ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

THOMAS DE ST-LAURENT
GERGONNE

Optique. Recherches sur la caustique par réfraction relative au cercle

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__1_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1827-1828, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

OPTIQUE.

Recherches sur la caustique par réfraction relative au cercle ;

Par M. THOMAS de ST-LAURENT, capitaine au Corps royal d'Etat-Major.

(*Extrait;* par M. GERGONNE.)

LA recherche de l'équation générale de la caustique par réfraction relative au cercle, quelque méthode d'ailleurs qu'on tente de lui appliquer, s'offre sous un aspect capable de décourager le calculateur le plus intrépide. Au défaut de cette équation, M. de St-Laurent, qui paraît s'être dévoué spécialement aux spéculations de ce genre, a voulu du moins obtenir la caustique pour quelques cas particuliers ; et tel est le sujet d'un mémoire assez étendu qu'il nous a fait l'honneur de nous adresser, et que nous nous déterminons d'autant plus volontiers à ne publier que par extrait, que déjà l'auteur, après avoir traité quelques cas particuliers de la caustique par réflexion relative au cercle (*Annales*, tom. XVII, pag. 1.re) a donné ensuite l'équation générale de cette courbe (pag. 128); qu'il faut espérer qu'il en sera de même pour la caustique par réfraction, et que dès lors il aura ainsi lui-même rendu inutile le mémoire que nous extrayons présentement. Nous aurons soin d'ailleurs de l'analyser de manière qu'il n'y ait de perdus pour le lecteur que des détails de calcul et des transformations que chacun peut aisément suppléer à son gré.

Pour rendre les formules d'une interprétation plus facile, voici les notations que nous croyons devoir adopter.

Soit r le rayon d'un cercle séparateur de deux milieux plans homogènes, d'un pouvoir réfringent inégal, dont nous supposerons le centre à l'origine des coordonnées rectangulaires. Le point rayonnant sera (x', y'), le point d'incidence d'un rayon quelconque, sur la circonférence du cercle, sera (t, u), et le point de contact du rayon réfracté correspondant avec la caustique sera (x, y) ; enfin θ' sera l'angle d'incidence et θ l'angle de réfraction ; et nous supposerons que le rapport constant de leurs sinus est celui de λ' à λ ; de manière que, excepté t et u, toutes les lettres accentuées seront relatives à l'incidence, et toutes les lettres non accentuées relatives à la réfraction. On aura d'ailleurs

$$t^2+u^2=r^2. \qquad (1)$$

Si l'on voulait faire usage du théorème de MM. Sturm et Quetelet (*Annales*, tom. XVI, pag. 307) il faudrait considérer la caustique comme la développée de l'enveloppe de tous les cercles compris dans l'équation générale

$$\frac{(x-t)^2+(y-u)^2}{\lambda^2}=\frac{(x'-t)^2+(y'-u)^2}{\lambda'^2},$$

dans laquelle t et u sont deux paramètres, liés par la relation (1). On trouve facilement, pour l'équation de cette enveloppe, trajectoire orthogonale des rayons réfractés, l'équation du quatrième degré

$$\{\lambda'^2(x^2+y^2-r^2)-\lambda^2(x'^2+y'^2-r^2)\}^2=4\lambda^2\lambda'^2r^2\{(x-x')^2+(y-y')^2\};$$

ce qui confirme complètement la conjecture que nous avions formée il y a déjà bien long-temps ; savoir, que les caustiques les plus compliquées sont souvent des développées de courbes assez simples.

La recherche de la caustique pourrait donc se réduire à celle de la développée de la courbe, donc voilà l'équation. M. de St-Laurent ne pense pas qu'il y ait beaucoup à gagner à suivre cette voie ; et en conséquence, il considère immédiatement la caustique comme la courbe enveloppe des rayons réfractés. On pourrait tout au moins chercher quels sont les points de courbure *maxima* et *minima* de cette trajectoire, et en déterminer les centres de courbure, qui seraient les points de rebroussement de la caustique.

M. de St-Laurent prend pour données immédiates la longueur du rayon incident, comptée depuis le point rayonnant jusqu'au point d'incidence, et la longueur de la corde interceptée sur sa direction par le cercle séparateur. Il prend pour inconnues immédiates la longueur du rayon réfracté, comptée depuis le point d'incidence jusqu'à son point de contact avec la caustique, et la corde interceptée sur la direction de ce rayon par le cercle séparateur. Nous allons d'abord employer les coordonnées. Il nous sera facile ensuite de passer aux données et aux inconnues de l'auteur.

Le rayon incident, la normale au cercle au point d'incidence et le rayon réfracté font avec l'axe des x des angles dont les tangentes tabulaires sont respectivement

$$\frac{y'-u}{x'-t}\,, \qquad \frac{u}{t}\,, \qquad \frac{y-u}{x-t}\,;$$

d'où on conclut, par les formules connues,

$$\text{Sin.}\theta=\frac{\dfrac{y-u}{x-t}-\dfrac{u}{t}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{u^2}{t^2}\right)\left\{1+\left(\dfrac{y-u}{x-t}\right)^2\right\}}}=\frac{yt-xu}{\sqrt{(t^2+u^2)\{(x-t)^2+(y-u)^2\}}}\,,$$

$$\text{Sin.}\theta'=\frac{\dfrac{y'-u}{x'-t}-\dfrac{u}{t}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{u^2}{t^2}\right)\left\{1+\left(\dfrac{y'-u}{x'-t}\right)^2\right\}}}=\frac{y'u-x't}{\sqrt{(t^2+u^2)\{(x'-t)^2+(y'-u)^2\}}}\,;$$

et ensuite, par les lois de la dioptrique,

$$\frac{yt-xu}{\lambda\sqrt{(x-t)^2+(y-u)^2}}=\frac{y't-x'u}{\lambda'\sqrt{(x'-t)^2+(y'-u)^2}}\,; \qquad (2)$$

c'est là, pour chaque point d'incidence (t,u), l'équation en x et y du rayon réfracté. Cette équation semblerait être double, à raison des doubles signes dont les radicaux sont susceptibles; mais c'est bien ainsi qu'elle doit être écrite pour la question qui nous occupe. Si, en effet, on suppose $\lambda'=\lambda$, c'est-à-dire, si l'on suppose que la réfraction est nulle, le rayon réfracté ne doit être alors que le prolongement du rayon incident, et doit conséquemment contenir le point rayonnant (x',y') sur sa direction. Il faut donc que, dans ce cas, l'équation soit satisfaite en posant à la fois $x=x'$ et $y=y'$. C'est ce qui arrive en effet et ce qui n'aurait pas lieu si nous eussions adopté d'autres signes.

Si pourtant, dans la vue de résoudre cette équation, on en fait disparaître les radicaux, elle montera au second degré. On n'a pas lieu de s'en étonner, et il est aisé de reconnaître quelles sont les deux droites qu'elle exprime alors. En faisant en effet évanouir les radicaux, λ et λ' n'y entrent plus qu'au quarré, de sorte qu'elle reste la même en changeant le signe de λ ou de $Sin.\theta$; ce qui prouve qu'elle appartient alors au rayon réfracté et a une autre droite passant comme lui par le point d'incidence et symétriquement située avec lui par rapport à la normale au cercle en ce point.

Ces considérations nous paraissent expliquer clairement comment il arrive que les caustiques par réfraction ont des branches physiquement inutiles, que M. de St-Laurent appelle branches *obscures*, par opposition aux branches utiles qu'il appelle *lumineuses*. Il est clair qu'il doit en être ainsi toutes les fois que l'équation de la caustique ne renferme que des puissances paires de λ et λ'; et c'est ce qu'on remarque, en particulier, pour la caustique par réfraction relative à la ligne droite (*Annales*, tom. XI, pag. 236 et 251). Il arrive bien quelque chose d'analogue pour les caustiques par réflexions, du moins lorsque leurs équations sont rendues rationnelles; mais alors la branche obscure se réduit au point rayonnant lui-même, de l'expression duquel on peut toujours débarrasser l'équation. Ces réflexions montrent au surplus toute l'importance du conseil que donne M. Poncelet (*Annales*, tom. VIII, pag. 232) de bien étudier, dans chaque problème, les *équations de départ*, afin de se mettre en état d'interpréter exactement les résultats qu'on en obtient.

Si présentement nous rendons aux coordonnées t et u du point d'incidence leur variabilité, l'équation (2) appartiendra à tous les rayons réfractés; et, pour obtenir l'équation de leur courbe enveloppe, c'est-à-dire, de la caustique, il faudra, suivant les théories connues (*Annales*, tom. III, pag. 361), 1.° différentier les équations (1) et (2), par rapport à t et u seulement; 2.° éliminer entre leurs différentielles le rapport de $\mathrm{d}t$ à $\mathrm{d}u$; 3.° enfin, éliminer t et u entre l'équation résultante et ces mêmes équations (1) et (2).

Les différentielles de ces deux équations sont

$$tdt+udu=0\ ,$$

$$\frac{\{(x-t)^2+(y-u)^2\}(ydt-xdu)-(yt-xu)\{(x-t)dt+(y-u)du\}}{\lambda\{(x-t)^2+(y-u)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\{(x'-t)^2+(y'-u)^2\}(y'dt-x'du)-(y't-x'u)\{(x'-t)dt+(y'-u)du\}}{\lambda'\{(x'-t)^2+(y'-u)^2\}^{\frac{3}{2}}}\ .$$

Multipliant la dernière par u, remplaçant à mesure udu par sa valeur $-tdt$, que donne la première, et divisant enfin par dt, il viendra

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(xt+yu)\{(x-t)^2+(y-u)^2\}-(yt-xu)^2}{\lambda\{(x-t)^2+(y-u)^2\}^{\frac{3}{2}}}\\ =&\frac{(x't+y'u)\{(x'-t)^2+(y'-u)^2\}-(y't-x'u)^2}{\lambda'\{(x'-t)^2+(y'-u)^2\}^{\frac{3}{2}}}\ ;\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

de sorte que l'équation en x et y de la caustique cherchée sera le résultat de l'élimination de t et u entre les équations (1), (2), (3).

Il suit de là que, pour un point d'incidence donné (t, u), l'équation (3) est l'équation en x et y d'une courbe qui coupe le rayon réfracté en son point de contact avec la caustique. Or, lorsqu'un point est ainsi donné par l'intersection de deux lignes dont on a les équations, il l'est également par les intersections de toutes autres lignes dont les équations seraient des combinaisons quelconques de celles-là ; d'où il suit que, dans la recherche qui nous occupe, nous pourrons remplacer l'une ou l'autre des équations (2) et (3) par de semblables combinaisons.

Mais puisque, pour parvenir à notre but, il faut éliminer t et u entre elles, au moyen de l'équation (1), nous devons principalement nous attacher à profiter de cette dernière équation pour rabaisser le degré des deux autres par rapport à ces deux paramètres. On a d'abord, en vertu de l'équation (1),

$$(x-t)^2+(y-u)^2=x^2+y^2+t^2+u^2-2(xt+yu)=(x^2+y^2+r^2)-2(xt+yu)\ ,$$

$$(x'-t)^2+(y'-u)^2=x'^2+y'^2+t^2+u^2-2(x't+y'u)=(x'^2+y'^2+r^2)-2(x't+y'u)\ .$$

On a ensuite, identiquement et par l'équation (1),

$$(yt-xu)^2=(t^2+u^2)(x^2+y^2)-(xt+yu)^2=r^2(x^2+y^2)-(xt+yu)^2\ ,$$

$$(y't-x'u)^2=(t^2+u^2)(x'^2+y'^2)-(x't+y'u)^2=r^2(x'^2+y'^2)-(x't+y'u)^2\ ;$$

au moyen de quoi les équations (2) et (3) deviennent, en quarrant la première,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{r^2(x^2+y^2)-(xt+yu)^2}{\lambda^2\{(x^2+y^2+r^2)-2(xt+yu)\}}\\=&\frac{r^2(x'^2+y'^2)-(x't+y'u)^2}{\lambda'^2\{(x'^2+y'^2+r^2)-2(x't+y'u)\}}\ ,\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(x^2+y^2+r^2)(xt+yu)-(xt+yu)^2-r^2(x^2+y^2)}{\lambda\{(x^2+y^2+r^2)-2(xt+yu)\}^{\frac{3}{2}}}\\=&\frac{(x'^2+y'^2+r^2)(x't+y'u)-(x't+y'u)^2-r^2(x'^2+y'^2)}{\lambda'\{(x'^2+y'^2+r^2)-2(x't+y'u)\}^{\frac{3}{2}}}\ .\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Si nous posons présentement

$$\sqrt{(x^2+y^2+r^2)-2(xt+yu)}=z\ ,$$

$$\sqrt{(x'^2+y'^2+r^2)-2(x't+y'u)}=z'\ ;$$

z et z' seront les longueurs des rayons réfracté et incident, comptées depuis le point d'incidence (t, u) jusqu'au point de contact (x, y) avec la caustique d'une part et jusqu'au point rayonnant (x', y') de l'autre. On en tirera, en quarrant et transposant

$$2(xt+yu)=(x^2+y^2+r^2)-z^2\ , \qquad (6)$$

$$2(x't+y'u)=(x'^2+y'^2+r^2)-z'^2\ ; \qquad (6')$$

substituant ces valeurs dans les équations (4) et (5), après les avoir préalablement multipliées par *quatre*, elles deviendront, en réduisant,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{z^4-2(x^2+y^2+r^2)z^2+(x^2+y^2-r^2)^2}{\lambda^2z^2}\\ =&\frac{z'^4-2(x^2+y^2+r^2)z'^2+(x'^2+y'^2-r^2)^2}{\lambda'^2z'^2}\ ,\end{aligned}\right\}\ (7)$$

$$\frac{z^4-(x^2+y^2-r^2)^2}{\lambda z^3}=\frac{z'^4-(x'^2+y'^2-r^2)^2}{\lambda' z'^3}\ . \qquad (8)$$

Si l'on parvient à tirer de ces équations les valeurs de z et z', on en conclura facilement, au moyen des équations (6) et (6'), celles de t et u, dont la substitution dans l'équation (1) conduira à l'équation en x et y de la caustique cherchée.

Ces équations sont des *sixième* et *septième* degrés, par rapport à z et z'; mais il est aisé d'en déduire d'autres d'un degré moins élevé. D'abord l'équation (7) peut être écrite comme il suit :

$$\frac{z^8-2(x^2+y^2+r^2)z^6+(x^2+y^2-r^2)^2z^4}{\lambda^2z^6}$$

$$=\frac{z'^8-2(x'^2+y'^2+r^2)z'^6+(x'^2+y'^2-r^2)^2z'^4}{\lambda'^2z'^6}\ ;$$

mais, en quarrant l'équation (8), elle devient

$$\frac{z^8-2(x^2+y^2-r^2)^2z^4+(x^2+y^2-r^2)^4}{\lambda^2z^6}$$

$$=\frac{z'^8-2(x'^2+y'^2-r^2)^2z'^4+(x'^2+y'^2-r^2)^4}{\lambda'^2z'^6}$$

ce qui donne, en retranchant,

$$\frac{2(x^2+y^2+r^2)z^6-3(x^2+y^2-r^2)^2z^4+(x^2+y^2-r^2)^4}{\lambda^2z^6}$$

$$=\frac{2(x'^2+y'^2+r^2)z'^6-3(x^2+y'^2-r^2)^2z'^4+(x'^2+y'^2-r^2)^4}{\lambda'^2z'^6}\;;$$

Changeant respectivement z^2 et z'^2 en ζ et ζ', tant dans l'équation (7) que dans cette dernière, elles deviendront

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\zeta^2-2(x^2+y^2+r^2)\zeta+(x^2+y^2-r^2)^2}{\lambda^2\zeta}\\ =&\frac{\zeta'^2-2(x'^2+y'^2+r^2)\zeta'+(x'^2+y'^2-r^2)^2}{\lambda'^2\zeta'}\;,\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2(x^2+y+r^2)\zeta^3-3(x^2+y^2-r^2)^2\zeta^2+(x^2+y^2-r^2)^4}{\lambda'^2\zeta'^3}\\ =&\frac{2(x'^2+y'^2+r^2)\zeta'^3-3(x'^2+y'^2-r^2)^2\zeta'^2+(x'^2+y'^2-r^2)^4}{\lambda'^2\zeta'^3}\;;\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

équations qui ne sont plus que des *troisième* et *sixième* degrés en ζ et ζ'. En supposant qu'on parvienne à les résoudre par rapport à ces deux inconnues, on conclura de leurs valeurs, au moyen des équations

$$2(xt+yu)=(x^2+y^2+r^2)-\zeta\;,$$

$$2(x't+y'u)=(x'^2+y'^2+r^2)-\zeta'\;,$$

celles de t et u, dont la substitution dans l'équation (1) conduira à celle de la caustique cherchée (*).

Passons présentement aux données et aux inconnues de M. de St-Laurent. Soient $2v$ et $2v'$ les longueurs des cordes respectivement interceptées par le cercle sur les directions des rayons réfracté et incident. En continuant de représenter respectivement par θ et θ' les angles de réfraction et d'incidence, et en supposant, pour fixer les idées, que les points (x,y), (x',y') sont tous deux intérieurs au cercle, ce qui est permis, puisque si, par exemple, le dernier se confondait avec son centre, le premier se confondrait avec lui ; on aura, par les premiers principes de la trigonométrie,

$$v=r\text{Cos}.\theta\ , \qquad x^2+y^2=r^2-2rz\text{Cos}.\theta+z^2\ ,$$

$$v'=r\text{Cos}.\theta'\ , \qquad x'^2+y'^2=r^2-2rz'\text{Cos}.\theta'+z'^2\ ;$$

d'où on conclura par l'élimination de Cos.θ et Cos.θ',

$$x^2+y^2=r^2+z(z-2v)\ ,\quad (11)\qquad x'^2+y'^2=r^2+z'(z'-2v')\ .\quad (11')$$

Dans l'hypothèse contraire à celle que nous venons d'admettre v et v' devraient changer de signes ; mais ces quantités devant disparaître des résultats, il importe peu d'avoir égard à cette différence.

(*) Si l'on voulait procéder à l'élimination entre les équations (9) et (10), on se priverait aussitôt des avantages de la symétrie ; symétrie qui conduit à soupçonner que l'on pourrait de ces équations en déduire deux autres où il n'entrât plus que $\zeta+\zeta'$ et $\zeta\zeta'$ et où conséquemment on pourrait éliminer l'une de ces quantités sans troubler la symétrie. L'analyste qui trouverait quelque méthode abrégée pour résoudre deux équations de la forme

$$\varphi(x)=\varphi(y)\ , \qquad \psi(x)=\psi(y)\ ,$$

rendrait incontestable un grand service à ceux qui s'occupent d'optique.

En portant les valeurs (11) et (11′) dans les équations (6) et (6′), celles-ci deviennent

$$xt+yu=r^2-vz\ ,\quad (12)\qquad x't+y'u=r^2-v'z'\ ;\quad (12')$$

ces mêmes valeurs portées dans les équations (7) et (8) donnent

$$\frac{\sqrt{r^2-v^2}}{\lambda}=\frac{\sqrt{r^2-v'^2}}{\lambda'}\ ,\qquad (13)$$

$$\frac{v(z-v)}{\lambda z}=\frac{v'(z'-v')}{\lambda' z'}\ ;\qquad (14)$$

et la recherche de l'équation en x et y de la caustique se trouve réduite à l'élimination des six quantités t, u, v, v', z, z' entre les sept équations (1), (11), (11′), (12), (12′), (13) et (14).

L'équation (14), comme l'observe M. de St-Laurent, est l'élégant théorème de Petit, au moyen duquel on peut construire la caustique par points. Lorsqu'en effet le point rayonnant, ainsi que le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction sont donnés, on peut, pour chacun des rayons incidens, construire la direction du rayon réfracté. On connaîtra donc alors λ, λ', v, v' et z', et l'équation (14) donnera la longueur z de ce rayon, c'est-à-dire, la situation de son point de contact avec la caustique.

L'élimination de t et u entre trois de nos sept équations n'offre aucune difficulté, en éliminant tour à tour u et t entre les équations (12) et (12′), on obtient

$$(xy'-x'y)t=y'(r^2-vz)-y(r^2-v'z')\ ;$$

$$(xy'-x'y)u=x'(r^2-v'z')-x(r^2-vz)\ .$$

En ajoutant les quarrés de ces deux équations et ayant égard à l'équation (1), il vient

$$r^2(xy'-x'y)^2$$

$$=(x^2+y^2)(r^2-\varrho'z')^2-2(xx'+yy')(r^2-\varrho z)(r^2-\varrho'z')+(x'^2+y'^2)(r^2-\varrho z)^2, \quad (15)$$

ce qui réduit la recherche de l'équation de la caustique à l'élimination des quatre quantités ϱ, ϱ', z, z' entre les cinq équations (11), (11'), (13), (14), (15).

M. de St-Laurent, dans la vue de se procurer des équations auxiliaires, utiles pour les applications qu'il a en vue, élimine t et u de cette autre manière : en combinant l'équation (1) avec les équations (11) et (11'), et en quarrant les équations (12) et (12') on obtient

$$(t^2+u^2)(x^2+y^2)=r^4-2r^2\varrho z+r^2z^2 ; \qquad (t^2+u^2)(x'^2+y'^2)=r^4-2r^2\varrho'z'+r^2z'^2 ;$$

$$(xt+yu)^2=r^4-2r^2\varrho z+\varrho^2z^2 ; \qquad (x't+y'u)^2=r^4-2r^2\varrho'z'+\varrho'^2z'^2 ,$$

d'où en retranchant, réduisant et extrayant les racines

$$yt-xu=z\sqrt{r^2-\varrho^2} , \quad (16) \qquad y't-x'u=z'\sqrt{r^2-\varrho'^2} . \quad (16')$$

Nous adoptons ici les signes nécessaires pour que ces équations, combinées avec l'équation (13), s'accordent avec l'équation (2).

Si, entre les équations (16) et (16') et les équations (12) et (12') respectivement, on élimine tour à tour y et y', x et x', on trouvera, en ayant égard à l'équation (1),

$$r^2x=t(r^2-\varrho z)-uz\sqrt{r^2-\varrho^2} , \quad (17)$$

$$r^2x'=t(r^2-\varrho'z')-uz'\sqrt{r^2-\varrho'^2} , \quad (17')$$

$$r^2y=u(r^2-\varrho z)+tz\sqrt{r^2-\varrho^2} , \quad (18)$$

$$r^2y'=u(r^2-\varrho'z')+tz'\sqrt{r^2-\varrho'^2} . \quad (18')$$

M. de St-Laurent en conclut, en ayant toujours égard à l'équation (1),

$$r^2(xy'-x'y)=z'(r^2-\rho z)\sqrt{r^2-\rho'^2}-z(r^2-\rho'z')\sqrt{r^2-\rho^2}\ ; \quad (19)$$

on en peut conclure aussi

$$r^2(xx'+yy')=(r^2-\rho z)(r^2-\rho'z')+zz'\sqrt{(r^2-\rho^2)(r^2-\rho'^2)}\ . \quad (20)$$

Alors l'équation de la caustique sera le résultat de l'élimination de ρ, ρ', z, z', entre les quatre équations (11), (11'), (13), (14) et l'une ou l'autre des deux équations (19) et (20).

Pour première application de ces formules, M. de St-Laurent cherche d'abord à en déduire l'équation de la caustique par réflexion d'une manière moins laborieuse qu'il ne l'avait fait (*Annales*, tom. XVII, pag. 128). On a dans ce cas $\lambda'=-\lambda$ et $\rho'=\rho$, ce qui réduit l'équation (14)

$$(z+z')\rho=2zz'\ ; \qquad (\alpha)$$

l'équation (13) devient alors inutile, mais elle prouve que les deux radicaux doivent être pris en signes contraires; de sorte que les équations (19) et (20) deviennent

$$r^2(xy'-x'y)=\{z'(r^2-\rho z)+z(r^2-\rho z')\}\sqrt{r^2-\rho^2}\ , \qquad (\beta)$$

$$r^2(xx'+yy')=(r^2-\rho z)(r^2-\rho z')-zz'(r^2-\rho^2)\ ; \qquad (\gamma)$$

il faudra y joindre les équations (11) et (11'), qui sont

$$x^2+y^2=r^2+z(z-2\rho)\ , \quad (\delta) \qquad x'^2+y'^2=r^2+z'(z'-2\rho)\ . \quad (\delta')$$

Il sera facile de chasser ρ des quatre dernières, au moyen de l'équation (α); on n'aura plus alors qu'à éliminer z et z', et on trouvera facilement, comme M. de St-Laurent l'avait déjà obtenu la première fois,

$$\{4(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)-r^2[(x+x')^2+(y+y')^2]\}^3=27r^4(xy'-x'y)^2(x^2+y^2-x'^2-y'^2)^2. \quad (21)$$

Il serait à désirer que l'on pût mettre cette équation, comme celle de la caustique par réfraction relative à la ligne droite, sous la forme irrationnelle ; elle en deviendrait probablement plus concise.

Pour deuxième application, M. de St-Laurent suppose que le point rayonnant est sur la circonférence même du cercle séparateur ; ce qu'on exprime en écrivant

$$x'^2+y'^2=r^2, \qquad z'=2\rho'.$$

C'est alors l'équation ($11'$) qui devient inutile, l'équation (14) se réduit à

$$\lambda z\rho'=2\lambda\rho(z-\rho) ; \qquad (\alpha')$$

les équations (19) et (20) deviennent

$$r^2(xy'-x'y)=2\rho'(r^2-\rho z)\sqrt{r^2-\rho'^2}-z(r^2-2\rho'^2)\sqrt{r^2-\rho^2}, \qquad (\beta')$$

$$r^2(xx'+yy')=(r-\rho z)(r^2-2\rho'^2)-2\rho'z\sqrt{(r^2-\rho^2)(r^2-\rho'^2)} ; \qquad (\gamma')$$

on doit y joindre les équations (11) et (13), qui sont

$$x^2+y^2=r^2+z(z-z\rho), \quad (\delta') \qquad \frac{\sqrt{r^2-\rho^2}}{\lambda}=\frac{\sqrt{r^2-\rho'^2}}{\lambda'}. \quad (\varepsilon')$$

Au moyen des équations (α') et (ε'), on chasse facilement de (β') et (γ') ρ', ρ'^2 et $\sqrt{r^2-\rho'^2}$ des équations (β') et (γ') ; et il ne reste plus alors qu'à éliminer ρ et z entre les deux équations résultantes et l'équation (δ'). On trouve ainsi

$$r^2\{4\lambda'^2(x^2+y^2)-\lambda^2[(x^2+y^2)+2(xx'+yy')+r^2]\}^3=27\lambda^4\lambda'^2(xy'-x'y)^2(x^2+y^2-r^2)^2. \quad (22)$$

En multipliant de part et d'autre par r^4, faisant passer le facteur r^6 du premier membre entre les crochets et se rappelant qu'ici $r^2=x'^2+y'^2$, cette équation pourra être écrite comme il suit :

$$\{4\lambda'^2(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)-\lambda^2r^2[(x+x')^2+(y+y')^2]\}^3=27\lambda^4\lambda'^2r^4(xy'-x'y)^2(x^2+y^2-x'^2-y'^2)^2 .$$

Posant alors $\lambda r=\lambda'\rho$, elle deviendra, en divisant par λ'^6,

$$\{4(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)-\rho^2[(x+x')^2+(y-y')^2]\}^3=27\rho^4(xy'-x'y)^2(x^2+y^2-x'^2-y')^2 ;$$

qui ne diffère de (21) qu'en ce que r y est changé en ρ. Il en résulte ce théorème remarquable.

La caustique par réfraction relative au cercle, dans le cas où le point rayonnant se trouve situé à la circonférence même du cercle séparateur, est en même temps la caustique par réflexion relative au même point rayonnant et à un cercle réflecteur de même centre que le premier, mais dont le rayon serait au sien dans le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence.

Pour troisième application, M. de St-Laurent suppose que la distance du point rayonnant au centre du cercle séparateur est au rayon de ce cercle comme le sinus d'incidence est au sinus de réfraction. Cette supposition donne

$$\lambda^2(x'^2+y'^2)=\lambda'^2r^2 ;$$

ou, en vertu de l'équation (11')

$$(\lambda'^2-\lambda^2)r^2=\lambda^2z'(z'-2\nu') ;$$

mais l'équation (13) donne

$$(\lambda'^2-\lambda^2)r^2=\lambda'^2\nu^2-\lambda^2\nu'^2 ;$$

donc

$$\lambda'^2\nu^2-\lambda^2\nu'^2=\lambda^2z'(z'-2\nu')$$

ou bien en transposant

$$\lambda'^2\nu^2=\lambda^2(z'^2-2\nu'z'+\nu'^2)=\lambda^2(z'-\nu')^2\ ;$$

d'où, en extrayant les racines

$$\frac{\nu}{\lambda}=\frac{z'-\nu'}{\lambda'}\ , \qquad (\alpha'')$$

équation qui, comparée à (14), donne

$$\frac{z-\nu}{z}=\frac{\nu'}{z'}\ ; \qquad (\beta'')$$

en cherchant à éliminer entre ces deux équations l'une des deux quantités ν et ν', l'autre disparaît aussi, et il vient

$$\frac{z}{\lambda}=\frac{z'}{\lambda'}\ . \qquad (\gamma'')$$

Cette équation nous apprend que les longueurs z, z' des rayons incident et réfracté sont ici dans un rapport constant. Or, c'est une des propriétés du cercle que les distances de tous les points de sa circonférence à deux points conjugués par rapport à lui sont dans un rapport constant. On a donc ce théorème :

Lorsque la distance d'un point rayonnant au centre du cercle séparateur de deux milieux est au rayon de ce cercle dans le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, les rayons émanés de ce point, après s'être réfractés convergent vers le point qui lui est conjugué.

Ce théorème dû à M. de la Rive (*Annales*, tom. XVI, pag. 76), outre que quelquefois il est *physiquement* faux, est de plus incomplet en ce qu'il ne donne que la caustique qui répond à une partie des rayons incidens. Pour le compléter, M. de St-Laurent observe, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, qu'on peut fort bien changer les signes de ρ et ρ' ; et, en ayant égard à cette circonstance, il arrive à l'équation

$$\begin{gathered}\{4\lambda^4(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)-r^2[(\lambda'^2x+\lambda^2x')^2+(\lambda'^2y+\lambda^2y')^2]\}^3 \\ =27\lambda^4r^4(xy'-x'y)^2[\lambda'^2(x^2+y^2)-\lambda^2(x'^2+y'^2)]^2\ ;\end{gathered}\tag{23}$$

qui rentre dans l'équation (21) lorsqu'on y remplace le point rayonnant par son conjugué. Il en résulte ce théorème, non moins remarquable que le premier :

La caustique par réfraction relative au cercle, lorsque la distance du point rayonnant à son centre est à son rayon dans le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, se compose 1.° du conjugué du point rayonnant, 2.° de la caustique par réflexion relative au même cercle, considéré comme courbe réflechissante, et à ce point conjugué considéré comme point rayonnant.

M. de St-Laurent, en renversant ses deux théorèmes, en tire cette conséquence que la caustique par réflexion relative au cercle peut, de deux manières différentes, être considérée comme une caustique par réfraction, savoir :

1.° En la considérant comme caustique par réfraction relative au même point rayonnant, mais à un cercle séparateur concentrique au premier, passant par le point rayonnant, et pour deux milieux tels que le rapport des sinus d'incidence et de réfraction soit le même que celui des rayons des cercles séparateur et réfléchissant ;

2.° En la considérant comme caustique par réfraction pour le même cercle devenu séparateur, mais pour un nouveau point rayonnant qui serait le conjugué du premier, par rapport à ce cercle, et pour deux milieux tels que le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction serait le même que le rapport de la distance de ce point conjugué au centre du cercle à son rayon.

M. de St-Laurent considère enfin le cas des rayons incidens parallèles. On peut, pour ce cas, poser d'abord

$$x'=\rho\text{Cos.}\psi\ ,\qquad y'=\rho\text{Sin.}\psi\ ;$$

ρ sera ainsi la distance du point rayonnant au centre du cercle séparateur, et ψ sera l'inclinaison du rayon sur l'axe des x ; en substituant dans l'équation (11') et supposant ensuite ρ infini, on aura aussi z' infini, par suite de quoi l'équation (14) deviendra simplement

$$\frac{v(z-v)}{\lambda z}=\frac{v'}{\lambda'}\ ;\qquad (\alpha''')$$

substituant ces mêmes valeurs dans les équations (19) et (20) et observant qu'on peut, après la substitution, supposer $z'=\rho$ et l'un et l'autre infinis, il viendra simplement

$$r^2(x\text{Sin}\,\psi-y\text{Cos}\,\psi)=(r^2-vz)\sqrt{r^2-v'^2}+v'z\sqrt{r^2-v^2}\ ,\qquad (\beta''')$$

$$r^2(x\text{Cos.}\psi+y\text{Sin.}\psi)=z\sqrt{(r^2-v^2)(r^2-v'^2)}-v'(r^2-vz)\ ;\qquad (\gamma''')$$

équations auxquelles il faudra adjoindre les équations (11) et (13) qui sont

$$x^2+y^2=r^2+z(z-2v)\ ;\quad (\delta''')\qquad \frac{\sqrt{r^2-v^2}}{\lambda}=\frac{\sqrt{r^2-v'^2}}{\lambda'}\ ,\quad (\varepsilon''')$$

au moyen des équations (α''') et (ε''') on pourra chasser des trois autres v', v'^2 et $\sqrt{r^2-v^2}$; et on n'aura plus qu'à éliminer v et z entres les équations résultantes et l'équation (δ'''). M. de St-Laurent supposant, pour abréger, que les rayons sont parallèles à l'axe des x, parvient à l'équation

$$(\lambda'^2-\lambda^2)x=\{(q^2r)^{\frac{2}{3}}-(p^2y)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}}+\{(pqr)^{\frac{2}{3}}-(q^2y)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}}\ ;\quad (24)$$

équation résolue par rapport à x.