ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

CHASLES

Géométrie pure. Théorèmes sur les sections coniques confocales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 269-276
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__269_1>

GÉOMÉTRIE PURE.

Théorèmes sur les sections coniques confocales ;

Par M. Chasles, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

Au Rédacteur des Annales.

Monsieur,

Ce n'est seulement qu'hier au soir que votre numéro de janvier m'est parvenu. J'ai parcouru le mémoire de M. Bobillier avec d'autant plus d'empressement que, comme j'ai eu l'honneur de vous le dire à mon passage à Montpellier, je m'étais aussi occupé, et il y a même fort long-temps, de la transformation des surfaces en d'autres surfaces, au moyen d'une surface auxiliaire du second ordre, c'est-à-dire, des *surfaces polaires*, comme les a appelées M. Poncelet, dans son ouvrage si remarquable sur les propriétés projectives des figures. J'avais été conduit à ces recherches en m'occupant d'un travail bien étranger aux surfaces du second ordre. Je me suis souvent servi de la transformation polaire; mais c'est surtout pour la transformation des relations métriques que je l'ai trouvée utile; car, dans beaucoup d'autres questions, telles par exemple que celle de la transformation des surfaces qui ont la même intersection en surfaces inscrites à une même développable, il est une infinité d'autres manières de parvenir au but. Mais je dois dire que l'examen spécial du cas où l'on prend une sphère pour surface auxiliaire avait été étranger à mes recherches, et ne m'a été inspiré que par la lecture de l'analyse du mémoire présenté à l'Institut par M. Poncelet en 1824 (*Annales*, tom. XVII, pag. 265). C'est cette lecture qui m'a fait reprendre des recherches géométriques interrompues depuis bien des années. J'ai pensé que M. Poncelet avait dû employer une sphère pour surface auxiliaire; et, en effet, ce moyen qui s'est présenté aussi à la pensée de M. Bobillier m'a conduit à un grand nombre de résultats curieux. Je me hâte de consigner ici ceux de ces résultats qui sont relatifs à la

---

diamétraux parallèles seront les conjugués; 4.° si l'on change la direction commune de ces plans diamétraux parallèles, la courbe à double courbure décrira une surface du troisième degré; 5.° enfin, cette surface sera le lieu des centres de toutes les surfaces initiales.

II. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra étant inscrites à un même corps octoèdre, 1.° leurs centres sont situés sur une même droite; 2.° leurs plans diamétraux conjugués à des diamètres parallèles touchent tous une seule et même surface de troisième classe.

géométrie plane et à l'égard desquels M. Bobillier ne s'est pas rencontré avec moi. J'en omettrai la démonstration, toujours facile à établir au moyen de la théorie des polaires réciproques, et j'appelerai *cercle directeur* le cercle par rapport auquel on prend les pôles et polaires des droites et des points donnés.

1. Je dois commencer par énoncer un principe dont il ne se trouve aucun indice ni dans la lettre citée de M. Poncelet, ni dans le mémoire de M. Bobillier, et qui cependant est d'une application indispensable dans les recherches dont il est question ici, c'est le suivant :

Le centre de la polaire réciproque Σ *d'une surface* S *du second ordre, relative à une surface directrice* D, *n'est autre que le pôle relatif à* D *du plan polaire du centre de* D, *pris par rapport à* S, *considérée comme surface directrice.*

2. Voici un autre principe qui n'est guère moins utile que celui qui précède :

Six points en involution sur une droite ont, pour plans polaires réciproques, six plans se coupant suivant une même droite et coupant une transversale rectiligne quelconque en six points qui sont eux-mêmes en involution (*).

Il en est de même pour quatre points en proportion harmonique.

3. Quelques lignes de calcul font voir que,

Si trois surfaces du second ordre ont les mêmes courbes d'intersection, elles couperont toute transversale rectiligne en six points qui seront en involution ;

Donc, *si trois surfaces du second ordre sont inscrites à une même surface développable de cet ordre, et que, par une droite prise arbitrairement, on leur mène trois couples de plans tangens, ces plans couperont toute transversale rectiligne en six points qui seront en involution.*

(*) Voy., pour la définition des involutions, la pag. 181 du XVII.e volume du présent recueil.

4. Je passe, Monsieur, à l'objet principal de cette lettre, qui est de faire une application spéciale de la théorie des polaires réciproques aux propriétés des coniques confocales.

Une des plus caractéristiques de ces propriétés, c'est que les deux rayons vecteurs d'un même point font des angles égaux avec la tangente en ce point; ce qui revient encore à dire que les rayons vecteurs, menés d'un même foyer aux points de contact de deux tangentes parallèles, font des angles respectivement égaux avec ces tangentes. C'est cette propriété qui va nous faire découvrir la nature de la polaire réciproque d'un cercle relative à un autre cercle.

La courbe polaire P d'un cercle C, relative à un cercle directeur D, aura son centre (1) sur la droite qui joint les centres des deux cercles C et D; et cette droite sera un diamètre principal de P, puisque tout est égal de part et d'autre.

Deux tangentes au cercle C ont pour pôles deux points de sa polaire P, et les tangentes à cette courbe en ces points ont pour pôles les deux points de contact sur C. La corde qui joint ces deux points a pour pôle l'intersection des deux tangentes à P. Les trois rayons menés du centre de D, aux deux points de contact sur P et au point de coucours des tangentes en ces points sont perpendiculaires sur les deux tangentes à C et sur la corde de contact; or, cette corde fait des angles égaux avec les deux tangentes; le troisième rayon fait donc aussi des angles égaux avec les deux autres. La polaire réciproque P d'un cercle C jouit donc de cette propriété que, si, par le centre du cercle directeur D, on mène des rayons vecteurs à deux de ses points, et un troisième au point de concours des tangentes en ces deux points, ce dernier fera des angles égaux avec les deux autres. Donc, si les deux tangentes sont parallèles, le troisième rayon leur sera parallèle, et fera des angles égaux avec les rayons menés aux points de contact; donc, si deux tangentes à la polaire P de C sont parallèles, les rayons menés du centre du cercle directeur D aux points de contact feront des angles égaux avec les deux tangentes; or, c'est là la propriété caractéristique d'une conique ; donc enfin *la polaire réciproque d'un cercle, par rapport à un autre cercle, est une conique qui a pour foyer le centre du cercle directeur.*

5. Toutes les fois que le centre du cercle directeur D sera extérieur au cercle C, on pourra par ce centre lui mener deux tangentes dont les pôles, situés à l'infini, seront des points de la polaire réciproque D, qui sera ainsi une hyperbole.

Si le centre du cercle directeur D est sur la circonférence du cercle C, le centre de la polaire P sera (1) situé à l'infini; cette polaire sera donc une parabole.

Si donc le centre de D est intérieur à C, la polaire P sera une ellipse; car elle n'aura aucun point à l'infini.

Venons présentement aux applications.

6. Le sommet d'un angle constant et mobile, dont les côtés passent constamment par deux points fixes, décrit un arc de cercle ;

Donc, *si un angle de grandeur invariable tourne autour de son sommet dans le plan de deux droites fixes, la droite qui joindra les points d'intersection respectifs de ses côtés avec ces deux droites enveloppera une conique qui aura pour foyer le sommet fixe de l'angle mobile.*

7. Les normales à un cercle concourent toutes en un même point ;

Donc, *la tangente à une conique et la droite menée par le foyer, perpendiculairement au rayon vecteur qui passe par le point de contact, concourent en un point dont le lieu est une ligne droite.*

On reconnaît ici la directrice de la courbe ; de sorte que la directrice de la polaire réciproque P d'un cercle C, relative au cercle directeur D, est la polaire du centre C, du moins en prenant pour foyer le centre de D.

8. Deux cercles n'ont que deux intersections, extrémités d'une corde commune, perpendiculaire à la droite qui joint leurs centres ;

Donc, *deux coniques qui ont un foyer commun ne sauraient avoir que deux tangentes communes réelles. Les droites menées du foyer commun au point de concours des deux tangentes et au point de* *concours des deux directrices sont perpendiculaires l'une à l'autre.*

9. Tous les cercles tangens à la fois à deux cercles donnés ont leurs centres sur deux coniques ;

Donc, *quand deux coniques ont un foyer commun, les directrices de toutes les coniques tangentes à ces deux-là, et de même foyer qu'elles, enveloppent deux autres coniques.*

On transporte facilement, aux coniques qui ont un foyer commun toutes les propriétés des cercles qui se touchent, la description d'un cercle qui en touche à la fois trois autres donnés, etc., etc.

10 Si plusieurs cercles ont une corde commune, leurs centres seront en ligne droite ; et, si on leur circonscrit des angles ayant leurs sommets au même point, les cordes de contact concourront en un autre point;

Donc, *si plusieurs coniques de même foyer sont inscrites à un même angle, leurs directrices relatives à ce foyer concourront en un même point ; et si on les coupe toutes par une transversale rectiligne, les pôles de cette transversale, relatifs à ces coniques, seront en ligne droite ; d'où il suit que les centres des coniques seront aussi en ligne droite.*

11. Si l'on mène à deux cercles quatre tangentes parallèles, les droites qui joindront les points de contact sur l'un aux points de contact sur l'autre passeront par leurs deux centres de similitude ;

Donc, *deux coniques ayant un foyer commun, si on leur mène quatre tangentes par leurs points d'intersection avec un même rayon vecteur mobile, les tangentes à la première rencontreront les tangentes à la seconde en des points dont le lieu géométrique sera le système de deux droites.*

Cette proposition n'est qu'un cas particulier d'une belle propriété du système de deux coniques qu'on peut démontrer directement.

12. Lorsque deux cercles ne se coupent pas, il existe, sur la droite qui joint leurs centres, deux points qui jouissent de ces deux propriétés remarquables, savoir : 1.° qu'une même droite est à la fois polaire de ces deux points par rapport aux deux cercles ; 2.° que,

si l'on mène une tangente commune aux deux cercles, les droites menées de l'un ou de l'autre de ces deux points aux deux points de contact seront perpendiculaires l'une à l'autre.

En faisant la transformation polaire de manière que l'un des deux points dont il s'agit soit le centre du cercle directeur, on obtiendra ce théorème connu :

Deux coniques de même foyer se coupent orthogonalement.

13. Les droites qui divisent les angles d'un triangle en deux parties égales concourent toutes trois en un même point, centre du cercle inscrit ;

Donc, *un triangle étant arbitrairement inscrit à une conique, et des rayons vecteurs étant menés du foyer à ses trois sommets, les droites qui divisent, en deux parties égales, les angles des rayons vecteurs rencontrent respectivement ces trois mêmes côtés en trois points qui appartiendront à la directrice.*

Voilà donc un moyen très-simple de construire la directrice d'une conique, lorsqu'on connaît son foyer et trois points de son périmètre.

14. La comparaison des triangles, dans la figure que nécessite cette construction, prouve d'ailleurs que les perpendiculaires abaissées des points de la courbe sur la directrice sont proportionnelles aux rayons vecteurs de ces points ;

Donc, *les distances des points d'une conique à sa directrice sont proportionnelles aux distances des mêmes points à son foyer.*

15. Lorsque la conique a deux foyers, elle a aussi deux directrices, et les distances des points de la courbe à la seconde directrice doivent être encore dans le même rapport avec les distances des mêmes points au deuxième foyer, puisque tout est symétrique de part et d'autre du centre ; donc la somme ou la différence des rayons vecteurs menés d'un même point de la courbe aux deux foyers doit être égale à la distance entre les deux directrices multipliées par une constante ;

Donc, *dans une conique à deux foyers, la somme ou la diffé-*

rence des rayons vecteurs des divers points de la courbe doit être une quantité constante.

16. Les perpendiculaires élevées sur les milieux des trois côtés d'un triangle concourent en un même point, centre du cercle circonscrit;

Donc, *pour inscrire à un triangle une conique qui ait un foyer en un point donné sur son plan, on menera de ce point un rayon vecteur à l'un des sommets du triangle. On construira une quatrième harmonique à ce rayon vecteur et aux deux côtés qui comprennent ce sommet, laquelle sera coupée par la perpendiculaire menée au rayon vecteur, par le foyer, en un point de la directrice; on pourra, par de semblables constructions, construire deux autres points de cette directrice, et dès lors le problème pourra être réputé résolu.*

17. Les centres de quatre cercles qui touchent respectivement trois à trois les côtés d'un quadrilatère sont sur une même circonférence;

Donc, *si quatre coniques du même foyer sont telles que chacune d'elles passe par trois des quatre sommets d'un même quadrilatère, leurs quatre directrices toucheront une cinquième conique de même foyer que les quatre autres.*

18. Les tangentes menées à plusieurs cercles concentriques, d'un même point de leur plan, ont leurs points de contact sur un même cercle passant par le centre commun des autres et par le point dont il s'agit;

Donc, *si l'on coupe, par une transversale quelconque, tant de coniques qu'on voudra de même foyer et de même directrice, et qu'on mène des tangentes à ces courbes, par les points où elles coupent cette transversale, toutes ces tangentes envelopperont une nouvelle conique, de même foyer que les premières, touchant à la fois la transversale et la directrice commune.*

Etc., etc., etc.

Nice, le 18 janvier 1828.