
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Questions résolues. Démonstration des quatre théorèmes de géométrie proposés à la page 255 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 25-28

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__25_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1827-1828, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des quatre théorèmes de géométrie proposés à la page 255 du précédent volume ;

Par M. BOBILLIER, professeur à l'École royale des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

THÉORÈME I. Trois lignes du $m^{\text{ième}}$ ordre étant tracées dans un même plan ; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en construire trois autres qui, ayant entre elles les mêmes m^2 points d'intersection, soient

Tom. XVIII.

THÉORÈME I. Trois lignes du $m^{\text{ième}}$ ordre étant tracées sur un même plan ; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en construire trois autres qui, ayant entre elles les mêmes m^2 tangentes communes,

telles en outre que chacune d'elles passe par les m^2 points d'intersection de deux des trois premières.

II. Quatre surfaces du $m^{\text{ième}}$ ordre étant données dans l'espace ; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en construire quatre autres, ayant entre elles les mêmes m^3 points communs, et telles en outre que chacune d'elles ait aussi les mêmes m^3 points communs avec trois des quatre premières.

soient telles en outre que chacune d'elles ait les m^2 mêmes tangentes communes avec deux des trois premières.

II. Quatre surfaces du $m^{\text{ième}}$ ordre étant données dans l'espace ; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en construire quatre autres, ayant entre elles les mêmes m^3 plans tangens communs, et telles en outre que chacune d'elles ait aussi les mêmes m^3 plans tangens communs avec trois des quatre premières.

Démonstration.

I. Si l'on représente par

$$M=0, \quad (1) \quad M'=0, \quad (2) \quad M''=0, \quad (3)$$

les équations de trois lignes quelconques du $m^{\text{ième}}$ ordre, tracées sur un même plan, les suivantes

$$M''+\lambda M=0, \quad (4) \quad M''+\lambda' M'=0, \quad (5)$$

appartiendront, quelles que soient les constantes λ et λ' , à deux nouvelles lignes du $m^{\text{ième}}$ ordre, passant, la première par les m^2 points d'intersection des lignes (1) et (3), et la seconde par les m^2 points d'intersection des lignes (2) et (3). L'équation

$$(M''+\lambda' M')+\mu(M''+\lambda M)=0,$$

c'est-à-dire,

$$\lambda\mu M+\lambda' M'+(1+\mu)M''=0, \quad (6)$$

exprimera, par la même raison, une ligne assujettie à passer par

les m^3 points communs aux lignes (4) et (5), et contiendra de plus les points d'intersection des lignes (1) et (2), si son équation est vérifiée par le système $M=0$, $M'=0$; condition à laquelle on peut satisfaire, sans rien spécifier sur λ et λ' , en posant simplement $1+\mu=0$, d'où $\mu=-1$, ce qui réduit l'équation (6) à

$$\lambda M - \lambda' M' = 0 ;$$

ce qui démontre le *théorème I*, d'où on déduit son corrélatif, par la théorie des polaires réciproques.

II. Soient présentement

$$M=0, (1) \quad M'=0, (2) \quad M''=0, (3) \quad M'''=0, (2)$$

les équations de quatre surfaces quelconques du $m^{\text{ième}}$ ordre, les suivantes

$$M''' + \lambda M'' + \mu M' = 0, \quad (5)$$

$$M''' + \lambda' M + \mu' M'' = 0, \quad (6)$$

$$M''' + \lambda'' M' + \mu'' M = 0, \quad (7)$$

appartiendront, quelles que soient les valeurs des constantes $\lambda, \lambda', \lambda'', \mu, \mu', \mu''$, à trois nouvelles surfaces du même ordre assujetties à passer respectivement, savoir :

la surface (5), par les m^3 intersections des surfaces (2), (3), (4) ;

la surface (6), par les m^3 intersections des surfaces (3), (4), (1) ;

la surface (7), par les m^3 intersections des surfaces (4), (1), (2) .

L'équation

$$M''' + \lambda'' M' + \mu'' M + \nu(M''' + \lambda M'' + \mu M') + \nu'(M''' + \lambda' M + \mu' M'') = 0,$$

ou bien

$$(\mu'' + \lambda'\nu')M + (\lambda'' + \mu\nu)M' + (\lambda\nu + \mu'\nu')M'' + (1 + \nu + \nu')M''' = 0 \quad (8)$$

appartiendra, par la même raison, à une huitième surface du $m^{\text{ième}}$

ordre, passant par les m^3 points d'intersection des trois surfaces (5), (6), (7); mais cette équation contiendra en outre les m^3 points d'intersection des surfaces (1), (2), (3), si son équation se vérifie par le système

$$M=0, \quad M'=0, \quad M''=0,$$

ce qui exige seulement qu'en laissant aux constantes $\lambda, \lambda', \lambda'', \mu, \mu', \mu''$, toute leur indétermination, on détermine les constantes ν, ν' , par la condition $1+\nu+\nu'=0$ ou $\nu'=-\nu$ et réduit ainsi l'équation (8) à la forme

$$[\mu''-\lambda'(1+\nu)]M+(\lambda''+\mu\nu)M'+[\nu'\lambda-\mu']M''=0,$$

ce qui démontre le *théorème II*, d'où on conclut ensuite son corrélatif, par la considération des polaires réciproques.
