ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

PLUKER

Géométrie analytique. Mémoire sur les contacts et sur les intersections des cercles

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 29-47

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__29_0>

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Mémoire sur les contacts et sur les intersections des cercles ;

Par M. PLUKER, docteur en l'Université de Bonn.

NOUS nous proposons, dans ce qu'on va lire, de déduire d'une analyse que le lecteur trouvera peut-être assez simple, diverses solutions du problème où il s'agit de décrire un cercle qui touche trois cercles donnés, ainsi que des autres problèmes compris dans celui-là, comme cas particuliers. Nous enseignerons aussi, plus généralement, à décrire un cercle qui en coupe trois autres sous des angles donnés; et aussi à décrire un cercle qui coupe quatre cercles donnés sous des angles égaux; ou, plus généralement, sous des angles dont les cosinus soient entre eux dans un rapport donné. Nous montrerons enfin comment on peut résoudre des problèmes analogues sur les surfaces du second ordre.

Dans un des numéros du journal de M. Crelle, publié à Berlin, M. Steiner a donné, sans démonstration, la construction de divers problèmes, parmi lesquels ceux-ci se trouvent compris, en déclarant que ces constructions se déduisaient d'une théorie qu'il a exposée avec assez de développement; mais la publicité que ce géomètre a donnée à son travail ne nous a pas paru un motif suffisant pour renoncer à publier un sommaire du nôtre, qu'on sera peut-être bien aise de lui comparer, et dont on trouvera peut-être même la marche plus rapide et plus simple à quelques égards.

1. Soient

$$c=0\ ,\qquad c'=0\ ,\qquad c''=0\ ,$$

les équations de trois cercles, tracés sur un même plan, et rapportés aux mêmes axes; chacune des trois équations

$$c'-c''=0\ ,\qquad c''-c=0\ ,\qquad c-c'=0\ ,$$

étant linéaire en x et y, et ayant lieu en même temps que celles de deux de ces cercles, sera conséquemment celle de leur corde commune, réelle ou idéale, c'est-à-dire, de leur *axe radical*; mais chacune de ces trois dernières équations est évidemment comportée par les deux autres; donc elles sont toutes trois satisfaites par le même système de valeurs de x et de y; donc, finalement, *les axes radicaux de trois cercles quelconques*, *tracés sur un même plan*, *et pris tour à tour deux à deux*, *concourent tous trois en un même point* que nous appellerons à l'avenir le *centre radical* des trois cercles dont il s'agit (*).

(*) Ce tour de raisonnement, dont la première idée paraît appartenir à M. Gergonne, mérite une attention toute particulière, attendu qu'il peut être utilement employé dans beaucoup d'autres rencontres.

Nous nous bornerons seulement ici à faire remarquer que le théorème subsiste, lorsqu'on remplace un ou deux des cercles donnés, ou même tous les trois, par des points, dont on peut mettre les équations sous cette forme

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0\ .$$

Deux points qui ont avec un même cercle le même axe radical sont dits *conjugués* l'un à l'autre, par rapport à ce cercle. Soit un cercle donné par l'équation

$$x^2+y^2=r^2\ ,$$

et deux points donnés par celles-ci

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0\ ,$$

On pourra facilement, d'après cela, *décrire un cercle qui, passant par deux points donnés, touche un cercle donné*. On peut remarquer, en effet, que le problème a deux solutions et que les deux cercles qui le résolvent ont, avec le cercle donné, un centre radical qui doit se trouver à la fois sur la droite qui joint les deux points donnés, et au point de concours des tangentes com-

---

$$(x-a')^2+(y-b')^2=0\ ;$$

leurs axes radicaux par rapport au cercle seront donnés par les équations

$$2ax+2by-(a^2+b^2+r^2)=0\ ,$$

$$2a'x+2b'y-(a'^2+b'^2+r^2)=0\ .$$

Afin donc que ces deux axes radicaux se confondent, on devra avoir

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{a^2+b^2+r^2}{a'^2+b'^2+r^2}\ .$$

La première partie de cette double équation prouve que les deux points dont il s'agit doivent être en ligne droite avec le centre du cercle; d'où il suit que, si l'on suppose $b=0$, on devra avoir aussi $b'=0$. Notre double équation se réduira ainsi à

$$\frac{a}{a'}=\frac{a^2+r^2}{a'^2+r'^2}\ ,$$

d'où on tirera

$$aa'=r^2\ ;$$

ce qui prouve 1.° que les deux points doivent être situés d'un même côté du centre ; 2.° que le rayon doit être moyen proportionnel entre leurs distances à ce centre.

Il résulte de là que, si l'un de ces points est sur la circonférence, l'autre se confondra avec lui; et que conséquemment l'axe radical d'un cercle et d'un point de sa circonférence n'est autre que la tangente à ce cercle en ce point.

munes à ces deux mêmes cercles et au cercle donné. Ce centre radical demeurera donc le même si l'on remplace l'un des deux cercles cherchés par un autre cercle qui, passant comme lui par les deux points donnés, coupe le cercle donné; puisque ce point se trouvera toujours à l'intersection des deux mêmes droites. Décrivant donc arbitrairement un tel cercle; sa corde commune avec le cercle donné coupera la droite menée par les deux points en un point duquel menant des tangentes au cercle donné, leurs points de contact avec lui seront aussi ceux où il doit être touché par les cercles cherchés. Menant donc des rayons par ces deux points, ces rayons seront coupés par la perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les deux points donnés aux centres des deux cercles cherchés.

2. Cette construction se trouve en défaut, lorsque le cercle donné

Rien de plus facile d'après cela que d'obtenir l'équation de la tangente à un cercle

$$x^2+y^2=r^2 ,$$

en l'un quelconque

$$(x-x')^2+(y-y')^2=0$$

de ses points. En prenant en effet la différence de leurs équations, et ayant égard à la condition

$$x'^2+y'^2=r^2 ,$$

on aura, sur-le-champ, pour l'équation cherchée de la tangente au cercle,

$$x'x+y'y=r^2 .$$

La même méthode est applicable à toutes les lignes du second ordre. Appliquée aux lignes des ordres plus élevés, au lieu de leurs tangentes, elle donnerait leurs lignes osculatrices.

(*Note de* M. Plucker).

dégénère en une droite donnée. Voyons comment alors on peut y suppléer. Soient

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \ ,$$

$$(x-a')^2+(y-b'^2)^2=r'^2 \ ,$$

les équations de deux cercles quelconques, en retranchant on aura

$$2(a-a')x+2(b-b')y+(r^2-a^2-b^2)-(r'^2-a'^2-b'^2) \ .$$

Si donc on place l'origine en un quelconque des points de l'axe radical, on aura

$$r^2-(a^2+b^2)=r'^2-(a'^2+b'^2) \ ;$$

ce qui veut dire que *si*, *de l'un quelconque des points de l'axe radical de deux cercles*, *on mène des tangentes à ces deux cercles*, *ces tangentes auront même longueur.*

Il sera facile, d'après cela, de *décrire un cercle qui*, *passant par deux points donnés*, *touche une droite donnée.* On voit, en effet, que les deux cercles qui résolvent le problème doivent avoir pour axe radical la droite qui joint les deux points donnés et pour tangente commune la droite donnée; d'où il suit que la première de ces deux droites doit couper l'autre au milieu de l'intervalle entre les deux points de contact. Or, si à l'un des deux cercles cherchés on en substitue un autre, passant comme lui par les deux points donnés, l'axe radical ne changera pas, et les tangentes menées aux deux cercles de l'un quelconque des points de cet axe seront encore de même longueur. La construction se réduit donc à ce qui suit : Soit décrit arbitrairement un cercle qui passe par les deux points donnés; par l'intersection de la droite qui joint ces deux points avec la droite donnée soit menée une tangente à ce cercle ; soit portée la longueur de cette tangente de part et d'autre du même point sur la droite donnée ; on déterminera ainsi ses points de contact avec les cercles cherchés ; alors les perpendiculaires élevées à cette droite par ces deux points couperont la perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les deux points donnés aux centres de ces mêmes cercles.

3. Occupons-nous présentement de la recherche des cercles qui touchent trois cercles donnés. Soient les équations de ces trois cercles.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \ ,$$

$$(x-a')^2+(y-b')^2=r'^2 \ ,$$

$$(x-a'')^2+(y-b'')^2=r''^2 \ ;$$

soient trois autres cercles, concentriques avec ceux-là, ayant des rayons respectivement égaux aux leurs, augmentés d'une même longueur quelconque R, positive ou négative. Les équations de ces nouveaux cercles seront

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(r+R)^2 \ ,$$

$$(x-a')^2+(y-b')^2=(r'+R)^2 \ ,$$

$$(x-a'')^2+(y-b'')^2=(r''+R)^2 \ .$$

On obtiendra les équations des axes radicaux de ces derniers cercles en prenant les différences de leurs équations deux à deux. Supposons, pour plus de simplicité, qu'on ait pris pour origine des coordonnées le centre radical des trois cercles primitifs ; on aura alors

$$r^2-(a^2+b^2)=r'^2-(a'^2+b'^2)=r''^2-(a''^2+b''^2) \ ,$$

et en conséquence les équations des axes radicaux des trois nouveaux cercles, pris tour à tour deux à deux, seront

$$(a'-a'')x+(b'-b'')y+(r'-r'')R=0\ ,$$

$$(a''-a)x+(b''-b)y+(r''-r)R=0\ ,$$

$$(a-a')x+(b-b')y+(r-r')R=0\ .$$

En prenant la somme de leurs produits respectifs par r, r', r'' la longueur R disparaît, et l'on obtient l'équation linéaire

$$\{r(a'-a'')+r'(a''-a)+r''(a-a')\}x+\{r(b'-b'')+r'(b''-b)+r''(b-b')\}y=0,$$

d'une droite qui passe par l'origine et qui doit contenir évidemment le centre radical des trois nouveaux cercles, quel que soit R. On a donc ce théorème : *Si les rayons de trois cercles, tracés sur un même plan, croissent ou décroissent d'une même quantité quelconque, leur centre radical, variable de position, parcourra une ligne droite.* Cette droite est facile à obtenir, puisqu'elle doit passer par le centre radical des trois cercles primitifs et par le centre radical des trois cercles qu'on en déduirait en augmentant ou diminuant leurs rayons d'une même quantité quelconque.

4. On sait que les équations des centres de similitude directe des trois cercles primitifs, pris tour à tour deux à deux, sont

$$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{r'a''-r''a'}{r'-r''}\ ,\\ y&=\frac{r'b''-r''b'}{r'-r''}\ ,\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{r''a-ra''}{r''-r}\ ,\\ y&=\frac{r''b-rb''}{r''-r}\ ,\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{ra'-r'a}{r-r'}\ ,\\ y&=\frac{rb'-r'b}{r-r'}\ ;\end{aligned}\right.$$

lesquels points sont sur une même droite, qu'on appelle l'*axe de similitude* directe des trois cercles, et dont on trouvera facilement l'équation

$$\{r(b'-b'')+r'(b''-b)+r''(b-b')\}x=\{r(a'-a'')+r'(a''-a)+r''(a-a')\}y\ ;$$

or, cette droite est perpendiculaire à l'autre; on a donc ce nouveau théorème : *La droite que parcourt le centre radical de trois cercles, lorsque leurs rayons croissent ou décroissent d'une même quantité quelconque, est perpendiculaire à leur axe de similitude directe.* Il suffira donc, pour obtenir cette droite, d'abaisser du centre radical des trois cercles une perpendiculaire sur leur axe de similitude directe.

5. Si des centres de similitude directe des trois cercles primitifs, pris tour à tour deux à deux, on décrit trois nouveaux cercles, tels que chacun d'eux ait avec les deux cercles dont le centre de similitude est son centre, le même axe radical, ces trois nouveaux cercles auront évidemment leur centre radical commun avec les trois premiers; et, comme ils ont leurs centres en ligne droite, ils devront avoir un axe radical unique passant par ce centre et perpendiculaire à cette droite. Cet axe radical ne sera donc autre chose que la droite dont il s'agit ici; on a donc encore ce nouveau théorème : *La droite que parcourt le centre radical de trois cercles dont les rayons croissent ou décroissent à la fois d'une même quantité quelconque, est l'axe radical commun de trois autres cercles qui ont leurs centres aux centres de similitude directe de ces trois cercles, pris tour à tour deux à deux, et dont chacun a le même axe radical que deux de ces cercles* (*); ce qui peut offrir une troisième détermination de la droite dont il s'agit.

Si, au lieu d'augmenter ou de diminuer à la fois des rayons des trois cercles, on faisait croître les uns et décroître les autres, mais toujours d'une même quantité quelconque, leur centre radical décrirait encore une ligne droite; mais cette droite serait alors per-

(*) Ces trois nouveaux cercles sont ce que nous avons appelé, d'après M. Steiner, *cercles de commune puissance* des trois cercles primitifs, pris deux à deux (tom. XVII, pag. 311).

J. D. G.

pendiculaire à l'un des axes de similitude inverse des trois cercles ; elle serait axe radical commun de trois nouveaux cercles dont les centres seraient aux trois centres de similitude situés sur cet axe, et dont chacun aurait toujours le même axe radical avec deux des cercles donnés. On doit remarquer enfin que tout ce qui précède subsiste encore, lorsqu'on remplace un quelconque des cercles donnés par une droite ou un point.

L'application de ceci au problème qui nous occupe est visible. Que l'on demande, en effet, un cercle qui touche à la fois trois cercles donnés ; supposons ce cercle déjà obtenu, et soit R son rayon. Supposons, pour fixer les idées, que ce cercle touche les trois autres de la même manière, c'est-à-dire, qu'il les touche tous trois extérieurement ou qu'il les enveloppe tous trois, ou enfin qu'il en soit lui-même enveloppé. Si l'on décrit trois nouveaux cercles, concentriques avec les premiers, et passant tous par le centre de celui-là, ce centre en sera le centre radical ; mais leurs rayons ne seront que les rayons des cercles primitifs, augmentés ou diminués du rayon R ; donc le centre du cercle cherché se trouvera (4) sur la perpendiculaire à l'axe de similitude directe des trois cercles primitifs, menée par leur centre radical. En variant donc les hypothèses, sur la nature des contacts, on parviendra à ce théorème général : *Les centres des huit cercles qui touchent à la fois les trois mêmes cercles donnés sont distribués, deux à deux, sur les perpendiculaires abaissées du centre radical de ces trois cercles sur leurs quatre axes de similitude.*

On pourrait, en partant de là, et en suivant une marche analogue à celle de Viète, dans son *Apollonius Gallus*, parvenir à la solution du problème ; mais, en poursuivant notre analyse, nous en déduirons des constructions beaucoup plus élégantes et plus briéves.

6. Soient

$$(x-a)^2+y^2=r^2\,, \qquad (c)$$

$$(x-a')^2+y'^2=r'^2\,, \qquad (c')$$

les équations de deux cercles ; en prenant leur axe radical pour axe des y, nous aurons

$$a^2-r^2=a'^2-r'^2\,.$$

Soit ensuite

$$(x-A)^2+(y-B)^2=R^2 \qquad (C)$$

l'équation d'un troisième cercle que, pour fixer les idées, nous supposons toucher extérieurement les deux premiers ; il en résultera

$$(A-a)^2+B^2=(R+r)^2\,,$$

$$(A-a')^2+B'^2=(R+r')^2\,;$$

d'où, en retranchant et ayant égard à la relation ci-dessus,

$$(a-a')A=-(r-r')R\,.$$

Si, au contraire, le cercle (C) enveloppait les deux autres ou en était enveloppé, le signe du second membre serait positif ; de sorte que, pour comprendre les deux cas dans un seul, il faudra écrire

$$(a-a')A=\pm(r-r')R\,;$$

dans tous les cas, $\frac{A}{R}$ sera une quantité constante.

Si donc on considère deux cercles touchans (C), (C'), on aura

$$\frac{A}{R}=\frac{A'}{R'}\,, \qquad \text{ou} \qquad RA'-R'A=0\,,$$

d'où résultera encore

$$\frac{RA'-R'A}{R-R'}=0\ ;$$

or, c'est là la valeur de x pour le centre de similitude directe des deux cercles (C), (C'); donc ce centre de similitude est sur l'axe radical de (c) et (c′). Ainsi, *le centre de similitude directe de deux cercles qui ont avec deux autres cercles un même mode de contact*, *est sur l'axe radical de ces deux-ci*. On démontrera avec la même facilité que ce sera le *centre de similitude inverse* de ces deux cercles qui sera sur l'axe de similitude des deux autres, si les premiers ont des modes de contact inverses avec les deux autres. Il est d'ailleurs évident que ces relations doivent être réciproques; c'est-à-dire, qu'à l'inverse l'un des deux centres de similitude des deux cercles (c) et (c′) doit se trouver sur l'axe radical des deux cercles (C) et (C'). Donc, si l'on a un troisième cercle (C''), tangent comme les deux autres aux deux cercles (c), (c′), le centre radical de ces trois cercles coïncidera avec l'un des deux centres de similitude de ces deux-ci, savoir: avec leur centre de similitude directe ou avec leur centre de similitude inverse, suivant que les trois cercles (C), (C'), (C'') seront touchés de la même manière ou d'une manière différente par les deux cercles (c) et (c′); d'où l'on voit encore que si les cercles (C), (C'), (C'')..... étaient en plus grand nombre, ils auraient tous leur centre radical au même point.

7. Si donc de ce point comme centre et avec la tangente menée du même point à l'un d'eux pour rayon, on décrit un nouveau cercle, il coupera tous les cercles (C), (C'), (C'')..... orthogonalement; et, à cause de cette propriété, nous l'appellerons le *cercle orthogonal* de tous ceux-là (*). Or, si les deux cercles (c), (c′)

(*) C'est le cercle de *commune puissance* de M. Steiner.

J. D. G.

se coupent, on pourra considérer leurs points d'intersection comme deux cercles de rayon nul qui les touchent tous deux ; d'où il suit qu'alors le cercle orthogonal passera par ces deux points ; ce qui offre un moyen facile de le construire dans ce cas. Dans tous les cas, il aura même axe radical avec ces deux-là.

8. Deux cercles (c), (c′) étant tracés sur un même plan, on peut toujours concevoir tant d'autres cercles qu'on voudra qui les touchent tous trois, soit de la même manière soit d'une manière différente. Soient (C), (C'), (C'') trois de ces cercles ; on voit que les cercles (C), (C'), (C''), pris deux à deux, auront l'un de leurs centres de similitude (7) sur l'axe radical de (c) et (c′) et que conséquemment trois de leurs six centres de similitude seront sur cette droite. C'est le théorème de Monge, qu'on peut encore énoncer ainsi : *Les quatre axes de similitude de trois cercles sont en même temps les axes radicaux de quatre couples de cercles tangens à la fois à ces trois-là.*

9. De ce qui précède on peut déduire divers modes de construction des cercles tangens à la fois à trois cercles donnés.

I. Soient construits le cercle qui coupe orthogonalement les trois cercles donnés, ainsi que leurs quatre axes de similitude. Si ces axes coupent le cercle orthogonal, on achevera (8) la construction, en décrivant (1) des cercles passant par chaque couple de points d'intersection et touchant en même temps l'un quelconque des cercles donnés.

10. Soient p et p' les deux points où les cercles (c) et (c′) sont touchés par (C) ; la droite pp' passera par l'un des centres de similitude de (c) et (c′), ou, ce qui revient au même (6), par le centre radical des trois cercles (C), (C'), (C''). De plus, les tangentes communes aux points p et p' vont concourir en un point de l'axe radical de (c) et (c′), centre radical de (c), (c′) et (C) ; d'où il suit que cette droite pp' passe par le pôle de cet axe radical relatif à (C). De là résulte cette autre construction :

II. Que l'on construise le centre radical des trois cercles donnés, leurs quatre axes de similitude et les *douze* pôles de ces quatre axes, par rapport à ces trois cercles. Que l'on mène ensuite des droites du centre radical à ces douze pôles. Ces droites détermineront, sur les trois cercles, leurs *vingt-quatre* points de contact avec les huit cercles qui résolvent le problème.

L'on sait qu'on peut construire le pôle d'une droite par l'intersection des polaires de deux quelconques de ses points. En prenant pour ces points deux centres de similitude, on tombe précisément sur l'élégante construction de M. Gergonne (*Annales*, tom. VII, pag. 289) (*).

11. La polaire d'un point quelconque de pp' passant par son pôle, intersection des tangentes communes en p et p' ; ce point est aussi situé sur la polaire du centre radical de (C), (C'), (C'') relative à (C), ce qui fournit cette troisième construction :

III. Que l'on construise les quatre axes de similitude, et en outre les polaires du centre radical relatives aux trois cercles, ces polaires auront avec les axes de similitude *douze* points d'intersection, desquels menant des tangentes aux cercles respectifs, on obtiendra de nouveau les *vingt-quatre* points de contact des huit cercles cherchés.

Les constructions indiquées, sans analyse, par M. Poncelet (*Annales*, tom. XI, pag. 318) doivent nécessairement rentrer dans les précédentes.

12. Les modifications que doivent subir ces diverses constructions lorsqu'on substitue des points ou des droites à un ou à deux des cercles donnés, n'offrent aucune difficulté. On peut prouver, par exemple, en toute rigueur analytique, que les deux points où un cercle est coupé par la perpendiculaire menée à une droite indéfinie, par son centre, sont les deux centres de similitude de

(*) C'est la même qui a été reproduite, tom. XVII, pag. 309.
J. D. G.

ce cercle et de cette droite. Ainsi, en combinant un cercle avec deux droites, les quatre axes de similitude formeront un rectangle inscrit, dont les diagonales seront respectivement perpendiculaires aux deux droites données. En nous arrêtant à ce cas, pour y appliquer la seconde construction, l'on voit d'abord que les pôles des axes de similitude sont les sommets du parallélogramme circonscrit au cercle, dont les côtés sont parallèles aux droites données ; le point d'intersection de ces droites est d'ailleurs ici le centre radical ; et l'on obtient ainsi la construction suivante :

Pour décrire un cercle qui touche à la fois un cercle donné et deux droites données, circonscrivez au cercle donné un parallélogramme dont les côtés soient respectivement parallèles aux deux droites données ; joignez ses quatre sommets à l'intersection de ces deux droites par quatre autres droites qui, par leurs intersections avec la circonférence, détermineront les points où le cercle donné doit être touché par les huit cercles qui, en général, résolvent le problème.

13. Reprenons présentement notre analyse du n.° 6. Au lieu de supposer que le troisième cercle (C) touche les deux autres (c) et (c'), supposons qu'il les coupe sous des angles égaux ou supplémentaires quelconques, que nous représenterons par ω. Convenons, pour fixer les idées, de prendre constamment pour l'angle de deux cercles l'angle de deux arcs dont les concavités sont tournées dans le même sens ; nous aurons

$$(A-a)^2+B^2=R^2+r^2\pm 2rR\,\mathrm{Cos.}\,\omega\,,$$

$$(A-a')^2+B^2=R^2+r'^2\pm 2r'R\,\mathrm{Cos.}\,\omega\;;$$

les signes inférieurs étant relatifs aux supplémens ; nous aurons en retranchant, et ayant toujours égard à la relation qui résulte de ce que l'axe des y et l'axe radical des deux cercles coupés,

$$(a-a')A=\pm(r\pm r')R\,\text{Cos.}\,\omega\ .$$

En considérant trois cercles (C), (C'), (C'') coupant (c) sous les angles respectifs ω, ω', ω'', et (c′) sous les mêmes angles ou sous leurs supplémentaires, on aura

$$\frac{R\,\text{Cos.}\,\omega}{A}=\frac{R'\,\text{Cos.}\,\omega'}{A'}=\frac{R''\,\text{Cos.}\,\omega''}{A''}\ ;$$

et par conséquent

$$\frac{A''R'\,\text{Cos.}\,\omega'-A'R''\,\text{Cos.}\,\omega''}{R'-R''}=\frac{AR''\,\text{Cos.}\,\omega''-A''R\,\text{Cos.}\,\omega}{R''-R}=\frac{A'R\,\text{Cos.}\,\omega-AR'\,\text{Cos.}\,\omega'}{R-R'}=0\ ;$$

d'où l'on voit que l'axe des y, c'est-à-dire, l'axe radical des deux cercles (c) et (c′) est un axe de similitude de trois cercles concentriques à (C), (C'), (C'') et dont les rayons $R\,\text{Cos.}\,\omega$, $R'\,\text{Cos.}\,\omega'$, $R''\,\text{Cos.}\,\omega$ seraient égaux aux leurs, diminués dans le rapport de l'unité aux cosinus respectifs des angles ω, ω', ω''; savoir l'axe de similitude directe ou un axe de similitude inverse, facile à reconnaître, suivant que les trois angles ω, ω', ω'' sont de même espèce ou d'espèces différentes.

Les dernières expressions ne changeant pas tant que les rapports

$$\frac{\text{Cos.}\,\omega}{\lambda}\ ,\quad \frac{\text{Cos.}\,\omega'}{\lambda'}\ ,\quad \frac{\text{Cos}\ \omega''}{\lambda''}\ ,$$

restent les mêmes ; il en résulte que tout cercle qui coupe (C), (C'), (C'') sous des angles dont les cosinus sont dans le rapport constant de λ, λ', λ'' a le même axe radical avec (c) et (c′). Parmi ces cercles, se range évidemment le cercle orthogonal des trois cercles (C), (C'), (C''), pour lequel ces trois cosinus sont nuls ; d'où résulte la construction suivante du problème où l'on propose de décrire un cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles donnés ω, ω', ω''.

Soit diminué le rayon de chacun des cercles donnés dans le rapport de l'unité au cosinus de l'angle sous lequel il doit être coupé par le cercle cherché. On obtiendra ainsi trois nouveaux cercles, dont on déterminera un des axes de similitude, savoir : l'axe de similitude *directe*, si les trois angles ω, ω', ω'' sont de même espèce et celui des trois axes de similitude *inverse* qui passe par le centre de similitude directe des deux cercles pour lesquels les angles sont de même espèce, dans le cas contraire. Soit construit ensuite le cercle orthogonal des trois cercles donnés. Construisant enfin les deux cercles qui ont avec celui-ci pour axe radical l'axe de similitude dont il vient d'être question, ces deux cercles résoudront le problème.

Cette construction se prête, sans difficulté, aux méthodes ordinaires de la géométrie analytique, même dans le cas où le cercle orthogonal devient imaginaire, c'est-à-dire, lorsque le quarré de son rayon devient négatif. Le problème a deux solutions ou bien il est impossible. Dans le premier cas, les deux cercles ainsi construits coupent l'un et l'autre les cercles donnés sous les angles donnés, ou bien ils les coupent tous deux sous les supplémens de ces angles, ou enfin l'un d'eux les coupe sous ces angles même, tandis que l'autre les coupe sous leurs supplémens.

14. Il résulte de ce qui vient d'être dit que les centres de tous les cercles qui coupent les trois donnés (C), (C'), (C'') sous des angles dont les cosinus sont dans le rapport constant des trois nombres λ, λ', λ'', sont situés en ligne droite; conséquence qu'on déduirait aussi d'un calcul analogue à celui du n° 3. En combinant de même les deux cercles (C), (C') avec un quatrième cercle (C'''), on trouvera une seconde droite, lieu des centres des cercles qui coupent ces trois-là sous des angles dont les cosinus sont dans le rapport constant de λ, λ', λ'''; le point où cette droite coupera la première sera le centre d'un cercle qui coupera les quatre cercles don-

nés (C), (C'), (C''), (C''') sous des angles dont les cosinus seront entre eux dans le rapport des nombres λ, λ', λ'', λ'''.

La construction de ce cercle revient donc à décrire, du point d'intersection des deux droites comme centre, un cercle qui ait avec l'orthogonal de (C), (C'), (C''), pour axe radical, l'axe de similitude dont il a été question ci-dessus. Comme les quatre cercles donnés peuvent se combiner trois à trois de quatre manières différentes, on peut construire quatre droites passant par le centre du cercle demandé; tout comme on peut aussi construire quatre droites qui soient les axes radicaux du cercle cherché et des quatre cercles orthogonaux des cercles donnés, pris trois à trois. Si l'un quelconque de ces axes radicaux coupe le cercle orthogonal correspondant, le cercle à construire sera réel; dans le cas contraire il sera imaginaire.

Le cercle cherché peut être réel sans rencontrer tous ou partie des cercles donnés.

De ce qui précède, on déduit la construction suivante du cercle coupant quatre cercles donnés (C), (C'), (C''), (C''') sous des angles dont les cosinus soient respectivement entre eux comme les nombres λ, λ', λ'', λ'''.

Soient construits pour deux fois trois cercles, pris arbitrairement parmi les quatre cercles donnés, les deux cercles orthogonaux. Soient diminués ensuite, en conservant le rayon du premier des quatre cercles donnés, les rayons des trois autres dans les rapports de λ à λ', de λ à λ'', de λ à λ''', et soient construits les axes de similitude directe des systèmes de trois cercles, pris parmi les quatre cercles transformés, qui répondent aux systèmes primitifs, pour lesquels on avait construit les deux cercles orthogonaux; le cercle cherché sera celui qui, pris successivement avec les deux cercles orthogonaux, aura pour axes radicaux avec eux ces deux axes de similitude.

15. Le cercle que nous venons d'enseigner à construire sera unique, tant qu'on ne prendra pas indistinctement l'angle d'intersec-

tion et son supplément ; dans le cas contraire, le problème aura huit solutions, comme il résulte des huit combinaisons qu'on peut faire des signes $+$ et $-$ devant les rapports de l'une quelconque des quatre quantités λ, λ', λ'', λ''' aux trois autres. Pour les sept autres cas, les modifications à faire subir à la construction qui vient d'être indiquée, consistent à remplacer des axes de similitude directe par des axes de similitude inverse.

16. La construction d'un cercle qui coupe quatre cercles donnés sous des angles égaux est implicitement comprise dans ce qui précède (14). On peut aussi l'obtenir par le procédé que voici :

Soient construits, pour deux systèmes quelconques de trois cercles, choisis parmi les quatre cercles donnés, deux couples de cercles tangens. Le cercle à construire devra passer par les intersections des deux cercles de chaque couple ; ou, plus généralement, il aura avec eux le même axe radical.

17. La construction suivante, où nous nous bornons aux angles d'intersection égaux, n'est qu'une légère modification de celle du n.° 14.

Soient construits les centres de similitude directe de trois couples de cercles choisis à volonté parmi les quatre cercles donnés; de manière toutefois que ces quatre cercles s'y trouvent compris. Par ces trois points soient fait passer trois cercles nouveaux, ayant même axe radical avec les cercles du couple correspondant. Le cercle à construire sera le cercle orthogonal de ces trois derniers cercles.

18. De la même manière qu'il a été expliqué au n.° 12, on pourra, par des modifications convenables, rendre ces constructions propres au cas où des points ou des droites remplaceront un ou plusieurs des cercles donnés.

19. Des constructions analogues à celles qui viennent d'être indiquées se présentent, sans difficulté, pour les problèmes relatifs aux contacts et aux intersections des sphères ; et ces mêmes constructions s'appliquent aussi immédiatement aux cercles tracés sur

une même sphère. Nous nous arrêterons seulement quelques instans sur ce dernier cas. L'on sait que, dans la projection stéréographique, dite de Ptolémée ou de Mercator, les cercles se projettent suivant des cercles et les angles suivant d'autres angles qui leur sont égaux. L'on peut aller plus loin encore. En suivant la démonstration analytique de la première partie de ce théorème; celle de de M Puissant, par exemple, on aperçoit sur-le-champ la vérité du théorème suivant, beaucoup plus général. En prenant pour tableau un plan situé d'une manière quelconque, par rapport à une surface d'un second ordre, et en plaçant l'œil à l'extrémité du diamètre de cette surface qui passe par son point de contact avec le plan tangent parallèle à ce tableau, les projections des sections faites dans cette même surface par des plans quelconques seront toutes des courbes semblables. On sait en outre qu'en général toute surface du second ordre peut, et même dans deux sens différens, être coupée par des plans parallèles suivant des circonférences de cercles. Il en résulte qu'en projetant de la manière qui vient d'être dite, sur un plan parallèle à ceux de ces cercles, les projections des sections planes faites dans la surface, suivant toutes les directions possibles seront également des cercles. En particulier, pour les surfaces de révolution du second ordre, l'œil doit être à une des extrémités de l'axe et le tableau normal à cet axe. Dans le cas du paraboloïde de révolution, il faut projeter orthographiquement sur un plan normal à son axe.

Il suit de toutes ces remarques qu'on peut, pour des lignes du second ordre tracées sur une surface du même ordre, résoudre des problèmes analogues à ceux que nous avons résolus pour des cercles tracés sur un même plan, et tous les problèmes du même genre; celui de Malfatti, par exemple, dans toute sa généralité. Il suffira pour cela de projeter les données sur un plan tellement situé que les projections soient des cercles; de résoudre le problème plan pour ces cercles et de projeter ensuite les cercles obtenus sur la surface du second ordre.