ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Statique. Sur quelques démonstrations du principe du parallélogramme des forces

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 72-82
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__72_0>

STATIQUE.

Sur quelques démonstrations du principe du parallélogramme des forces ;

Par M. Gergonne.

L'auteur de la démonstration du principe du parallélogramme des forces que l'on rencontre aujourd'hui dans la presque totalité des traités élémentaires de statique, nous a souvent témoigné le regret de n'avoir pu parvenir à son but sans déplacer, et même plus d'une fois, le point d'application des composantes. Sans doute, cela n'infirme en rien ni la vérité du théorème ni la validité de sa démonstration ; mais les esprits méthodiques peuvent désirer, lorsqu'ils s'occupent d'abord uniquement des forces qui agissent sur un même point, de n'avoir pas à considérer des forces qui agissent tantôt sur un point d'un plan et tantôt sur un autre. D'ailleurs, quelque incontestable que puisse paraître le principe qui autorise le déplacement, sur la direction d'une force, de son point d'application, ce principe n'en a pas moins été mis en doute par un géomètre dont on ne saurait certainement contester le mérite (*) ; et c'est dire assez qu'il peut être bon de ne pas trop s'en prévaloir vis-à-vis des commençans, surtout dès le début.

Dans un mémoire sur la composition des forces appliquées à un même point, qui fait partie de la deuxième livraison du premier volume de ses

(*) Voy. *Annales*, tom. V, pag. 215 et tom. VI, pag. 201.

Exercices de mathématiques (pag. 29) , M. Cauchy vient récemment d'éluder cette difficulté d'une manière fort ingénieuse et bien propre à prouver qu'on peut quelquefois ne pas se trouver moins bien en mécanique qu'en géométrie du recours aux trois dimensions de l'espace, pour la démonstration des théorèmes qui n'en embrassent que deux seulement. Comme peut-être beaucoup de professeurs de nos colléges pourraient ne pas songer à aller chercher cette démonstration dans le savant recueil qui la contient, et comme d'ailleurs nous y avons introduit quelques simplifications, nous croyons faire une chose agréable pour eux en la présentant ici telle que nous l'avons adoptée pour l'enseignement qui nous est confié.

Mais auparavant il est nécessaire que nous rappellions brièvement ici diverses propositions préliminaires qui se trouvent établies dans la plupart des traités de statique, ou du moins qui peuvent être facilement déduites de celles qu'on y rencontre, afin de n'avoir plus qu'à y renvoyer à mesure que nous aurons besoin de nous en appuyer.

1. Lorsque des forces sont appliquées à un même point de l'espace, ou bien elles se font équilibre, ou bien elles ont une résultante unique dont la direction passe par ce point.

2. Si elles se font équilibre, chacune d'elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.

3. Plusieurs systèmes en équilibre autour d'un même point ne forment qu'un système unique en équilibre autour de ce point.

4. Et comme la proposition ne cesse pas d'être vraie lorsque les forces sont égales chacune à chacune dans ces divers systèmes, et que les directions des forces homologues coïncident, il s'ensuit qu'on ne trouble pas l'équilibre de plusieurs forces, appliquées à un même point, lorsque, sans changer leur direction, on les rend toutes m fois plus grandes, quel que soit d'ailleurs le nombre entier m. Donc aussi (2) si, sans changer les directions de plusieurs forces qui ne sont pas en équilibre autour d'un point, on les rend tou-

tes m fois plus grandes, leur résultante, sans changer de direction, deviendra aussi m fois plus grande.

5. Donc aussi on ne troublera pas l'équilibre de plusieurs forces, appliquées à un même point, si, sans changer les directions des forces du système, on les rend toutes n fois plus petites, quel que soit d'ailleurs le nombre entier n. Car si, par cette transformation, on leur faisait acquérir une résultante, il arriverait, contrairement à l'hypothèse, que le système primitif, au lieu d'être en équilibre, aurait une résultante n fois plus grande que celle-là. Donc aussi (2), si, sans changer les directions de plusieurs forces qui ne sont point en équilibre autour d'un point, on les rend toutes n fois plus petites, leur résultante, sans changer de direction, deviendra également n fois plus petite.

6. Donc (5, 6) on ne troublera pas l'équilibre de plusieurs forces autour d'un point, si, sans changer leurs directions, on les multiplie toutes par la fraction $\frac{m}{n}$, quels que soient d'ailleurs les deux nombres entiers m et n. Donc aussi (2), si, sans changer les directions de plusieurs forces qui ne sont pas en équilibre autour d'un point, on les multiplie toutes par la fraction $\frac{m}{n}$, leur résultante, sans changer de direction, se trouvera aussi multipliée par $\frac{m}{n}$.

7. Et comme on peut toujours choisir m et n de telle sorte que la différence entre la fraction $\frac{m}{n}$ et un nombre incommensurable donné soit moindre qu'une quantité donnée, si petite qu'on la suppose, on peut dire, plus généralement, que des forces en équilibre autour d'un point demeurent telles, lorsque, sans changer leurs directions, on les multiplie toutes par un nombre quelconque; et que, si les forces ne sont pas en équilibre, leur résultante, sans changer de direction, se trouvera multipliée par ce même nombre.

8. Des forces appliquées à un même point et situées dans un

même plan, ont leur résultante comprise dans ce plan. Si ces forces sont au nombre de deux seulement leur résultante agira dans l'angle formé par leurs directions; si enfin elles sont égales, la direction de leur résultante divisera cet angle en deux parties égales.

Ces préliminaires ainsi établis, nous allons démontrer que *la résultante de deux forces rectangulaires, appliquées à un même point, est représentée, tant en intensité qu'en direction, par la diagonale du rectangle construit sur les droites qui représentent les composantes, tant en intensité qu'en direction.*

1.° Démontrons d'abord que cette diagonale représente la résultante *en intensité.*

Soient P et Q deux forces perpendiculaires l'une à l'autre, appliquées à un même point; soit R leur résultante, d'intensité et de direction inconnues, et que nous savons seulement (8) être dirigée dans l'angle des composantes. Soient α et β les angles que forme cette résultante avec elle. Ces angles seront complémens l'un de l'autre.

A la force P nous pourrons en substituer deux autres, l'une $\frac{P^2}{R}$, dirigée suivant R et l'autre $\frac{PQ}{R}$ perpendiculaire à celle-là. En effet (7) ces deux dernières forces se trouvant rectangulaires, comme P et Q, et n'étant autre chose que ces forces P et Q, multipliées toutes deux par $\frac{P}{R}$, leur résultante devra, comme R, former des angles α et β avec les composantes et conséquemment être dirigée suivant P, et son intensité devra être $R.\frac{P}{R}=P.$

Par une semblable raison, nous pourrons remplacer la force Q par deux autres, l'une $\frac{Q^2}{R}$, dirigée suivant R et l'autre $\frac{PQ}{R}$, perpendiculaire à la direction de cette résultante. Nous aurons ainsi, au lieu des deux forces P et Q, quatre autres forces dont R devra toujours être la résultante.

Mais, de ces quatre forces, deux sont égales et directement opposées, tandis que les deux autres agissent dans le sens de R; donc R doit être simplement égale à la somme de ces deux dernières, c'est-à-dire, qu'on doit avoir

$$R=\frac{P^2}{R}+\frac{Q^2}{R}\text{, ou } R^2=P^2+Q^2\text{, ou enfin } R=\sqrt{P^2+Q^2}\ ;$$

ce qui démontre la première partie de la proposition.

Cette démonstration est au fond celle de la mécanique céleste, que M. Cauchy n'a fait simplement que rendre indépendante du calcul différentiel qui, comme l'on voit, y avait été introduit bien gratuitement.

2.° Prouvons présentement que la diagonale du rectangle des forces, qui déjà représente la résultante en intensité, la représente aussi en direction.

Prouvons d'abord que, si cette proposition était reconnue vraie pour deux forces P et M, elle le serait également pour deux autres forces P et $\sqrt{P^2+M^2}$.

Pour le démontrer, concevons trois forces P, P, M dirigées suivant les trois arêtes d'un même angle d'un parallélipipède rectangle. Pour en avoir la résultante, il faudra d'abord déterminer la résultante de deux quelconques d'entre elles, puis la résultante de cette résultante et de la troisième. Or, par l'hypothèse, la résultante $\sqrt{P^2+M^2}$, de M et de l'une des deux forces P, est dirigée suivant la diagonale de la face qui contient les deux composantes; d'où il suit (8) que la résultante des trois forces sera dans le plan qui contient cette diagonale de face et l'arête qui lui est opposée. Mais il existe deux tels plans dans le parallélipipède, et dans lesquels conséquemment la résultante des trois forces doit se trouver à la fois; cette résultante sera donc dirigée suivant leur intersection, diagonale du parallélipipède, laquelle est aussi diagonale du rectangle des deux forces P et $\sqrt{P^2+M^2}$; il est donc prouvé que la proposition sera vraie pour deux telles forces rectangulaires, si elle l'est pour les forces rectangulaires P et M.

En posant $M=P\sqrt{k}$ et substituant, on conclura de là que, si la proposition est vraie pour deux forces rectangulaires P et $P\sqrt{k}$, elle le sera aussi pour les deux forces P et $P\sqrt{k+1}$, quel que soit le nombre entier k. Or, la proposition est vraie (8) pour les deux forces P et $P\sqrt{1}$, puisque ce sont des forces égales; donc elle sera vraie aussi pour les forces rectangulaires P et $P\sqrt{2}$, P et $P\sqrt{3}$, P et $P\sqrt{4}$, ... P et $P\sqrt{k}$; et comme k est ici quelconque, en posant $k=m^2$, il demeurera prouvé que la proposition est vraie pour deux forces rectangulaires multiples l'une de l'autre P et mP; et il en serait évidemment de même pour deux forces rectangulaires P et nP, quels que pussent être les nombres entiers m et n.

Prouvons encore que, si la proposition est vraie pour deux forces rectangulaires P et M, et pour deux autres forces rectangulaires P et N, elle le sera également pour les deux forces rectangulaires M et N.

En effet, soient trois forces P, M, N agissant sur un même sommet d'un parallélipipède rectangle, et dirigées suivant les arêtes de ce parallélipipède, que nous supposons les représenter en intensité. Pour en obtenir la résultante, on pourra d'abord chercher la résultante $\sqrt{P^2+M^2}$ des deux forces P et M, laquelle, par hypothèse, sera dirigée suivant la diagonale de la face qui contient les deux composantes, et composer ensuite cette résultante avec N; ou bien on pourra chercher d'abord la resultante $\sqrt{P^2+N^2}$ des deux forces P et N, laquelle, par hypothèse, sera dirigée suivant la diagonale de la face qui contient les deux composantes, et composer ensuite cette résultante avec M.

Il suit de là que la résultante des trois forces se trouvera à la fois située dans le plan qui contient la diagonale $\sqrt{P^2+M^2}$ et l'arête opposée N, et dans le plan qui contient la diagonale $\sqrt{P^2+N^2}$ et l'arête opposée M ; cette résultante sera donc dirigée suivant l'intersection de ces deux plans, laquelle n'est autre chose que la diagonale du parallélipipède.

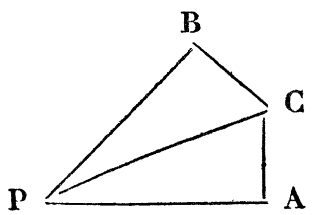
Mais on peut aussi chercher d'abord la résultante des deux forces M et N pour la composer avec P ; et, comme l'on doit retomber également sur la diagonale du parallélipipède, il faut (8) que cette diagonale soit dans le plan de P et de la résultante de M et N ; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que cette résultante sera dirigée suivant la diagonale de la face qui contient ces deux forces.

D'après ce qui a été démontré ci-dessus, la proposition est vraie pour P et M et pour P et N, lorsqu'on a $M=mP$ et $N=nP$, donc, d'après ce qui vient d'être prouvé, elle est vraie aussi pour M et N, lorsqu'on a $M=mP$ et $N=nP$; c'est-à-dire qu'elle est vraie pour deux forces rectangulaires commensurables quelconques. Il est facile de démontrer qu'elle est également vraie lorsque les deux forces rectangulaires sont incommensurables.

Ainsi la résultante de deux forces rectangulaires quelconques, agissant sur un même point, est représentée à la fois, en intensité et en direction, par la diagonale du rectangle construit sur les deux droites qui représentent les composantes tant en intensité qu'en direction.

Soient présentement deux forces P et Q agissant sur un même point dans des directions quelconques, et soit construit un parallélogramme sur les droites qui représentent ces forces en intensité et en direction. Soient considérées P et Q comme les diagonales de deux rectangles ayant un de leurs côtés dirigé suivant la diagonale du parallélogramme ; il est aisé de voir que cette diagonale sera égale à la somme ou à la différence de ces mêmes côtés, suivant qu'ils seront dirigés dans le même sens ou en sens contraire, tandis que, dans tous les cas, les autres côtés des deux rectangles seront égaux et dirigés en sens contraire. Si donc, on décomposé respectivement P et Q suivant les côtés de ces deux rectangles, ces forces se trouveront remplacées par quatre autres, dont deux se détruiront, tandis que les deux autres se composeront en une seule, représentée en intensité et en direction par la diagonale; ce qui constitue le théorème qu'il s'agissait d'établir.

Dans la quatrième livraison du *Journal de mathématiques* de M. Crelle (pag. 369), M. le docteur Burg a donné une démonstration du principe du parallélogramme des forces, qui n'occupe que quelques lignes, mais qui n'est malheureusement qu'un très-spirituel paralogisme; paralogisme que nous croyons d'autant plus nécessaire de signaler ici, que le mérite éminent du recueil sous la garantie duquel il se trouve publié, pourrait séduire quelques jeunes lecteurs. Voici le fond du raisonnement de M. Burg.



Soient données les intensités de deux forces agissant sur un même point P, et l'angle que comprennent entre elles leurs directions; l'intensité et la direction de leur résultante se trouveront complètement déterminées. En menant les droites PA et PB, qui représentent ces composantes en intensité et en direction, la droite PC qui doit représenter leur résultante en intensité et en direction se trouvera tout à fait déterminée. Si donc l'on mène les droites CA et CB, le quadrilatère APBC se trouvera complètement déterminé par ces trois données PA, PB et l'angle APB.

Ce quadrilatère sera *trapézoïde*, *trapèze* ou *parallélogramme*; or, il ne saurait être un trapézoïde, qui ne se détermine que par *cinq* conditions; il ne saurait être non plus un trapèze, qui en exige *qua-*

tre ; ce sera donc un parallélogramme, qui n'en demande que *trois* seulement.

Pour faire bien ressortir le vice logique de ce raisonnement, supposons, pour un moment, qu'il ait plu aux géomètres, comme ils en avaient certes bien le droit, de classer les quadrilatères, non pas d'après le parallélisme ou le non parallélisme de leurs côtés opposés, mais d'après la perpendicularité ou la non perpendicularité de leurs côtés consécutifs. On aurait eu ainsi des quadrilatères *obliquangles*, *rectangles*, *bi-rectangles* et *tri-rectangles*, dépendant respectivement de *cinq*, *quatre*, *trois* et *deux* conditions ; et, en leur appliquant littéralement le raisonnement de M. Burg, on aurait été conduit à conclure que le quadrilatère APBC doit être bi-rectangle, et qu'ainsi le point C doit être déterminé par le concours des perpendiculaires menées respectivement à AP et BP, par les points A et B, ce qui est généralement faux.

Si l'on nous objectait que, parmi les quadrilatères que nous appelons obliquangles et que nous disons ne pouvoir être déterminés que par cinq conditions, se trouvent compris des parallélogrammes qui n'en exigent que trois, nous observerions à notre tour que parmi les trapézoïdes, qu'on nous dit exiger cinq conditions, se trouvent compris des quadrilatères bi-rectangles, qui n'en exigent également que trois ; de sorte qu'il y a exacte parité entre les deux raisonnemens.

De ce que le quadrilatère APBC ne dépend que de trois conditions seulement, tout ce qu'on est fondé à en conclure, c'est que la nature du problème doit, indépendamment des trois données qui varient d'une question à l'autre, l'assujettir à deux autres conditions, sans qu'il soit possible d'assigner ces deux autres conditions *à priori*.

Mais en voilà peut-être déjà beaucoup trop sur une démonstration qui occupe à peine une demi-page du recueil de M. Crelle, et à laquelle nous ne pensons pas que l'auteur attache une grande importance. Il est même juste de dire que, si M. Burg s'est mépris en cette rencontre, il n'est peut-être pas donné à beaucoup de monde de faillir d'une manière aussi ingénieuse.

Dans les *Transactions de la société philosophique de Cambridge* (tom. II, 1.re partie, pag. 45) on trouve aussi une démonstration fort courte et fort élégante du principe du parallélogramme des forces. On sait que tout se réduit à démontrer le théorème pour deux forces égales, formant entre elles un angle quelconque (*); et voici comment l'auteur, M. J. King, y parvient.

Soient ces deux forces égales à P, 2θ l'angle qu'elles forment et R leur résultante, dont la direction doit évidemment diviser l'angle 2θ en deux parties égales. Cette résultante devra être nulle pour toutes les valeurs de θ comprises dans la double série.

$$\pm\frac{\varpi}{2}\,,\quad \pm\frac{3\varpi}{2}\,,\quad \pm\frac{5\varpi}{2}\,,\quad \pm\frac{7\varpi}{2}\,,\ \ldots\ldots$$

c'est-à-dire, qu'elle devra être nulle en même temps que chacune des quantités

$$1-\frac{4\theta^2}{\varpi^2}\,,\quad 1-\frac{4\theta^2}{9\varpi^2}\,,\quad 1-\frac{4\theta^2}{25\varpi^2}\,,\ \ldots\ldots$$

et ne pourra d'ailleurs l'être que dans ces seuls cas; d'où l'auteur conclut qu'on doit avoir

$$R=kP\left(1-\frac{4\theta^2}{\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4\theta^2}{9\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4\theta^2}{25\varpi^2}\right)\ldots\ldots$$

k étant un coefficient indépendant de P et θ; or, cela revient, comme l'on sait, à

(*) Voy. la Mécanique de M. Francœur.

$$R = kP\,\mathrm{Cos}.\theta\ ;$$

et comme, pour $\theta = 0$, on doit avoir $R = 2P$, il s'ensuit que $k = 2$; ce qui donne finalement

$$R = 2P\,\mathrm{Cos}\,\theta\ .$$

Il resterait seulement à expliquer pourquoi on n'aurait pas

$$R = kP\left(1 - \frac{4\theta^2}{\varpi^2}\right)^\alpha\left(1 - \frac{4\theta^2}{9\varpi^2}\right)^\beta\left(1 - \frac{4\theta^2}{25\varpi^2}\right)^\gamma \ldots\ldots$$

α, β, γ, ... étant des nombres entiers positifs différens de l'unité. Nous avons employé un tour de raisonnement analogue, à la page 118 de notre premier volume; mais nous avons eu soin (pag. 119) de nous mettre à couvert de cette objection.

Au surplus, si l'on renonçait à tenir la statique dans un isolement complet de la dynamique, isolement beaucoup moins philosophique peut-être qu'on se le figure, on s'épargnerait bien des difficultés. En appelant forces égales celles qui sont capables d'imprimer des vitesses égales à une même masse, forces doubles celles qui sont capables de lui imprimer des vitesses doubles, et ainsi de suite, le principe du parallélogramme des forces deviendrait celui du parallélogramme des vitesses, si facile à établir nettement à la manière de d'Alembert dans sa Dynamique. Il resterait plus tard à prouver que des forces qui impriment les mêmes vitesses à des masses inégales sont proportionnelles à ces masses. Mais il semble qu'on se plaise à semer des épines sur les pas des commençans, de peur sans doute qu'ils ne prennent trop de goût pour les sciences, et qu'elles ne deviennent ainsi trop populaires.