GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Recherches sur les lois générales qui régissent les surfaces algébriques ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de revenir de nouveau sur des propositions déjà démontrées, pour les établir d'une manière à la fois plus simple, plus directe et plus générale.

Soit une surface quelconque du m^{ieme} degré, rapportée à trois axes quelconques et exprimée par l'équation

$$M=0\ , \qquad (1)$$

en x, y et z. L'équation du plan tangent à cette surface, en l'un quelconque (x',y',z') de ses points, sera, comme l'on sait,

$$\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}x'}(x-x')+\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}y'}(y-y'+)\,\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}z'}(z-z')=0\ , \qquad (2)$$

les coordonnées x', y', z' du point de contact étant liées par l'équation de relation

$$M'=0\ . \qquad (3)$$

Si, laissant x', y', z' indéterminés, on veut profiter de leur indétermination pour assujétir le plan tangent à passer par un point

(a, b, c), donné dans l'espace, il faudra exprimer que l'équation (2) est satisfaite en y faisant simultanément $x=a, y=b, z=c$, ce qui la changera en celle-ci :

$$\frac{dM'}{dx'}(a-x')+\frac{dM'}{dy'}(b-y')+\frac{dM'}{dz'}(c-z')=0 ,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dM'}{dx'}(x'-a)+\frac{dM'}{dy'}(y'-b)+\frac{dM'}{dz'}(z'-c)=0 ; \qquad (4)$$

de sorte que les points de contact des plans tangens à la surface (1), issus du point (a, b, c), seront donnés par le système des deux équations (3) et (4), ou, ce qui revient au même, par la combinaison de l'équation (1) avec l'équation

$$\frac{dM}{dx}(x-a)+\frac{dM}{dy}(y-b)+\frac{dM}{dz}(z-c)=0 ; \qquad (5)$$

ces points seront donc ceux où la surface proposée sera coupée par celle qu'exprime l'équation (5) ; c'est-à-dire, qu'ils seront ceux d'une certaine courbe à double courbure. Mais, d'un autre côté, il est visible que, si une surface conique ayant son sommet au point (a, b, c), est circonscrite à la surface (1), tout plan tangent à cette surface conique le sera aussi à la surface (1) et passera par le point (a, b, c) ; donc la courbe de contact de la surface (1), avec la surface conique circonscrite, ayant son sommet en (a, b, c) est le lieu des points de contact de cette surface (1) avec tous ses plans tangens issus du point (a, b, c) ; donc enfin la ligne de contact de cette surface (1), avec la surface conique circonscrite qui a son sommet en (a, b, c), est donnée par le système des équations (1) et (5) ; d'où l'on voit que cette courbe de contact est située dans la surface exprimée par l'équation (5) ; elle appartient donc au plus à une surface du $m.^{ieme}$ degré, comme la proposée ; mais nous allons voir qu'elle appartient réellement à une surface d'un degré moindre.

Lorsqu'une courbe à double courbure est donnée dans l'espace par le système de deux équations en x, y, z, elle l'est également par le système de l'une d'elles et d'une combinaison quelconque de l'une et de l'autre. En conséquence, puisque la ligne de contact du cône circonscrit, qui a son sommet en (a, b, c), est donnée par le système des équations (1) et (5), elle le sera aussi par la première de ces équations combinée avec l'équation

$$\frac{dM}{dx}(x-a)+\frac{dM}{dy}(y-b)+\frac{dM}{dz}(z-c)=mM\ ; \qquad (6)$$

laquelle sera ainsi, comme l'équation (5), celle d'une surface coupant la proposée suivant la courbe de contact cherchée. Or, en vertu du théorème connu sur les fonctions homogènes, tous les termes de m dimensions en x, y, z disparaissent de cette équation qui ne s'élève conséquemment qu'au $(m-1)^{ieme}$ degré ; donc la courbe de contact se trouve sur une surface qui ne saurait excéder ce degré ; de sorte qu'en recourant au principe des polaires réciproques on a ces deux théorèmes ;

THÉORÈME I. La courbe de contact d'une surface du m.^{ieme} *degré avec une surface conique circonscrite, appartient à une autre surface du* $(m-1)^{ieme}$ *degré au plus* (*).

THÉORÈME I. La surface développable circonscrite à une surface de m.^{ieme} *classe, suivant son intersection avec un plan, touche une autre surface de* $(m-1)^{ieme}$ *classe au plus.*

(*) M. Poncelet observe, avec beaucoup de raison (*Bulletin des sciences mathématiques*, mai 1828, pag. 301), que c'est par erreur que M. Bobillier

Cette surface du $(m-1)^{ième}$ degré est ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag 258) la *surface polaire* du sommet du cône, par rapport à la surface à laquelle il est circonscrit, considérée comme directrice.

Cette surface de $(m-1)^{ième}$ classe est ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 258) la *surface polaire* du plan coupant, par rapport à la surface coupée par ce plan, considérée comme directrice.

Si le sommet (a, b, c) de la surface conique circonscrite est mobile sur une droite donnée par les équations $x=\alpha z$, $y=\beta z$, on devra avoir $a=\alpha c$, $b=\beta c$, ce qui changera l'équation (6) en celle-ci

$$\left(x\frac{dM}{dx}+y\frac{dM}{dy}+z\frac{dM}{dz}-mM\right)-c\left(\alpha\frac{dM}{dx}+\beta\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}\right)=0 ; \quad (7)$$

laquelle sera satisfaite, quel que soit c, en posant séparément

$$x\frac{dM}{dx}+y\frac{dM}{dy}+z\frac{dM}{dz}=mM . \qquad \alpha\frac{dM}{dx}+\beta\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}=0 . \quad (8)$$

Or, en faisant ainsi courir le sommet de la surface conique circonscrite le long d'une droite, les plans tangens à la surface (1), conduits par cette droite, ne cesseront pas d'être tangens à cette surface conique et auront conséquemment, avec la surface (1), les mêmes points de contact qu'elle; donc on obtiendra ces points de contact en combinant l'équation (1) avec les deux équations (8); donc les équations (8) expriment une courbe à double courbure

---

et nous, avons attribué ce théorème à M. Vallès, attendu qu'il se trouve formellement énoncé, bien que sans démonstration, dans l'*Application de l'analyse à la géométrie* de MONGE (édit. de 1807, pag. 15). Cela prouve que nous ne devons, ni l'un ni l'autre, lutter de mémoire avec M. Poncelet.

J. D. G.

qui perce la surface (1) à ses points de contact avec les plans tangens issus de la droite donnée par les équations $x=\alpha z$, $y=\beta z$; et, attendu que ses équations sont l'une et l'autre du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement, le nombre des points de contact, et par suite celui des plans tangens, ne pourra être supérieur à $m(m-1)^2$; on a donc ces deux théorèmes :

THÉORÈME II. Par une même droite on ne saurait conduire à une surface du m.^{ieme} *degré plus de* m(m—1)^2 *plans tangens. Leurs points de contact avec elles sont tous situés sur une courbe à double courbure, intersection de deux surfaces du* (m—1)^{ieme} *degré.*

Cette courbe à double courbure est ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 258) la *courbe polaire* de la droite par laquelle les plans tangens sont conduits, par rapport à la surface qu'ils touchent, considérée comme directrice.

THÉORÈME II. Une même droite ne saurait percer une surface de m.^{ieme} *classe en plus de* m(m—1)^2 *points. Les plans tangens par ces points touchent tous une même surface développable, circonscrite à deux surfaces de* (m—1)^{ieme} *classe* (*).

Cette surface développable est ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 258) la *surface développable polaire* de la droite qui perce la surface proposée, par rapport à cette surface considérée comme directrice.

Si, dans les équations (8), on suppose α et β variables, ce qui

(*) Cela ne veut pas dire que la surface polaire d'une surface du $m.^{ieme}$ degré soit jamais une surface du $[m(m-1)^2]^{ieme}$ degré ; mais uniquement qu'elle ne saurait jamais être d'un degré plus élevé. Ainsi le théorème de M. Poncelet sur le degré de la surface polaire d'une surface proposée, théorème qui pourrait fort bien d'ailleurs être vrai, est encore à démontrer, comme l'ont fort bien remarqué MM. les Commissaires de l'Académie royale des sciences (*Bulletin des sciences mathématiques*, avril 1828, pag. 227).

J. D. G.

revient à faire tourner notre droite autour de l'origine, d'une manière tout à fait arbitraire ; sa courbe polaire variera sans cesse de situation, mais elle ne quittera pas la surface exprimée par la première de ces deux équations, puisque cette équation est indépendante de α et β ; or, cette surface n'est autre (6) que la surface polaire de l'origine ; on a donc ces deux théorèmes :

THÉORÈME III. Si une droite tourne dans l'espace autour de l'un quelconque des points de sa direction, sa courbe polaire, relative à une surface quelconque du m.^{ieme} *degré, décrira la surface polaire de ce point.*

THÉORÈME III. Si une droite se meut dans l'espace sur un plan fixe, sa surface développable polaire, relative à une surface quelconque de m.^{ieme} *classe, sera constamment tangente à la surface polaire de ce plan.*

Si l'on pose $\beta=k\alpha$, ce qui revient à supposer que notre droite, située dans le plan des xy, a pour équation $y=kx$, la dernière des équations (8) deviendra

$$\alpha\frac{dM}{dx}+k\alpha\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}=0\,,$$

équation qui sera satisfaite, quel que soit k, en posant à la fois

$$\alpha\frac{dM}{dx}+\frac{dM}{dz}=0\,,\qquad \frac{dM}{dy}=0\,.$$

Ces équations, avec la première des équations (8), déterminant $(m-1)^3$ points fixes, il en résultera ces deux théorèmes :

THÉORÈME IV. Si une droite tourne autour de l'un des points de sa direction dans un plan quelconque passant par ce point, sa courbe polaire, relative à une surface quelconque du m.^{ieme} *degré, variable avec elle,*

THÉORÈME IV. Si une droite se meut dans un plan de manière à passer constamment par un même point de ce plan; sa surface développable polaire, relative à une surface quelconque de m.^{ieme} *classe, variable avec elle,* *passera constamment par* $(m-1)^3$ *points fixes, situés sur la surface polaire de ce point.*

Ces points sont ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 258) les *points polaires* de ce plan, par rapport à la surface proposée, considérée comme directrice.

touchera constamment $(m-1)^3$ *plans fixes, tangens à la surface polaire de ce plan.*

Ces plans sont ce que nous avons appelé (*Annales*, tom. XVIII, pag. 258) les *plans polaires* de ce point, par rapport à la surface proposée, considérée comme directrice.

Soit λ une constante indéterminée, et soient deux surfaces du $m.^{ieme}$ degré données par les équations $M'=0$, $M''=0$; l'équation générale des courbes de ce degré, passant par leur commune section, sera comme l'on sait,

$$M'+\lambda M''=0 ; \qquad (9)$$

posant donc

$$M=M'+\lambda M'' ,$$

il viendra, en différentiant,

$$\frac{dM}{dx}=\frac{dM'}{dx}+\lambda\frac{dM''}{dx} ;$$

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dM'}{dy}+\lambda\frac{dM''}{dy} ,$$

$$\frac{dM}{dz}=\frac{dM'}{dz}+\lambda\frac{dM''}{dz} ;$$

substituant ensuite dans (6), en y faisant a, b, c nuls, on obtiendra, pour la surface polaire de l'origine, relativement à la surface directrice (9),

$$\left(\frac{dM'}{dx}+\lambda\frac{dM''}{dx}\right)x+\left(\frac{dM'}{dy}+\lambda\frac{dM''}{dy}\right)y+\left(\frac{dM'}{dz}+\lambda\frac{dM''}{dz}\right)z=m(M'+\lambda M'')\ ;$$

ou bien

$$x\frac{dM'}{dx}+y\frac{dM'}{dy}+z\frac{dM'}{dz}-mM'+\lambda\left(x\frac{dM''}{dx}+y\frac{dM''}{dy}+z\frac{dM''}{dz}-mM''\right)=0. \qquad (10)$$

Or, quelle que soit la valeur attribuée à la constante arbitraire λ, cette surface polaire passe évidemment par la courbe à double courbure donnée par les deux équations

$$x\frac{dM'}{dx}+y\frac{dM'}{dy}+z\frac{dM'}{dz}=mM'\ , \qquad x\frac{dM''}{dx}+y\frac{dM''}{dy}+z\frac{dM''}{dz}=mM''\ ,$$

lesquelles ne sont l'une et l'autre que du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement; on a donc ces deux théorèmes :

THÉORÈME V. Si tant de surfaces du m.^{ieme} *degré qu'on voudra se coupent toutes suivant la même courbe à double courbure ; les surfaces polaires d'un point quelconque de l'espace, relatives à toutes celles-là, se couperont toutes aussi suivant une même courbe à double courbure, intersection de deux surfaces du* $(m-1)^{ieme}$ *degré seulement.*

THÉORÈME V. Si tant de surfaces de m.^{ieme} *classe qu'on voudra sont toutes inscrites à une même surface développable ; les surfaces polaires d'un plan quelconque, relatives à toutes celles-là, seront toutes aussi inscrites à une même surface développable, circonscrite à deux surfaces de* $(m-1)^{ieme}$ *classe seulement.*

C'est là, comme l'on voit, la première partie des deux théorèmes de la pag. 262 du précédent volume, et les quatre autres seraient tout aussi faciles à établir.

Si l'équation $M''=0$ est homogène en x, y, z, elle exprimera le système de m plans passant par l'origine ; et conséquemment les surfaces comprises dans l'équation (9) auront m plans cordes communs, issus d'un même point ; or, à cause de l'homogénéité de M'', on a identiquement

$$x\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}x}+y\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}y}+z\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}z}=mM'' ;$$

au moyen de quoi l'équation (10), de la surface polaire de l'origine, se réduit simplement à

$$x\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}x}+y\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}y}+z\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}z}=mM' ;$$

de sorte que cette surface polaire est alors indépendante de la constante arbitraire λ ; on a donc ces deux théorèmes :

THÉORÈME VI. Si tant de surfaces du m.ieme *degré qu'on voudra se coupent toutes suivant les* m *mêmes courbes planes du* m.ieme *degré, dont les plans passent tous par un même point ; ce point n'aura qu'une surface polaire unique par rapport à toutes les surfaces proposées ; laquelle surface polaire contiendra conséquemment les courbes de contact de toutes les surfaces coniques circonscrites, ayant leur sommet en ce même point.*

THÉORÈME VI. Si tant de surfaces de m.ieme *classe qu'on voudra sont toutes inscrites aux* m *mêmes surfaces coniques de* m.ieme *classe, ayant leurs sommets dans un même plan ; ce plan n'aura qu'une surface polaire unique, par rapport à toutes les surfaces proposeés ; laquelle surface polaire sera conséquemment inscrite à toutes les surfaces développables circonscrites à ces surfaces, suivant leurs intersections avec ce même plan.*

En supposant, en particulier, $m=2$, on déduira de là ces deux propositions connues :

Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra se coupant

Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra étant inscri-

suivant les deux mêmes coniques ; un point quelconque de la commune section des plans des deux courbes aura le même plan polaire relatif à toutes ces surfaces ; lequel contiendra leurs lignes de contact avec les surfaces coniques circonscrites qui auront leur sommet en ce point.

tes aux deux mêmes cônes ; un plan quelconque, passant par les sommets de ces deux cônes, aura le même pôle relatif à toutes ces surfaces ; et toutes les surfaces coniques circonscrites, suivant les intersections de ces surfaces par ce plan, auront leurs sommets en ce même point.

Soient présentement λ et μ deux constantes indéterminées, et soient trois surfaces du m.ième degré, données par les équations $M'=0$, $M''=0$, $M'''=0$; l'équation générale des surfaces de ce degré passant par les m^3 intersections de celles-là sera, comme l'on sait,

$$M'+\lambda M''+\mu M'''=0 \; ; \qquad (11)$$

posant donc

$$M=M'+\lambda M''+\mu M''' \; ,$$

il viendra, en différentiant,

$$\frac{dM}{dx}=\frac{dM'}{dx}+\lambda\frac{dM''}{dx}+\mu\frac{dM'''}{dx} \; ,$$

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dM'}{dy}+\lambda\frac{dM''}{dy}+\mu\frac{dM'''}{dy} \; ,$$

$$\frac{dM}{dz}=\frac{dM'}{dz}+\lambda\frac{dM''}{dz}+\mu\frac{dM'''}{dz} \; ;$$

substituant ensuite dans (6), en y faisant a, b, c nuls, on obtiendra, pour la surface polaire de l'origine, relativement à la surface directrice (11)

$$\left.\begin{aligned} &x\frac{dM'}{dx}+y\frac{dM'}{dy}+z\frac{dM'}{dz}-mM' \\ &+\lambda\left(x\frac{dM''}{dx}+y\frac{dM''}{dy}+z\frac{dM''}{dz}-mM''\right) \\ &+\mu\left(x\frac{dM'''}{dx}+y\frac{dM'''}{dy}+z\frac{dM'''}{dz}-mM'''\right)\end{aligned}\right\}=0\,; \quad (12)$$

or, quelles que soient les valeurs attribuées aux deux constantes arbitraires λ et μ, cette surface polaire passe évidemment par les $(m-1)^3$ points donnés par les trois équations

$$x\frac{dM'}{dx}+y\frac{dM'}{dy}+z\frac{dM'}{dz}=mM'\,,$$

$$x\frac{dM''}{dx}+y\frac{dM''}{dy}+z\frac{dM''}{dz}=mM''\,,$$

$$x\frac{dM'''}{dx}+y\frac{dM'''}{dy}+z\frac{dM'''}{dz}=mM'''\,;$$

on a donc ces deux théorèmes :

THÉORÈME VII. Si tant de surfaces du m.ième *degré qu'on voudra passent toutes par les* m³ *mêmes points fixes ; les surfaces polaires d'un point quelconque de l'espace, relatives à toutes celles-là, passeront toutes par le* (m—1)³ *mêmes points, également fixes.*

THÉORÈME VII. Si tant de surfaces de m.ieme *classe qu'on voudra touchent toutes les* m³ *mêmes plans fixes ; les surfaces polaires d'un plan quelconque, relatives à toutes celles-là, toucheront toutes les* (m—1)³ *mêmes plans, également fixes.*

C'est là, comme l'on voit, la première partie des deux théorèmes de la pag. 267 du précédent volume, et les quatre autres seraient tout aussi faciles à établir.

Si les deux équations $M''=0$, $M'''=0$ sont homogènes en x, y, z, chacune d'elles exprimera m plans passant par l'origine; de sorte que leur ensemble exprimera m^2 droites distribuées m à m sur m plans passant par un même point, et dont chacune percera en m points la surface donnée par l'équation $M'=0$; alors donc l'équation (11) exprimera toutes les surfaces de m.ième degré passant par les m^3 mêmes points, distribués m à m sur m^2 droites, situées elles-mêmes m à m dans m plans se coupant en un même point; or, à cause de l'homogénéité de M'' et M''', on a identiquement

$$x\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}x}+y\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}y}+z\frac{\mathrm{d}M''}{\mathrm{d}z}=mM'' ,$$

$$x\frac{\mathrm{d}M'''}{\mathrm{d}x}+y\frac{\mathrm{d}M'''}{\mathrm{d}y}+z\frac{\mathrm{d}M'''}{\mathrm{d}z}=mM''' ;$$

au moyen de quoi l'équation (12) de la surface polaire de l'origine, se réduit simplement à

$$x\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}x}+y\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}y}+z\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}z}=mM' ;$$

de sorte que cette polaire est alors indépendante des constantes arbitraires λ et μ; on a donc ces deux théorèmes :

THÉORÈME VIII. Si tant de surfaces du m.ieme *degré qu'on voudra ont toutes les* m³ *mêmes points communs, distribués* m *à* m *sur* m² *droites, situées elles-mêmes* m *à* m *dans* m *plans, se coupant en un même point; ce*

THÉORÈME VIII. Si tant de surfaces de m.ieme *classe qu'on voudra ont toutes les* m³ *mêmes plans tangens communs, se coupant* m *à* m *suivant* m² *droites concourant elles-mêmes* m *à* m *en* m *points, situés dans un même* *point n'aura qu'une surface polaire unique, par rapport à toutes les surfaces proposées. Cette surface polaire contiendra conséquemment les courbes de contact de toutes les surfaces coniques circonscrites, ayant leur sommet en ce même point.*

plan; ce plan n'aura qu'une surface polaire unique, par rapport à toutes les surfaces proposées. Cette surface polaire sera conséquemment inscrite à toutes les surfaces développables circonscrites aux surfaces dont il s'agit, suivant leurs intersections avec ce même plan.

En supposant, en particulier, $m=2$, on déduira de là les deux propositions suivantes :

Soit un hexaèdre octogone dans lequel les douze arêtes concourent quatre à quatre en trois points; et soient tant de surfaces du second ordre qu'on voudra circonscrites à cet hexaèdre: l'un quelconque des trois points de concours des arêtes aura, par rapport à toutes ces surfaces, le même plan polaire, lequel contiendra conséquemment toutes les coniques suivant lesquelles elles seront touchées par les surfaces coniques circonscrites qui auront leur sommet commun en ce point.

Soit un octaèdre hexagone dans lequel les douze arêtes soient quatre à quatre dans trois plans; et soient tant de surfaces du second ordre qu'on voudra inscrites à cet octaèdre: l'un quelconque des trois plans qui contiendront les arêtes aura, par rapport à toutes ces surfaces, le même pôle, lequel sera conséquemment le sommet commun de toutes les surfaces coniques circonscrites suivant les intersections de ces surfaces par ce plan.