ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

A. TIMMERMANS

Géométrie élémentaire. Problèmes et théorèmes sur les polygones et sur les polyèdres

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 217-229

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__217_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Problèmes et théorèmes sur les polygones et sur les polyèdres ;

Par M. A. Timmermans, professeur de physique à l'Athenée de Tournay.

1. Problème I. *Construire, sur le plan d'un triangle, une droite telle que la somme des distances de chacun de ses points aux trois côtés du triangle soit constante ?*

Solution. Soit ABC (fig. 1) le triangle dont il s'agit. Soit porté un quelconque AB des côtés sur les deux autres AC et BC de A en D et de B en E ; la droite indéfinie DE sera la droite demandée.

Démonstration. Soit P un quelconque des points de DE, compris entre D et E, duquel soient abaissées sur les côtés AB, AC, BC, les perpendiculaires PF, PG, PH, et soient menées en outre les droites PA èt PB ; ces droites diviseront le quadrilatère ADEB en trois triangles DPA, APB, BPE, ayant, par construction, des bases égales DA, AB, BE et pour hauteurs respectives les perpendiculaires PG, PF, PH ; on aura donc l'aire du quadrilatère en multipliant la moitié de l'une AB de ces bases par la somme PG+PF+PH des trois perpendiculaires ; cette somme est donc égale au double de l'aire du quadrilatère divisé par AB ; elle est donc indépendante de la situation du point P sur DE, entre D et E ; cette somme est donc constante.

2. *Remarque I.* Si le point P était pris sur l'un ou sur l'autre des deux prolongemens de CD hors du triangle, les mêmes choses auraient encore lieu, pourvu qu'on prît, avec des signes con-

traires, les perpendiculaires qui tomberaient de différens côtés du périmètre de ce triangle.

3. *Remarque II.* Nous avons tacitement supposé que le côté AB était le plus petit des trois. Si le contraire arrivait, l'un ou l'autre des deux points D et E ou même tous les deux se trouveraient sur les prolongemens de AC et BC hors du triangle. La droite DE pourrait donc être tout-à-fait extérieure à ce triangle ; mais elle n'en jouirait pas moins de la propriété annoncée, pourvu que l'on prît toujours les trois distances avec des signes convenables.

4. *Remarque III.* Si l'un des deux côtés AC et BC était égal à AB, c'est-à-dire, si le triangle était isocèle, la droite DE se confondrait avec le côté restant ; et, si le triangle était équilatéral, toute droite menée par le point C résoudrait le problème ; et, comme tout point du plan du triangle peut être supposé appartenir à une telle droite, il en résulte ce théorème connu : *La somme algébrique des distances de chacun des points du plan d'un triangle équilatéral à ses trois côtés est une quantité constante.* Il est visible d'ailleurs que cette quantité constante n'est autre que la hauteur du triangle ; puisque c'est à elle seule que se réduit la somme des trois distances, lorsque le point que l'on considère est l'un des sommets.

5. *PROBLEME II. Construire, dans l'espace, un plan tel que la somme des distances de chacun de ses points aux quatre faces d'un tétraèdre soit constante ?*

Solution. Soit ABCD(fig. 2) le tétraèdre dont il s'agit. Si, sur les trois arêtes DA, DB, DC, on détermine des points E, F, G tels qu'en menant les droites EF, FG, GE, les quadrilatères AEFB, BFGC, CGEA soient tous trois équivalens au triangle ABC ; le plan indéfini, déterminé par les trois points E, F, G résoudra le problème (*).

(*) La détermination des trois points E, F, G est facile. En représentant respectivement par a, b, c, d les aires des faces du tétraèdre opposées aux sommets A, B, C, D, et posant, pour abréger, *Démonstration.* Considérons, en effet, un quelconque P des points de l'intérieur du triangle EFG comme le sommet commun de quatre pyramides, l'une triangulaire, ayant pour base ABC, et les trois autres quadrangulaires, ayant pour bases respectives les quadrilatères AEFB, BFGC, CGEA ; ces pyramides auront, par construction, des bases équivalentes et leurs hauteurs seront les distances du point P aux quatre faces du tétraèdre. De plus, elles composeront, par leur ensemble, le tronc de tétraèdre ayant pour ses deux bases ABC et EFG. Il suffira donc, pour avoir le volume de ce tronc, de multiplier le tiers de l'aire de l'une des bases; de ABC, par exemple, par la somme des quatre hauteurs, c'est-à-dire, par la somme des distances du point P aux quatre faces du tétraèdre ; donc cette somme est égale au triple du volume du tronc divisé par l'aire du triangle ABC ; elle est donc indépendante de la situation du point P, dans l'intérieur du triangle EFG ; cette somme est donc constante.

6. *Remarque I.* Si le point P était pris sur le prolongement du plan du triangle EFG hors du tétraèdre, les mêmes choses auraient encore lieu, pourvu que l'on prît, avec des signes contraires, les perpendiculaires qui tomberaient de différens côtés de la surface de ce tétraèdre.

7. *Remarque II.* Nous avons tacitement supposé que la face ABC était la plus petite des quatre. Si le contraire arrivait, un ou plusieurs des trois points E, F, G, ou même tous les trois se trouveraient sur les prolongemens de AD, BD, CD hors du tétraèdre.

$$\lambda=\sqrt{\frac{(a-d)(b-d)(c-d)}{abc}}\,,$$

on trouvera facilement

$$DE=DA.\frac{\lambda a}{a-d}\,,\quad DF=DB.\frac{\lambda b}{b-d}\,,\quad DG=DC.\frac{\lambda c}{c-d}\,.$$

Le plan EFG pourrait donc être tout-à-fait extérieur à ce tétraèdre, mais il n'en jouirait pas moins de la propriété annoncée, pourvu que l'on prît toujours les quatre distances avec des signes convenables.

8. *Remarque III.* Si deux des faces ADB, BDC, CDA du tétraèdre étaient égales à la face ABC, c'est-à-dire, si le tétraèdre était isocèle, le plan EFG se confondrait avec la face restante ; et, si le tétraèdre était régulier, tout plan conduit par le sommet D résoudrait le problème ; et, comme tout point de l'epace peut être supposé appartenir à un tel plan, il en résulte ce théorème connu : *La somme algébrique des distances de chacun des points de l'espace aux plans des quatre faces d'un tétraèdre régulier est une quantité constante.* Il est visible d'ailleurs que cette quantité constante n'est autre que la hauteur du tétraèdre, puisque c'est à elle seule que se réduit la somme des quatre distances, lorsque le point de l'espace que l'on considère est un des sommets.

9. *THÉORÈME I. Toute parallèle à une droite tracée sur le plan d'un triangle, de manière que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux trois côtés du triangle est une quantité constante, jouit également de cette propriété ; et elle en jouit exclusivement entre toutes les droites qui peuvent être tracées dans le plan de ce triangle.*

Démonstration. Soit DE (fig. 3) une droite tracée sur le plan d'un triangle ABC, de manière qu'on ait, comme ci-dessus, AD$=$BE$=$AB ; et soit D$'$E$'$ une parallèle quelconque à DE, coupant les côtés AC et BC, respectivement, en D$'$ et E$'$. Soit P$'$ un quelconque des points de D$'$E$'$, compris entre les points D$'$ et E$'$, et soit menées P$'$A et P$'$B, P$'$D et P$'$E.

L'aire du quadrilatère ADEB est indépendante de la situation du point P$'$ entre D$'$ et E$'$, et il en est de même de l'aire du triangle DP$'$E, il en sera donc de même de l'excès de la première surface sur la seconde. Or, cet excès est la somme des aires des trois triangles DP$'$A, AP$'$B, BP$'$E, laquelle a pour expression $\frac{1}{2}$AB, multiplié par la somme des distances du point P′ aux trois côtés du triangle ABC ; donc ce produit est indépendant de la situation du point P′ sur D′E′ ; puis donc que son premier facteur $\frac{1}{2}$AB est constant, l'autre doit l'être également.

Si, au contraire, D′E′ n'était pas parallèle à DE, l'aire du triangle DP′E, dont la base DE serait constante, tandis que sa hauteur varierait avec la situation du point P′, serait variable ; le produit de $\frac{1}{2}$AB par la somme des distances du point P′ aux trois côtés du triangle ABC serait donc aussi variable ; et, puisque son premier facteur $\frac{1}{2}$AB est constant, c'est l'autre qui varierait alors.

10. *Remarque.* Bien que nous ayons supposé que la droite D′E′ était comprise entre DE et le côté AB, et que le point P′ était entre les points D′ et E′, il serait facile de modifier la démonstration de manière à la rendre propre à toute autre situation de cette parallèle et du point P′ sur D′E′; pourvu qu'on eût constamment égard aux signes des distances.

11. *THÉORÈME II. Tout plan parallèle à un plan tel que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux quatre faces d'un tétraèdre est constante, jouit égalemeut de cette propriété ; et il en jouit exclusivement entre tous les plans que l'on peut concevoir dans l'espace.*

Démonstration. Soit EFG (fig. 4) un plan coupant le tétraèdre ABCD, de telle sorte qu'on ait, comme ci-dessus, *surf.*AEFB=*surf.*BFGC=*surf.*CGEA=*surf.*ABC ; et soit E′F′G′ un plan parallèle quelconque à celui-là, coupant les arêtes AD, BD, CD, respectivement en E′, F′, G′. Soit P′ un point situé d'une manière quelconque, dans l'intérieur du triangle E′F′G′ ; et soient menées P′A, P′B et P′C, P′E, P′F et P′G.

Le volume du tronc de tétraèdre dont les deux bases sont ABC et EFG est indépendant de la situation du point P′ sur le plan E′F′G′ ; et il en est de même du volume du tétraèdre dont la base est en EFG et le sommet en P′ ; il en sera donc de même de l'excès du premier de ces deux volumes sur le second. Or, cet excès est la somme des volumes de quatre pyramides, l'une triangulaire, ayant pour base ABC, et les trois autres quadrangulaires, ayant pour bases AEFB, BFGC, CGEA ; ces pyramides ayant toutes leur sommet commun en P′ ; laquelle somme de volumes a pour expression $\frac{1}{2}$*surf.*ABC, multiplié par la somme des distances du point P′ aux quatre faces du tétraèdre ; donc ce produit est indépendant de la situation du point P′, dans l'intérieur du triangle E′F′G′ ; puis donc que son premier facteur $\frac{1}{3}$*surf.*ABC est constant, l'autre doit l'être également.

Si, au contraire, le plan E′F′G′ n'était pas parallèle au plan EFG, le volume du tétraèdre P′EFG, dont la base EFG serait constante, tandis que sa hauteur varierait avec la situation du point P′, serait variable ; le produit de $\frac{1}{3}$*surf.*ABC par la somme des distances du point P′ aux quatre faces du tétraèdre ABCD serait donc aussi variable ; et, puisque son premier facteur $\frac{1}{3}$*surf.*ABC est constant, c'est l'autre qui varierait alors.

12. *Remarque.* Bien que nous ayons supposé que le plan E′F′G′ était compris entre le plan EFG et la face ABC, et que le point P′ était intérieur au triangle E′F′G′, il serait facile de modifier la démonstration de manière à la rendre propre à toute autre situation de ce plan parallèle ainsi que du point P′, par rapport au triangle E′F′G′, pourvu qu'on eût constamment égard aux signes des distances.

13. *PROBLÈME III. Construire, sur le plan d'un triangle, une droite telle que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux trois côtés du triangle soit nulle ?*

Solution. Si l'on divise, par une droite, le supplément de l'un des angles du triangle en deux parties égales, la somme algébrique des distances de chacun des points de cette droite aux deux côtés de cet angle sera nulle ; de sorte que la somme algébrique des distances de chacun de ces points aux trois côtés du triangle sera simplement égale à la distance de ce même point au troisième côté. Donc le point où cette même droite rencontre le troisième côté du triangle sera tel que la somme algébrique de ses distances aux trois côtés du triangle sera nulle. Ce sera donc là un des points de la droite cherchée. Or, on peut construire trois pareils points sur le plan du triangle ; ainsi la droite cherchée sera entièrement déterminée.

Et de là résulte ce théorème :

14. *THÉORÈME III. Les points, où les trois côtés d'un triangle sont coupés par les droites qui divisent en deux parties égales les supplémens des angles respectivement opposés, appartiennent tous trois à une même droite, telle que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux trois côtés du triangle est nulle.*

15. *Remarque.* Lorsque le triangle est équilatéral, cette droite passe à l'infini.

16. *PROBLÈME IV. Construire dans l'espace un plan tel que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux quatre faces d'un tétraèdre soit nulle ?*

Solution. Si, par l'un quelconque des arêtes du tétraèdre, on conduit un plan qui divise en deux parties égales le supplément de l'angle dièdre auquel cette arête appartient, la somme algébrique des distances de chacun des points de ce plan aux deux faces de l'angle dièdre sera évidemment nulle ; de sorte que la somme des distances de chacun des points de ce plan aux quatre faces du tétraèdre sera simplement égale à la somme des distances du même point aux deux faces restantes du tétraèdre. Si l'on en fait de même pour l'angle dièdre auquel appartient l'arête opposée, on obtiendra un second plan tel que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux quatre faces du tétraèdre sera simplement égale à la somme des distances du même point aux deux premières faces de ce tétraèdre ; donc, la somme algébrique des distances de chacun des points de l'intersection de ces deux plans aux quatre faces du tétraèdre sera nulle ; et, par conséquent, cette intersection sera située dans le plan cherché. Or, le tétraèdre offre trois pareilles droites ; ainsi le plan cherché sera entièrement déterminé.

Et de là résulte ce théorème:

17. *THÉORÈME IV. Les droites, suivant lesquelles se coupent les plans qui divisent en deux parties égales les supplémens des angles dièdres opposés d'un tétraèdre, appartiennent toutes trois à un même plan, tel que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux quatre faces du tétraèdre est nulle.*

18. *Remarque.* Lorsque le tétraèdre est régulier, ce plan passe à l'infini.

La géométrie analytique offre un moyen facile de confirmer tout ce qui précède, et de l'étendre à des polygones d'un nombre quelconque de côtés et à des polyèdres d'un nombre quelconque de faces.

19. Soient en premier lieu C, C', C'', ... tant de droites qu'on voudra, tracées sur un même plan et considérées comme les côtés consécutifs d'un polygone. Rapportons toutes ces droites à deux axes rectangulaires tracés arbitrairement sur leur plan. Soient α, α', α'', ... les angles que font leurs directions avec l'axe des y, β, β', β'', ... les angles que forment ces directions avec l'axe des x et p, p', p'', ... les longueurs des perpendiculaires abaissées de l'origine sur ces mêmes directions. Si l'on représente en outre par P, P', P'', ... les perpendiculaires abaissées sur ces mêmes droites de l'un quelconque (x, y) des points de leur plan, on aura, comme l'on sait,

$$P = x\text{Cos.}\alpha + y\text{Cos}\,\beta - p\ ,$$

$$P' = x\text{Cos.}\alpha' + y\text{Cos}\,\beta' - p'\ ,$$

$$P'' = x\text{Cos.}\alpha'' + y\text{Cos}\,\beta'' - p''\ .$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Si donc on veut que la somme $P+P'+P''+\dots\dots$ soit égale à une constante k, il faudra qu'on ait

$$(\text{Cos.}\alpha+\text{Cos.}\alpha'+\text{Cos.}\alpha''+\dots)x+(\text{Cos.}\beta+\text{Cos.}\beta'+\text{Cos.}\beta''+\dots)y=(p+p'+p''+\dots+k)\ ; \quad (1)$$

équation d'une ligne droite, laquelle ne fait que se mouvoir parallèlement à elle-même, lorsqu'on fait simplement varier la longueur constante k. Ainsi,

20. *THÉORÈME V. Le lieu des points du plan d'un polygone quelconque dont la somme algébrique des distances à ses côtés est constante, est une droite dont la direction est indépendante de la grandeur de cette somme.*

21. *Remarque I.* Si le polygone, supposé fermé, avait tous ses côtés égaux, on aurait (*Annales*, tom. XV, pag. 310),

$$\text{Cos.}\alpha+\text{Cos.}\alpha'+\text{Cos.}\alpha''+\ldots\ldots=0\ ,$$

$$\text{Cos.}\beta+\text{Cos.}\beta'+\text{Cos}\,\beta''+\ldots\ldots=0\ ;$$

l'équation (1) serait donc absurde, à moins que k ne fût donné de manière à satisfaire à la condition

$$p+p'+p''+\ldots\ldots+k=0\ ;$$

auquel cas tous les points du plan de ce polygone rempliraient la condition demandée.

22. *Remarque II.* Le même calcul prouve que le lieu des points d'un plan dont la somme des distances aux deux côtés d'un angle est constante, est aussi une ligne droite.

23. Soient, en second lieu, F, F', F'', ... tant de plans qu'on voudra, donnés dans l'espace, et considérés comme les faces consécutives d'un polyèdre. Rapportons tous ces plans à trois axes rectangulaires, conduits arbitrairement par un quelconque des points de l'espace. Soient alors α, α', α'', ... les angles que font leurs directions avec le plan des yz ; β, β', β'', ... les angles que font leurs directions avec le plan des zx ; γ, γ', γ'', ... les angles que font leurs directions avec le plan des xy ; et p, p', p'', ... les longueurs des perpendiculaires abaissées de l'origine sur ces mêmes directions. Si l'on représente en outre par P, P', P'', ... les per-

pendiculaires abaissées sur ces mêmes plans de l'un quelconque (x, y, z) des points de l'espace, on aura, comme l'on sait,

$$P = x\mathrm{Cos}.\alpha + y\mathrm{Cos}.\beta + z\mathrm{Cos}.\gamma - p\ ,$$

$$P' = x\mathrm{Cos}.\alpha' + y\mathrm{Cos}.\beta' + z\mathrm{Cos}.\gamma' - p'\ ,$$

$$P'' = x\mathrm{Cos}.\alpha'' + y\mathrm{Cos}.\beta'' + z\mathrm{Cos}.\gamma'' - p''\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si donc on veut que la somme $P+P'+P''+\ldots\ldots\ldots$ soit égale à une constante k, il faudra qu'on ait

$$(\mathrm{Cos}.\alpha+\mathrm{Cos}.\alpha'+\mathrm{Cos}.\alpha''+\ldots)x+(\mathrm{Cos}.\beta+\mathrm{Cos}.\beta'+\mathrm{Cos}.\beta''+\ldots)y+(\mathrm{Cos}.\gamma+\mathrm{Cos}.\gamma'$$
$$+\mathrm{Cos}.\gamma''+\ldots)z=(p+p'+p''+\ldots\ldots+k)\ . \qquad (2)$$

Equation d'un plan, lequel ne fait que se mouvoir parallèlement à lui-même, lorsqu'on fait simplement varier la longueur constante k. Ainsi,

24. *THÉORÈME VI. Le lieu des points de l'espace dont la somme algébrique des distances aux faces d'un polyèdre quelconque est constante, est un plan dont la direction est indépendante de la grandeur de cette somme.*

25. *Remarque I.* Si le polyèdre, supposé fermé, avait toutes ses faces équivalentes, on aurait (*Annales*, tom. XV, pag. 344),

$$\mathrm{Cos}.\alpha+\mathrm{Cos}.\alpha'+\mathrm{Cos}.\alpha''+\ldots\ldots=0\ ,$$

$$\mathrm{Cos}.\beta+\mathrm{Cos}.\beta'+\mathrm{Cos}.\beta''+\ldots\ldots=0\ ,$$

$$\mathrm{Cos}.\gamma+\mathrm{Cos}.\gamma'+\mathrm{Cos}.\gamma''+\ldots\ldots=0\ ;$$

l'équation (2) serait donc absurde, à moins que k ne fût donné de manière à satisfaire à la condition

$$p+p'+p''+\ldots\ldots+k=0\ ;$$

auquel cas tous les points de l'espace rempliraient la condition demandée.

26. *Remarque II.* Le même calcul prouve que le lieu des points de l'espace dont la somme des distances, soit aux deux faces d'un angle dièdre, soit aux faces d'un angle polyèdre quelconque, est également un plan.

Au moyen de tout ce qui précède, rien n'est plus facile que de résoudre les problèmes suivans :

27. *PROBLÈME V. Construire, sur le plan d'un polygone, une droite telle que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux côtés du polygone soit nulle ?*

Solution. Nous avons déjà résolu ce problème pour le triangle (14).

S'il s'agit d'un quadrilatère, en construisant cette droite pour le triangle formé par trois quelconques de ses côtés, le point où elle coupera le quatrième sera un des points de la droite cherchée. En prenant donc, tour-à-tour, pour quatrième côté, chacun des côtés du quadrilatère, on obtiendra ainsi quatre points de la droite cherchée.

S'agit-il d'un pentagone ; en construisant cette droite, comme il vient d'être dit, pour le quadrilatère formé par quatre quelconques de ses côtés, le point où elle coupera le cinquième sera un des points de la droite demandée. En prenant donc, tour-à-tour, pour cinquième côté chacun des côtés du pentagone, on obtiendra cinq points de la droite cherchée.

On ramenera ainsi successivement le problème relatif à chaque polygone au problème relatif au polygone qui aura un côté de moins.

28. *PROBLÈME VI. Construire dans l'espace un plan tel que*

la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux faces d'un polyèdre soit nulle ?

Solution. Nous avons déjà résolu le problème pour le tétraèdre (17).

S'il s'agit d'un pentaèdre ; en construisant ce plan pour le tétraèdre formé par quatre quelconques de ses faces, la droite, suivant laquelle ce plan coupera la cinquième, appartiendra au plan cherché. En prenant donc tour-à-tour pour cinquième plan chacune des faces du pentaèdre, on obtiendra ainsi cinq droites appartenant au plan cherché.

S'agit-il d'un hexaèdre; en construisant ce plan, comme il vient d'être dit pour le pentaèdre formé par cinq quelconques de ses faces, la droite, suivant laquelle ce plan coupera la sixième face, appartiendra au plan demandé. En prenant donc, tour-à-tour, pour sixième face chacune des faces de l'hexaèdre, on obtiendra six droites appartenant au plan cherché.

On ramenera ainsi successivement le problème relatif à chaque polyèdre au problème relatif au polyèdre qui aura une face de moins.

30. *PROBLÈME VII. Construire, sur le plan de tant de droites qu'on voudra, une droite telle que la somme algébrique des distances de chacun de ses points à toutes celles-là soit égale à une longueur donnée ?*

On suppose qu'on a fixé à l'avance le côté positif et le côté négatif de chacune des droites données.

Solution. S'il n'y a qu'une seule droite donnée, la droite cherchée sera une parallèle menée à celle-là du côté positif, et à la distance donnée.

S'il y a deux droites données, on menera la droite cherchée pour l'une d'elles seulement, comme il vient d'être dit ; son intersection avec l'autre sera un des points de la droite demandée. En prenant donc, tour-à-tour, pour seconde droite, chacune des deux droites données, on obtiendra deux points de la droite demandée.

S'il y a trois droites données, on construira la droite cherchée pour deux d'entre elles seulement, comme il vient d'être dit; son intersection avec la troisième sera un des points de la droite demandée. En prenant donc, tour-à-tour, pour troisième droite chacune des droites données, on obtiendra trois points de la droite demandée.

On ramenera ainsi successivement le problème relatif à un nombre de droites quelconque au problème relatif à un nombre de droites moindre d'une unité.

31. *PROBLÈME VIII. Construire, dans l'espace, un plan tel que la somme algébrique des distances de chacun de ses points à tant de plans donnés qu'on voudra, soit égale à une longueur donnée?*

On suppose qu'on a fixé à l'avance le côté positif et le côté négatif de chacun des plans donnés.

Solution. S'il n'y a qu'un seul plan donné, le plan cherché sera un plan conduit parallèlement à celui-là du côté positif et à la distance donnée.

S'il y a deux plans donnés, on conduira le plan cherché, pour l'un d'eux seulement, comme il vient d'être dit; son intersection avec l'autre sera une droite appartenant au plan demandé. En prenant donc, tour-à-tour, pour second plan chacun des deux plans donnés, on obtiendra deux droites appartenant au plan demandé.

S'il y a trois plans donnés, on construira le plan cherché pour deux quelconques d'entre eux, comme il vient d'être dit; son intersection avec le troisième appartiendra au plan demandé. En prenant donc, tour-à-tour, pour troisième plan chacun des plans donnés, on obtiendra trois droites appartenant au plan demandé.

On ramenera ainsi successivement le problème relatif à un nombre de plans quelconque au problème relatif à un nombre de plans moindre d'une unité.