ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Géométrie des lignes et surfaces courbes. Démonstration de deux théorèmes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 368-371
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__368_0>

GÉOMETRIE DES LIGNES ET SURFACES COURBES.

Démonstration de deux théorèmes ;

Par un ABONNÉ.

L'ÉQUATION en coordonnées rectangulaires de toute ligne du second ordre, pourvue d'un centre, est réductible à la forme

$$Ax^2+By^2=C\ , \qquad (1)$$

dans laquelle A, B, C représentent non seulement les valeurs absolues, mais encore les signes des coefficiens.

Si l'on veut passer du système primitif à un autre système rectangulaire de même origine, il faudra poser

$$x=\alpha t+\beta u\ , \qquad y=\alpha' t+\beta' u\ , \qquad (2)$$

ce qui donnera, en substituant,

$$A(\alpha t+\beta u)^2+B(\alpha' t+\beta' u)^2=C\ . \qquad (3)$$

Pour trouver les longueurs a et b des segmens des axes des t et des u interceptés par la courbe, à partir de l'origine, il faudra faire, tour à tour, dans cette équation, $t=a$, $u=o$ et $u=b$, $t=o$, ce qui donnera, pour déterminer a et b, les équations

$$(A\alpha^2+B\alpha'^2)a^2=C\ , \qquad (A\beta^2+B\beta'^2)b^2=C\ ,$$

d'où on tirera

$$\frac{1}{a^2}=\frac{A\alpha^2+B\alpha'^2}{C}\;, \qquad \frac{1}{b^2}=\frac{A\beta^2+B\beta'^2}{C}$$

et par suite

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{A(\alpha^2+\beta^2)+B(\alpha'^2+\beta'^2)}{C}\;;$$

mais, il est connu que

$$\alpha^2+\beta^2=1\;, \qquad \alpha'^2+\beta'^2=1\;;$$

donc, on aura simplement

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{A+B}{C}\;;$$

et de là ce théorème :

THÉORÈME I. Dans toutes les lignes du second ordre qui ont un centre, la somme des quarrés des inverses de deux demi-diamètres perpendiculaires l'un à l'autre est une quantité constante.

L'équation, en coordonnées rectangulaires, de toute surface du second ordre pourvue d'un centre, est réductible à la forme

$$Ax^2+By^2+Cz^2=D\;, \qquad (1)$$

dans laquelle A, B, C, D représentent non seulement les valeurs absolues, mais encore les signes des coefficiens.

Si l'on veut passer du système primitif à un autre système rectangulaire de même origine, il faudra poser

$$x=\alpha t+\beta u+\gamma v\;,\quad y=\alpha' t+\beta' u+\gamma' v\;,\quad z=\alpha'' t+\beta'' u+\gamma'' v\;; \qquad (2)$$

ce qui donnera, en substituant,

$$A(\alpha t+\beta u+\gamma v)^2+B(\alpha' t+\beta' u+\gamma' v)^2+C(\alpha'' t+\beta'' u+\gamma'' v)^2=D\;. \qquad (3)$$

Pour trouver les longueurs des segmens a, b, c des axes des t, des u et des v interceptés par la courbe, à partir de l'origine, il faudra faire tour à tour, dans cette équation, $t=a$ et $u=v=0$, $u=b$ et $v=t=0$, $v=c$ et $t=u=0$, ce qui donnera pour déterminer a, b, c les équations

$$(A\alpha^2+B\alpha'^2+C\alpha''^2)a^2=D\ ,$$

$$(A\beta^2+B\beta'^2+C\beta''^2)b^2=D\ ,$$

$$(A\gamma^2+B\gamma'^2+C\gamma''^2)c^2=D\ ;$$

d'où on tirera

$$\frac{1}{a^2}=\frac{A\alpha^2+B\alpha'^2+C\alpha''^2}{D}\ ,$$

$$\frac{1}{b^2}=\frac{A\beta^2+B\beta'^2+C\beta''^2}{D}\ ,$$

$$\frac{1}{c^2}=\frac{A\gamma^2+B\gamma'^2+C\gamma''^2}{D}\ ;$$

et par suite

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{A(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+B(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)+C(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)}{D}\ ;$$

mais il est connu que

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\ ,\qquad \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1\ ,\qquad \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1\ ;$$

donc, on aura simplement

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{A+B+C}{D}\ ;$$

et de là ce théoreme:

THÉORÈME II. Dans toute surface du second ordre pourvue d'un centre, la somme des carrés des inverses de trois demi-diamètres dirigés suivant les trois arêtes d'un angle trièdre tri-rectangle, est une quantité constante.

D'après l'élégante théorie des indicatrices de M. Charles Dupin (*Annales*, tom. IX, pag. 179), on sait qu'il y a mêmes relations entre les rayons de courbure des diverses sections faites à une surface courbe, suivant une même normale, qu'entre les carrés des demi-diamètres d'une ligne du second ordre pourvue d'un centre On pourra donc conclure du *Théorème I*, le théorème suivant dû à M. Ampère.

Un angle droit dièdre étant assujetti à avoir son arête dirigée suivant la normale en un point fixe d'une surface courbe, quelle que soit d'ailleurs la position de cet angle dièdre autour de cette normale, la somme des inverses des rayons de courbure des sections, déterminées par ses deux faces, pris avec leurs signes, sera une quantité constante.

Le *Théorème II* conduirait à une proposition analogue, relativement à la géométrie de l'étendue hétérogène, signalée par M. Gergonne (*Annales*, tom. XVII, pag. 136), géométrie pour laquelle il existe un théorème qui correspond exactement à celui de M. Dupin.