ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER
ROCHE
VALLÈS

Solution des quatre problèmes de géométrie énoncés à la pag. 56 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 175-182
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__175_0>

Solution des quatre problèmes de géométrie énoncés à la pag. 56 *du présent volume* ;

Par MM. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne ; Roche, professeur de Mathématiques, de physique et de chimie à l'École d'artillerie de la marine, et Vallès, élève ingénieur des ponts et chaussées.

Lorsqu'un corps pesant pose par plusieurs points ou par une base finie sur un plan horizontal, on sait qu'il ne peut y être en équilibre qu'autant que la projection de son centre de gravité sur ce plan, tombe dans l'intérieur ou du moins ne tombe pas en dehors du plus petit polygone convexe qui enferme tous les points d'appui.

Mais la stabilité de l'équilibre d'un tel corps peut être plus ou moins grande ; et d'abord elle sera évidemment d'autant plus grande, toutes choses égales d'ailleurs, que son centre de gravité sera plus voisin de sa base ; et, pour le dire en passant, c'est par la raison contraire que nos voitures publiques versent si fréquemment.

La base du corps étant donnée, ainsi que l'élévation de son centre de gravité, si cette base est un cercle et que le centre de gravité se projette à son centre, il est manifeste que l'équilibre sera également stable dans toutes les directions ; mais il n'en sera plus de même dans le cas contraire, c'est-à-dire, lorsque la base cessera d'être un cercle ou lorsque cette base étant un cercle, la projection du centre de gravité ne coïncidera plus avec son centre.

Si, par exemple, cette base est une courbe fermée, et que du point où le centre de gravité se projette sur elle, on lui mène des normales, il est manifeste que la stabilité sera la plus grande possible dans le sens de la normale la plus longue, et la moindre possible du côté de la plus courte. Il est visible, en outre, que, par un changement de disposition dans les parties du corps qui, sans élever ni abaisser le centre de gravité, en déplacerait seulement la projection, on ne pourrait augmenter la stabilité dans un sens sans la diminuer en même temps dans l'autre. Si, par exemple on faisait coïncider la projection du centre de gravité avec l'une des extrémités de la plus longue corde qui pût être menée dans la base, on aurait, dans la direction de cette extrémité à l'autre, la plus grande stabilité possible, et une stabilité tout-à-fait nulle dans la direction opposée.

Toutes ces remarques subsistent également, soit que la courbe fermée qui forme la base du corps soit soumise à la continuité mathématique, soit qu'elle soit simplement soumise à la continuité physique, ainsi qu'il arriverait si elle était formée par des courbes diverses et des droites, tangentes les unes aux autres. Quant au cas où le périmètre de cette base présenterait des angles rectilignes, curvilignes ou mixtilignes, on pourrait remplacer leurs sommets par des courbes infiniment petites d'un rayon de courbure nul, dirigé vers la projection du centre de gravité; de sorte qne les droites menées de ce centre aux sommets des angles de la base devraient être réputées des normales.

Pour qu'un corps pose le plus convenablement sur un plan qu'il touche par une base finie, il convient que, dans le sens même où ce corps a la moindre stabilité, cette stabilité soit néanmoins aussi grande qu'elle puisse l'être. Il poserait, au contraire, de la manière la moins favorable, si, dans le sens de la plus grande stabilité, sa stabilité était la moindre possible.

On se trouve donc conduit, par ces considérations, à se proposer les deux problèmes généraux que voici :

I. *Quel est, dans l'intérieur d'un polygone plan rectiligne, mixtiligne ou curviligne, ou d'une courbe plane fermée, continue ou discontinue, le point dont la moindre distance à son périmètre est* *la plus grande possible, ou celui dont la plus grande distance à son périmètre est la moindre possible ?*

En étendant la question aux trois dimensions de l'espace, on est conduit à cet autre problème général :

II. *Quel est dans l'intérieur d'un polyèdre terminé par des surfaces planes ou courbes, ou dans l'intérieur d'une surface courbe fermée, continue ou discontinue, le point dont la moindre distance à cette surface est la plus grande possible, ou celui dont la plus grande distance à cette même surface est la moindre possible ?*

Ce sont ces problèmes, bornés au triangle et au tétraèdre, les polygone et polyèdre les plus simples, que nous avons entendu proposer à la pag. 56 du présent volume, et nous regrettons de ne pas en avoir fait précéder l'énoncé des développemens dans lesquels nous venons d'entrer, et qui en auraient mieux fait saisir l'esprit.

Il est résulté de là que deux des géomètres qui se sont occupés de ces problèmes, MM. Roche et Vallès, ont entendu, par plus courte distance d'un point au périmètre d'un triangle, la plus courte des perpendiculaires abaissées de ce point sur ses côtés, et par plus longue distance de ce point à ce même périmètre la plus longue des droites menées de ce point aux trois sommets, et ils en ont agi d'une manière analogue pour le tétraèdre. Quant à M. Bobillier, il a constamment considéré le mot *distance* comme synonyme de *perpendiculaire sur les côtés*.

Les deux problèmes qu'il s'agissait de résoudre paraissaient être ceux-ci :

I. *Placer un point dans l'intérieur d'un triangle, de telle sorte qu'en menant de ce point des perpendiculaires sur les côtés du triangle et des droites à ses sommets, la plus courte de ces six droites soit la plus grande possible, ou de telle sorte que la plus longue de ces six droites soit la plus courte possible ?*

II. *Placer un point dans l'intérieur d'un tétraèdre, de telle sorte qu'en menant de ce point des perpendiculaires sur ses faces et des droites à ses sommets, la plus courte de ces huit droites soit la plus* *longue possible, ou de telle sorte que la plus longue de ces huit droites soit la plus courte possible ?*

Au lieu de cela, MM. Vallès et Roche se sont proposés les quatre problèmes que voici :

I. *Quel est le point de l'intérieur d'un triangle dont la plus courte distance à ses côtés est la plus grande possible ?*

II. *Quel est le point de l'intérieur d'un triangle dont la plus grande distance à ses sommets est la moindre possible ?*

III. *Quel est le point de l'intérieur d'un tétraèdre dont la plus courte distance à ses faces est la plus grande possible ?*

IV. *Quel est le point de l'intérieur d'un tétraèdre dont la plus grande distance à ses sommets est la moindre possible ?*

Nous ne prétendons pas dire que les deux problèmes ci-dessus ne se ramènent pas à ces quatre derniers ; mais, pour en compléter l'analyse, encore faudrait-il faire voir qu'ils s'y rapportent.

MM. Vallès et Roche ont trouvé tous deux que les deux premiers problèmes sont respectivement résolus par les centres des cercles inscrit et circonscrit, et que les deux derniers l'étaient respectivement par les centres des sphères inscrite et circonscrite.

Supposons en effet, dit M. Vallès, que du centre c du cercle inscrit on abaisse des perpendiculaires r sur les trois côtés du triangle, ces perpendiculaires le diviseront en trois quadrilatères bi-rectangles, et tout autre point p, intérieur au triangle, appartiendra nécessairement à un de ces quadrilatères. La distance de ce point p au côté opposé sera nécessairement plus grande que r, et la somme de ses distances aux deux autres sera moindre que $2r$; d'où il suit que l'une d'elles au moins sera moindre que r ; M. Vallès conclut de là que le point c, centre du cercle inscrit, est celui dont la moindre distance aux côtés du triangle est la plus grande possible.

Pour prouver cette même assertion, M. Roche imagine que par le point c on a mené des parallèles aux trois côtés du triangle, et il remarque qu'il n'est aucun point p de son intérieur qui ne soit compris entre un côté et sa parallèle ; d'où il conclut que la plus courte distance de ce point p à ce côté sera moindre que la distance r au même côté du centre c du cercle inscrit.

M. Vallès suppose ensuite que du centre C du cercle circonscrit on ait mené, aux trois sommets du triangle, des droites R qui le diviseront en trois autres, dans l'un desquels se trouvera nécessairement tout autre point P de son intérieur. La distance de ce point au sommet opposé sera évidemment plus grande que R, et la somme de ses distances aux deux autres sommets sera moindre que $2R$; d'où il résulte que l'une d'elles au moins sera moindre que R; le centre C du cercle circonscrit, conclut M. Vallès, est donc le point de l'intérieur du triangle dont la plus grande distance à ses sommets est la moindre possible.

Pour prouver cette même assertion, M. Roche imagine que, des trois sommets du triangle pris pour centres et avec le rayon R du cercle circonscrit, on ait décrit trois arcs entre ses côtés, et il remarque qu'il n'est aucun point P de l'intérieur de ce triangle, autre que le centre C de ce cercle circonscrit, qui ne soit extérieur à l'un de ces trois arcs au moins; d'où il conclut que la distance de ce point P au sommet qui est le centre de cet arc, sera plus grande que la distance du centre C du cercle circonscrit au même sommet.

M. Vallès ne néglige pas d'observer que cette dernière solution est en défaut pour les triangles obtusangles, pour lesquels il faut remplacer le centre du cercle circonscrit par le milieu du plus grand des trois côtés.

L'extension de tout ceci au tétraèdre est trop facile pour que nous croyons nécessaire de nous y arrêter.

Dans sa manière d'envisager la question, M. Bobillier s'est borné à démontrer ces deux théorèmes :

I. *Il n'est aucun point, dans l'intérieur d'un triangle, dont la moindre distance à ses côtés soit plus grande, ni dont la plus grande distance à ces mêmes côtés soit moindre que le rayon du cercle inscrit.*

II. *Il n'est aucun point, dans l'intérieur d'un tétraèdre, dont la moindre distance à ses faces soit plus grande, ni dont la plus grande distance à ses faces soit moindre que le rayon de la sphère inscrite.*

La manière dont M. Bobillier justifie ces deux assertions est remarquable par sa netteté, sa simplicité et son élégance.

I. Soient d'abord A, B, C les trois sommets d'un triangle, a, b, c les cotés respectivement opposés, r le rayon du cercle inscrit et T sa surface; on aura, comme l'on sait,

$$2T=r(a+b+c) .$$

Soit ensuite P un point situé d'une manière quelconque dans l'intérieur du triangle, duquel soient abaissées respectivement sur ses côtés les perpendiculaires α, β, γ. En considérant ce point P comme le sommet commun de trois autres triangles, ayant respectivement pour bases les trois côtés a, b, c, on aura

$$2T=a\alpha+b\beta+c\gamma ,$$

et par conséquent

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=r(a+b+c) ;$$

ou encore

$$a(\alpha-r)+b(\beta-r)+c(\gamma-r)=0 .$$

Or, comme la somme de trois quantités des mêmes signes ne saurait être nulle, on voit déjà que les distances α, β, γ ne sauraient être ni toutes trois plus grandes ni toutes trois moindres que r.

Il est donc absurde de supposer que la moindre des trois est plus grande que le rayon r, puisque les deux autres le seraient, à plus forte raison; ni que la plus grande est moindre que ce rayon, puisque les deux autres devraient l'être aussi.

II Soient, en second lieu, A, B, C, D, les quatre sommets d'un tétraèdre, a, b, c, d, les aires des faces respectivement opposées, r le rayon de la sphère inscrite et T le volume du tétraèdre; on aura, comme l'on sait,

$$3T=r(a+b+c+d) .$$

Soit ensuite un point P, situé d'une manière quelconque dans l'intérieur du tétraèdre, duquel soient abaissées respectivement sur ses faces les perpendiculaires α, β, γ, δ. En considérant ce point P comme le sommet commun de trois autres tétraèdfes, ayant respectivement pour bases les quatre faces a, b, c, d, on aura

$$3T=a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta ,$$

et par conséquent

$$a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta=r(a+b+c+d) ;$$

ou encore

$$a(\alpha-r)+b(\beta-r)+c(\gamma-r)+d(\delta-r)=0 .$$

En raisonnant sur cette dernière équation, comme nous l'avons fait ci-dessus sur son analogue, on verra, sur-le-champ, 1.° que les perpendiculaires α, β, γ, δ ne sauraient être ni toutes les quatre plus grandes ni toutes les quatre plus petites que le rayon r; 2.° que par conséquent la moindre d'entre elles ne saurait être plus grande ni la plus grande d'entre elles moindre que ce rayon r.

On pourrait aussi se proposer ces deux problèmes :

I. *Quel est le point de l'intérieur d'une surface plane fermée, dont les distances aux divers points de son périmètre sont les moins inégales possibles, de telle sorte que l'excès de la plus grande de ces distances sur la plus petite soit un* minimum ?

II. *Quel est le point de l'intérieur d'un corps dont les distances aux différens points de sa surface sont les moins inégales possibles, de telle sorte que l'excès de la plus grande de ces distances sur la plus petite soit un* minimum ?

Ne serait-ce point alors le centre de gravité du périmètre qui résoudrait le premier de ces deux problèmes, et le centre de gravité de la surface qui résoudrait le second ?