
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

PLUCKER

**Géométrie analytique. Recherches sur les surfaces
algébriques de tous les degrés**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 19 (1828-1829), p. 129-137

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1828-1829__19__129_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1828-1829, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés ;

Par M. le docteur PLUCKER, professeur à l'Université de Bonn.



§. I.

ON sait que *neuf* points sont nécessaires dans l'espace, pour déterminer complètement une surface du second degré, et que, généralement parlant, on n'en saurait faire passer qu'une seule par neuf points donnés : d'où il suit qu'une infinité de surfaces de ce degré peuvent passer par les huit mêmes points. On ne saurait donc être surpris, d'après cela, de voir trois surfaces du second degré se couper en *huit* points.

Mais on sait aussi que *dix-neuf* points sont nécessaires pour déterminer complètement une surface du troisième degré, et, qu'en général, il n'en saurait passer plus d'une par dix-neuf points donnés ; et on doit, en conséquence, éprouver quelque surprise en considérant que trois surfaces du troisième degré se coupent en *vingt-sept* points.

Pareillement, *trente-quatre* points de l'espace déterminent complètement une surface conique du quatrième degré ; et néanmoins trois surfaces de ce degré peuvent avoir entre elles *soixante-quatre* points communs.

En général, le nombre des points de l'espace nécessaires pour

la détermination complète d'une surface du $m^{\text{ième}}$ degré est $\frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \cdot \frac{m+3}{3} - 1$, et ces points n'en déterminent qu'une seule. D'un autre côté, trois surfaces de ce degré peuvent se couper en m^3 points de l'espace. Si donc on choisit le nombre entier m , de telle sorte que m^3 soit plus grand que $\frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \cdot \frac{m+3}{3} - 1$, ce qui arrivera toujours pour $m > 2$, on aura un exemple de trois surfaces du même degré, assujéties à passer par plus de points qu'il n'en faudrait pour la détermination complète d'une seule d'entre elles.

Voilà donc un paradoxe apparent tout à fait analogue à celui qui nous a déjà occupé, relativement aux lignes courbes, dans un précédent article, et qui s'explique, comme celui-là, en considérant que, lorsqu'on parle du nombre des points de l'espace nécessaires et suffisants pour la détermination complète d'une surface, on sous-entend toujours qu'il s'agit de points pris au hasard dans l'espace, n'étant liés entre eux par aucune relation; et que tels ne sont point, en général, les m^3 points d'intersection de trois surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré.

Ce paradoxe donne naissance à des théorèmes analogues à ceux que nous avons déduits, à la pag. 97 du présent volume, du semblable paradoxe relatif aux lignes courbes; théorèmes non moins féconds que ceux-là en conséquences curieuses, et dont la recherche va présentement nous occuper.

§. II.

Deux surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré se coupent, comme l'on sait, suivant une courbe à double courbure, dont la projection sur un plan quelconque est, en général, une courbe du $(m^2)^{\text{ième}}$ degré; et trois pareilles surfaces se coupent, comme nous venons de l'observer, en m^3 points au plus.

Soient donc

$$M=0, \quad M'=0 \quad M''=0 ;$$

les équations de ces trois surfaces; l'équation

$$\mu M + \mu' M' + M'' = 0 ,$$

dans laquelle μ et μ' sont supposées des constantes indéterminées, sera celle de toutes les surfaces du $m.^{i\text{eme}}$ degré, passant par les m^3 points d'intersection des trois premières; de sorte que, bien que ces points soient, en général, en plus grand nombre qu'il n'est nécessaire pour déterminer complètement une de ces surfaces, ils les laisseront toutes néanmoins indéterminées. Mais si l'on se donne seulement deux points de plus, ces derniers, joints aux m^3 autres, détermineront complètement une de ces surfaces; car ils donneront naissance à deux équations de conditions linéaires en μ et μ' , qui suffiront pour déterminer ces deux coefficients, et, par suite, pour particulariser la surface cherchée.

Remarquons, en outre, que les équations

$$\mu M + M'' = 0, \quad \mu' M' + M'' = 0, \quad \mu M + \mu' M' = 0,$$

représentent respectivement toutes les surfaces du $m.^{i\text{eme}}$ degré passant par les courbes à double courbure, intersections deux à deux des surfaces proposées. Une surface du $m.^{i\text{eme}}$ degré n'est donc pas déterminée par la seule condition de passer par les courbes à double courbure, intersections de deux autres surfaces de ce degré. Mais ici un seul point de l'espace par lequel une de ces surfaces, en nombre infini, sera assujétie à passer, suffira pour la déterminer complètement; car il en résultera une équation linéaire, soit en μ , soit en μ' , soit en $\frac{\mu'}{\mu}$, suffisante pour fixer la valeur de ce coefficient.

On voit par là que toutes les surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré qui passent par les m^3 points d'intersection de trois autres surfaces de ce degré, et en outre par un point donné, ont la même courbe d'intersection.

Concevons présentement que, sur la courbe d'intersection de deux surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré, on prenne arbitrairement $\frac{m+1}{1} - \frac{m+2}{2}$.

$\frac{m+3}{3} - 2$ points; si l'on y ajoute un nouveau point quelconque de l'espace, une troisième surface, assujétie à passer par tous ces points, sera complètement déterminée; mais nous venons de voir qu'elle le serait aussi, si on l'assujétissait à passer par ce même point et par la courbe d'intersection des deux premières; en invoquant donc le principe de dualité, on aura ces deux théorèmes:

THÉORÈME I. Toutes les surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré qui passent par les $\frac{m+1}{1} - \frac{m+2}{2} - \frac{m+3}{3} - 2$ mêmes points, se coupent, en général, suivant une même courbe à double courbure.

THÉORÈME I. Toutes les surfaces de $m^{\text{ième}}$ classe qui touchent les $\frac{m+1}{1} - \frac{m+2}{2} - \frac{m+3}{3} - 2$ mêmes plans, sont, en général, circonscrites à une même surface développable.

Donc, en particulier,

Corollaire. Toutes les surfaces du second ordre qui passent par les huit mêmes points, se coupent suivant une même courbe à double courbure.

Corollaire. Toutes les surfaces du second ordre qui touchent les huit mêmes plans, sont inscrites à une même surface développable.

De même, trois surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré se coupant en m^3 points; si l'on prend $\frac{m+1}{1} - \frac{m+2}{2} - \frac{m+3}{3} - 3$ de ces points, et qu'on y joigne deux points quelconques de l'espace, une quatrième surface de ce degré sera tout aussi complètement déterminée, par ce système de points, qu'elle le serait par les deux dernières et par la totalité des

m^3 points d'intersection des trois premières ; en invoquant donc encore ici le principe de dualité, on aura ces deux théorèmes :

THÉORÈME II. *Toutes les surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré assujéties à passer par $\frac{m+1}{1} - \frac{m+2}{2} - \frac{m+3}{3} - 3$ points donnés, passent en outre par les $m^3 - \frac{m+1}{1} - \frac{m+2}{2} - \frac{m+3}{3} + 3$ mêmes points fixes.*

THÉORÈME II. *Toutes les surfaces de $m^{\text{ième}}$ classe assujéties à toucher $\frac{m+1}{1} - \frac{m+2}{2} - \frac{m+3}{3} - 3$ plans donnés, touchent en outre les $m^3 - \frac{m+1}{1} - \frac{m+2}{2} - \frac{m+3}{3} + 3$ mêmes plans fixes.*

Donc, en particulier,

Corollaire. *Toutes les surfaces du second ordre qui passent par sept points donnés, ont en outre un huitième point commun (*).*

Corollaire. *Toutes les surfaces du second ordre qui touchent sept plans donnés, ont en outre un huitième plan tangent commun (*).*

(*) Dans le troisième volume du *Journal* de M. CRELLE (pag. 200 et 205), on recontre ces deux théorèmes fort analogues à ceux-là.

THÉORÈME. *Toutes les surfaces du second ordre qui passent par sept des huit sommets d'un hexaèdre octogone, passent aussi par le huitième et lui sont conséquemment circonscrites.*

THÉORÈME. *Toutes les surfaces du second ordre qui touchent sept des huit faces d'un octaèdre hexagone, touchent aussi la huitième et lui sont conséquemment inscrites.*

Un anonyme démontre le premier de ces théorèmes, par un calcul direct qui n'est pas dépourvu d'une certaine élégance ; M. Steiner en déduit l'autre par la théorie des polaires réciproques.

Le premier de ces théorèmes, le seul qu'il soit nécessaire de démontrer, nous paraît pouvoir être assez simplement établi comme il suit :

Soient

$$M=0, \quad M'=0, \quad M''=0, \quad (1)$$

trois équations du second degré en x, y, z , dont chacune exprime deux

Ici encore, comme nous l'avons déjà remarqué pour les lignes courbes, on pourra admettre que tous ou partie des points fixes donnés se confondent par groupes plus ou moins nombreux en un point unique, auquel cas les surfaces dont il s'agit auront, en ces points, des contacts d'ordres plus ou moins élevés.

On peut également ici, comme alors, remplacer chaque point donné de la surface cherchée, soit par l'un des coefficients de son équation, soit par une équation linéaire entre tous ou partie de ces coefficients. Nos deux théorèmes se changeront ainsi dans les deux théorèmes plus généraux que voici :

THÉORÈME III. Etant donnés n coefficients de l'équation générale du m .^{ième} degré, à trois indéterminées, ou encore, étant données n équations linéaires entre tous ou partie de ces coefficients, toutes les surfaces représentées par l'équation générale ainsi modifiée, et passant par les $\frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \cdot \frac{m+3}{3} - (n+2) m$

plans; elles seront satisfaites toutes trois par les coordonnées des sommets de l'hexaèdre octogone qui aura ces couples de plans pour les plans de leurs faces opposées; or, tout point qui satisfera à ces trois équations satisfera aussi à l'équation du second degré

$$\mu M + \mu' M' + M'' = 0, \quad (2)$$

dans laquelle μ et μ' sont deux constantes indéterminées; donc, cette dernière est l'équation commune à toutes les surfaces du second ordre circonscrites à l'hexaèdre octogone dont il s'agit; et, comme d'ailleurs, cet hexaèdre se trouve visiblement déterminé par sept de ses huit sommets, il s'ensuit que, pourvu qu'une surface du second ordre passe par ces sept sommets, elle devra nécessairement passer par le huitième.

Au surplus, ce théorème se trouve aussi compris dans le *théorème V* de la pag. 246 de notre XVII.^e vol.

J. D. G.

mes points fixes , se couperont suivant une seule et même courbe à double courbure.

Donc , en particulier ,

Corollaire. Etant donnés n coefficients de l'équation générale du second degré , à trois indéterminées , ou encore , étant données n équations linéaires , entre tous ou partie de ces coefficients ; toutes les surfaces représentées par l'équation générale ainsi modifiée , et passant par les $8-n$ mêmes points fixes , se couperont suivant une seule et même courbe à double courbure.

THÉORÈME IV. Etant donnés n coefficients de l'équation générale du $m.$ ^{ième} degré , à trois indéterminées , ou encore , étant données n équations linéaires entre tous ou partie de ces coefficients , toutes les surfaces représentées par l'équation générale ainsi modifiée , et passant par les $\frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \cdot \frac{m+3}{3} - (n+3)$ mêmes points fixes donnés , se couperont , en outre , aux $m^3 - \frac{m+1}{1} \cdot$

$\frac{m+2}{2} \cdot \frac{m+3}{3} + (n+3)$, autres mêmes points fixes.

Donc , en particulier ,

Corollaire. Etant donnés n coefficients de l'équation générale du second degré , à trois indéterminées , ou encore , étant données n équations linéaires , entre tous ou partie de ces coefficients , toutes les surfaces représentées par l'équation générale ainsi modifiée , et passant par les $7-n$ mêmes points fixes donnés , se couperont , en outre , aux $n+1$, autres mêmes points fixes.

Il est essentiel d'observer que , dans tout ceci , on suppose que l'un des termes de l'équation générale est privé de son coefficient ; ou , ce qui revient au même , que le coefficient de l'un de ses termes est une quantité donnée.

On fera , de ces diverses propositions , un usage pareil à celui que nous avons fait , pag. 102 , de leurs analogues relatives aux lignes

courbes. On en déduira, par exemple, sans aucune sorte de calcul, les propositions suivantes :

I. Toutes les surfaces du second ordre passant par six points donnés, et assujéties; en outre, à cette condition que les plans diamétraux, conjugués à des diamètres parallèles à une droite fixe, se coupent tous en un point donné, passeront en outre par deux nouveaux points fixes.

II. Toutes les surfaces du second ordre passant par cinq points donnés, et assujéties en outre à une des conditions suivantes : 1.^o que les plans diamétraux conjugués à des diamètres parallèles à une droite fixe, se coupent tous suivant une même droite ou soient parallèles à un même plan; 2.^o que les diamètres conjugués à des plans diamétraux parallèles concourent en un point donné ou soient parallèles à une droite donnée, passeront en outre par trois nouveaux points fixes.

III. Toutes les surfaces du second ordre passant par six points donnés, et assujéties en outre à cette condition que les plans polaires d'un même point donné se coupent tous en un autre point donné, passeront par deux nouveaux points fixes.

IV. Toutes les surfaces du second ordre passant par cinq points donnés, et assujéties en outre à cette condition que les plans polaires d'un même point se coupent tous suivant la même droite, passeront en outre par trois nouveaux points fixes.

V. Dans toutes les surfaces du

III. Toutes les surfaces du second ordre touchant six plans donnés, et assujéties en outre à cette condition que les pôles d'un même plan donné soient tous dans un autre plan donné, toucheront deux nouveaux plans fixes.

IV. Toutes les surfaces du second ordre touchant cinq plans donnés, et assujéties en outre à cette condition que les pôles d'un même plan soient tous situés sur une même droite, toucheront en outre trois nouveaux plans fixes.

V. Dans toutes les surfaces du

second ordre passant par sept points donnés, les plans polaires d'un point quelconque se coupent tous en un autre point fixe.

VI. Dans toutes les surfaces du second ordre passant par huit points donnés, les plans polaires d'un point quelconque se coupent tous suivant une même droite fixe.

VII. Dans toutes les surfaces du second ordre passant par sept points donnés, les plans diamétraux conjugués aux diamètres parallèles à une même droite fixe, se coupent en un même point fixe.

VIII. Dans toutes les surfaces du second ordre passant par huit points donnés, les plans diamétraux conjugués aux diamètres parallèles à une même droite fixe, se coupent tous suivant une autre droite fixe.

IX. Toutes les surfaces du second ordre, assujéties à la condition que les plans polaires de quatre points donnés passent respectivement par quatre droites données, ont la même courbe d'intersection.

Etc., etc., etc.

second ordre touchant sept plans donnés, les pôles d'un plan quelconque sont tous situés dans un autre plan fixe.

VI. Dans toutes les surfaces du second ordre touchant huit plans donnés, les pôles d'un plan quelconque sont tous situés sur une même droite fixe.

IX. Toutes les surfaces du second ordre, assujéties à la condition que les pôles de quatre plans donnés soient situés respectivement sur quatre droites données, sont inscrites à une même surface développable.

Bonn, 8 juin 1828.