ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Philosophie mathématique. Note sur la propriété fondamentale du triangle rectiligne

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 20-25
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__20_1>

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Note sur la propriété fondamentale du triangle rectiligne ;

Par M. B. D. C.

DANS la deuxième note de ses *Elémens de géométrie*, M. Legendre a donné, de l'égalité de la somme des angles de tout triangle rectiligne à deux angles droits, une démonstration contre laquelle on a élevé des objections de plus d'un genre, tant en France que dans l'étranger (*). En réfléchissant sur ce sujet, il nous a paru qu'on pouvait ôter à ces objections une grande partie de leur force, en présentant cette démonstration sous la forme suivante.

Soient a, b, c trois nombres abstraits représentant les côtés d'un

(*) Voy. en particulier tom. X, pag. 161 et tom. XVI, pag. 259 du présent recueil.

J. D. G.

triangle rectiligne, mesurés avec une longueur quelconque prise pour unité; soient A, B, C trois nombres abstraits représentant les angles respectivement opposés, mesurés avec un même angle quelconque pris également pour unité; les six nombre a, b, c, A, B, C varieront avec l'unité de mesure des longueurs et avec l'unité de mesure des angles; mais les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$, $\frac{C}{A}$ en seront tout à fait indépendans.

Cela posé, comme un triangle est complètement déterminé par ses trois côtés, chacun des angles A, B, C doit être une fonction déterminée des trois longueurs a, b, c; en outre, cette fonction doit être de telle forme qu'elle demeure la même si, sans changer l'unité de mesure des angles, on fait varier l'unité de mesure des côtés; ce qui exige évidemment qu'elle ne se compose que des rapports des côtés entre eux; et, comme ces rapports sont toujours traduisibles en rapports de deux d'entre eux au troisième, puisque, par exemple, $\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$, nous pourrons poser

$$\left.\begin{aligned} A&=\mathrm{f}\left(\frac{a}{c},\ \frac{b}{c}\right), \\ B&=\varphi\left(\frac{a}{c},\ \frac{b}{c}\right), \\ C&=\psi\left(\frac{a}{c},\ \frac{b}{c}\right). \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Or, on peut, en premier lieu, concevoir qu'entre ces trois équations on élimine les deux rapports $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, ce qui conduira à une équation en A, B, C seulement; *il y a* donc, *entre les trois* *angles de tout triangle rectiligne, une relation indépendante des longueurs de ses côtés;* ce qui revient encore à dire que, *si deux angles d'un triangle sont respectivement égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle sera égal de part et d'autre.* On voit enfin qu'*un triangle rectiligne n'est point déterminé par ses seuls angles*, puisque donner les trois angles revient à n'en donner que deux seulement.

Deux des trois équations (1) suffisent pour déterminer les deux rapports $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$; cela revient à dire que, *lorsque deux des angles d'un triangle rectiligne sont donnés, les rapports entre les trois côtés de ce triangle, pris tour à tour, deux à deux, sont complètement déterminés;* ce qui signifie, en d'autres termes, que *deux triangles rectilignes qui ont deux angles égaux, chacun à chacun, ont leurs côtés homologues proportionnels.*

Conservons les mêmes notations, mais supposons qu'il soit question d'un triangle sphérique, alors le triangle ne sera pas déterminé par ses trois côtés; car si, sur deux sphères inégales, on construit deux triangles sphériques dont les côtés soient égaux chacun à chacun, ces triangles ne seront point égaux. Afin donc qu'un triangle sphérique soit complètement déterminé, il ne suffit pas de donner les longueurs a, b, c de ses trois côtés, il faut donner en outre la longueur r du rayon de la sphère à laquelle il appartient, longueur que nous supposerons d'ailleurs rapportée à la même unité linéaire.

Chacun des trois angles A, B, C du triangle devra donc être une fonction déterminée de ces quatre longueurs; de plus, cette fonction devra être de telle forme qu'elle demeure la même si, sans changer l'unité de mesure des angles, on fait varier l'unité de mesure des longueurs; ce qui exige évidemment que ces fonctions ne renferment que les rapports entre ces quatre longueurs prises deux à deux, ou, ce qui revient au même, les rapports de l'une d'elles aux trois autres; on devra donc avoir

$$\left.\begin{aligned} A&=\mathrm{f}\left(\frac{a}{r}\,,\ \frac{b}{r}\,,\ \frac{c}{r}\right), \\ B&=\varphi\left(\frac{a}{r}\,,\ \frac{b}{r}\,,\ \frac{c}{r}\right), \\ C&=\psi\left(\frac{a}{r}\,,\ \frac{b}{r}\,,\ \frac{c}{r}\right), \end{aligned}\right\}\quad(2)$$

équations en nombre insuffisant pour éliminer les trois rapports $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$, mais qui en donneront les valeurs en fonction de A, B, C et donneront conséquemment les longueurs des côtés, lorsque le rayon de la sphère sera connu. Ainsi, *dans un triangle sphérique*, *il n'existe point de relation entre les angles*, *indépendante des côtés*, et *un tel triangle est tout aussi complètement déterminé par ses trois angles que par ses trois côtés.*

Retournons présentement au triangle rectiligne; il est deux autres cas où un tel triangle est complètement déterminé par trois de ses parties, savoir :

1.° Lorsqu'on donne deux angles et le côté compris;

2.° Lorsqu'on donne deux côtés et l'angle compris; et ces deux cas ont cela de remarquable qu'ils se traduisent l'un dans l'autre par la simple permutation des mots *angle* et *côté* entre eux. M. Legendre étant parti du premier, comme principe, pour établir qu'il existe entre les angles de tout triangle une relation indépendante de ses côtés, on a conclu, de la relation entre les deux cas, qu'en admettant le second à son tour comme principe, et permutant simplement entre eux les mots *angle* et *côté*, dans la démonstration de M. Legendre, on établirait, par un raisonnement tout aussi rigoureux que le sien, qu'il existe, entre les trois côtés de tout triangle, une relation indépendante de ses angles; conclusion absurde qui infirme complètement la validité du raisonnement qui y conduit, et semble devoir infirmer également le raisonnement de M. Legendre qui paraît n'en différer aucunement.

Mais on doit remarquer qu'il n'en est ainsi qu'autant qu'on fait abstraction de tout principe subsidiaire de nature à rompre l'apparente analogie entre les deux cas ; et voilà précisément pourquoi nous n'avons pas cru devoir débuter comme l'a fait M. Legendre. Mais présentement que nous avons déjà démontré qu'il existe, entre les trois angles de tout triangle, une relation indépendante de ses côtés ; comme il est d'ailleurs manifeste, *à priori*, qu'il ne saurait exister, au contraire, entre les trois côtés une relation indépendante des angles, attendu que deux côtés d'un triangle étant donnés, on peut prendre le troisième d'une infinité de manières différentes, toute parité qu'on prétendrait établir entre les deux cas s'évanouit ainsi complètement.

Considérons en effet les deux équations

$$c=\varphi(a,b,C)\,, \qquad C=\psi(A,B,c)\,;$$

on n'est nullement fondé à dire que C ne saurait figurer dans le second membre de la première, car, à cause de la relation que l'on sait exister entre les trois angles de tout triangle, on conçoit la possibilité de remplacer C dans ce second membre par une fonction équivalente de A et B, qui pourrait fort bien alors n'y figurer que par leur rapport, de sorte qu'on aurait ainsi

$$c=\varphi\left(a,b,\frac{A}{B}\right),$$

équation qui n'offre plus rien d'absurde (*).

(*) Il nous paraît que, pour qu'on pût remplacer C par une fonction équivalente du rapport $\frac{A}{B}$, il faudrait que l'équation de relation entre les trois angles de tout triangle fût réductible à cette forme

Au contraire, comme il n'existe aucune relation obligée entre les trois côtés d'un triangle, on n'a pas la même ressource pour sauver l'absurdité de la seconde équation, aussi long-temps qu'on laissera subsister c dans son second membre; cette longueur ne saurait donc y entrer, et l'on doit avoir simplement

$$C=\psi(A,B)\ ;$$

ce qui rentre complètement dans ce que nous avons démontré dès le début.

Au surplus, quand bien même tous les géomètres s'accorderaient à regarder comme tout à fait rigoureuse, soit la démonstration de M. Legendre, soit celle que nous venons de tenter de lui substituer, soit enfin tout autre démonstration d'une forme analogue, on ne saurait se dissimuler que ces sortes de démonstrations seraient tout à fait déplacées dans le texte d'un traité élémentaire de géométrie, à raison de leur peu d'analogie avec le ton général de ces sortes d'ouvrages, pour lesquels conséquemment il resterait toujours à désirer quelque équivalent.

$$C=\mathrm{F}\left(\frac{A}{B}\right)\ ;$$

or, à moins qu'on admette, avec plusieurs géomètres, que tout angle est un nombre abstrait, cette équation nous paraît inadmissible, puisqu'en variant l'unité de mesure des angles, son premier membre varie, tandis que le second ne change pas de valeur. On trouvera, au surplus, dans l'article du tom. X, déjà cité, de plus amples réflexions sur ce sujet.

J. D. G.