ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Géométrie de situation. Recherches sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 157-166
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__157_0>

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Recherches sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Dans tout ce qui va suivre, j'emploîrai les mots *degré* et *classe* comme les a entendus M. Gergonne (pag. 151); c'est-à-dire, qu'une ligne ou une surface sera dite du m.^{ieme} degré lorsqu'elle aura m intersections, réelles ou idéales, avec une même droite, et qu'elle sera dite de m.^{ieme} classe lorsqu'on pourra lui mener m tangentes, réelles ou idéales, concourant en un même point, ou bien m plans tangens, réels ou idéaux, se coupant suivant une même droite.

THÉORÈME I. Soit C_m *une courbe plane du* m.^{ieme} *degré. Soient* C_{m-1}, C_{m-2}, C_{m-3}, ... C_3, C_2, C_1, *une suite d'autres lignes des degrés respectifs* $m-1$, $m-2$, $m-3$, ... 3, 2, 1, *telles que* C_{m-1} *passe par les points de contact de* C_m *avec ses tangentes issues d'un même point fixe* P *de son plan; et que chacune des autres soit par rapport à celle qui la précède immédiatement et pour le même point* P, *ce qu'est* C_{m-1} *par rapport à* C_m, *la dernière* C_1 *de ces lignes, se réduira à une droite.*

Si, par différens points de la droite C_1, *on mène à la courbe* C_m *toutes les tangentes possibles, les lignes du* $(m-1)^{ieme}$ *degré déterminées par les points de contact des tangentes issues des mê-*

mes points de cette droite, lesquelles, comme l'on sait (*), *auront les mêmes* $(m-1)^2$ *points communs, passeront toutes par le point P.*

Démonstration. Si l'on désigne généralement par u_n une fonction homogène du $n.^{ieme}$ degré en x et y; l'équation de la courbe C_m, rapportée à deux axes conduits par le point P, sera de la forme

$$u_m+u_{m-1}+u_{m-2}+\ldots\ldots+u_n+\ldots\ldots+u_3+u_2+u_1+\text{Const.}=0\ , \quad (1)$$

les équations des lignes C_{m-1}, C_{m-2}, C_{m-3}, ... C_3, C_2, C_1, seront respectivement (**)

$$1u_{m-1}+2u_{m-2}+3u_{m-3}+\ldots\ldots+(m-n)u_n+\ldots\ldots+(m-2)u_2+(m-1)u_1+m\text{Const.}=0\ ,$$

$$1.2u_{m-2}+2.3u_{m-3}+\ldots\ldots+(m-n-1)(m-n)u_n+\ldots\ldots+(m-2)(m-1)u_1+(m-1)m\text{Const.}=0\ ,$$

$$1.2.3.u_{m-3}+2.3.4u_{m-4}+\ldots\ldots+(m-n-2)(m-n-1)(m-n)u_n+\ldots\ldots+(m-3)(m-2)(m-1)u_1+(m-2)(m+1)m\text{Const.}=0$$

. . . .

$$1.2.3\ldots\ldots(m-1)u_1+1.2.3\ldots\ldots(m-1)m\text{Const.}=0\ .$$

Cette dernière équation, qui appartient à la droite C_1, divisée par $1.2.3\ldots.(m-1)$ devient $u_1+m\text{Const.}=0$; et, si l'on appelle (x',y') un point quelconque de cette droite, on aura

$$u'_1+m\text{Const.}=0\ . \qquad (2)$$

Actuellement, pour trouver l'équation de la ligne L qui contient les points de contact des tangentes menées à la ligne C_m par le point (x',y'), il faut d'abord transporter l'origine en ce point, ce qu'on

---

(*) Voy. la pag. 153 du présent volume.

(**) Voy. la pag. 89 du présent volume.

fera en changeant, dans l'équation (1) x et y, respectivement, en $x+x'$ et $y+y'$; il faudra ensuite multiplier respectivement les termes des degrés m, $m-1$, $m-2$, ... 3, 2, 1, 0, en x et y, respectivement par 0, 1, 2, 3.... $m-2$, $m-1$, m ; il faudra enfin revenir aux axes primitifs, en remplaçant x et y, respectivement $x-x'$ et $y-y'$.

Il suffit, pour la démonstration du théorème énoncé, de trouver, dans l'équation de la ligne L, le terme indépendant de x et y, que nous désignerons par T. Pour épargner les trop longs calculs, nous représenterons aussi par t_n la partie de ce terme produite par u_n ; de sorte qu'on aura

$$T=t_m+t_{m-1}+t_{m-2}+\ldots\ldots+t_n+\ldots\ldots+t_2+t_1+t_0\,. \qquad (3)$$

Cela posé, la fonction u_n, quand on y change respectivement x et y en $x+x'$ et $y+y'$, devient

$$\begin{aligned}
u'_n &+\frac{du'_n}{dx'}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2u'_n}{dx'^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^3u'_n}{dx'^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{d^nu'_n}{dx'^n}\cdot\frac{x^n}{1.2\ldots n}\\
&+\frac{du'_n}{dy'}\cdot\frac{y}{1}+\frac{d^2u'_n}{dx'dy'}\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1}+\frac{d^3u'_n}{dx'^2dy'}\cdot\frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{y}{1}+\ldots+\frac{d^nu'_n}{dx'^{n-1}dy'}\cdot\frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\cdot\frac{y}{1}\\
&\qquad+\frac{d^2u'_n}{dy'^2}\cdot\frac{y^2}{1.2}+\frac{d^3u'_n}{dx'dy'^2}\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{y^2}{1.2}+\ldots+\frac{d^nu'_n}{dx'^{n-2}dy'^2}\cdot\frac{x^{n-2}}{1..(n-2)}\cdot\frac{y^2}{1.2}\\
&\qquad\qquad+\frac{d^3u'_n}{dy'^3}\cdot\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{d^nu'_n}{dy'^n}\cdot\frac{y^n}{1.2\ldots n}
\end{aligned}$$

En multipliant les diverses colonnes respectivement par m, $m-1$,

$m-2$, ... $m-n$, puis changeant respectivement x et y en $x-x'$ et $y-y'$, il viendra

$$mu'_n+(m-1)\left\{\frac{du'_n}{dx}(x-x')+\frac{du'_n}{dy}(y-y')\right\}$$

$$+\frac{m-2}{1.2}\left\{\frac{d^2u'_n}{dx'^2}(x-x')^2+2\frac{d^2u'_n}{dx'dy'}(x-x')(y-y')+\frac{d^2u'_n}{dy'^2}(y-y')^2\right\}$$

$$+\frac{m-3}{1.2.3}\left\{\frac{d^3u'_n}{dx'^3}(x-x')^3+3\frac{d^3u'_n}{dx'^2dy'}(x-x')^2(y-y')+3\frac{d^3u'_n}{dx'dy'^2}(x-x')(y-y')^2+\frac{d^3u'_n}{dy'^3}(y-y')^3\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{m-n}{1.2\ldots n}\left\{\frac{d^nu'_n}{dx'^n}(x-x')^n+\frac{n}{1}\frac{d^nu'_n}{dx'^{n-1}dy'}(x-x')^{n-1}(y-y')+\ldots\ldots\ldots+\frac{d^nu'_n}{dy'^n}(y-y')^n\right\}$$

Or, le terme t_n représentant la quantité indépendante de x et de y dans cette expression, il faudra, pour l'obtenir, y supposer $x=0$ et $y=0$, ce qui donnera

$$t_n=mu'_n-\frac{m-1}{1}\left(\frac{du'_n}{dx'}x'+\frac{du'_n}{dy'}y'\right)$$

$$+\frac{m-2}{1.2}\left(\frac{d^2u'_n}{dx'^2}x'^2+2\frac{d^2u'_n}{dx'dy'}x'y'+\frac{d^2u'_n}{dy'^2}y'^2\right)$$

$$-\frac{m-3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u'_n}{dx'^3}x'^3+3\frac{d^3u'_n}{dx'^2dy'}x'^2y'+3\frac{d^3u'_n}{dx'dy'^2}x'y'^2+\frac{d^3u'_n}{dy'^3}y'^3\right)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm\frac{m-n}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^nu'_n}{dx'^n}x'^n+\frac{n}{1}\frac{d^nu'_n}{dx'^{n-1}dy'}x'^{n-1}y'+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\frac{d^nu'_n}{dx'^{n-2}dy'^2}x'^{n-2}y'^2+\ldots\ldots+\frac{d^nu'_n}{dy'^n}y'^n\right).$$

Mais en vertu du *théorème des fonctions homogènes*, on a

$$\frac{du'_n}{dx'}x'+\frac{du'_n}{dy'}y'=nu'_n\,,$$

$$\frac{d^2u'_n}{dx'^2}x'^2+2\frac{d^2u'_n}{dx'dy'}x'y'+\frac{d^2u'_n}{dy'^2}y'^2=n(n-1)u'_n\,,$$

$$\frac{d^3u'_n}{dx'^3}x'^3+3\frac{d^3u'_n}{dx'^2dy'}x'^2y'+3\frac{d^3u'_n}{dx'dy'^2}x'y'^2+\frac{d^3u'_n}{dy'^3}y'^3=n(n-1)(n-2)u'_n\,,$$

. . . .

$$\frac{d^nu'_n}{dx'^n}x'^n+\frac{n}{1}\frac{d^nu'_n}{dx'^{n-1}dy'}x'^{n-1}y'+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\frac{d^nu'_n}{dx'^{n-2}dy'^2}x'^{n-2}y'^2+\ldots\ldots+\frac{d^nu'_n}{dy'^n}y'^n=1.2.3\ldots\ldots nu'_n\,;$$

En substituant donc, il viendra

$$t_n=u'_n\left\{m-(m-1)\frac{a}{1}+(m-2)\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}-(m-3)\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}+\ldots\pm(m-n)\right\};$$

c'est-à-dire,

$$t_n=mu'_n\left(1-\frac{n}{1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}-\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}+\ldots\ldots\pm 1\right)$$
$$+nu'_n\left(1-\frac{n-1}{1}+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}-\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}+\ldots\ldots\mp 1\right)$$

ou bien encore

$$t_n=u'_n\{m(1-1)^n+n(1-1)^{n-1}\}\,.$$

Pour toutes les valeurs de n plus grande que l'unité, cette quantité devient nulle; pour $n=1$, elle se réduit à u'_1; et, comme u'_0 est une constante, pour $n=0$, elle se réduit à mConst. On a donc

$t_m=0\,,\ t_{m-1}=0\,,\ t_{m-2}=0\,,\ \ldots\ t_n=0\,,\ \ldots\ t_2=0\,,\ t_1=u'_1\,,\ t_0=m\text{Const.}$

En substituant ces valeurs dans l'équation (3), on aura

$$T=u'_1+m\text{Const.}$$

ou simplement, en vertu de l'équation (2), $T=0$. L'équation de la ligne L est donc dépourvue du terme indépendant de x et de y ; cette ligne L passe donc par l'origine, c'est-à-dire, par le point P, comme nous l'avions annoncé.

Ce théorème offre le moyen de faire passer par deux points donnés P et P′ une transversale curviligne du $(m-1)^{ieme}$ degré, qui coupe une courbe donnée du $m.^{ieme}$ degré en des points pour lesquels les tangentes à cette dernière courbe concourent toutes en un point unique. En déterminant, en effet, les droites C_1 et C'_1 correspondant respectivement aux deux points P et P′, les tangentes menées à la courbe proposée par leur intersection auront leurs points d'intersection sur une ligne du $(m-1)^{ieme}$ degré qui, suivant le théorème, devra passer à la fois par les deux points P et P′, et sera conséquemment la transversale demandée.

Il est clair que la même construction subsisterait encore, si les droites C_1, C'_1 étaient parallèles ; mais, si elles se confondaient en une seule, le problème deviendrait indéterminé, et l'on pourrait se donner arbitrairement un troisième point P″ de la transversale curviligne demandée.

Si l'on appelle généralement *pôles* d'une droite, par rapport à une courbe du $m.^{ieme}$ degré, les $(m-1)^2$ points fixes suivant lesquels se coupent constamment les courbes du $(m-1)^{ieme}$ degré, déterminées par les points de contact des divers faisceaux de tangentes à la courbe, issues des différens points de cette droite, on voit qu'un seul de ces pôles étant connu, on en peut déduire tous les autres. On voit en même temps que la même droite C_1 peut être déduite de $(m-1)^2$ points différens.

De ce théorème, par la théorie des polaires réciproques, on pourra déduire le suivant :

THÉORÈME II. Soit C_m *une courbe plane de* m.^{ieme} *classe. Soient* C_{m-1}, C_{m-2}, C_{m-3}, ... C_3, C_2, C_1 *une suite d'autres lignes, des classes respectives* m−1, m−2, m−3, ... 3, 2, 1, *telles que* C_{m-1} *soit enveloppée par toutes les tangentes menées à* C_m *par ses intersections avec une droite fixe* D; *et que chacune des autres soit, par rapport à celle qui la précède immédiatement, et pour la même droite* D, *ce qu'est* C_{m-1} *par rapport à* C_m, *la dernière* C_1 *de ces courbes se réduira à un point.*

Si, aux points d'intersection de la courbe C_m *avec les diverses sécantes conduites par le point* C_1, *on lui mène des tangentes, les courbes de* (m−1)^{ieme} *classe, inscrites aux divers systèmes de tangentes répondant à ces différentes sécantes, lesquelles, comme l'on sait* (*), *seront toutes inscrites aux* $(m-1)^2$ *mêmes droites fixes, auront toutes la droite* D *pour tangente commune.*

On déduira de ce théorème le moyen de faire toucher à deux droites données D et D′ une courbe de $(m-1)^{ieme}$ classe, telle qu'en lui menant des tangentes communes avec une courbe donnée de $m.^{ieme}$ classe, tous les points de contact de ces tangentes avec cette dernière appartiennent à une droite unique. En déterminant, en effet, les points C_1 et C'_1, correspondant respectivement aux droites D et D′, les tangentes menées à la courbe par ses points d'intersection avec la sécante conduite par ces deux points, toucheront une même ligne de $(m-1)^{ieme}$ classe qui, suivant le théorème, devra toucher à la fois les deux droites D et D′, et sera conséquemment la courbe demandée.

Il se pourrait que les points C_1 et C'_1 se confondissent ; le problème serait alors indéterminé, et l'on pourrait se donner arbitrairement une troisième tangente D″ à la courbe demandée.

(*) Voy. la pag. 153 du présent volume.

Si l'on appelle généralement *polaires* d'un point, par rapport à une courbe de $m.^{ieme}$ classe, les $(m-1)^2$ droites que touchent à la fois toutes les courbes de $(m-1)^{ieme}$ classe, inscrites aux systèmes de tangentes à la courbe proposée, qui répondent à ses intersections avec diverses sécantes menées arbitrairement par ce point, on voit qu'une seule de ces polaires étant connue, on en peut déduire toutes les autres. On voit, en même temps, que le même point C_1 peut être déduit de $(m-1)^2$ droites différentes.

THÉORÈME III. Soit S_m *une surface du* $m.^{ieme}$ *degré, et soient* S_{m-1}, S_{m-2}, S_{m-3}, ... S_3, S_2, S_1, *une suite d'autres surfaces des degrés respectifs* $m-1$, $m-2$, $m-3$, ... 3, 2, 1, *telles que* S_{m-1} *passe par la ligne de contact de* S_m *avec la surface conique circonscrite à cette surface qui a son sommet à un point fixe* P *de l'espace, et que chacune des autres soit, par rapport à celle qui la précède immédiatement, ce qu'est* S_{m-1} *par rapport à* S_m, *la dernière* S_1 *de ces surfaces se réduira à un plan.*

Si les différens points du plan S_1 *sont pris tour à tour pour sommets d'une suite de surfaces coniques circonscrites à la surface* S_m, *les surfaces du* $(m-1)^{ieme}$ *degré auxquelles appartiendront leurs lignes de contact, lesquelles, comme l'on sait* (*), *auront les mêmes* $(m-1)^3$ *points communs, passeront toutes par le point* P.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est en tout semblable à celle du *Théorème I;* il suffit seulement de supposer que u_n est une fonction homogène du $n.^{ieme}$ degré en x, y et z.

De là on déduira la solution de ce problème : Faire passer par trois points donnés P, P′, P″ une surface du $(m-1)^{ieme}$ degré qui coupe une surface donnée du $m.^{ieme}$ degré suivant une courbe telle que la surface développable, circonscrite suivant cette courbe, soit

(*) Voy. la pag. 153 du présent volume.

une surface conique ; problème qui peut quelquefois être indéterminé, ce qui permettra d'assujettir la surface cherchée à passer par un ou deux nouveaux points, pris arbitrairement dans l'espace.

Si l'on appelle généralement *pôles* d'un plan, par rapport à une surface du $m.^{ieme}$ degré, les $(m-1)^3$ points fixes suivant lesquels se coupent constamment les surfaces du $(m-1)^{ieme}$ degré déterminées par les lignes de contact de toutes les surfaces coniques circonscrites qui ont leurs sommets dans ce plan ; on voit qu'un seul de ces pôles étant connu on peut en déduire tous les autres. On voit en même temps que le même plan S_1 peut être déduit de $(m-1)^3$ points différens.

Ce théorème, par la théorie des polaires réciproques, conduit au suivant :

THÉORÈME IV. Soit S_m *une surface de* $m.^{ieme}$ *classe, et soient* S_{m-1}, S_{m-2}, S_{m-3}, ... S_3, S_2, S_1 *une suite d'autres surfaces des classes respectives* $m-1$, $m-2$, $m-3$, ... 3, 2, 1, *telles que* S_{m-1} *soit inscrite à la surface développable circonscrite à* S_m, *suivant son intersection avec un plan fixe* P *; et que chacune des autres soit, par rapport à celle qui la précède immédiatement et pour le même plan* P, *ce qu'est* S_{m-1} *par rapport à* S_m, *la dernière* S_1 *de ces surfaces se réduira à un point.*

Si, suivant les lignes d'intersection de la surface S_m *avec les divers plans conduits par le point* S_1, *on lui circonscrit des surfaces développables, les surfaces de* $(m-1)^{ieme}$ *classe inscrites à ces diverses surfaces, lesquelles, comme l'on sait* (*), *auront toutes les* $(m-1)^3$ *mêmes plans tangens fixes, auront toutes le plan* P *pour plan tangent commun.*

De là on déduira la solution de ce problème : Faire toucher à trois plans donnés P, P′, P″ une surface de $(m-1)^{ieme}$ classe telle

(*) Voy. la pag. 153 du présent volume.

que ses surfaces développables circonscrites, communes avec une surface donnée de $m.^{ieme}$ classe, touchent cette dernière suivant des courbes planes comprises dans un plan unique ; problème qui peut être indéterminé, ce qui permettra d'assujettir la surface cherchée à toucher un ou deux autres plans, pris arbitrairement dans l'espace.

Si l'on appelle généralement *plans polaires* d'un point de l'espace, par rapport à une surface de $m.^{ieme}$ classe, les $(m-1)^3$ plans que touchent à la fois les surfaces de $(m-1)^{ieme}$ classe, inscrites aux surfaces développables qui touchent la surface proposée suivant ses intersections avec divers plans conduits par le point dont il s'agit; on voit qu'un seul de ces plans polaires étant connu, on en peut déduire tous les autres. On voit en même temps que le même point S_1 peut être déduit de $(m-1)^3$ plans différens.