ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Géométrie analytique. Recherche de quelques lieux géométriques, dans l'espace

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 230-248

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__230_0>

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Recherche de quelques lieux géométriques, dans l'espace;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Problème I. Quel est le lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les arêtes touchent constamment une surface du second ordre?

Solution. Supposons, en premier lieu, que cette surface soit un ellipsoïde donné par l'équation

$$b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2\ ; \qquad (1)$$

en désignant par (α, β, γ) le sommet de l'angle trièdre, on passera, des trois diamètres principaux auxquels l'ellipsoïde est rapporté, aux trois arêtes de cet angle trièdre, considérées comme axes des coordonnées, au moyen des formules connues

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha+pt+qu+rv\ , \\ y&=\beta+p't+q'u+r'v\ , \\ z&=\gamma+p''t+q''u+r''v\ ; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

dans lesquelles les neuf coefficiens qui représentent les inclinaisons des nouveaux axes sur les anciens seront liés, comme l'on sait, par les six équations

$$\left.\begin{array}{l}p^2+p'^2+p''^2=1\ ,\\ q^2+q'^2+q''^2=1\ ,\\ r^2+r'^2+r''^2=1\ ;\end{array}\right\}(3)\qquad \left.\begin{array}{l}qr+q'r'+q''r''=0\ ,\\ rp+r'p'+r''p''=0\ ,\\ pq+p'q'+p''q''=0\ ;\end{array}\right\}(4)$$

ou, ce qui revient au même, par celles-ci

$$\left.\begin{array}{l}p^2+q^2+r^2=1\ ,\\ p'^2+q'^2+r'^2=1\ ,\\ p''^2+q''^2+r''^2=1\ ,\end{array}\right\}(5)\qquad \left.\begin{array}{l}p'p''+q'q''+r'r''=0\ ,\\ p''p+q''q+r''r=0\ ,\\ pp'+qq'+rr'=0\ .\end{array}\right\}(6)$$

On aura, en substituant,

$$\left.\begin{array}{r}b^2c^2(\alpha+pt+qu+rv)^2\\ +c^2a^2(\beta+p't+q'u+r'v)^2\\ +a^2b^2(\gamma+p''t+q''u+r''v)^2\end{array}\right\}=a^2b^2c^2\ .$$

En développant les puissances et posant, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l}b^2c^2p^2+c^2a^2p'^2+a^2b^2p''^2=A\ ,\\ b^2c^2q^2+c^2a^2q'^2+a^2b^2q''^2=B\ ,\\ b^2c^2r^2+c^2a^2r'^2+ab^2r''^2=C\ ;\end{array}\right\}(7)\qquad \left.\begin{array}{l}b^2c^2qr+c^2a^2q'r'+a^2b^2q''r''=D\ ,\\ b^2c^2rp+c^2a^2r'p'+a^2b^2r''p''=E\ ,\\ b^2c^2pq+c^2a^2p'q'+a^2b^2p''q''=F\ :\end{array}\right\}(8)$$

$$\left.\begin{array}{l}b^2c^2\alpha p+c^2a^2\beta p'+a^2b^2\gamma p''=G\ ,\\ b^2c^2\alpha q+c^2a^2\beta q'+a^2b^2\gamma q''=H\ ,\\ b^2c^2\alpha r+c^2a^2\beta r'+a^2b^2\gamma r''=K\ ,\end{array}\right\}(9)$$

$$b^2c^2\alpha^2+c^2a^2\beta^2+a^2b^2\gamma^2-a^2b^2c^2=L\ ;\qquad (10)$$

on aura

$$At^2+Bu^2+Cv^2+2Duv+2Evt+2Ftu+2Gt+2Hu+2Kv+L=0 \,. \qquad (11)$$

Pour déterminer les points où l'ellipsoïde rencontre les nouveaux axes, c'est-à-dire, les arêtes de l'angle trièdre mobile, il faudra faire tour-à-tour, dans l'équation (11), deux des trois coordonnées égales à zéro, ce qui donnera

$$At^2+2Gt+L=0 \,, \qquad Bu^2+2Hu+L=0 \,, \qquad Cv^2+2Kv+L=0 \,.$$

Si donc on veut que ces trois arêtes soient tangentes à l'ellipsoïde, il faudra exprimer que ces trois équations ont leurs racines égales; ce qui donnera

$$G^2-AL=0 \,, \qquad H^2-BL=0 \,, \qquad K^2-CL=0 \,;$$

d'où, en ajoutant

$$G^2+H^2+K^2=L(A+B+C) \,. \qquad (12)$$

Or, les équations (9) donnent, en ayant égard aux équations (5) et (6),

$$G^2+H^2+K^2=b^4c^4\alpha^2+c^4a^4\beta^2+a^4b^4\gamma^2 \,;$$

les équations (7) donnent ensuite, en ayant égard aux équations (5),

$$A+B+C=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2 \,.$$

Substituant donc ces valeurs et celle de L, donnée par l'équation (10), dans l'équation (12), cette dernière deviendra, toutes réductions faites, en y changeant respectivement α, β, γ en x, y, z

$$(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2 \,; \qquad (13)$$

c'est l'équation du lieu du sommet de l'angle trièdre mobile qui, comme l'on voit, est un ellipsoïde dont le centre et les diamètres principaux coïncident avec le centre et les diamètres principaux de l'ellipsoïde proposé.

Soit s le double de l'aire du triangle dont les sommets sont les extrémités positives des trois diamètres principaux de l'ellipsoïde proposé ; les carrés des trois côtés de ce triangle seront évidemment b^2+c^2, c^2+a^2, a^2+b^2. Soient g, h, k les hauteurs correspondantes à ces côtés, pris respectivement pour bases, on aura

$$g^2(b^2+c^2)=S^2\ ,\qquad h^2(c^2+a^2)=S^2\ ,\qquad k^2(a^2+b^2)=S^2\ .$$

Les doubles des projections de l'aire de ce triangle, sur les trois plans coordonnés, seront respectivement bc, ca, ab ; d'où on conclura, en vertu d'un théorème connu,

$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=S^2\ .$$

Substituant donc dans l'équation (13), et divisant par S^2, elle deviendra

$$\left(\frac{x}{g}\right)^2+\left(\frac{y}{h}\right)^2+\left(\frac{z}{k}\right)^2=1\ ;$$

ce qui prouve que les demi-diamètres principaux de l'ellipsoïde, lieu du sommet de l'angle trièdre mobile, ne sont autre chose que les trois hauteurs du triangle dont il vient d'être question.

Si l'ellipsoïde proposé est de révolution, ce triangle sera isocèle ; deux de ses hauteurs seront donc égales ; l'ellipsoïde, lieu des sommets de l'angle trièdre mobile, aura donc deux de ses trois diamètres principaux égaux entre eux ; ce sera donc aussi un ellipsoïde de révolution.

Si l'ellipsoïde proposé devient une sphère, le triangle en question deviendra équilatéral, et, par suite, la surface cherchée sera également sphérique.

Si l'un des axes de l'ellipsoïde proposé devient infini, c'est-à-dire, si cet ellipsoïde devient un cylindre elliptique, une des hauteurs du triangle deviendra infinie, tandis que les deux autres, toujours finies, deviendront égales; la surface cherchée sera donc, dans ce cas, un cylindre de révolution; d'où l'on pourrait conclure, s'il en était besoin, que le lieu du sommet d'un angle droit mobile sur un plan, constamment circonscrit à une ellipse, est la circonférence d'un cercle.

Si enfin deux des axes de l'ellipsoïde devenaient infinis, c'est-à-dire, si cet ellipsoïde devenait un cylindre parabolique; les trois hauteurs du triangle deviendraient également infinies; de sorte que la surface demandée serait plane. On pourrait conclure de là, s'il était nécessaire, que le lieu du sommet d'un angle droit mobile sur un plan, constamment circonscrit à une parabole, est une ligne droite.

Supposons présentement que la surface donnée du second ordre soit un hyperboloïde à une nappe, ayant pour équation

$$b^2c^2x^2+c^2a^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2 \; ; \qquad (14)$$

cette équation pouvant être déduite de l'équation (1), par le simple changement de c^2 en $-c^2$, on déduira de l'équation (13), par un pareil changement, l'équation de la surface demandée qui répond à ce cas. Cette équation sera donc

$$(b^2-c^2)x^2+(a^2-c^2)y^2+(a^2+b^2)z^2=a^2b^2-c^2(a^2+b^2) \; . \quad (15)$$

Cela posé, a et b étant supposés inégaux, si l'on a

$$a^2b^2>c^2(a^2+b^2) \; ,$$

il en résultera

$$b^2-c^2>\frac{b^2c^2}{a^2} \; , \qquad a^2-c^2>\frac{a^2c^2}{b^2} \; ,$$

b^2-c^2, a^2-c^2 et le second membre seront tous trois positifs ; de sorte que la surface cherchée sera un ellipsoïde.

Si l'on a

$$a^2b^2=c^2(a^2+b^2)\ ,$$

on en conclura

$$b^2-c^2=\frac{b^2c^2}{a^2}\ ,\qquad a^2-c^2=\frac{a^2c^2}{b^2}\ ;$$

au moyen de quoi l'équation (15) deviendra

$$b^4c^4x^2+c^4a^4y^2+a^4b^4z^2=0\ ;$$

de sorte qu'alors le lieu cherché se réduira à un point ou au centre de l'hyperboloïde.

Si l'on a enfin

$$a^2b^2<c^2(a^2+b^2)\ ,$$

d'où résultera

$$b^2-c^2<\frac{b^2c^2}{a^2}\ ,\qquad a^2-c^2<\frac{a^2c^2}{b^2}\ ,$$

b^2-c^2 et a^2-c^2 pourront être indistinctement positifs, nuls ou négatifs.

Soit alors $a>b$; c pourra être moindre que b, ou égal à b, ou compris entre a et b, ou égal à a, ou enfin plus grand que a.

Si l'on a $c<b$ et conséquemment $c<a$, l'équation (15) sera absurde, c'est-à-dire, qu'aucun angle trièdre tri-rectangle ne pourra remplir la condition exigée.

Si l'on a $c=b$, et par suite $c<a$, l'équation (15) sera encore absurde, car elle deviendra

$$(a^2-b^2)y^2+(a^2+b^2)z^2+b^4=0\ .$$

Si l'on a $c>b$ et $c<a$, l'équation (15) pourra être écrite ainsi

$$(c^2-b^2)x^2-(a^2-c^2)y^2-(a^2+b^2)z^2=c^2(a^2+b^2)-a^2b^2 \ ;$$

elle exprimera alors une hyperboloïde à deux nappes.

Si l'on a enfin $c=a$ et par suite $c>b$, l'équation (15) pourra être écrite ainsi

$$(a^2-b^2)x^2-(a^2+b^2)z^2=a^4 \ ;$$

elle exprimera un cylindre hyperbolique.

Si l'on a $c>a$ et par suite $c>b$, l'équation (15) pourra être écrite ainsi

$$(c^2-b^2)x^2+(c^2-a^2)y^2-(a^2+b^2)z^2=c^2(a^2+b^2)-a^2b^2 \ ,$$

qui exprimera une autre hyperboloïde à une nappe.

Posons, dans l'équation (14), $a=mc$, $b=nc$, elle deviendra, en divisant par c^4, et en posant ensuite $c=0$,

$$n^2x^2+m^2y^2-m^2n^2z^2=0 \ ; \qquad (16)$$

équation d'une surface conique du second ordre. En faisant les mêmes transformations dans l'équation (15), elle deviendra

$$(n^2-1)x^2+(m^2-1)y^2+(m^2+n^2)z^2=0 \ ; \qquad (17)$$

équation d'une autre surface conique du second ordre dont le sommet et les axes coïncident avec le sommet et les axes de la première, et qui sera alors le lieu cherché ; ce qui revient encore à dire que le lieu de l'arête d'un angle droit dièdre mobile, dont les faces sont constamment tangentes à une même surface conique du second ordre, est une autre surface conique.

En retranchant l'équation (17) de l'équation (16), il vient

$$x^2+y^2=(m^2+n^2+m^2n^2)z^2 \ ;$$

équation d'une surface conique de révolution qui passe par les intersections des deux autres et a le même axe qu'elles ; ce qui prouve que ces intersections sont également inclinées sur l'axe commun. On voit, au surplus, par la forme de l'équation (17), que le lieu cherché n'est possible qu'autant que l'un au moins des deux nombres m et n est moindre que l'unité, c'est-à-dire, lorsque le plus petit des angles que font les génératrices du cône proposé avec son axe est moindre qu'un demi-angle droit. Si ce plus petit angle était demi-droit, le lieu cherché se réduirait à deux plans passant par le sommet du cône proposé.

Il est d'ailleurs évident que, si les surfaces données (14) et (16) sont des surfaces de révolution, les lieux cherchés (15) et (17) seront aussi des surfaces de révolution. En particulier, la dernière se réduit à un plan, lorsque l'angle générateur du cône est demi-droit.

Supposons, en troisième lieu, que la surface donnée soit une hyperboloïde à deux nappes, ayant pour équation

$$a^2b^2z^2-b^2c^2x^2-a^2c^2y^2=a^2b^2c^2\ ; \qquad (18)$$

comme elle pourra être déduite de (1), en y changeant respectivement a^2 et b^2 en $-a^2$ et $-b^2$, on déduira de l'équation (13), par un pareil changement, celle du lieu cherché, laquelle sera ainsi

$$(b^2-c^2)x^2+(a^2-c^2)y^2+(a^2+b^2)z^2=c^2(a^2+b^2)-a^2b^2\ . \quad (19)$$

En raisonnant sur cette équation, comme nous l'avons fait sur l'équation (15), dont elle ne diffère que par le signe du second membre, on verra aisément 1.° que, si l'on a $a^2b^2>c^2(a^2+b^2)$, elle n'exprimera absolument rien ; 2.° que, si l'on a $a^2b^2=c^2(a^2+b^2)$, elle exprimera uniquement le centre de l'hyperboloïde proposée ; 3.° enfin, que, si l'on a $a^2b^2<c^2(a^2+b^2)$, elle exprimera un ellipsoïde, si c est plus petit que la moindre des deux longueurs a et b, un cylindre elliptique, si c est égal à la moindre de ces deux

longueurs, une hyperboloïde à une nappe, si c est compris entre ces deux longueurs, un cylindre hyperbolique, si c est égal à la plus grande, enfin une nouvelle hyperboloïde à deux nappes, si c est plus grand que la plus grande.

Il est aisé de voir d'ailleurs que, si la surface (18) est de révolution, la surface (19) le sera aussi. Si, en outre, on a $c=a=b$, c'est-à-dire, si la surface proposée est engendrée par la révolution d'une hyperbole équilatère autour de son axe transverse, le lieu cherché se réduira à deux plans parallèles, lesquels ne seront autre chose que les plans polaires des deux foyers.

Passons enfin au cas où la surface proposée est dépourvue de centre et, pour cela, transportons l'origine d'abord au sommet négatif situé sur l'axe des z, ce qui se réduira à changer z en $z-c$, dans les équations (1) et (14), lesquelles deviendront ainsi

$$b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2(z-c)^2=a^2b^2c^2 \;,$$

$$(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)(z-c)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2 \;.$$

Posant ensuite

$$a^2=gc \;, \qquad b^2=hc \;,$$

ces équations deviendront, en réduisant,

$$c(hx^2+gy^2-2ghz)+ghz^2=0 \;,$$

$$c\{x^2+y^2-2(g+h)z-gh\}+\{hx^2+gy^2+(g+h)z^2\}=0 \;;$$

supposant alors $c=\infty$, il viendra

$$hx^2+gy^2=2ghz \;, \qquad (20)$$

$$+y^2=2(g+h)z+gh \;. \qquad (21)$$

La première de ces équations est celle de la surface proposée ; la seconde est celle du lieu du sommet de l'angle trièdre tri-rectangle mobile dont les trois arêtes touchent constamment cette surface.

L'équation (20) appartient à une paraboloïde elliptique ou à une paraboloïde hyperbolique, suivant que g et h sont des mêmes signes ou de signes contraires. Dans l'un comme dans l'autre cas, l'équation (20) appartient à une paraboloïde de révolution, dont le paramètre est la somme ou la différence des paramètres des sections principales de la surface proposée.

On peut, d'après ce qui précède, établir le théorème suivant, sur lequel nous reviendrons plus loin :

THÉORÈME I. Lorsqu'un angle trièdre tri-rectangle se meut, dans l'espace, de telle sorte que ses trois arêtes sont constamment tangentes à une même surface fixe ; 1.° *si cette surface est un ellipsoïde, le sommet de l'angle trièdre décrira un autre ellipsoïde, dont le centre et les axes coïncideront avec ceux du premier ;* 2.° *si cette surface est une sphère, l'autre sera également une sphère qui lui sera concentrique ;* 3.° *si un angle droit trièdre mobile a ses faces constamment tangentes à une surface conique du second ordre, son arête décrira une autre surface conique du second ordre dont le sommet, l'axe et les plans principaux coïncideront avec le sommet, l'axe et les plans principaux de la première ;* 4.° *enfin, si les trois arêtes d'un angle trièdre tri-rectangle mobile sont constamment tangentes à une hyperboloïde de révolution à deux nappes, engendrée par une hyperbole équilatère, tournant autour de son axe transverse, le sommet de cet angle trièdre décrira les plans polaires des foyers de l'hyperboloïde.*

PROBLÈME II. Quel est le lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile dont les arêtes s'appuient constamment sur une courbe plane du second ordre ?

Solution. Soit d'abord cette courbe une ellipse située dans le plan des xy et donnée par les deux équations

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ , \qquad z=0\ ; \qquad (22)$$

en y substituant les formules (2), dans lesquelles α, β, γ seront toujours, comme alors, les coordonnées du sommet de l'angle, elles deviendront

$$\left.\begin{array}{c} b^2(\alpha+pt+qu+rv)^2+a^2(\beta+p't+q'u+r'v)^2=a^2b^2\ , \\ \gamma+p''t+q''u+r''v=0\ . \end{array}\right\} \qquad (23)$$

Pour que cette courbe rencontre l'axe des t, qui est ici une des arêtes de l'angle trièdre tri-rectangle, il faut qu'en faisant u et v égaux à zéro, dans ses équations, les équations résultantes

$$b^2(\alpha+pt)^2+a^2(\beta+p't)^2=a^2b^2\ , \qquad \gamma+p''t=0\ ,$$

admettent une même valeur de t, de sorte que t puisse être éliminé entre elles. Exécutant donc l'élimination, et formant les équations analogues, relatives à u et v, on aura

$$b^2(p''\alpha-p\gamma)^2+a^2(p''\beta-p'\gamma)^2=p''^2a^2b^2\ ,$$

$$b^2(q''\alpha-q\gamma)^2+a^2(q''\beta-q'\gamma)^2=q''^2a^2b^2\ ,$$

$$b^2(r''\alpha-r\gamma)^2+a^2(r''\beta-r'\gamma)^2=r''^2a^2b^2\ .$$

En prenant la somme de ces équations, et ayant égard aux équations (5) et (6), il viendra, en changeant respectivement α, β, γ en x, y, z,

$$b^2x^2+a^2y^2+(a^2+b^2)z^2=a^2b^2\ . \qquad (24)$$

Telle est donc l'équation de la surface demandée. C'est, comme l'on voit, un ellipsoïde qui a pour deux de ses axes les deux axes mêmes de l'ellipse proposée, et dont le demi-troisième axe est $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Son troisième axe est évidemment plus petit que chacun des deux autres, car on a

$$a^2-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^4}{a^2+b^2}\ ,\qquad b^2-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{b^4}{a^2+b^2}\ ;$$

quantités essentiellement positives. Ce demi-axe est égal à la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur la corde qui en joint deux sommets consécutifs. On voit par là que, lors même que cette ellipse devient un cercle, l'ellipsoïde ne devient point une sphère, mais seulement un sphéroïde aplati.

Supposons, en second lieu, que la courbe donnée du second ordre, toujours située dans le plan des xy, soit une hyperbole ayant pour équations

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2\ ,\qquad z=0\ ;\qquad (25)$$

comme ces équations se déduisent des équations (22) en y changeant simplement $+b^2$ en $-b^2$, l'équation de la surface cherchée se déduira alors d'un pareil changement fait dans l'équation (24), qui deviendra ainsi

$$b^2x^2-a^2y^2-(a^2-b^2)z^2=a^2b^2\ ;\qquad (26)$$

c'est l'équation d'une hyperboloïde à deux nappes ou à une nappe unique, suivant que a est plus grand ou plus petit que b ; c'est-à-dire, suivant que l'axe transverse de l'hyperbole proposée est le plus grand ou le plus petit des deux. Dans l'un et dans l'autre cas, l'hyperbole proposée est toujours une des sections principales de cette surface. Dans le cas particulier où l'hyperbole proposée est équilatère, la surface cherchée est un cylindre hyperbolique dont la section perpendiculaire à ses élémens rectilignes est cette hyperbole elle-même.

Si, dans les équations (25) et (26), on fait $b=ma$, elles deviendront

$$m^2x^2-y^2=m^2a^2\ , \qquad m^2x^2-y^2-(1-m^2)z^2=m^2a^2\ ;$$

puis, en supposant $a=0$,

$$(y-mx)(y+mx)=0\ , \qquad m^2x^2-y^2-(1-m^2)z^2=0\ .$$

On voit par là que, si l'hyperbole proposée se réduit au système de deux droites qui se coupent, la surface cherchée se réduira à une surface conique du second ordre; ce qui revient encore à dire que l'arête d'un angle droit dièdre mobile, dont les faces passent constamment par deux droites qui se coupent, décrit dans l'espace une surface conique du second ordre; théorème déjà démontré par M. Hachette qui a démontré, en outre, que les plans des deux séries de sections circulaires qu'on peut faire dans cette surface conique sont respectivement perpendiculaires aux deux droites.

Si, dans les équations (22) et (24), on change x en $(x-a)$, ce qui revient à transporter l'origine au sommet négatif du grand axe de l'ellipse, elles deviendront

$$b^2x^2+a^2y^2=2ab^2x\ , \qquad b^2x^2+a^2y^2+(a^2+b^2)z^2=2ab^2x\ .$$

Posant ensuite $b^2=ka$, et simplifiant, on aura

$$a(y^2-2kx)+kx^2=0\ ,$$

$$a(y^2+z^2-2kx)+k^2(x^2+y^2)=0 ;$$

puis, en supposant a infini,

$$y^2=2kx , \qquad y^2+z^2=2kx ;$$

d'où résulte ce curieux théorème : Le lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les côtés s'appuyent constamment sur une parabole donnée, est la surface engendrée par la révolution de cette même parabole autour de son grand axe.

On peut, d'après ce qui précède, établir le théorème suivant, sur lequel nous reviendrons plus loin :

THÉORÈME II. Lorsqu'un angle trièdre tri-rectangle se meut dans l'espace, de telle sorte que ses trois arêtes s'appuyent constamment sur une même courbe plane ; 1.° si cette courbe est une ellipse, le lieu du sommet de l'angle trièdre sera un ellipsoïde, dont cette ellipse sera la plus grande section principale ; 2.° si la courbe est une hyperbole équilatère, ce lieu sera un cylindre hyperbolique qui aura pour base cette hyperbole elle-même ; 3.° enfin, si la courbe est une parabole, ce lieu sera une paraboloïde de révolution, dont cette même parabole sera un méridien.

PROBLÈME III. Quel est le lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les faces touchent constamment le périmètre d'une courbe plane du second ordre ?

Solution. Conservons toutes les notations du précèdent problème, et faisons $v=0$ dans les équations (23) ; elles deviendront

$$b^2(\alpha+pt+qu)^2+a^2(\beta+p't+q'u)^2=a^2b^2 ,$$

$$\gamma+p''t+q''u=0 ;$$

ces deux équations feront connaître les coordonnées du point où l'ellipse donnée perce le plan des tu ; on aura donc la coordonnée t de ce point, en éliminant u entre elles, ce qui conduit à l'équation

$$b^2\{q''\alpha-q\gamma+(pq''-qp'')t\}^2+a^2\{q''\beta-q'\gamma+(p'q''-q'p'')t\}^2=q''^2a^2b^2 \ ;$$

c'est-à-dire, en développant et ordonnant,

$$\left.\begin{array}{r}\{b^2(pq''-qp'')^2+a^2(p'q''-q'p'')^2\}t^2\\ +2\{b^2(pq''-qp'')(q''\alpha-q\gamma)+a^2(p'q''-q'p'')(q''\beta-q'\gamma)\}t\\ +\{b^2(q''\alpha-q\gamma)^2+a^2(q''\beta-q'\gamma)^2-q''^2a^2b^2\}\end{array}\right\}=0\ ,$$

si donc l'on veut exprimer que l'ellipse est tangente au plan des tu, il faudra exprimer que cette équation a ses deux racines égales, ce qui donnera

$$\{b^2(pq''-qp'')(q''\alpha-q\gamma)+a^2(p'q''-q'p'')(q''\beta-q'\gamma)\}^2$$
$$-\{b^2(pq''-qp'')^2+a^2(p'q''-q'p'')^2\}\{b^2(q''\alpha-q\gamma)^2+a^2(q''\beta-q'\gamma)^2-p''^2a^2b^2\}=0\ ;$$

En développant cette équation, réduisant, ordonnant l'un des deux membres par rapport à α, β, γ, et l'autre par rapport à a et b, et formant ensuite ses analogues relatives au contact de l'ellipse avec les plans des uv et des vt, on aura

$$\{(p'q''-q'p'')\alpha+(p''q-q''p)\beta+(pq'-qp')\gamma\}^2=(p'q''-q'p'')^2a^2+(p''q-q''p)b^2\ ,$$

$$\{(q'r''-r'q'')\alpha+(q''r-r''q)\beta+(qr'-rq')\gamma\}^2=(q'r''-r'q'')^2a^2+(q''r-r''q)b^2\ ,$$

$$\{(r'p''-p'r'')\alpha+(r''p-p''r)\beta+(rp'-pr')\gamma\}^2=(r'p''-p'r'')^2a^2+(r''p-p''r)b^2\ ;$$

faisant la somme de ces équations, en ayant égard aux équations (5) et (6), il viendra, toutes réductions faites, et en changeant respectivement α, β, γ en x, y, z,

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2\ , \qquad (27)$$

Telle est donc l'équation du lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile dont les faces touchent constamment une ellipse ayant pour équation

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ , \qquad (28)$$

On voit que ce lieu est une sphère concentrique à l'ellipse, ayan pour rayon la corde qui joint deux sommets consécutifs de cette ellipse.

Si l'on remplace l'ellipse par une hyperbole ayant pour équation

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2\ ;$$

l'équation du lieu cherché sera

$$x^2+y^2+z^2=a^2-b^2\ ;$$

ce sera donc encore une sphère concentrique à l'hyperbole proposée, mais dont le rayon sera $\sqrt{a^2-b^2}$; de sorte que, si l'hyperbole est équilatère, le lieu demandé se réduira à son centre; et que, si son axe transverse est le plus petit des deux, il sera impossible que la courbe soit touchée à la fois par les trois faces d'un angle trièdre tri-rectangle.

Si, dans les équations (27) et (28), on change x en $x-a$, elles deviendront

$$x^2+y^2+z^2=2ax+b^2 \ , \qquad b^2x^2+a^2y^2=2ab^2x \ ;$$

puis, en faisant $b=ka$,

$$x^2+y^2+z^2=a(2x+k) \ , \qquad a(y^2-2kx)+kx^2=0 \ ;$$

et enfin, en supposant a infini,

$$2x+k=0 \ , \qquad y^2=2kx \ ;$$

c'est-à-dire que, quand la courbe donnée est une parabole, le lieu cherché est le plan perpendiculaire au sien, conduit par sa directrice.

On peut, d'après ce qui précède, établir le théorème suivant:

THÉORÈME III. Lorsqu'un angle trièdre tri-rectangle se meut dans l'espace, de telle sorte que ses trois faces touchent constamment une même ligne fixe du second ordre, son sommet décrit une sphère concentrique à la courbe; laquelle peut d'ailleurs se réduire à un point ou un plan, ou même être imaginaire.

Nous n'avons rien dit du lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les faces sont constamment tangentes à une surface fixe du second ordre, parce qu'il est bien connu que ce lieu est une sphère concentrique à la surface dont il s'agit. Ce théorème, qui est du à Monge et dont M. Poisson a donné une démonstration fort élégante dans la *Correspondance sur l'Ecole polytechnique* (tom. I, pag. 240), pourrait également se démontrer par les procédés qui précèdent. Il est exactement, par rapport au dernier qui vient d'être démontré, ce qu'est le *théorème I*, par rapport au *théorème II*.

En établissant ces trois théorèmes, nous avons eu principalement en vue d'en déduire, à l'aide des principes exposés dans un autre article, et que nous déclarons de nouveau nous avoir été suggéré par la lecture de la lettre de M. Poncelet (tom. XVII, pag. 265), d'autres théorèmes peut-être moins remarquables en eux-mêmes que par la manière dont on y est conduit. Afin de mieux faire saisir la correspondance entre les premiers et ceux-ci, nous emploîrons le même numérotage, en prévenant que la surface directrice est constamment une sphère au centre de laquelle nous supposerons quelquefois une situation spéciale.

THÉORÈME I. Un angle trièdre tri-rectangle mobile, ayant son sommet fixé en un point quelconque de l'espace, 1.° *si les trois faces de cet angle trièdre, dans leur mouvement, coupent constamment une surface fixe quelconque du second ordre, le plan mobile qui s'appuyera sur les trois sections touchera constamment une autre surface fixe du second ordre;* 2.° *si la surface fixe du second ordre que coupent les trois faces de l'angle trièdre est une surface de révolution dont son sommet soit un foyer, l'autre surface du second ordre sera aussi une surface de révolution ayant même foyer et même plan directeur que la première; et il en sera encore de même pour un angle trièdre mobile quelconque, de forme invariable;* 3.° *toutes celles des cordes inscrites à une ligne du second ordre qui sont vues sous un angle droit, d'un même point quelconque de l'espace, enveloppent une autre ligne du second ordre; et on peut inscrire au quadrilatère formé par les quatre tangentes communes à ces deux courbes une troisième ligne du second ordre qui, vue du même point, paraîtra un cercle* (*); 4.° *enfin, si, à une distance du centre d'une sphère égale au côté du carré inscrit à son grand cercle, on place le sommet fixe d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, les deux séries de plans mobiles qui*

(*) Cette partie du théorème est une extension d'un théorème de M. Frégier (*Correspondance sur l'Ecole polytechnique*, tom. III, pag. 394).

toucheront à la fois les sections circulaires faites dans la sphère par les trois faces de l'angle trièdre, passeront l'une et l'autre par un même point fixe, et le centre de la sphère sera un de ces deux points.

THÉORÈME II. *Un angle trièdre tri-rectangle mobile, ayant son sommet fixé en un point quelconque de l'espace ;* 1.° *si, dans le mouvement de cet angle trièdre, ses faces coupent constamment un cône ou un cylindre, le plan mobile qui s'appuyera constamment sur les trois sections enveloppera une surface du second ordre inscrite à ce cône ou à ce cylindre ;* 2.° *si les faces de l'angle trièdre tri-rectangle coupent, dans leur mouvement, un cylindre de révolution, et si, en même temps, le sommet de cet angle trièdre est fixé à une distance de l'axe du cylindre égale au côté du carré inscrit à sa section circulaire, le plan mobile qui s'appuyera sur les trois sections touchera constamment la section circulaire dont le plan passera par le sommet de l'angle trièdre ;* 3.° *enfin, si le sommet de l'angle trièdre tri-rectangle mobile est fixé en un des points de la surface du cylindre, le plan mobile qui s'appuyera constamment sur les trois sections enveloppera une sphère inscrite au cylindre.*

THÉORÈME III. *Un angle trièdre tri-rectangle mobile, ayant son sommet fixé en un point quelconque de l'espace, si, dans son mouvement, ses arêtes percent continuellement une surface conique ou cylindrique du second ordre, le plan mobile déterminé par les trois intersections enveloppera une surface de révolution du second ordre qui aura pour foyer le sommet fixe de l'angle trièdre. Dans le cas particulier où ce sommet sera sur la surface conique ou cylindrique, le plan mobile passera constamment par un même point fixe.*