ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Géométrie pure. Démonstration de divers théorèmes de géométrie

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 185-202

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__185_0>

GÉOMÉTRIE PURE.

Démonstration de divers théorèmes de géométrie ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

1. Il est connu que le pôle d'une droite par rapport à un cercle est sur la direction du rayon perpendiculaire à cette droite ; et, comme d'ailleurs, lorsqu'un quadrilatère a deux angles droits, ses deux autres angles sont égaux, il s'ensuit que *l'angle des rayons d'un cercle qui contiennent les polaires de deux droites, est égal à l'angle de ces deux droites* (*).

Cette observation fort simple conduit à des conséquences assez remarquables; on en déduit d'abord ces deux théorèmes :

I. *Si, d'un point pris arbitrairement sur le plan d'un triangle, on mène des droites à ses sommets, puis, par le même point, des perpendiculaires à ces droites; ces dernières détermineront, sur les côtés respectivement opposés, trois points qui appartiendront à une même droite.*

II. *Si, d'un point pris arbitrairement sur le plan d'un triangle, on mène des droites à ses sommets et qu'ensuite, par le même point, on mène six autres droites divisant en deux parties égales*

(*) Deux droites tracées sur un même plan déterminent quatre angles égaux deux à deux ; mais nous n'entendons parler ici que des angles aigus.

tant les angles que forment les trois premiers deux à deux que les supplémens de ces angles ; ces dernières détermineront, sur la direction de chacun des côtés opposés, deux points tels que les six points ainsi déterminés se trouveront aux intersections de quatre droites.

Si, en effet, dans chacun des deux cas, on construit la polaire réciproque de la figure dont il s'agit, relative à un cercle de rayon arbitraire, ayant son centre au point de départ des droites qui vont aux trois sommets du triangle, cette polaire réciproque sera, dans le premier cas, un autre triangle et les perpendiculaires abaissées de ses sommets sur les directions des côtés opposés, et dans le second un triangle avec les six droites qui divisent en deux parties égales tant les angles de ce triangle que leurs supplémens. Or, on sait que les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les directions des côtés opposés se coupent toutes trois au même point; d'où il suit que les points dont ces droites sont les polaires doivent appartenir tous trois à une même droite. On sait, en outre, que les six droites qui divisent tant les angles d'un triangle que leurs supplémens en deux parties égales joignent deux à deux quatre points, centres des cercles qui touchent à la fois ses trois côtés; donc les six points dont ces droites sont les polaires doivent être aux intersections de quatre droites.

2. Soient a, b, c, d, ... tant de points qu'on voudra, situés dans un même plan, auxquels soient menées des droites oa, ob, oc, od, ... par un autre point quelconque o de ce plan. Supposons qu'il existe, entre les distances mutuelles ab, ac, bc, ad, ... des points du système, une relation telle que cette relation subsiste encore en substituant respectivement à ces distances les sinus des angles aob, aoc, boc, aod, ... En d'autres termes, supposons qu'en coupant le faisceau des droites partant du point o, par une transversale arbitraire, en des points A, B, C, D, ..., il y ait entre les distances AB, AC, BC, AD, ... les mêmes relations qui existent entre les dis-

tances ab, ac, bc, ad, ... Si l'on construit la polaire réciproque de la figure, relative à un cercle situé d'une manière quelconque sur son plan, les pôles respectifs a', b', c', d', ... des droites oa, ob, oc, od, ... seront tous situés en ligne droite sur la polaire du point o, et les rayons $o'a'$, $o'b'$, $o'c'$, $o'd'$, ... menés à ces pôles du centre du cercle, feront entre eux des angles $a'o'b'$, $a'o'c'$, $b'o'c'$, $a'o'd'$, ... dont les sinus seront respectivement égaux à ceux des angles aob, aoc, boc, aod, ...; d'où il suit qu'il devra y avoir, entre les distances $a'b'$, $a'c'$, $b'c'$, $a'd'$, ... ou entre les angles $a'o'b'$, $a'o'c'$, $b'o'c'$, $a'o'd'$, ..., les mêmes relations qui existent entre les distances ab, ac, bc, ad, ... ou entre les angles aob, aoc, boc, aod, ...

Donc, *s'il existe une relation de nature projective entre les distances mutuelles de différens points* a, b, c, d, ... *d'un même plan, et que* a′, b′, c′, d′, ... *soient respectivement les points où une transversale arbitraire coupe les polaires de ces différens points, relatives à un cercle tracé arbitrairement sur leur plan; cette relation subsistera encore lorsqu'on aura accentué toutes les lettres qui désignent les points dont il s'agit.*

Ainsi, par exemple, *les polaires de quatre points harmoniques forment un faisceau harmonique et réciproquement.*

On peut déduire de là le théorème indiqué par M. Poncelet (*Annales*, tom. XVII, pag. 272) et même un théorème plus général, en remplaçant le triangle sécant par un polygone quelconque.

3 Soit r le rayon du cercle directeur, et soient d, d' les distances d'une droite arbitraire et de son pôle au centre de ce cercle; on aura, comme l'on sait $dd'=r^2$, d'où

$$d=\frac{r^2}{d'}\ , \quad d'=\frac{r^2}{d}\ ;$$

par conséquent, s'il existe une relation quelconque entre les distances du centre du cercle directeur aux points et aux droites d'une figure rectiligne, on obtiendra, en faisant usage de ces formules, la relation correspondante entre les distances de ce même centre aux points et aux droites de la figure rectiligne, polaires réciproques de celle dont il s'agit.

Pour faire une application de cette remarque, par le centre O du cercle directeur, soit menée à un autre cercle C une sécante arbitraire qui le coupe aux points M et N ; on aura

$$OM.ON=Const.$$

Les polaires des points de la circonférence du cercle C seront, comme l'on sait, tangentes à une même conique ; et, en particulier, celles des points M et N seront deux tangentes parallèles. Si l'on désigne par M′ et N′ les pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur ces tangentes, on aura, en vertu des formules ci-dessus,

$$OM'.ON'=Const. ;$$

d'où il suit que les points M′ et N′ sont à la circonférence d'un même cercle ; et, attendu que les tangentes parallèles les plus distantes sont les tangentes aux deux extrémités du grand axe de la conique, il s'ensuit que ce grand axe est le diamètre du cercle dont il s'agit. On sent d'ailleurs que, si la polaire réciproque du cercle C est une parabole, le cercle lieu des points M′ et N′ dégénérera en une tangente au sommet de cette courbe.

On voit donc qu'en général, si l'un des côtés d'un angle droit mobile passe constamment par le point O, et que l'autre côté de cet angle droit soit constamment tangent à la polaire réciproque du cercle C, son sommet décrira une circonférence qui aura pour diamètre le grand axe de cette polaire. On reconnaît aisément par là (*) que le point O est un foyer de cette polaire.

(*) Voy. *Annales*, tom. V, pag. 51.

On peut parvenir à ce résultat d'une manière plus satisfaisante au moyen des considérations suivantes :

Menons au cercle C deux tangentes parallèles quelconques ; les points de contact et le centre se trouveront sur un même diamètre qui sera en même temps perpendiculaire aux deux tangentes.

Dans la conique polaire réciproque du cercle C, cette propriété répond à la suivante :

Si, dans la conique polaire réciproque du cercle C, on mène une corde arbitraire qui passe par le centre O du cercle directeur, puis des tangentes à la courbe par les extrémités de cette corde, ces tangentes iront concourir sur la polaire du centre du cercle C, et, en outre, la droite qui unira le point O au point de concours des tangentes sera perpendiculaire à la corde de contact.

Or, le centre du cercle directeur et la polaire du centre du cercle C ne peuvent jouir d'une telle propriété à l'égard de la conique polaire de ce dernier cercle, sans être respectivement le foyer et la directrice de cette conique ; on a donc ce théorème :

La polaire réciproque d'un cercle, relative à un autre cercle considéré comme directeur, est une conique qui a pour foyer le centre du cercle directeur et pour directrice la polaire du centre de l'autre cercle.

Les tangentes menées au cercle C, par le centre O du cercle directeur, sont les polaires des points de la conique situés à l'infini, et leurs points de contact sont les pôles des tangentes en ces points, c'est-à-dire, des asymptotes ; donc la conique polaire réciproque du cercle C est une *ellipse*, une *parabole* ou une *hyperbole*, suivant que le centre O du cercle directeur est intérieur au cercle C sur sa circonférence ou extérieur à ce cercle.

4. Ce dernier théorème est susceptible d'un grand nombre d'applications ; nous nous bornerons à en indiquer quelques-unes, en énonçant d'abord un théorème connu, et en plaçant immédiatement à sa suite celui qui s'en déduit en vertu de ce qui précède.

On sait que *tous les angles inscrits à un même segment de cercle sont égaux.*

Donc, *l'angle sous lequel on voit, du foyer d'une conique, la portion d'une tangente mobile interceptée entre deux tangentes fixes quelconques est un angle constant.*

On sait que, *lorsqu'un angle mobile invariable, a son sommet fixé en un des points de la circonférence d'un cercle, la corde qu'il soutend dans le cercle enveloppe un autre cercle concentrique au premier, tandis que le pôle de cette corde, relatif au cercle primitif, décrit un troisième cercle qui lui est également concentrique.* On sait de plus que, si l'angle invariable est droit, l'un des deux cercles concentriques au cercle primitif se réduit à son centre, tandis que l'autre passe à l'infini.

Donc, *si un angle variable, circonscrit à une conique, se meut de manière à intercepter, entre ses côtés, une portion d'une tangente fixe quelconque qui soit vue du foyer sous un angle constant,* 1.° *le sommet de l'angle mobile et variable décrira une seconde conique;* 2.° *la corde de contact enveloppera une troisième conique;* 3.° *ces trois coniques auront même foyer et même directrice.* Si l'angle constant sous lequel la portion de tangente interceptée est vue du foyer est un angle droit, le sommet de l'angle variable décrira la directrice de la conique donnée, et sa corde de contact passera constamment par le foyer de cette courbe.

On sait que, *dans tout quadrilatère formé par deux tangentes à un même cercle et par les rayons menés aux points de contact, les deux diagonales se coupent orthogonalement et font respectivement des angles égaux, soit avec les tangentes, soit avec les rayons.*

Donc, *une corde étant arbitrairement inscrite à une conique, si, de l'un de ses foyers, on mène des rayons vecteurs* (1) *et* (2) *aux deux extrémités de cette corde, un rayon vecteur* (3) *au point où cette corde coupe la directrice qui répond à ce foyer, un rayon vecteur* (4) *au sommet de l'angle circonscrit qui répond à la corde inscrite, enfin deux autres rayons vecteurs* (5) *et* (6) *aux points* *où les côtés de cet angle circonscrit coupent cette même directrice, il arrivera alors que le rayon vecteur* (4) *divisera en deux parties égales l'angle des deux rayons vecteurs* (1) *et* (2) *; que le rayon vecteur* (3) *divisera en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs* (5) *et* (6), *et qu'enfin ces deux rayons vecteurs* (3) *et* (4) *seront perpendiculaires l'un à l'autre.*

Les quatre sommets du quadrilatère dont il vient d'être question ci-dessus appartenant à une même circonférence, il s'ensuit que *les côtés d'un angle circonscrit à une conique, la corde de contact et la directrice touchent une autre conique qui a même foyer que la première.*

Mais on sait que *les obliques abaissées dans le même sens et sous la même inclinaison du foyer d'une conique sur toutes ses tangentes, ont leurs pieds sur une même circonférence.*

Donc, *si, du foyer d'une conique, on abaisse, sous un même angle et dans le même sens, des obliques sur les deux côtés d'un angle circonscrit et sur sa corde de contact, la circonférence déterminée par les pieds de ces obliques, et toutes les circonférences déterminées par une semblable construction se couperont toutes au même point.* Si l'on fait varier l'angle des obliques, ce point décrira la directrice relative au foyer qu'on aura choisi.

On sait que, *si, de l'un quelconque des points de la circonférence du cercle circonscrit à un triangle, on mène, dans le même sens, des obliques également inclinées sur les trois côtés de ce triangle, les pieds de ces obliques appartiendront tous trois à une même droite.*

Donc, *un triangle étant circonscrit arbitrairement à une conique, si l'on mène de son foyer des droites aux trois sommets du triangle, puis du même point trois nouvelles droites faisant, dans le même sens, avec celles-là, des angles égaux quelconques, toute tangente à la courbe coupera ces trois dernières droites de telle sorte qu'en joignant les points d'intersection aux sommets correspondans du triangle par des droites, ces trois droites concourront en un même point.*

On sait que *tous les angles droits, circonscrits à une même conique pourvue de centre, ont leurs sommets sur la circonférence d'un cercle concentrique à cette conique.*

Donc, *si un angle droit, mobile sur le plan d'une conique, tourne autour de son sommet fixe, la corde soutendue par cet angle droit enveloppera une autre conique ayant pour foyer le sommet fixe de l'angle mobile.*

On sait que *tous les angles droits circonscrits à une même parabole ont leurs sommets sur la directrice.*

Donc, *un angle droit mobile ayant son sommet fixe en l'un quelconque des points du périmètre d'une conique, la corde qui le soutendra passera constamment par un même point de la normale menée à la courbe par le sommet de l'angle mobile.*

On sait que *tous les angles égaux circonscrits à une même parabole ont leurs sommets sur une même hyperbole équilatère.*

Donc, *si un angle quelconque, mobile et invariable, a son sommet fixé en un quelconque des points du périmètre d'une conique, la corde qui le soutendra enveloppera une autre conique.*

Etc., etc.

5. Les principes desquels nous avons déduit ces divers théorèmes et ces théorèmes eux-mêmes mettent en évidence la vérité de l'assertion contenue dans la lettre de M. Poncelet (*ibid.*, pag. 270), savoir : que *les propriétés descriptives et angulaires d'un système de coniques confocales sont les réciproques de celles qui appartiennent à un système de cercles situés dans un même plan.* Ainsi tous les théorèmes relatifs aux points de concours des tangentes communes à trois cercles, et les problèmes de contact, fournissent autant de théorèmes et de solutions de problèmes relatifs à des coniques confocales. Ainsi, par exemple, de ce que *les cordes communes deux à deux à trois cercles qui se coupent concourent toutes trois au même point*, il s'ensuit que *les sommets des angles circonscrits communs à trois coniques confocales, prises tour à*

tour deux à deux, appartiennent tous trois à une même droite.

Voici encore deux applications :

Il est visible que, *si un angle invariable se meut, sur le plan de deux cercles concentriques, de manière que ses côtés soient respectivement tangens à ces deux cercles, son sommet engendrera un troisième cercle concentrique à ces deux-là, tandis que la corde de contact en engendrera un quatrième qui leur sera également concentrique.*

Donc, *si un angle mobile et invariable a constamment son sommet au foyer commun de deux coniques de même directrice, la droite qui joindra le point d'intersection de l'un des côtés de cet angle avec une des coniques au point d'intersection de l'autre côté du même angle avec l'autre conique, enveloppera une troisième conique de même foyer et de même directrice que les deux premières ; en outre, le point de concours des tangentes menées aux deux courbes, par les extrémités de cette droite, décrira une quatrième conique qui aura aussi même foyer et même directrice que les trois autres.*

On trouve aisément que, *si, sur la droite qui joint le centre de similitude directe de deux cercles à leur centre de similitude inverse, prise pour diamètre, on décrit un troisième cercle, les deux premiers seront vus sous des angles égaux de chacun des points de la circonférence de ce troisième cercle.*

Donc, *si une droite se meut sur le plan de deux sections coniques confocales, de telle sorte que les cordes interceptées par les deux courbes soient vues constamment de leur foyer commun sous des angles égaux, cette droite enveloppera, dans son mouvement, une troisième conique, de même foyer que les deux premières.*

6. Si l'on remarque que le pôle d'un plan, relatif à une sphère directrice, est situé sur la perpendiculaire abaissée de son centre sur ce plan, et que la polaire conjuguée d'une droite, par rapport

à cette même sphère, se trouve située dans le plan conduit perpendiculairement à cette droite par le centre de la même sphère, on en pourra tirer les conclusions suivantes:

1.° *L'angle de deux plans est égal à celui des rayons de la sphère qui contiennent leurs pôles.*

2.° *L'angle de deux droites est égal à l'angle des plans conduits par le centre de la sphère et par leurs polaires conjuguées.*

3.° *L'angle d'une droite et d'un plan est égal à l'angle du rayon qui contient le pôle du plan et du plan qui, passant par le centre de la sphère, contient la polaire conjuguée de la droite* (*).

Soit placé au centre de la sphère directrice le sommet d'un angle polyèdre quelconque; les rayons vecteurs des pôles de ses faces, lesquels pôles seront infiniment distants, seront des diamètres respectivement perpendiculaires à ces faces, et les plans vecteurs des polaires conjuguées de ses arêtes seront les plans consécutifs déterminés par ces mêmes diamètres. On formera donc ainsi un nouvel angle polyèdre qui sera dit le *supplémentaire* du premier, attendu que les angles plans de chacun d'eux seront les supplémens des angles dièdres correspondans de l'autre.

Considérons, plus généralement, un angle polyèdre gauche, c'est-à-dire, un assemblage de plans consécutifs qui, au lieu de concourir tous au même point, concourent deux à deux suivant les côtés d'un polygone gauche. Il est visible que les rayons vecteurs des pôles de ses faces constitueront les arêtes d'un angle polyèdre ordinaire dont les faces seront les plans vecteurs des polaires conjuguées des arêtes du premier. Ainsi les angles plans et les angles dièdres de l'angle polyèdre gauche auront, pour supplémens respectifs, les angles dièdres et les angles plans correspondans de l'angle polyèdre ordinaire.

Ces considérations sont susceptibles d'une multitude d'applications

(*) On comprend qu'ici, comme au commencement de l'article, il ne peut être question que d'angles aigus.

diverses, parmi lesquelles nous choisirons, comme exemples, les deux suivantes :

Il est connu que *les arcs de grands cercles abaissés des trois sommets d'un triangle sphérique, sur les directions des côtés respectivement opposés, se coupent tous trois au même point.*

Donc, *dans deux triangles sphériques, polaires l'un de l'autre, les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent tous trois à un même arc de grand cercle.*

Il a été démontré par MM. Hachette et Binet que, *si deux plans mobiles sont assujettis à passer constamment par deux droites fixes non situées dans un même plan, et à se couper constamment à angle droit, le lieu de leur intersection sera une surface gauche du second ordre, se réduisant à une surface conique, si les deux droites sont dans un même plan, et à un cylindre, si elles sont parallèles.*

Donc, *lorsqu'une droite glisse sur deux autres, non situées dans un même plan, de telle sorte que la partie interceptée entre elles soit constamment vue sous un angle droit d'un certain point de l'espace ; cette droite engendrera une surface gauche du second ordre, laquelle, lorsque les deux droites fixes seront dans un même plan, se réduira au plan de ces droites.* Dans le dernier cas, la droite mobile enveloppera une ligne du second ordre.

7 Concevons que, par l'accroissement progressif du nombre et la diminution progressive de la grandeur de ses angles plans et de ses angles dièdres, l'angle polyèdre gauche, dont il a été question ci-dessus, devienne une surface développable, l'angle polyèdre supplémentaire correspondant deviendra une surface conique, et ces deux surfaces conserveront les propriétés relatives de celles dont elles seront les limites.

Si les génératrices rectilignes de cette surface développable sont d'inclinaison constante par rapport à un certain plan, les rayons vecteurs des pôles de ses plans tangens feront des angles égaux avec le rayon vecteur du pôle de ce plan, et conséquemment la surface conique supplémentaire sera une surface de révolution.

Si, dans ce même cas, l'arête de rebroussement de la surface développable se réduit à un point, cette surface développable se transformera en un cône de révolution et sa polaire en une courbe plane; d'où on voit que la surface conique, qui a pour base la courbe polaire d'un cône de révolution, est elle-même de révolution.

8. Par une droite quelconque pq, et par chacun des points a, b, c, d, ... de l'espace, faisons passer des plans paq, pbq, pcq, pdq, ..., et supposons qu'il existe, entre les distances mutuelles de ces points, une relation telle qu'elle donne lieu à une autre relation tout-à-fait semblable entre les sinus des angles dièdres formés par les plans qui interceptent ces distances; en d'autres termes, supposons qu'une transversale rectiligne perce ces plans en des points A, B, C, D, ..., tels que la même relation subsiste encore en remplaçant respectivement les points de la première suite par ceux-ci; les pôles respectifs a', b', c', d', ... ne seront autres que les points où les plans polaires des points a, b, c, d, ... seront percés par la polaire conjuguée de la droite pq. Or, les rayons vecteurs de ces pôles faisant entre eux des angles égaux aux angles dièdres des plans correspondans, il s'ensuit que la relation supposée subsistera encore en y changeant a, b, c, d, ... en a', b', c', d', ..., respectivement.

Donc, *s'il existe une relation de nature projective entre les distances mutuelles de différens points* a, b, c, d, ... *de l'espace, et que* a', b', c', d', ... *soient respectivement les points où une transversale arbitraire perce les plans polaires de ces différens points, relatifs à une sphère quelconque; cette relation subsistera encore lorsqu'on aura accentué toutes les lettres qui désignent les points de l'espace dont il s'agit.*

Ainsi, par exemple, *les plans polaires de quatre points harmoniques forment un système harmonique, et réciproquement;* et il en est de même de quatre droites harmoniques et de leurs polaires conjuguées.

Il est connu que, si a, b, c, d sont les sommets consécutifs d'un quadrilatère gauche, et qu'une surface du second ordre coupe le côté ab en e et f, le côté bc en g et h, le côté cd en i et k, le côté da en l et m, on aura

$$ae.af.bg.bh.ci.ck.dl.dm = be.bf.cg.ch.di.dk.al.am\ ;$$

et, parce que cette relation est de nature projective, on en déduira la suivante :

Soient a, b, c, d les quatre faces d'un angle polyèdre gauche. Soit une surface du second ordre à laquelle soient menés deux plans tangens e et f par l'arête (ab), deux plans tangens g et h par l'arête (bc), deux plans tangens i et k par l'arête (cd), et enfin deux plans tangens l et m par l'arête (da). Si l'on désigne respectivement par a', b', c', d', e', f', g', h', i', k', l' les points où ces douze plans coupent une transversale rectiligne quelconque, on aura

$$a'e'.a'f'.b'g'.b'h'.c'i'.c'k'.d'l'.d'm' = b'e'.b'f'.c'g'.c'h'.d'i'.d'k'.a'l'.a'm'\ .$$

9. Soit r le rayon d'une sphère directrice. Soit d la distance de son centre à un point, une droite ou un plan ; et soit d' la distance du même centre au plan polaire de ce point, à la polaire conjuguée de cette droite ou au pôle de ce plan ; on aura, comme l'on sait, $dd'=r^2$ d'où

$$d=\frac{r^2}{d'}\ ,\qquad d'=\frac{r^2}{d}\ .$$

Par conséquent, s'il existe une relation quelconque entre les distances du centre de la sphère directrice aux sommets, arêtes et faces d'un polyèdre, on obtiendra, en faisant usage de ces formules, la relation correspondante entre les distances du même centre aux faces, arêtes et sommets d'un autre polyèdre, polaire réciproque de celui-là. Ces deux polyèdres auront évidemment un égal nombre d'arêtes, et chacun d'eux aura autant de sommets trièdres, tétraèdres, pentaèdres, ..., que l'autre aura des faces triangulaires, quadrangulaires, pentagonales, ...

En raisonnant ici comme nous l'avons fait ci-dessus (3), on reconnaîtra aisément que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de la sphère directrice sur tous les plans tangens à la polaire réciproque d'une autre sphère, est une sphère décrite sur le grand axe de cette polaire pris pour diamètre. Cette dernière sphère se réduit d'ailleurs au plan tangent au sommet, lorsque la surface polaire est un paraboloïde.

On reconnaît par là que la polaire réciproque d'une sphère, par rapport à une autre sphère directrice, est une surface de révolution du second ordre, ayant pour foyer le centre même de la sphère directrice. Voici, au surplus, un autre moyen de parvenir à cette conclusion.

Lorsqu'une surface cylindrique est circonscrite à une sphère, la ligne de contact est plane et perpendiculaire aux génératrices rectilignes de cette surface. En passant donc de cette sphère à sa polaire réciproque, cette propriété se transformera dans la suivante :

Si un cône circonscrit à la polaire réciproque d'une sphère a son sommet dans le plan polaire de son centre, le plan de la ligne de contact passera par le centre de la sphère directrice et se trouvera perpendiculaire à la droite qui unit ce point au sommet du cône.

Or, le centre de la sphère directrice et le plan polaire du centre de l'autre sphère ne peuvent jouir d'une telle propriété, à l'égard de la polaire réciproque de cette dernière, à moins que ce point et ce plan n'en soient le foyer et le plan directeur.

Donc, *la polaire réciproque d'une sphère, par rapport à une autre sphère, est une surface de révolution du second ordre, qui a* *pour foyer le centre de la sphère directrice et pour plan directeur le plan polaire du centre de l'autre sphère.*

On s'assurera d'ailleurs facilement (3) que cette surface polaire réciproque est un *ellipsoïde*, un *paraboloïde* ou un *hyperboloïde*, suivant que le centre de la sphère directrice est intérieur à l'autre sphère, sur sa surface ou hors d'elle.

10. Cette théorie est susceptible d'un grand nombre d'applications entre lesquelles nous choisirons les suivantes :

On sait que *tous les angles inscrits à une sphère, qui s'appuyent sur un même diamètre sont droits.*

Donc, *si l'on mène deux plans tangens à une surface de révolution du second ordre, par une droite tracée arbitrairement dans son plan directeur ; les deux plans déterminés par le foyer et par les intersections des deux plans tangens avec un autre plan tangent quelconque, seront rectangulaires.*

On sait que *le cône circonscrit à une sphère et celui qui, ayant son centre pour sommet, passe par la ligne de contact du premier, sont deux cônes de révolution ayant pour axe commun la droite qui joint leur sommet, laquelle est perpendiculaire au plan de la ligne de contact.*

Donc, 1.° *toute surface conique qui, ayant son sommet au foyer d'une surface de révolution du second ordre, passe par une section plane quelconque de cette surface de révolution, est elle-même une surface conique de révolution ;* 2.° *la droite qui joint le foyer au pôle du plan de la section, faite dans la surface du second ordre, est l'axe de la surface conique ;* 3.° *enfin cet axe est perpendiculaire au plan déterminé par le foyer et par la commune section du plan directeur et du plan de la section faite dans la surface du second ordre.*

On sait que *le centre d'une sphère, le sommet d'un cône circonscrit et le cercle de contact sont situés sur une même autre sphère.*

Donc, *le plan directeur d'une surface de révolution du second* *ordre, une surface conique circonscrite et le plan de la ligne de contact touchent une autre surface de révolution du second ordre, de même foyer que la première.* On tirerait de là des conséquences analogues à celles qui ont été énoncées (4).

On sait que *le lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les faces sont constamment tangentes à une surface quelconque du second ordre, pourvue d'un centre, est une sphère qui lui est concentrique.*

Donc, *si un angle trièdre tri-rectangle mobile a son sommet en un point fixe, le plan mobile, déterminé par les intersections de ses trois arêtes avec une surface quelconque du second ordre, enveloppera une surface de révolution de même ordre, dont le foyer sera le sommet fixe de l'angle trièdre mobile.*

On sait que *le lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les faces touchent constamment une surface du second ordre dépourvue de centre, est un plan.*

Donc, *si un angle trièdre tri-rectangle mobile a son sommet en un point fixe, pris sur une surface quelconque du second ordre, le plan déterminé par les intersections de ses trois arêtes avec cette surface passera constamment par un même point de la normale qui répond au sommet de l'angle.*

Etc., etc., etc.

11. On voit donc que *les propriétés angulaires et descriptives d'un système de surfaces de révolution du second ordre* confocales *sont réciproques de celles qui appartiennent à un système de sphères, situées arbitrairement dans l'espace.* Conséquemment, tout théorème ou tout problème relatif à de telles sphères a nécessairement son analogue relatif à un pareil nombre de surfaces de révolution confocales du second ordre. Ainsi, par exemple, de ce que les plans cordes communs à trois sphères, prises deux à deux, se coupent tous trois suivant une même droite, et de ce que les plans cordes communs à quatre sphères, prises également deux à deux, con-

courent tous six au même point, il s'ensuit que les surfaces coniques circonscrites à trois surfaces de révolution confocales du second ordre, prises deux à deux, ont leurs trois sommets sur une même droite, et que les surfaces coniques circonscrites à quatre surfaces de révolution confocales du second ordre, prises également deux à deux, ont leurs six sommets situés dans un même plan, aux intersections de quatre droites.

Voici encore deux applications :

Il est manifeste que, *si un angle trièdre mobile et invariable a ses faces respectivement tangentes à trois sphères concentriques, son sommet décrira, dans l'espace, une quatrième sphère, concentrique à ces trois-là, tandis que le plan des trois points de contact enveloppera une cinquième sphère, qui leur sera également concentrique.*

Donc, *lorsque trois surfaces de révolution confocales du second ordre ont le même plan directeur, si un angle trièdre, mobile et invariable quelconque, tourne autour de son sommet, fixé à leur foyer commun, le plan des intersections respectives de ses arêtes avec ces trois surfaces enveloppera une quatrième surface de révolution du second ordre, et le point de concours des plans tangens à ces surfaces en ces trois points en décrira une cinquième. En outre, ces deux dernières auront même foyer et même plan directeur que les trois autres.*

On prouve aisément que *la sphère qui a pour diamètre la distance entre les centres de similitude directe et inverse de deux sphères données est telle que, de chacun des points de sa surface, on voit ces deux sphères sous le même angle.*

Donc, *si un plan se meut dans l'espace, de telle sorte qu'il coupe constamment deux surfaces de révolution confocales du second ordre suivant des courbes qui appartiennent à des cônes de révolution égaux, ayant leur foyer pour sommet commun, ce plan enveloppera une troisième surface de révolution du second ordre, de même foyer que les deux premières.*

Et de là encore,

Si un plan se meut dans l'espace, de manière que ses intersections avec trois surfaces de révolution confocales du second ordre, appartiennent à trois cônes égaux de révolution, ayant leur foyer pour sommet commun, ce plan enveloppera une surface conique du second ordre.

12. Nous croyons devoir déclarer, en terminant, qu'il est fort loin de notre pensée de prétendre nous attribuer la propriété exclusive des divers théorèmes que nous venons de démontrer, et dont il nous eût été facile d'étendre indéfiniment la liste. Nous ne doutons pas que quelques-uns d'entre eux ne soient déjà connus, et il se pourrait même que tous eussent déjà été découverts par d'autres que par nous. Tout ce que nous pouvons affirmer avec certitude, c'est qu'en rédigeant l'article qu'on vient de lire, nous ne nous sommes uniquement aidés que du contenu de la lettre de M. Poncelet déjà citée. C'est sans doute un devoir, lorsqu'on s'aide du travail d'autrui, de citer soigneusement les sources où l'on a puisé, mais on serait évidemment découragé de toutes recherches si, après être parvenu, par ses propres méditations, à quelque résultat que l'on croit nouveau, on était tenu, avant de rien mettre au jour, de lire tout ce qui aurait pu être écrit sur le même sujet.