
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

PONCELET

Note sur divers articles du bulletin des sciences de 1826 et de 1827, relatifs à la théorie des polaires réciproques, à la dualité des propriétés de situation de l'étendue, etc

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 125-142

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__125_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1827-1828, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*Note sur divers articles du Bulletin des sciences
de 1826 et de 1827, relatifs à la Théorie des
polaires réciproques, à la dualité des proprié-
tés de situation de l'étendue, etc. ;*

Par M. PONCELET.

« On lit à la pag. 275 du *Bulletin* de mai 1827 que, dans un
mémoire présenté récemment à l'Académie royale des sciences, *M.*
Tom. XVIII, n.° V, 1.º novembre 1827. 18

Poncelet a repris, avec de plus amples développemens, les recherches de M. Gergonne sur la dualité des propriétés de situation; dualité que ce dernier géomètre a signalée (1) dans les premiers numéros des Annales de mathématiques de l'année 1826, et dont il a été rendu un compte fort détaillé à la pag. 112 du Bulletin de février de la même année. Or, il m'importe beaucoup que les géomètres qui n'ont pas l'avantage d'assister aux séances de l'Académie des sciences sachent : 1.º que le mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques, dont il s'agit, a été présenté à

(1) « Le lecteur remarquera que ces recherches de M. Gergonne ne comprennent que les relations de situation du point, de la ligne droite et du plan, dont la réciprocity ou la dualité est de première évidence, et que c'est par erreur que l'auteur de l'article cité du Bulletin, mentionne aussi tous les théorèmes de la trigonométrie sphérique, puisque M. Gergonne ne s'en est point occupé (*) ».

(Note de M. PONCELET).

(*) Dire que les théorèmes dont je me suis occupé sont doubles, comme le sont ceux de la trigonométrie sphérique, ce n'est point dire, ce me semble, que je me sois occupé de ces derniers; ce que disent là MM. les Rédacteurs me paraît n'être que la suite des idées qu'ils avaient mises en avant dans un autre article (Février 1826, pag. 113).

Il aurait été fort inutile d'ailleurs que je m'occupasse de la dualité des théorèmes de la trigonométrie sphérique, car il n'est, je pense, aucun géomètre pour qui cette dualité soit un mystère (*Annales*, tom. XV, pag. 302), (*Bulletin*, avril 1825, pag. 222). Quant au reproche que fait M. Poncelet à mon article de n'offrir que des cas de dualité de première évidence, que M. Poncelet veuille bien me dire dans quel ouvrage cette dualité avait été signalée avant la publication de l'article auquel il paraît attacher si peu d'importance. J'ai eu dessein, en le composant, d'écrire les premières pages d'un traité élémentaire, suivant les vues de M. Poncelet, qui sont aussi les miennes; j'ai voulu prouver que le principe de dualité pourrait être mis en évidence dès les premiers pas dans l'étude de la géométrie; et on n'aurait pas été fondé à plus exiger de moi que je n'avais eu dessein de faire.

J. D. G.

cette Académie dans sa séance du 12 avril 1824 (1), par conséquent deux années avant l'époque où M. Gergonne a publié ses idées sur la *dualité* de certains théorèmes de géométrie (*); 2.° qu'il a été lu, dans cette même séance, une notice étendue qui avait pour but de signaler fortement à l'attention des géomètres, non seulement la *réciprocité* des relations descriptives ou de situation des figures, mais encore celle des relations métriques de distances, d'angles et de lignes trigonométriques; 3.° que ce mémoire a été renvoyé à l'examen d'une commission composée de MM. Legendre, Poinsoet et Cauchy, rapporteur qui en possède encore le manuscrit. S'il était nécessaire d'appuyer des faits aussi authentiques (**), il me suffirait d'invoquer le témoignage des personnes présentes à la séance du 12 avril 1824, lesquelles se rappelleront très-bien, m'avoir entendu lire la notice dont l'extrait a paru dans le numéro de mars 1827, des *Annales de mathématiques*; notice dont la singularité des vues a même fait dire plaisamment à d'illustres académiciens: Que c'était de la *géométrie romantique*, de la *géométrie à quatre dimensions*.

» On ne me reprochera pas, sans doute, d'avoir attendu jus-

(1) « Voyez le résumé de cette séance dans les divers journaux du temps, et notamment pag. 74 du tom. II du *Bulletin* de 1824 ».

(Note de M. PONCELET).

(*) Au commencement de 1819, M. Coriolis me transmet, sans démonstration, un élégant théorème relatif à la géométrie de la règle. Sans même songer à la manière dont il pourrait être démontré, j'écrivis aussitôt son corrélatif à sa suite, et je les propose tous deux dans mon Recueil (tom. IX, pag. 289). Mes idées sur la *dualité* de situation étaient donc alors déjà bien fixées; ce que prouve encore l'article de la pag. 321 du même volume. Ce sont aussi les mêmes idées qui ont donné naissance au mémoire sur les *lois générales qui régissent les polyèdres* (tom. XV, pag. 157).

J. G. D.

(**) Mais qui songe donc à les nier ?

J. G. D.

qu'ici, sans réclamations, le jugement de MM. les commissaires de l'Institut; mon silence prouve, tout au plus, le prix que j'attache à ce jugement, le respect que je professe pour la personne des commissaires, enfin le peu d'empressement que je mets à tirer avantage de mes recherches géométriques.

» Le fait est que le *mémoire sur la théorie des polaires réciproques* et celui qui a pour objet la *théorie générale du centre des moyennes harmoniques*, dont il a été rendu compte l'année dernière à l'Académie, par M. Cauchy (*), composent les préliminaires d'un grand travail sur les propriétés des lignes et des surfaces géométriques, déjà annoncé dans le *Traité des propriétés projectives des figures*. Les occupations de mon service militaire ne m'ont pas permis, jusqu'à présent, de perfectionner et de mettre au jour ce travail, et je suis encore moins à même de le terminer, depuis que son excellence le Ministre de la guerre m'a chargé de créer le cours de mécanique appliquée aux machines, à l'école spéciale de l'artillerie et du génie, à Metz (**). Mais si, dans cette position, j'ai dû renoncer à l'idée de poursuivre et de publier

(*) Voy. *Annales*, tom. XVI, pag. 349.

(**) Personne n'a été plus fâché que moi de voir M. Poncelet chargé de ce cours; je m'en suis expliqué à son ami le colonel Vainsot, dès qu'il m'en a donné la première nouvelle, et plus tard j'ai dit publiquement ce que j'en pensais (tom. XVII, pag. 274). Il ne manque pas en effet d'hommes propres à appliquer les sciences; et on ne saurait laisser trop de loisirs au petit nombre des esprits privilégiés qui peuvent en reculer les limites. Malheureusement tout le monde ne pense pas ainsi. La *roue à aubes courbes* de M. Poncelet lui a valu d'honorables récompenses, et sa *théorie des polaires réciproques* (*Annales*, tom. VIII, pag. 201), bien que d'une toute autre importance, a passé pour ainsi dire inaperçue.

Mais, parce que M. Poncelet est empêché de publier les résultats de ses recherches, s'ensuit-il que tout le monde sera tenu de se croiser les bras pour l'attendre? Je ne puis me persuader qu'il pousse l'exigence à ce point.

J. D. G.

prochainement mes recherches géométriques , je n'en dois pas moins être jaloux de m'assurer la possession de celles qui ont pu arriver à la connaissance des géomètres. Comme j'ai eu d'ailleurs occasion de communiquer , depuis long-temps , quelques-uns des résultats de ma théorie à différentes personnes , je crois pouvoir déclarer ici que l'objet de ces recherches embrasse les propriétés descriptives et métriques les plus générales de l'*intersection* , de l'*osculat*ion des lignes et des surfaces de divers ordres , et que , c'est en prenant principalement pour base les deux mémoires ci-dessus , les principes de la *projection centrale* ou *perspective* et ceux de la *théorie des transversales* , que je suis parvenu aux résultats de mon travail ; je crois devoir déclarer , en outre , que la méthode par laquelle j'applique la théorie des transversales à la découverte des propriétés des lignes et surfaces , présente les caractères d'une véritable analyse , qui permet de combiner les relations des figures et de reconnaître ce qui leur appartient , même quand ces relations prennent la *forme de l'indétermination* , ou que certaines grandeurs deviennent *imaginaires* , *infinies* , etc. J'ajouterai que , pour faciliter l'intelligence de cette méthode , j'ai commencé par l'appliquer aux sections coniques , et que je suis ainsi parvenu à établir , en quelques pages , les propriétés les plus fécondes , les plus générales de ces courbes , notamment celles des hexagones inscrits et circonscrits , celles du contact des divers ordres , celles enfin que Desargues a nommées *involutions* : ces dernières relations , comme on sait , ont été étudiées spécialement par M. Brianchon , dans son intéressant *mémoire sur les lignes du second ordre* ; elles se trouvent reproduites dans le *Traité des propriétés projectives* , et elles ont servi de base à M. Sturm pour établir , dans les *Annales de mathématiques* (tom. XVI et XVII , *Bulletin des sciences* , mai 1826 et février 1827) , plusieurs des propriétés des sections coniques , considérées isolément ou combinées entre elles. On conçoit aussi que la démonstration de l'hexagone de Pascal , donnée par M. Gergonne , tom. XVII des *Annales de mathématiques* , pag. 143 , en parlant des propriétés des sé-

cautes du cercle , démonstration mentionnée pag. 93 du *Bulletin des sciences* de février 1827 ; que cette démonstration , dis-je , doit se trouver comprise nécessairement dans l'application particulière que j'ai faite de la théorie des transversales aux sections coniques (*) ; et s'il fallait à ce sujet un témoignage plus spécial , j'invoquerais celui de M. Brianchon auquel , depuis nombre d'années , j'ai fait part de ma méthode avec cette *confiance* qu'on doit à un *ami* , à un *savant modeste* , assez riche de son propre fond pour n'avoir rien à *envier* à ses émules (**).

» En entrant dans ces développemens , mon intention n'est pas de revendiquer , pour mon compte , toutes les propositions sur les courbes et surfaces qui rentrent dans l'objet spécial de mes recherches ; à Dieu ne plaise ! Je prétends seulement qu'on m'accorde

(*) Je suis flatté sans doute que cette démonstration ait fixé l'attention de M. Poncelet ; mais peut-il penser sérieusement qu'après avoir démontré le théorème (*Annales* , tom. IV , pag. 78) par les *propriétés projectives* ; qu'après en avoir donné une *démonstration analytique* assez simple (*ibid.* , pag. 381) ; qu'après en avoir enfin publié spontanément deux autres démonstrations fort élégantes de M. Dandelin (*Annales* , tom. XV , pag. 395 et tom. XVI , pag. 325) j'attache beaucoup d'importance à celle-là que je n'ai même publiée que parce qu'elle s'est présentée sous ma plume en corrigeant l'épreuve du mémoire de M. Ferriot , auquel elle se rapporte , et qui n'a d'autre mérite à mes yeux que de pouvoir être introduite dans les élémens de géométrie plane ? Pense-t-il surtout que je la mette le moins du monde en parallèle avec celle que j'ai donnée plus récemment (tom. XVII , pag. 222) et qui a été reproduite dans le *Bulletin* (mars 1827 , pag. 166) ; laquelle , non seulement n'exige ni construction ni calcul , mais même peut être communiquée de vive voix , en très-peu de mots , et fait de cet important théorème une vérité presque triviale ?

J. D. G.

(**) Qui sait ? J'écoutais peut-être aux portes.

J. D. G.

que je n'ai pas emprunté aux autres les principes et les méthodes qui en constituent la base essentielle (*).

» Revenons à la dualité, dont le *Bulletin des sciences* attribue uniquement la découverte à M. le Rédacteur des *Annales de mathématiques* (**). Je ne manquai pas de faire remarquer à cet estimable géomètre l'analogie de ses idées avec les miennes, dès l'apparition, en janvier 1826, de son mémoire sur la *dualité* (***) ; et, d'après la demande qu'il voulut bien me faire ensuite de lui donner une idée plus étendue de mes dernières recherches, concernant la *théorie des polaires réciproques*, je me hâtai de lui en adresser l'analyse au mois de décembre 1826 ; j'y joignis un article de réclamations qui me paraissait assez intéresser la philosophie de la science pour mériter une place dans les *Annales de mathématiques*. Je respecte les motifs qui ont empêché M. Gergonne d'insérer, avant le numéro de mars 1827 de son Recueil, l'analyse dont il s'agit, et qui lui on fait supprimer entièrement ma *réclamation*. J'ignore d'ailleurs pourquoi il a cru devoir répondre à cette réclamation, dans ce même numéro, sans la citer et sans mettre ses lecteurs en état d'apprécier ses propres observations. Enfin, je ne comprends pas

(*) Mais personne ne songe à le contester ; et on va voir tout à l'heure de quel côté vient l'accusation d'emprunt.

J. D. G.

(**) Si le *Bulletin* s'était exprimé ainsi, il serait assez difficile de lui prouver qu'il a dit faux ; car probablement M. Poncelet n'a pas tenu plus que moi journal de ses pensées sur ce sujet ; mais le *Bulletin* dit simplement que j'ai signalé cette *dualité*, et ici les dates font foi. Je veux bien d'ailleurs que le *Bulletin* se soit trompé, pour peu que cela puisse être agréable à M. Poncelet, car l'essentiel est ici que la vérité se manifeste, et il importe peu qu'elle emploie tel ou tel autre organe.

J. D. G.

(***) M. Poncelet convenait donc, à cette époque, que je ne lui avais rien emprunté.

J. D. G.

davantage pourquoi il a totalement négligé de mentionner mes recherches dans ses deux mémoires de janvier et février 1827, sur les *lois générales qui régissent les lignes et surfaces courbes*; mémoire dont l'analyse a été donnée dans les cahiers de mars et d'avril dernier du présent *Bulletin*. J'ai d'autant plus lieu d'en être étonné que la publication de ces mémoires est postérieure à l'envoi de ma réclamation, et qu'ils sont entièrement basés sur la partie de la théorie des polaires réciproques, que j'ai le plus d'intérêt à revendiquer pour mon compte, puisqu'elle concerne la *réciprocité* ou, si l'on veut, la *dualité* des propriétés des lignes et des surfaces courbes, réciproité que j'ai étudiée d'une manière toute spéciale, soit dans mon mémoire d'avril 1824, soit dans le *Traité des propriétés projectives*, et dont j'avais même déjà exposé les principes fondamentaux et signalé l'importance, dès janvier 1818, dans un article inséré au tom. VIII des *Annales des mathématiques* (*).

(*) Voilà qui est fort clair. J'ai, méchamment et à dessein, supprimé la date du mémoire présenté par M. Poncelet à l'Académie des sciences, dans le but de laisser croire qu'il était postérieur à celui de janvier 1826, dont alors on l'aurait supposé le simple développement. La lecture de l'analyse qui m'en a été adressée par M. Poncelet ayant produit chez moi une *illumination soudaine*, je me suis mis en toute hâte à brocher sur ce sujet un long mémoire, occupant deux livraisons, dans lequel je me suis bien gardé de citer M. Poncelet, du mémoire duquel j'ai publié postérieurement l'analyse, en supprimant soigneusement sa réclamation qui aurait mis mon larcin à découvert. Voilà sans doute une accusation fort grave. Voyons pourtant si ce ne serait pas un pur fantôme, que le souffle le plus léger pourrait faire aisément évanouir.

La lettre d'envoi de l'analyse du mémoire de M. Poncelet porte la date du 19 décembre 1826, et m'est parvenue le 26 du même mois. A cette époque, ainsi qu'il arrive communément, l'imprimeur m'avait déjà remis la livraison imprimée de janvier 1827, contenant la première partie de mon mémoire sur les lignes et surfaces courbes, et je lui avais déjà transmis à Nismes, pour être imprimé en janvier, le manuscrit de la livraison de fé-

» Quoique les deux mémoires de M. Gergonne, que nous venons de citer en dernier lieu, renferment, quant à l'objet en discussion, beaucoup de conséquences qui, suivant nous, sont plus que sujettes à controverse, et dont la publication peut faire tort aux

vrier, qui contenait le reste du mémoire. J'ai fait paraître l'analyse du mémoire de M. Poncelet dans celle de mars, et M. Poncelet lui-même sera forcé de convenir, malgré sa préoccupation et ses préventions, qu'il m'eût été difficile de faire plus de diligence. Certes, les géomètres qui me font l'honneur de correspondre avec moi ne sont pas tous toujours traités avec autant de faveur. Que doit penser, d'après cela, M. Poncelet de MM. les commissaires de l'Académie qui, depuis trois ans, paraissent ne point avoir présenté encore leur rapport sur son mémoire ?

Il m'était donc impossible de citer les nouvelles recherches de M. Poncelet, dans un mémoire que j'écrivais sans en avoir connaissance. Je l'ai pourtant cité une fois, et j'aurais désiré pouvoir le faire plus souvent ; mais, si l'on veut bien comparer mon mémoire avec l'analyse du sien, on reconnaîtra aisément que les idées qui ont présidé à la rédaction de ces deux écrits n'ont presque aucune analogie entre elles. Je n'ai emprunté à M. Poncelet que l'art de doubler les théorèmes, à l'aide de la théorie des polaires réciproques ; et, si j'ai négligé de répéter en cet endroit qu'il est l'auteur de cette théorie, c'est que je l'ai dit tant d'autres fois, c'est que son nom me paraît tellement identifié avec elle, que j'ai regardé la chose comme superflue. C'est ainsi qu'aujourd'hui, par exemple, on invoque sans cesse la théorie des pôles, sans rappeler à qui elle est due, et les propriétés du triangle rectangle, sans nommer Pythagore.

Je donnerai, à la suite de cet extrait, puisque M. Poncelet y attache tant d'importance, le préambule et le post-scriptum de son analyse, et le lecteur pourra voir alors si ce n'était pas bien plutôt dans l'intérêt de M. Poncelet que dans le mien que j'avais cru ne devoir pas les publier. J'ai d'autant plus lieu présentement de regretter cette suppression qu'elle a entraîné celle de la date de la présentation du mémoire à l'Académie, laquelle, se trouvant indiquée dans le préambule, a été dès lors écartée de mes yeux. Au surplus tout ce *quiproquo* aurait été évité si, dès 1824, M. Poncelet m'avait fait l'honneur de m'adresser son analyse ; les *Annales* y auraient gagné un article fort piquant, et tous les miens n'eussent ainsi paru qu'après celui-là.

J. D. G.

vues philosophiques de l'auteur sur le principe de la dualité (*), on avouera que, d'après l'importance même qu'il leur accorde, nous avons quelque droit d'espérer qu'il ne tairait pas ce que nous avons fait dans ce genre de recherches. Nous professons au surplus, envers sa personne et son caractère, une trop haute estime pour ne pas croire qu'il serait revenu, dans les numéros suivans des *Annales*, sur ce qui nous concerne (**), et nous eussions gardé presque indéfiniment le silence sur l'objet de la présente réclamation, si l'article inséré à la pag. 275 du *Bulletin des sciences* de 1827, n'était pas rédigé de manière à laisser croire aux géomètres qu'en effet nos recherches sont postérieures à celles de M. Gergonne. L'auteur de cet article est d'autant plus excusable d'ailleurs, que l'omission, dans les *Annales de mathématiques*, de la date de la présentation du *mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques*, la suppression d'une partie de la lettre d'envoi de l'analyse de ce mémoire, enfin les réflexions même dont M. Gergonne a jugé

(*) M. Poncelet qui a étudié d'une manière toute spéciale la réciprocité des propriétés des lignes et surfaces courbes aurait dû, ce me semble, s'exprimer ici d'une manière plus décisive. S'il n'est pas sûr de son fait, pourquoi accuse-t-il? S'il l'est, au contraire, pourquoi ne montre-t-il pas où est la faute? Cela serait beaucoup moins désobligeant que des insinuations obliques. Je reviendrai plus loin sur ce sujet.

J. D. G.

(**) Il se peut que, parmi les nombreux théorèmes que j'ai démontrés, quelques-uns se trouvent dans le *Traité des propriétés projectives*, où les recherches sont assez difficiles à faire, à raison du grand nombre des résultats de détail qu'il embrasse; mais je m'étais mis, ce me semble, à l'abri de tout reproche sur ce point, en déclarant formellement, dès le début, que j'avais beaucoup moins en vue de découvrir des théorèmes nouveaux que d'indiquer une méthode nouvelle et facile, propre à démontrer un grand nombre de théorèmes connus.

J. D. G.

à propos d'accompagner cette analyse, ne sont pas très-propres à éclairer la conscience des lecteurs sur l'objet en discussion (*).

» Par exemple, tout en avouant (tom. XVII, pag. 274 et 275) que les points principaux de la nouvelle doctrine se trouvent indiqués dans le *Traité des propriétés projectives*, il avance « que » c'est d'une manière si fugitive, qu'il n'en est fait aucune mention, ni dans le rapport des commissaires de l'Académie, ni dans » la préface de l'auteur, ni même dans son introduction de trente » pages » ; puis il ajoute : « N'est-on pas fondé, d'après cela, à penser que M. Poncelet avait d'abord regardé cette partie de son ou- » vrage comme très-accessoire, surtout lorsqu'on lui voit recomman- » der les éléments d'Euclide, et qu'on le voit débiter par des pro- » portions et des calculs ». Un peu plus loin il nous accuse d'a- voir laissé glisser, parmi les doctrines qui font l'objet du *Traité des propriétés projectives*, des doctrines qui sont tout au moins sujettes à controverse (**). Or, rien n'est plus facile que de réfuter ces assertions ; et, sans parler de l'omission qui a pu être faite dans l'avertissement de deux pages du traité dont il s'agit, ne paraît-il pas évident que les commissaires de l'Académie ont dû se borner, dans leur rapport, à parler de ce qui était contenu dans la première section de l'ouvrage, la seule qui ait été soumise à leur jugement,

(*) Il est manifeste, en effet, que c'est mon étourderie qui a induit en erreur MM. les rédacteurs du *Bulletin universel*. Mais, Dieu merci, tout va être amplement et solennellement réparé.

J. D. G.

(**) Je persiste à penser, comme je l'écrivais alors, que M. Poncelet a gravement compromis ses doctrines, en mêlant au *classique*, que tout le monde admet, le *romantique* que, pour ma part, je suis fort loin de repousser, mais sur lequel enfin on dispute encore, et que MM. les commissaires de l'Académie eux-mêmes, au jugement de qui M. Poncelet déclare attacher beaucoup de prix, ont traité assez sévèrement.

J. D. G.

à quelques propositions près, relatives au contact et à l'intersection des cercles ? Quant à l'introduction de trente pages, nous ferons observer que, indépendamment de ce qu'elle a été rédigée fort à la hâte, à l'instant même où l'on terminait l'impression du texte, cette introduction n'est point une analyse et n'a pour objet que de signaler le but et l'esprit général de l'ouvrage, mais non pas son contenu (*). Tout ce qu'avance à ce sujet M. Gergonne ne saurait donc prouver que nous n'avons pas donné une attention très-sérieuse à la *théorie des polaires réciproques* et à la *dualité* qui en dérive, dès la publication du *Traité des propriétés projectives*, en 1822, et même avant cette publication. Il est vrai qu'à l'époque dont il s'agit, nous n'avions point fait, de cette théorie, l'objet d'un mémoire ou d'un chapitre spécial, et que nous nous réservions d'y revenir avec plus de détail dans la partie de nos recherches relatives aux propriétés générales des lignes et des surfaces courbes : toujours est-il vrai que nous en avons traité à toute occasion et avec assez de développement pour être à l'abri des reproches que nous adresse M. le rédacteur des *Annales de mathématiques* (**).

• Au surplus, cette discussion doit paraître bien superflue, et

(*) Le lecteur en pensera tout ce qu'il lui plaira ; mais je persiste à regarder comme fort étrange que, l'esprit fortement préoccupé d'une idée majeure, on écrive trente pages in-4.^o, dans lesquelles cette idée peut et doit même peut-être tout naturellement trouver place, sans lui consacrer une seule ligne. D'ailleurs le principe de dualité n'est guère plus apparent dans l'ouvrage que dans l'introduction. Je suis loin d'en faire un reproche à l'auteur qui était certes bien le maître de n'en faire même aucune mention ; mais toujours sera-t-il vrai de dire qu'il ne s'y présentait que d'une manière assez fugitive pour excuser un peu les lecteurs qui n'avaient pas su l'y apercevoir.

J. D. G.

(**) C'est là précisément ce que je nie. Le lecteur jugera. Je ne fais d'ailleurs aucun reproche, j'énonce simplement une opinion.

J. D. G.

l'importance que nous attachions à la chose bien démontrée, d'après l'empressement que nous avons mis à faire suivre, presque immédiatement, le *Traité des propriétés projectives*, du *mémoire sur la théorie des polaires réciproques* (1); il est seulement surprenant que l'apparition de ce *Traité* n'ait pas stimulé davantage l'esprit d'investigation des géomètres (*), et que l'année 1823 toute entière se soit écoulée sans qu'on ait songé à rien publier qui ait trait à cette théorie (**). Cela nous prouve que les idées répandues dans notre ouvrage auront quelque peine à s'établir (***), et qu'il se passera encore des années avant qu'on en ait saisi le véritable esprit et qu'on lui rende le degré de justice qui peut lui être dû (****);

(1) Nous avons déjà annoncé les conséquences étendues de ce mémoire, pour la démonstration des théorèmes de géométrie, dans l'introduction qui accompagne le mémoire sur la théorie des centres de moyennes harmoniques, c'est-à-dire, avant la fin de l'année 1823, époque à laquelle nous remîmes à M. Arago la copie de ce dernier mémoire, pour en faire hommage à l'Académie royale des sciences.

(Note de M. PONCELET).

(*) Je crois en avoir expliqué l'une des principales causes. C'est au surplus une chose fort heureuse, d'abord pour M. Poncelet qui paraît tenir beaucoup à la priorité de sa découverte, et qui aurait pu ainsi être débordé, et ensuite pour ceux qui auraient traité ces matières, que M. Poncelet aurait peut-être accusé d'envahissement sur ses domaines.

J. D. G.

(**) J'ai déjà prouvé que, dès 1819, la dualité des théorèmes de situation n'était plus pour moi une chose douteuse.

J. D. G.

(***) Voilà précisément ce que j'avais prévu (tom. XVII, pag. 274 et 275).

J. D. G.

(****) S'il en arrive ainsi, ce ne sera pas du moins à moi que M. Poncelet devra en imputer la faute; toutes les fois que l'occasion s'en est directement ou indirectement présentée, j'ai reproduit les idées qu'il cherche à populariser, au risque de m'exposer à en devenir ennuyeux.

J. D. G.

les rapports qui en ont été faits à l'Académie royale des sciences n'ont malheureusement que trop servi à reculer cette époque, en jetant une sorte de défaveur sur les principes d'où nous sommes partis, et en donnant à penser qu'il s'agit d'une espèce de géométrie où l'on remplace la rigueur du raisonnement par des inductions hasardées, des aperçus de pur sentiment. Le fait est que ce reproche a été reproduit vaguement par divers géomètres et par M. Gergonne lui-même, sans motifs plausibles, disons plus, sans avoir suffisamment approfondi le sujet (*). Nous aurions bien mal employé notre temps et nos peines, si nous n'avions pas réussi, aux yeux des personnes non prévenues, à mettre le résultat de nos démonstrations à l'abri de toute attaque; peut-être même n'en saurait-on dire autant de beaucoup d'écrits géométriques de notre époque, où la logique sévère des anciens est quelquefois négligée par suite de l'habitude acquise assez généralement, d'accorder aux symboles et aux opérations de l'algèbre une rigueur mathématique presque indéfinie (**).

» Nous n'en dirons pas davantage, pour le moment, sur ce qui

(*) J'ai dit simplement ce que je croyais qu'on penserait des principes de M. Poncelet, et non ce que j'en pensais moi-même; et, de son aveu, j'ai deviné assez juste. En jetant mes regards en arrière; en voyant que les progrès notables des sciences avaient presque toujours eu leurs sources premières dans quelque heureuse témérité, je me suis dès long-temps accoutumé à beaucoup de bienveillance pour tout ce qui s'écarte des routes battues; et voilà comment, en particulier, il m'est arrivé de lutter une fois avec quelque chaleur (tom. IV, pag. 222) contre le meilleur de mes amis, en faveur d'une théorie nouvelle, sujette aussi à controverse, et qui n'est pas tout-à-fait étrangère à celles que M. Poncelet cherche à faire admettre.

J. D. G.

(**) Ceci, je crois, n'est point pour moi; mais c'est un nouvel exemple de ces insinuations obliques, d'autant plus désobligeantes qu'elles donnent souvent à penser au lecteur beaucoup plus qu'elles ne signifient en réalité.

J. D. G.

concerne le manque de rigueur dont M. Gergonne accuse quelques-unes des doctrines qui entrent dans le *Traité des propriétés projectives*. Quant au reproche qu'il nous adresse d'avoir recommandé, dans l'introduction de ce *Traité*, les élémens d'Euclide, en lisant la pag. 26 de cette introduction, on comprendra, de reste, que nous avons entendu parler, en général, de tous les traités élémentaires où l'on emploie la *synthèse* pour établir l'enchaînement des propositions, et dans lesquels on prétend se borner aux considérations les plus simples sur chaque objet. Cette recommandation de la géométrie synthétique sera, si l'on veut, une concession faite aux idées du siècle, un moyen détourné de faire goûter les nouvelles doctrines (*) et de ne point effrayer les géomètres qui tiennent à l'ancienne forme des élémens; mais, à coup sûr, on n'en conclura point, avec M. Gergonne, que nous n'ayons point senti l'importance de ces mêmes doctrines, au développement desquelles nous avons consacré presque entièrement un volume de 400 pages (**). Pareillement on comprendra, sans difficulté, qu'en débutant par des proportions et des calculs, nous avons cherché à éviter le reproche que nous adresse ce géomètre dans ses *réflexions* du numéro de mars 1827, de son Recueil, d'avoir voulu *brusquer une révolution* (***) ; on reconnaîtra que, toute nécessaire que cette

(*) Ne serait-il pas plus exact de dire : *Un moyen de faire tout-à-fait prendre le change au lecteur sur le but réel de l'ouvrage?*

J. D. G.

(**) J'ai dit que les théorèmes de situation présentaient ces deux caractères, 1.^o d'être doubles ; 2.^o de pouvoir être établis sans aucune sorte de calcul ; est-ce à prouver ces deux assertions et à les mettre dans tout leur jour que sont *presque entièrement consacrées* les 400 pages de M. Poncelet ? J'en appelle, sur ce point, à M. Poncelet lui-même.

J. D. G.

(***) Il n'était pas nécessaire, ce me semble, pour ne point brusquer une révolution, de débiter par des proportions et des calculs. M. Poncelet au-

révolution ait pu paraître à nos propres yeux, comme à ceux de M. Gergonne, nous avons agi prudemment en prenant d'abord un vol moins élevé (*), et en procédant d'après la manière ordinaire d'envisager la science de l'étendue, dans un ouvrage dont les derniers chapitres devaient s'en éloigner considérablement, et qui devait contenir une multitude de relations *métriques* ou de longueur, qui rentreront nécessairement, et quoiqu'on fasse, dans le domaine de la science du calcul (**).

» Le savant rédacteur des *Annales de mathématiques*, qui ne paraît pas avoir été frappé, comme nous, de l'existence de la dualité de ces dernières relations, et qui n'a eu jusqu'à présent en vue que les propriétés de situation les plus simples, a donc tout-à-fait méconnu le but véritable de nos recherches (***) ; peut-être même

rait pu débiter par une géométrie dans le genre de celle dont j'ai ébauché les premières pages (tom. XVI, pag. 209) et contre laquelle aucune objection ne se serait élevée. Il aurait pu traiter ensuite de la théorie des transversales et des projections, dont les principes sont également admis par tout le monde, et réserver, pour la fin de son livre, tout ce qui pouvait être controversé.

J. D. G.

(*) C'est précisément là ce que nous avons essayé de faire (tom. XVI, pag. 209), et justement M. Poncelet a trouvé que cela était trop terre à terre.

J. D. G.

(**) Il est clair, en effet, que les relations *métriques* sont du domaine du *calcul* ; mais il n'était nullement question de ces relations dans mes réflexions sur l'analyse du mémoire de M. Poncelet.

J. D. G.

(***) Je pourrais dire, à mon tour, que M. Poncelet a tout-à-fait pris le change et sur le sujet de mes recherches, et sur ce que j'ai dit des siennes. Je n'ai jamais prétendu nier que son ouvrage ne renfermât un grand nombre de faits en faveur de la dualité des relations métriques. J'ai dit seulement que la dualité des relations de situation, la seule dont je me sois

s'en est-il exagéré, à ses propres yeux, l'importance, quand il a prétendu (numéros de janvier et de février 1827 des *Annales*, pag. 214 et 229) soumettre indistinctement au principe de dualité toutes les propriétés descriptives des figures (*) ; car nos propres méditations nous prouvent que, si cette dualité est exactement applicable aux lignes et aux surfaces des deux premiers degrés, il s'en faut qu'elle le soit aux lignes et aux surfaces des degrés supérieurs, du moins de la manière dont il l'a entendu dans ses deux derniers mémoires : nous n'oserions, par exemple, affirmer avec lui que, de ce que deux lignes de degrés m et n s'entrecoupent en général sur un plan, en mn points au plus, de pareilles lignes n'ont aussi, en général, que mn tangentes communes, ni que la réciproque polaire d'une ligne d'un certain ordre soit elle-même de cet ordre, etc. (**). En nous occupant des mêmes questions, dans un article cité plus

occupé, et à laquelle M. Poncelet ne paraît pas attacher toute l'importance qu'elle me semble mériter, n'y était que très-faiblement indiquée.

J. D. G.

(*) Voici qui semblerait prouver que la foi à la *dualité* des propriétés de situation n'est pas encore très-vive chez M. Poncelet. On peut, sans doute, se méprendre quelquefois dans les applications, d'autant que la découverte de cette dualité ne date, pour ainsi dire, que d'hier, et qu'on est contraint, dans les recherches qui lui sont relatives, de parler encore une langue qui n'a point été construite pour les idées qu'elle fait naître ; et c'est parce que je suis bien convaincu de tout cela que j'ai pris un langage si timide dans les conclusions de mon mémoire (tom. XVII, pag. 251) : mais, quant au principe en lui-même, c'est tout autre chose ; et il ne saurait souffrir ni exceptions ni modifications aucunes ; il s'étend aux lignes et surfaces transcendentes, comme aux lignes et surfaces algébriques, aux lignes et surfaces discontinues, comme aux lignes et surfaces continues ; il est, en un mot, pour me servir de l'expression favorite de M. Wronski, d'une *généralité absolue*

J. D. G.

(**) Si M. Poncelet n'avait pas autant dédaigné l'étude de la dualité de situation, il pourrait prendre ici un ton plus décisif.

J. D. G.

haut (*Annales de mathématiques*, tom. VIII, pag. 211), nous sommes arrivés à des résultats très-différens (*) et que nous avons reproduits, avec l'extention convenable, dans notre dernier *mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques*; or, nous ne pensons pas qu'on puisse attaquer l'exactitude de ces résultats, bien qu'ils conduisent à des conséquences qui ne sont pas entièrement d'accord avec celles que M. Gergonne a déduites des siennes propres dans ses *recherches sur les lois qui régissent les lignes et surfaces algébriques* ».

(*) M. Poncelet, dans l'endroit cité, a prouvé que, m étant le degré de l'équation d'une courbe, sa polaire réciproque ne pouvait être d'un degré supérieur à $m(m-1)$; or, je n'ai rien dit qui démentît cette assertion.