconques de celles de deux coniques homothétiques, confirme (ainsi que le fait voir l'art. 14) la distinction que nous venons d'établir entre les six points de concours des quatre tangentes communes à deux coniques extérieures l'une à l'autre.

50. Quand les deux coniques ont quatre tangentes communes et se coupent en quatre points, chacun des six points de concours, deux à deux de leurs quatre tangentes communes, est un centre d'homologie, parce qu'une droite menée par chacun de ces points peut à la fois rencontrer les deux courbes ; de sorte que la construction des numéros 17 et 19 (1.^{re} colonne) est toujours possible.

Cela est évident pour deux ellipses qui se coupent en quatre

points , parce que deux quelconques de leurs quatre tangentes communes comprennent toujours ces deux courbes dans un même angle.

Mais deux coniques quelconques qui se coupent en quatre points et qui ont quatre tangentes communes peuvent être considérées comme les polaires réciproques de deux ellipses ; car il suffit de prendre , pour centre de la conique directrice , un point compris dans les deux coniques. Or , ces deux ellipses se couperont en quatre points et auront quatre tangentes communes ; elles auront donc six centres d'homologie et six axes de symptose ; et par suite les deux coniques proposées auront également six axes de symptose et six centres d'homologie.

Donc , deux coniques quelconques qui se coupent en quatre points et ont quatre tangentes communes , ont toujours six centres d'homologie et six axes de symptose.

51. Considérons maintenant deux coniques se coupant en quatre points et n'ayant aucune tangente commune ; leurs polaires réciproques auront quatre tangentes communes et seront extérieures l'une à l'autre ; elles n'auront donc (48) que deux axes de symptose et deux centres d'homologie ; d'où il suit que les deux coniques proposées n'auront aussi que deux centres d'homologie et deux axes de symptose , bien qu'elles aient six cordes communes.

Donc , deux coniques qui se coupent en quatre points et n'ont pas de tangentes communes , n'ont que deux axes de symptose et deux centres d'homologie.

L'une de ces deux coniques sera toujours une hyperbole ; car nous venons de voir qu'elles sont les polaires réciproques de deux coniques extérieures l'une à l'autre ; le centre de la conique directrice sera toujours au-dehors d'une au moins de ces deux courbes ; l'autre conique pourra être indistinctement une hyperbole , une ellipse ou une parabole.

Il est facile de distinguer celles des six cordes communes aux deux coniques qui seront les axes de symptose ; ce sont celles qui

auront des points au-dehors de deux coniques ; les quatre autres seront entièrement comprises dans ces courbes.

Si, par exemple, on a une hyperbole et une ellipse qui la rencontrent en quatre points dont deux sur une branche et deux sur l'autre, les axes de symptose seront les deux cordes qui joindront les points d'une même branche, parce que les prolongemens de ces cordes seront au-dehors des deux coniques. Chacune des quatre autres cordes, au contraire, joindra un point d'une branche à un point de l'autre branche, et aura tous ses points compris dans l'une ou dans l'autre courbe.

On voit clairement que les deux coniques n'ont aucune tangente commune ; car toute tangente à l'hyperbole passe entre ses deux branches et rencontre par conséquent l'ellipse qui est aussi comprise entre les deux branches, puisqu'elle les rencontre l'une et l'autre.

53. La distinction que nous venons d'établir entre les six cordes communes aux deux coniques, correspond à celle que nous avons faite (49) entre les six points de concours des quatre tangentes communes à deux coniques extérieures l'une à l'autre.

Elle est également une conséquence des deux théorèmes (17) et (19) (2.^{me} colonne), d'après lesquels il faut, pour qu'une corde commune à deux coniques soit un axe de symptose, qu'on puisse mener, par des points de sa direction, des tangentes à l'une et à l'autre courbe.

54. *Quand deux coniques ne se coupent qu'en deux points, elles n'ont qu'un système de deux axes de symptose.*

Car, si elles avaient deux autres axes de symptose, ils passeraient par les deux points d'intersection des deux coniques et les couperaient en deux autres points ; les deux coniques auraient donc quatre points communs, ce qui est contre l'hypothèse.

55. *Quand deux coniques n'ont ni points communs ni tangentes communes, elles ont un système d'axes de symptose et n'en ont qu'un seul.*

Nous avons déjà dit (20) que les deux coniques ont toujours

un système de deux axes de symptose, parce qu'il en existe généralement trois dont la recherche donne lieu à une équation du troisième degré qui doit avoir au moins une racine réelle.

Dans le cas énoncé où deux coniques n'ont aucun point commun, il ne saurait exister un deuxième système de deux axes de symptose; car ces deux axes couperaient les deux premiers en quatre points réels qui appartiendraient à la fois aux deux coniques, ce qui est contre l'hypothèse.

56. Nous venons de passer en revue les différens cas que peut offrir le système de deux coniques, et notre discussion nous a conduit au résumé que voici :

Deux coniques situées dans un même plan ont six axes de symptose et six centres d'homologie quand elles se coupent en quatre points et qu'elles ont quatre tangentes communes.

Dans tous les autres cas, même dans celui où elles se coupent en quatre points, sans avoir de tangentes communes, elles n'ont que deux axes de symptose et deux centres d'homologie.

57. La discussion précédente fait voir qu'il était indispensable de donner un nom particulier à celles des cordes communes à deux coniques que nous avons appelées *axes de symptose*, et que la dénomination simple de *cordes communes* est insuffisante, puisqu'il peut arriver que, six cordes étant réelles, il n'y en ait pourtant que deux qui jouissent des propriétés qui constituent les axes de symptose.

C'est par une raison toute semblable que l'on n'aurait pu désigner simplement les centres d'homologie comme *les points de concours des tangentes communes* aux deux coniques, puisqu'il peut arriver que deux seulement de ces six points jouissent des propriétés qui constituent les centres d'homologie.

58. Malgré la différence qui peut exister (51) entre les six cordes communes à deux coniques, il est une propriété générale qui leur appartient à toutes indistinctement, et que nous n'avons démontrée que pour les axes de symptose; elle consiste en ce que *les polaires*

D'un point quelconque d'une corde commune à deux coniques, prises par rapport à ces deux courbes, se coupent sur la corde même.

Cela résulte de la troisième partie du théorème de l'art. 39 (2.^m colonne), parce que deux cordes communes peuvent être regardées comme une conique qui passe par les quatre points d'intersection des deux proposées.

59. Pareillement, les six points de concours des quatre tangentes communes à deux coniques, jouissent tous d'une propriété générale que nous avons démontrée (21) pour les centres d'homologie; elle consiste en ce que *toute droite menée par un quelconque des six points de concours des quatre tangentes communes à deux coniques a ses pôles, relatifs aux deux courbes, en ligne droite avec ce point de concours.*

Ce théorème se déduit du précédent par la théorie des polaires réciproques.

60. Les axes de symptose et les centres d'homologie jouissent de propriétés plus générales que celles énoncées par les théorèmes (17) et (19); nous les donnerons après avoir exposé les propriétés analogues des coniques homothétiques.

61. Les deux triangles dont il est question à l'art. 30 (pag. 290) n'en font évidemment qu'un seul; car on sait, d'après les élémens de la théorie des transversales, que, quand un quadrilatère est inscrit dans deux coniques, le point de concours de deux côtés opposés est, par rapport à l'une et à l'autre courbes, le pôle de la droite qui joint le point de concours des deux autres côtés au point de concours des deux diagonales.

Nous reviendrons sur cette question qui fait partie essentielle des propriétés du système de deux coniques, mais que nous avons dû ajourner jusqu'à ce que nous ayons fait connaître certaines propriétés des coniques homothétiques, parce que la considération des axes de symptose est insuffisante pour la traiter complètement. Car il existe en général trois points dont chacun a pour polaire, par rapport à deux coniques données, la droite qui joint les deux au-

tres, et ces trois points peuvent être réels, bien que les deux coniques n'aient qu'un seul système d'axes de symptose.

Nous verrons, en effet, que *ces trois points sont réels toutes les fois que les deux coniques se coupent en quatre points ou ne se coupent pas du tout, et que deux sont imaginaires et le troisième toujours réel, quand les deux coniques ne se coupent qu'en deux points.*

Nous verrons aussi que deux des trois points en question, divisent harmoniquement les segmens formés sur la droite qui les joint 1.^o par les deux axes de symptose qui passent par le troisième point; 2.^o par les deux centres d'homologie qui leur correspondent; 3.^o par chacune des deux coniques proposées; et, en général, par toute conique qui passerait par les quatre points d'intersection réels ou imaginaires de ces deux courbes (*).

(*) Les corrections moins importantes sont indiquées dans l'errata du précédent volume.