ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Démonstration d'un théorème relatif aux lignes du second ordre circonscrites à un même quadrilatère, renfermant la solution du premier des trois problèmes de géométrie énoncés à la page 284 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18 (1827-1828), p. 100-110
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1827-1828__18__100_1>

Démonstration d'un théorème relatif aux lignes du second ordre circonscrites à un même quadrilatère, renfermant la solution du premier des trois problèmes de géométrie énoncés à la page 284 du précédent volume;

Par M. GERGONNE.

THÉORÈME. *Un quadrilatère convexe quelconque étant donné sur un plan, 1.° on peut toujours lui circonscrire une infinité d'ellipses et deux paraboles seulement; 2.° le lieu des centres de toutes ces ellipses est une hyperbole dont les asymptotes sont respectivement parallèles aux axes des deux paraboles; 3.° les conjugués des diamètres de ces ellipses parallèles à une même droite fixe quelconque concourent tous en un même point fixe de l'hyperbole lieu des centres; 4.° les conjugués des diamètres de ces ellipses parallèles à une des deux asymptotes de l'hyperbole, lieu de leurs centres, sont parallèles à l'autre asymptote de cette hyperbole; 5.° enfin, de toutes ces ellipses, la plus approchante du cercle est celle dont les diamètres conjugués parallèles aux asymptotes de l'hyperbole sont en même temps des diamètres conjugués égaux.*

Ce qu'il y a de nouveau dans cet élégant théorème appartient à M. J. Steiner qui l'a publié dans la première livraison du deuxième volume du Journal allemand de M. Crelle. Mais M. Steiner n'a point démontré la totalité des propositions qui lui appartiennent, et n'a démontré les autres qu'en s'appuyant sur celles qui ne lui appartiennent pas, et qu'il a supposé généralement connues. Cependant, comme ces dernières mêmes ne se trouvent point dans la plupart des traités sur la matière, nous croyons faire une chose agréable au lecteur en démontrant ici le théorème dans son entier, sans rien emprunter de quelque ouvrage que ce puisse être.

Démonstration. Soient pris pour axes des coordonnées deux côtés opposés quelconques du quadrilatère; soient a, a' les distances de l'origine aux deux sommets situés sur l'axe des x, et b, b' les distances de la même origine aux deux sommets situées sur l'axe des y; l'équation de la ligne du second ordre sera de la forme

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0\,. \qquad (1)$$

Les segmens déterminés par cette courbe sur les axes des x et des y, à partir de l'origine, seront donnés respectivement par les deux équations

$$Ax^2+2Dx+F=0\,, \qquad By^2+2Ey+F=0\,; \qquad (2)$$

d'où il suit qu'on devra avoir

$$a+a'=-\frac{2D}{A}\,, \qquad aa'=\frac{F}{A}\,,$$

$$b+b'=-\frac{2E}{B}\,, \qquad bb'=\frac{F}{B}\,.$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{F}{aa'}\,, \qquad & D&=-\frac{a+a'}{2aa'}F\,, \\ B&=\frac{F}{bb'}\,, \qquad & E&=-\frac{b+b'}{2bb'}F\,. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Or, on peut toujours supposer F donné et constant pour toutes les lignes du second ordre circonscrites au quadrilatère; auquel cas A, B, D, E seront aussi donnés et constans; de sorte que ces courbes ne différeront les unes des autres qu'à raison de l'indétermination du seul coefficient C.

Observons présentement que, pour que le quadrilatère soit convexe, il est nécessaire que b et b' soient de mêmes signes ou de signes contraires, en même temps que a et a'; c'est-à-dire, en d'autres termes, qu'il faut que aa' et bb' soient tous deux de même signe, ce qui (3) donnera aussi le même signe à A et B, et rendra ainsi AB positif. En conséquence, on pourra, et même d'une infinité de manières différentes, choisir l'indéterminée C, de telle sorte que C^2-AB soit négatif, ou que la courbe (1) soit une ellipse. On pourra, en outre, choisir C de manière à rendre cette quantité nulle, ou à rendre la courbe une parabole, et pour cela il faudra poser

$$C=\pm\sqrt{AB}\ ; \qquad (4)$$

donc 1.° *à un même quadrilatère convexe quelconque, on peut circonscrire une infinité d'ellipses et seulement deux paraboles.*

En adoptant la double valeur (4) de C, l'équation (1) prend la forme

$$(x\sqrt{A}\pm y\sqrt{B})^2+2Dx+2Ey+F=0\ , \qquad (5)$$

qui, combinée avec la double équation

$$x\sqrt{A}\pm y\sqrt{B}=0\ , \qquad (6)$$

se réduit simplement à

$$2Dx+2Ey+F=0\ ; \qquad (7)$$

ce qui montre que la double droite (6) ne coupe la double courbe (5) qu'en un point unique donné par les deux équations (6) et (7); donc la double droite (6) doit être une parallèle menée par l'origine à l'axe de la double parabole (5).

Si l'on désigne par (t, u) le centre de l'une des ellipses circonscrites au quadrilatère, ce centre sera donné, comme l'on sait, par les deux équations

$$At+Cu+D=0\ , \qquad Bu+Ct+E=0\ . \qquad (8)$$

On obtiendra donc le lieu des centres de toutes les ellipses circonscrites au quadrilatère, en éliminant entre ces deux équations l'indéterminée C, ce qui donnera

$$t(At+D)=u(Bu+E)\ ; \qquad (9)$$

équation qui, parce que A et B sont de même signe, appartient à une hyperbole.

En mettant l'équation de la courbe sous la forme

$$A\left(t+\frac{D}{2A}\right)^2-B\left(u+\frac{E}{2B}\right)^2=\frac{BD^2-AE^2}{4AB}\ ; \qquad (10)$$

ce qui donne, pour les équations de son centre,

$$t=-\frac{D}{2A}\ , \qquad u=-\frac{E}{2B}\ ; \qquad (11)$$

l'équation commune à ses asymptotes est

$$\left(t+\frac{D}{2A}\right)\sqrt{A}\pm\left(u+\frac{E}{2B}\right)\sqrt{B}=0\ , \qquad (12)$$

équation commune à deux droites respectivement parallèles aux droites (6); ainsi 2.° *le lieu des centres de toutes les ellipses circonscrites à un même quadrilatère convexe quelconque, est une hyperbole dont les asymptotes sont respectivement parallèles aux* *axes des deux seules paraboles qui puissent être circonscrites à ce même quadrilatère.*

En remarquant que l'équation (9) est satisfaite par les divers systèmes de valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} t=0\,, \\ u=0\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} t=0\,, \\ u=-\dfrac{E}{B}\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} t=-\dfrac{D}{A}\,, \\ u=0\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} t=-\dfrac{D}{A}\,, \\ u=-\dfrac{E}{B}\,; \end{array}\right.$$

remettant pour A, B, D, E leurs valeurs (3), observant que les axes des coordonnées sont deux côtés opposés quelconques, et peuvent être aussi les deux diagonales considérées comme côtés opposés, on s'assurera, comme on l'a déjà fait (*Annales*, tom. IX, pag. 396), que l'hyperbole, lieu des centres de toutes les ellipses circonscrites à un même quadrilatère convexe passe 1.° par les trois points de concours des côtés opposés et des diagonales; 2.° par les six points milieux des quatre côtés et des deux diagonales; 3.° enfin par les quatrièmes sommets des trois parallélogrammes dont deux sommets opposés seraient les milieux, soit de deux côtés opposés, soit des deux diagonales, et le troisième le point de concours de ces mêmes côtés ou diagonales. Les formules (11), envisagées de la même manière, prouveront que le centre de cette hyperbole est la commune section des trois droites qui joignent les milieux, tant des côtés opposés que des diagonales du quadrilatère.

En posant pour abréger

$$Dt+Eu+F=k\,, \tag{13}$$

et ayant égard aux équations (8), l'équation (1) prendra cette forme

$$A(x-t)^2+B(y-u)^2+2C(x-t)(y-u)+k=0\,; \tag{14}$$

et l'équation d'un diamètre quelconque de l'une quelconque des ellipses circonscrites au quadrilatère sera de celle-ci

$$y-u=m(x-t) . \qquad (15)$$

En combinant celle-ci avec l'équation (14), on obtiendra, pour les coordonuées de l'une des deux extrémités du diamètre,

$$x=t+\sqrt{\frac{-k}{A+Bm^2+2Cm}} , \qquad y=u+m\sqrt{\frac{-k}{A+Bm^2+2Cm}} . \qquad (16)$$

Mais l'équation de la tangente à la courbe (1), en un quelconque (x', y') de ses points, est

$$(Ax'+Cy'+D)x+(By'+Cx'+E)y+(Dx'+Ey'+F)=0 , \qquad (17)$$

qui, en y mettant pour x' et y' les valeurs (16) et ayant égard aux relations (8) et (13) devient

$$\{(A+Cm)x+(Bm+C)y+(D+Em)\}\sqrt{\frac{-k}{A+Bm^2+2Cm.}}+k=0 . \qquad (18)$$

Telle est donc l'équation de la tangente à l'extrémité du diamètre (15); d'où il suit que l'équation de son conjugué sera

$$(A+Cm)(x-t)+(Bm+C)(y-u)=0 ; \qquad (19)$$

ou plus simplement, en ayant égard aux relations (8),

$$(A+Cm)x+(Bm+C)y+(D+Em)=0 . \qquad (20)$$

En donnant donc à l'indéterminée C des valeurs différentes, on obtiendra (15), pour toutes les ellipses circonscrites au quadrilatère dont il s'agit, les conjugués du diamètre parallèle à la droite fixe dont l'équation serait

$$y=mx . \qquad (21)$$

Mais, en mettant l'équation (20) sous cette forme

$$Ax+mBy+(D+mE)+(mx+y)C=0\ ,$$

on voit qu'elle est satisfaite, quelle que soit l'indéterminée C, en posant, à la fois,

$$Ax+mBy+(D+mE)=0\ , \qquad mx+y=0\ ; \qquad (22)$$

donc, dans toutes les ellipses circonscrites au quadrilatère, le conjugué du diamètre parallèle à la droite fixe quelconque (21) passe par le point fixe donné par les deux équations (22). Il est donc vrai 3.° que *les conjugués des diamètres parallèles de toutes les ellipses circonscrites à un même quadrilatère concourent tous en un même point* (*). Il est en outre facile de voir que *ce point est constamment un des points du périmètre de l'hyperbole lieu des centres ;* car, si l'on élimine m entre les équations (22) qui le déterminent, on tombe sur l'équation

$$x(Ax+D)=y(By+E)\ ,$$

qui est précisément (9) l'équation de cette hyperbole.

Il faut pourtant excepter de la proposition ci-dessus le cas où m aurait une valeur qui rendît les droites (22) parallèles, car alors le point de concours des conjugués des diamètres parallèles, se trouverait infiniment éloigné, c'est-à-dire, que ces conjugués seraient eux-mêmes parallèles. C'est ce qui arriverait si l'on avait

$$\frac{A}{m}=mB \qquad \text{ou} \qquad m=\sqrt{\frac{A}{B}}\ ;$$

(*) On trouve une démonstration fort élégante de cette proposition, ainsi que beaucoup d'autres choses intéressantes, dans un petit ouvrage de M. Lamé, ayant pour titre : *Examen des différentes méthodes*, *etc.*; in-8° (Paris, *Courcier*, 1818).

alors les équations des deux diamètres conjugués deviendraient (12) et (22)

$$y-u=(x-t)\sqrt{\frac{A}{B}}\ , \qquad y-u=-(x-t)\sqrt{\frac{A}{B}}\ ;$$

de sorte que ces deux diamètres pourraient être compris dans l'équation unique

$$(x-t)\sqrt{A}\pm(y-u)\sqrt{B}=0\ ; \qquad (23)$$

d'où l'on voit (12) qu'ils seraient alors respectivement parallèles aux deux asymptotes de l'hyperbole lieu des centres ; ainsi 4.° *le conjugué du diamètre de chacune des ellipses circonscrites à un même quadrilatère, parallèles à l'une quelconque des asymptotes de l'hyperbole lieu des centres de toutes ces ellipses, est constamment parallèle à l'autre asymptote de cette hyperbole.*

En posant

$$-\frac{A+Cm}{Bm+C}=m'\ ;$$

d'où

$$A+C(m+m')+Bmm'=0\ , \qquad (24)$$

les équations de nos deux diamètres conjugués deviendront

$$y-u=m(x-t)\ , \qquad y-u=m'(x-t)\ . \qquad (25)$$

En désignant par θ l'angle de ces diamètres on aura

$$\text{Tang.}\theta=\frac{(m-m')\text{Sin.}\gamma}{1+(m+m')\text{Cos.}\gamma+mm'}\ . \qquad (26)$$

Si l'on veut que, pour une valeur déterminée de C, ces diamètres conjugués soient égaux, il faudra, comme l'on sait, que l'angle θ soit minimum, et conséquemment que la différentielle de sa tangente soit nulle, ce qui donnera, toutes réductions faites,

$$(1+2m'\mathrm{Cos}.\gamma+m'^2)\mathrm{d}m=+(1+2m\mathrm{Cos}.\gamma+m^2)\mathrm{d}m'\ ;$$

mais, en différentiant l'équation (24) on a

$$(Bm+c)\mathrm{d}m'=-(Bm'+c)\mathrm{d}m\ ;$$

d'où, en multipliant et réduisant

$$(Bm+C)(1+2m'\mathrm{Cos}.\gamma+m'^2)+(Bm'+C)(1+2m\mathrm{Cos}.\gamma+m^2)=0\,,$$

ou bien en développant

$$\{B(m+m')-2(C-2B\mathrm{Cos}.\gamma)\}mm'+\{C(m+m')^2+(B+C\mathrm{Cos}.\gamma)(m+m')+2C\}=0\ . \quad (27)$$

Mais l'équation (24) donne

$$mm'=-\frac{C(m+m')+A}{B}\,, \qquad (28)$$

qui, substitué dans (27), donne

$$m+m'=-2.\frac{C(A+B)-2AB\mathrm{Cos}.\gamma}{2C^2-B(A-B)-2BC\mathrm{Cos}.\gamma}\ ; \qquad (29)$$

cette valeur, substituée à son tour dans (28), donne

$$mm'=\frac{2C^2+A(A-B)-2AC\mathrm{Cos}.\gamma}{2C^2-B(A-B)-2BC\mathrm{Cos}.\gamma}\ ; \qquad (30)$$

de sorte que m et m' sont racines d'une même équation du second degré, comme on pouvait bien s'y attendre.

En retranchant du quarré de la valeur de $m+m'$ le quadruple de celle de mm', et extrayant la racine quarrée du résultat, il vient

$$m-m'=2.\ \frac{\sqrt{(AB-C^2)\{(A+B-2C\text{Cos.}\gamma)^2-4(AB-C^2)\text{Sin.}^2\gamma\}}}{2C^2-B(A-B)-2BC\text{Cos.}\gamma}\ ;$$

on trouve ensuite

$$1+(m+m')\text{Cos.}\gamma+mm'=\frac{(A+B-2C\text{Cos.}\gamma)^2-4(AB-C^2)\text{Sin.}^2\gamma}{2C^2-B(A-B)-2BC\text{Cos.}\gamma}\ ;$$

ces valeurs étant substituées dans la formule (26), elle deviendra

$$\text{Tang.}\theta=\sqrt{\frac{4(AB-C^2)\text{Sin.}^2\gamma}{(A+B-2C\text{Cos.}\gamma)^2-4(AB-C^2)\text{Sin.}^2\gamma}}\ ;$$

d'où

$$\text{Sin}\,\theta=2\text{Sin.}\gamma.\ \frac{\sqrt{AB-C^2}}{A+B-2C\text{Cos.}\gamma}\ . \qquad (31)$$

Tel est donc, pour chaque valeur de l'indéterminée C, l'angle des diamètres conjugués égaux.

Or, soient $2a$ et $2b$ les deux diamètres principaux d'une ellipse et α l'angle de ses diamètres conjugués, on aura, comme l'on sait, $\text{Tang.}\frac{1}{2}\alpha=\frac{b}{a}$, d'où l'on voit que l'angle α approchera d'autant plus d'un angle droit, que les deux diamètres $2a$ et $2b$ approcheront le plus d'être égaux et conséquemment d'autant plus que cette ellipse sera plus approchante du cercle. Si donc on veut savoir quelle est, de toutes les ellipses circonscrites à notre quadrilatère, celle qui approche le plus du cercle, il ne s'agira que d'assigner la valeur de C qui, dans la formule (31), rend $\text{Sin.}\theta$ maximum, ou sa différentielle nulle.

Égalant donc cette différentielle à zéro, on trouvera

$$2AB\text{Cos.}\gamma-C(A+B)=0\ ;$$

d'où

$$C=\frac{2AB\text{Cos}.\gamma}{A+B}\ . \tag{32}$$

Ces valeurs substituées dans les formules (29) et (30) donnent

$$m+m'=0\ ,\qquad mm'=-\frac{A}{B}\ ;$$

d'où

$$m=\pm\sqrt{\frac{A}{B}}\ ,\quad m'=\mp\sqrt{\frac{A}{B}}\ ;$$

ce qui prouve que, dans l'ellipse dans laquelle les diamètres conjugués égaux forment le plus grand angle aigu, ces diamètres conjugués sont (12) parallèles aux deux asymptotes de l'hyperbole; ainsi 5.° *de toutes les ellipses circonscrites à un même quadrilatère, la plus approchante du cercle est celle dont les diamètres conjugués parallèles aux asymptotes de l'hyperbole lieu des centres de toutes les ellipses circonscrites, sont en même temps des diamètres conjugués égaux;* c'est la solution du problème énoncé à la page 284 du précédent volume (*) et le complément du théorème que nous nous étions proposés de démontrer.

Nous espérons que M. Steiner ne voudra pas laisser son ouvrage incomplet, et que, dans un prochain numéro du Journal de M. Crelle, il nous fera connaître aussi l'ellipse la plus approchante du cercle, entre toutes celles qui sont inscrites à un même quadrilatère.

(*) Le problème avait été proposé par M. Bobillier.