6529

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le premier juillet 1810, ce recueil paraît de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages d'impression, non compris les planches.

On peut adresser indistinctement les demandes de souscription,

Au Rédacteur des *Annales*, rue du St-Sacrement, n.° 5, à Montpellier [Hérault];

A M. *Bachelier*, gendre *Courcier*, libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n.° 55, à Paris;

Et à tous les bureaux de poste.

Les articles à insérer et les ouvrages à annoncer doivent être envoyés, francs de port, à la première de ces adresses.

Le prix de la souscription annuelle est 21 fr. pour la France et 24 fr. pour l'Étranger.

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche I.	Après la page	88.
Planche II.		124.
Planche III.		252.

ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ ET PUBLIÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur à la faculté des sciences de Montpellier, membre de plusieurs sociétés savantes.

TOME DIX-HUITIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez M. BACHELIER, gendre COURCIER, Libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n.° 55.

1827 ET 1828.

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

OPTIQUE.

Recherches sur la caustique par réfraction relative au cercle;

Par M. Thomas de St-Laurent, capitaine au Corps royal d'Etat-Major.

(*Extrait;* par M. Gergonne.)

La recherche de l'équation générale de la caustique par réfraction relative au cercle, quelque méthode d'ailleurs qu'on tente de lui appliquer, s'offre sous un aspect capable de décourager le calculateur le plus intrépide. Au défaut de cette équation, M. de St-Laurent, qui paraît s'être dévoué spécialement aux spéculations de ce genre, a voulu du moins obtenir la caustique pour quelques cas particuliers ; et tel est le sujet d'un mémoire assez étendu qu'il nous a fait l'honneur de nous adresser, et que nous nous déterminons d'autant plus volontiers à ne publier que par extrait, que déjà l'auteur, après avoir traité quelques cas particuliers de la caustique par réflexion relative au cercle (*Annales*, tom. XVII, pag. 1.re) a donné ensuite l'équation générale de cette courbe (pag. 128); qu'il faut espérer qu'il en sera de même pour la caustique par réfraction, et que dès lors il aura ainsi lui-même rendu inutile le mémoire que nous extrayons présentement. Nous aurons soin d'ailleurs de l'analyser de manière qu'il n'y ait de perdus pour le lecteur que des détails de calcul et des transformations que chacun peut aisément suppléer à son gré.

Pour rendre les formules d'une interprétation plus facile, voici les notations que nous croyons devoir adopter.

Soit r le rayon d'un cercle séparateur de deux milieux plans homogènes, d'un pouvoir réfringent inégal, dont nous supposerons le centre à l'origine des coordonnées rectangulaires. Le point rayonnant sera (x', y'), le point d'incidence d'un rayon quelconque, sur la circonférence du cercle, sera (t, u), et le point de contact du rayon réfracté correspondant avec la caustique sera (x, y) ; enfin θ' sera l'angle d'incidence et θ l'angle de réfraction ; et nous supposerons que le rapport constant de leurs sinus est celui de λ' à λ ; de manière que, excepté t et u, toutes les lettres accentuées seront relatives à l'incidence, et toutes les lettres non accentuées relatives à la réfraction. On aura d'ailleurs

$$t^2+u^2=r^2. \qquad (1)$$

Si l'on voulait faire usage du théorème de MM. Sturm et Quetelet (*Annales*, tom. XVI, pag. 307) il faudrait considérer la caustique comme la développée de l'enveloppe de tous les cercles compris dans l'équation générale

$$\frac{(x-t)^2+(y-u)^2}{\lambda^2}=\frac{(x'-t)^2+(y'-u)^2}{\lambda'^2},$$

dans laquelle t et u sont deux paramètres, liés par la relation (1). On trouve facilement, pour l'équation de cette enveloppe, trajectoire orthogonale des rayons réfractés, l'équation du quatrième degré

$$\{\lambda'^2(x^2+y^2-r^2)-\lambda^2(x'^2+y'^2-r^2)\}^2=4\lambda^2\lambda'^2r^2\{(x-x')^2+(y-y')^2\} ;$$

ce qui confirme complètement la conjecture que nous avions formée il y a déjà bien long-temps ; savoir, que les caustiques les plus compliquées sont souvent des développées de courbes assez simples.

La recherche de la caustique pourrait donc se réduire à celle de la développée de la courbe, donc voilà l'équation. M. de St-Laurent ne pense pas qu'il y ait beaucoup à gagner à suivre cette voie ; et en conséquence, il considère immédiatement la caustique comme la courbe enveloppe des rayons réfractés. On pourrait tout au moins chercher quels sont les points de courbure *maxima* et *minima* de cette trajectoire, et en déterminer les centres de courbure, qui seraient les points de rebroussement de la caustique.

M. de St-Laurent prend pour données immédiates la longueur du rayon incident, comptée depuis le point rayonnant jusqu'au point d'incidence, et la longueur de la corde interceptée sur sa direction par le cercle séparateur. Il prend pour inconnues immédiates la longueur du rayon réfracté, comptée depuis le point d'incidence jusqu'à son point de contact avec la caustique, et la corde interceptée sur la direction de ce rayon par le cercle séparateur. Nous allons d'abord employer les coordonnées. Il nous sera facile ensuite de passer aux données et aux inconnues de l'auteur.

Le rayon incident, la normale au cercle au point d'incidence et le rayon réfracté font avec l'axe des x des angles dont les tangentes tabulaires sont respectivement

$$\frac{y'-u}{x'-t}\,,\qquad \frac{u}{t}\,,\qquad \frac{y-u}{x-t}\,;$$

d'où on conclut, par les formules connues,

$$\text{Sin.}\theta=\frac{\frac{y-u}{x-t}-\frac{u}{t}}{\sqrt{\left(1+\frac{u^2}{t^2}\right)\left\{1+\left(\frac{y-u}{x-t}\right)^2\right\}}}=\frac{yt-xu}{\sqrt{(t^2+u^2)\{(x-t)^2+(y-u)^2\}}}\,,$$

$$\text{Sin.}\theta'=\frac{\frac{y'-u}{x'-t}-\frac{u}{t}}{\sqrt{\left(1+\frac{u^2}{t^2}\right)\left\{1+\left(\frac{y'-u}{x'-t}\right)^2\right\}}}=\frac{y'u-x't}{\sqrt{(t^2+u^2)\{(x'-t)^2+(y'-u)^2\}}}\,;$$

et ensuite, par les lois de la dioptrique,

$$\frac{yt-xu}{\lambda\sqrt{(x-t)^2+(y-u)^2}}=\frac{y't-x'u}{\lambda'\sqrt{(x'-t)^2+(y'-u)^2}}\,; \qquad (2)$$

c'est là, pour chaque point d'incidence (t,u), l'équation en x et y du rayon réfracté. Cette équation semblerait être double, à raison des doubles signes dont les radicaux sont susceptibles; mais c'est bien ainsi qu'elle doit être écrite pour la question qui nous occupe. Si, en effet, on suppose $\lambda'=\lambda$, c'est-à-dire, si l'on suppose que la réfraction est nulle, le rayon réfracté ne doit être alors que le prolongement du rayon incident, et doit conséquemment contenir le point rayonnant (x',y') sur sa direction. Il faut donc que, dans ce cas, l'équation soit satisfaite en posant à la fois $x=x'$ et $y=y'$. C'est ce qui arrive en effet et ce qui n'aurait pas lieu si nous eussions adopté d'autres signes.

Si pourtant, dans la vue de résoudre cette équation, on en fait disparaître les radicaux, elle montera au second degré. On n'a pas lieu de s'en étonner, et il est aisé de reconnaître quelles sont les deux droites qu'elle exprime alors. En faisant en effet évanouir les radicaux, λ et λ' n'y entrent plus qu'au quarré, de sorte qu'elle reste la même en changeant le signe de λ ou de $Sin.\theta$; ce qui prouve qu'elle appartient alors au rayon réfracté et a une autre droite passant comme lui par le point d'incidence et symétriquement située avec lui par rapport à la normale au cercle en ce point.

Ces considérations nous paraissent expliquer clairement comment il arrive que les caustiques par réfraction ont des branches physiquement inutiles, que M. de St-Laurent appelle branches *obscures*, par opposition aux branches utiles qu'il appelle *lumineuses*. Il est clair qu'il doit en être ainsi toutes les fois que l'équation de la caustique ne renferme que des puissances paires de λ et λ'; et c'est ce qu'on remarque, en particulier, pour la caustique par réfraction relative à la ligne droite (*Annales*, tom. XI, pag. 236 et 251). Il arrive bien quelque chose d'analogue pour les caustiques par réflexions, du moins lorsque leurs équations sont rendues rationnelles; mais alors la branche obscure se réduit au point rayonnant lui-même, de l'expression duquel on peut toujours débarrasser l'équation. Ces réflexions montrent au surplus toute l'importance du conseil que donne M. Poncelet (*Annales*, tom. VIII, pag. 232) de bien étudier, dans chaque problème, les *équations de départ*, afin de se mettre en état d'interpréter exactement les résultats qu'on en obtient.

Si présentement nous rendons aux coordonnées t et u du point d'incidence leur variabilité, l'équation (2) appartiendra à tous les rayons réfractés; et, pour obtenir l'équation de leur courbe enveloppe, c'est-à-dire, de la caustique, il faudra, suivant les théories connues (*Annales*, tom. III, pag. 361), 1.° différentier les équations (1) et (2), par rapport à t et u seulement; 2.° éliminer entre leurs différentielles le rapport de dt à du; 3.° enfin, éliminer t et u entre l'équation résultante et ces mêmes équations (1) et (2).

Les différentielles de ces deux équations sont

$$tdt+udu=0\ ,$$

$$\frac{\{(x-t)^2+(y-u)^2\}(ydt-xdu)-(yt-xu)\{(x-t)dt+(y-u)du\}}{\lambda\{(x-t)^2+(y-u)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\{(x'-t)^2+(y'-u)^2\}(y'dt-x'du)-(y't-x'u)\{(x'-t)dt+(y'-u)du\}}{\lambda'\{(x'-t)^2+(y'-u)^2\}^{\frac{3}{2}}}\ .$$

Multipliant la dernière par u, remplaçant à mesure udu par sa valeur $-tdt$, que donne la première, et divisant enfin par dt, il viendra

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(xt+yu)\{(x-t)^2+(y-u)^2\}-(yt-xu)^2}{\lambda\{(x-t)^2+(y-u)^2\}^{\frac{3}{2}}}\\ =&\frac{(x't+y'u)\{(x'-t)^2+(y'-u)^2\}-(y't-x'u)^2}{\lambda'\{(x'-t)^2+(y'-u)^2\}^{\frac{3}{2}}}\ ;\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

de sorte que l'équation en x et y de la caustique cherchée sera le résultat de l'élimination de t et u entre les équations (1), (2), (3).

Il suit de là que, pour un point d'incidence donné (t, u), l'équation (3) est l'équation en x et y d'une courbe qui coupe le rayon réfracté en son point de contact avec la caustique. Or, lorsqu'un point est ainsi donné par l'intersection de deux lignes dont on a les équations, il l'est également par les intersections de toutes autres lignes dont les équations seraient des combinaisons quelconques de celles-là; d'où il suit que, dans la recherche qui nous occupe, nous pourrons remplacer l'une ou l'autre des équations (2) et (3) par de semblables combinaisons.

Mais puisque, pour parvenir à notre but, il faut éliminer t et u entre elles, au moyen de l'équation (1), nous devons principalement nous attacher à profiter de cette dernière équation pour rabaisser le degré des deux autres par rapport à ces deux paramètres. On a d'abord, en vertu de l'équation (1),

$$(x-t)^2+(y-u)^2=x^2+y^2+t^2+u^2-2(xt+yu)=(x^2+y^2+r^2)-2(xt+yu)\ ,$$

$$(x'-t)^2+(y'-u)^2=x'^2+y'^2+t^2+u^2-2(x't+y'u)=(x'^2+y'^2+r^2)-2(x't+y'u)\ .$$

On a ensuite, identiquement et par l'équation (1),

$$(yt-xu)^2=(t^2+u^2)(x^2+y^2)-(xt+yu)^2=r^2(x^2+y^2)-(xt+yu)^2\ ,$$

$$(y't-x'u)^2=(t^2+u^2)(x'^2+y'^2)-(x't+y'u)^2=r^2(x'^2+y'^2)-(x't+y'u)^2\ ;$$

au moyen de quoi les équations (2) et (3) deviennent, en quarrant la première,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{r^2(x^2+y^2)-(xt+yu)^2}{\lambda^2\{(x^2+y^2+r^2)-2(xt+yu)\}}\\[2ex] =\dfrac{r^2(x'^2+y'^2)-(x't+y'u)^2}{\lambda'^2\{(x'^2+y'^2+r^2)-2(x't+y'u)\}}\ ,\end{array}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(x^2+y^2+r^2)(xt+yu)-(xt+yu)^2-r^2(x^2+y^2)}{\lambda\{(x^2+y^2+r^2)-2(xt+yu)\}^{\frac{3}{2}}}\\[2ex] =\dfrac{(x'^2+y'^2+r^2)(x't+y'u)-(x't+y'u)^2-r^2(x'^2+y'^2)}{\lambda'\{(x'^2+y'^2+r^2)-2(x't+y'u)\}^{\frac{3}{2}}}\ .\end{array}\right\}\quad(5)$$

Si nous posons présentement

$$\sqrt{(x^2+y^2+r^2)-2(xt+yu)}=z\ ,$$

$$\sqrt{(x'^2+y'^2+r^2)-2(x't+y'u)}=z'\ ;$$

z et z' seront les longueurs des rayons réfracté et incident, comptées depuis le point d'incidence (t,u) jusqu'au point de contact (x,y) avec la caustique d'une part et jusqu'au point rayonnant (x',y') de l'autre. On en tirera, en quarrant et transposant

$$2(xt+yu)=(x^2+y^2+r^2)-z^2\,, \qquad (6)$$

$$2(x't+y'u)=(x'^2+y'^2+r^2)-z'^2\,; \qquad (6')$$

substituant ces valeurs dans les équations (4) et (5), après les avoir préalablement multipliées par *quatre*, elles deviendront, en réduisant,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{z^4-2(x^2+y^2+r^2)z^2+(x^2+y^2-r^2)^2}{\lambda^2z^2}\\ =&\frac{z'^4-2(x^2+y^2+r^2)z'^2+(x'^2+y'^2-r^2)^2}{\lambda'^2z'^2}\,,\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\frac{z^4-(x^2+y^2-r^2)^2}{\lambda z^3}=\frac{z'^4-(x'^2+y'^2-r^2)^2}{\lambda' z'^3}\,. \qquad (8)$$

Si l'on parvient à tirer de ces équations les valeurs de z et z', on en conclura facilement, au moyen des équations (6) et (6'), celles de t et u, dont la substitution dans l'équation (1) conduira à l'équation en x et y de la caustique cherchée.

Ces équations sont des *sixième* et *septième* degrés, par rapport à z et z'; mais il est aisé d'en déduire d'autres d'un degré moins élevé. D'abord l'équation (7) peut être écrite comme il suit :

$$\begin{aligned}&\frac{z^8-2(x^2+y^2+r^2)z^6+(x^2+y^2-r^2)^2z^4}{\lambda^2z^6}\\ =&\frac{z'^8-2(x'^2+y'^2+r^2)z'^6+(x'^2+y'^2-r^2)^2z'^4}{\lambda'^2z'^6}\,;\end{aligned}$$

mais, en quarrant l'équation (8), elle devient

$$\frac{z^8-2(x^2+y^2-r^2)^2z^4+(x^2+y^2-r^2)^4}{\lambda^2z^6}$$

$$=\frac{z'^8-2(x'^2+y'^2-r^2)^2z'^4+(x'^2+y'^2-r^2)^4}{\lambda'^2z'^6}$$

ce qui donne, en retranchant,

$$\frac{2(x^2+y^2+r^2)z^6-3(x^2+y^2-r^2)^2z^4+(x^2+y^2-r^2)^4}{\lambda^2z^6}$$

$$=\frac{2(x'^2+y'^2+r^2)z'^6-3(x^2+y'^2-r^2)^2z'^4+(x'^2+y'^2-r^2)^4}{\lambda'^2z'^6}\ ;$$

Changeant respectivement z^2 et z'^2 en ζ et ζ', tant dans l'équation (7) que dans cette dernière, elles deviendront

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\zeta^2-2(x^2+y^2+r^2)\zeta+(x^2+y^2-r^2)^2}{\lambda^2\zeta}\\&=\frac{\zeta'^2-2(x'^2+y'^2+r^2)\zeta'+(x'^2+y'^2-r^2)^2}{\lambda'^2\zeta'}\ ,\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2(x^2+y+r^2)\zeta^3-3(x^2+y^2-r^2)^2\zeta^2+(x^2+y^2-r^2)^4}{\lambda'^2\zeta'^3}\\&=\frac{2(x'^2+y'^2+r^2)\zeta'^3-3(x'^2+y'^2-r^2)^2\zeta'^2+(x'^2+y'^2-r^2)^4}{\lambda'^2\zeta'^3}\ ;\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

équations qui ne sont plus que des *troisième* et *sixième* degrés en ζ et ζ'. En supposant qu'on parvienne à les résoudre par rapport à ces deux inconnues, on conclura de leurs valeurs, au moyen des équations

$$2(xt+yu)=(x^2+y^2+r^2)-\zeta\ ,$$

$$2(x't+y'u)=(x'^2+y'^2+r^2)-\zeta'\ ,$$

celles de t et u, dont la substitution dans l'équation (1) conduira à celle de la caustique cherchée (*).

Passons présentement aux données et aux inconnues de M. de St-Laurent. Soient $2v$ et $2v'$ les longueurs des cordes respectivement interceptées par le cercle sur les directions des rayons réfracté et incident. En continuant de représenter respectivement par θ et θ' les angles de réfraction et d'incidence, et en supposant, pour fixer les idées, que les points (x,y), (x',y') sont tous deux intérieurs au cercle, ce qui est permis, puisque si, par exemple, le dernier se confondait avec son centre, le premier se confondrait avec lui ; on aura, par les premiers principes de la trigonométrie,

$$v=r\text{Cos.}\theta\ , \qquad x^2+y^2=r^2-2rz\text{Cos.}\theta+z^2\ ,$$

$$v'=r\text{Cos.}\theta'\ , \qquad x'^2+y'^2=r^2-2rz'\text{Cos.}\theta'+z'^2\ ;$$

d'où on conclura par l'élimination de Cos.θ et Cos.θ',

$$x^2+y^2=r^2+z(z-2v)\ , \quad (11) \qquad x'^2+y'^2=r^2+z'(z'-2v')\ . \quad (11')$$

Dans l'hypothèse contraire à celle que nous venons d'admettre v et v' devraient changer de signes; mais ces quantités devant disparaître des résultats, il importe peu d'avoir égard à cette différence.

(*) Si l'on voulait procéder à l'élimination entre les équations (9) et (10), on se priverait aussitôt des avantages de la symétrie ; symétrie qui conduit à soupçonner que l'on pourrait de ces équations en déduire deux autres où il n'entrât plus que $\zeta+\zeta'$ et $\zeta\zeta'$ et où conséquemment on pourrait éliminer l'une de ces quantités sans troubler la symétrie. L'analyste qui trouverait quelque méthode abrégée pour résoudre deux équations de la forme

$$\varphi(x)=\varphi(y)\ , \qquad \psi(x)=\psi(y)\ ,$$

rendrait incontestable un grand service à ceux qui s'occupent d'optique.

En portant les valeurs (11) et (11′) dans les équations (6) et (6′), celles-ci deviennent

$$xt+yu=r^2-vz\,, \quad (12) \qquad x't+y'u=r^2-v'z'\,; \quad (12')$$

ces mêmes valeurs portées dans les équations (7) et (8) donnent

$$\frac{\sqrt{r^2-v^2}}{\lambda}=\frac{\sqrt{r^2-v'^2}}{\lambda'}\,, \qquad (13)$$

$$\frac{v(z-v)}{\lambda z}=\frac{v'(z'-v')}{\lambda' z'}\,; \qquad (14)$$

et la recherche de l'équation en x et y de la caustique se trouve réduite à l'élimination des six quantités t, u, v, v', z, z' entre les sept équations (1), (11), (11′), (12), (12′), (13) et (14).

L'équation (14), comme l'observe M. de St-Laurent, est l'élégant théorème de Petit, au moyen duquel on peut construire la caustique par points. Lorsqu'en effet le point rayonnant, ainsi que le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction sont donnés, on peut, pour chacun des rayons incidens, construire la direction du rayon réfracté. On connaîtra donc alors λ, λ', v, v' et z', et l'équation (14) donnera la longueur z de ce rayon, c'est-à-dire, la situation de son point de contact avec la caustique.

L'élimination de t et u entre trois de nos sept équations n'offre aucune difficulté, en éliminant tour à tour u et t entre les équations (12) et (12′), on obtient

$$(xy'-x'y)t=y'(r^2-vz)-y(r^2-v'z')\,;$$

$$(xy'-x'y)u=x'(r^2-v'z')-x(r^2-vz)\,.$$

En ajoutant les quarrés de ces deux équations et ayant égard à l'équation (1), il vient

$$r^2(xy'-x'y)^2$$
$$=(x^2+y^2)(r^2-\rho'z')^2-2(xx'+yy')(r^2-\rho z)(r^2-\rho'z')+(x'^2+y'^2)(r^2-\rho z)^2, \quad (15)$$

ce qui réduit la recherche de l'équation de la caustique à l'élimination des quatre quantités ρ, ρ', z, z' entre les cinq équations (11), (11'), (13), (14), (15).

M. de St-Laurent, dans la vue de se procurer des équations auxiliaires, utiles pour les applications qu'il a en vue, élimine t et u de cette autre manière : en combinant l'équation (1) avec les équations (11) et (11'), et en quarrant les équations (12) et (12') on obtient

$$(t^2+u^2)(x^2+y^2)=r^4-2r^2\rho z+r^2z^2\,; \qquad (t^2+u^2)(x'^2+y'^2)=r^4-2r^2\rho'z'+r^2z'^2\,;$$
$$(xt+yu)^2=r^4-2r^2\rho z+\rho^2z^2\,; \qquad (x't+y'u)^2=r^4-2r^2\rho'z'+\rho'^2z'^2,$$

d'où en retranchant, réduisant et extrayant les racines

$$yt-xu=z\sqrt{r^2-\rho^2}\,, \quad (16) \qquad y't-x'u=z'\sqrt{r^2-\rho'^2}\,. \quad (16')$$

Nous adoptons ici les signes nécessaires pour que ces équations, combinées avec l'équation (13), s'accordent avec l'équation (2).

Si, entre les équations (16) et (16') et les équations (12) et (12') respectivement, on élimine tour à tour y et y', x et x', on trouvera, en ayant égard à l'équation (1),

$$r^2x=t(r^2-\rho z)-uz\sqrt{r^2-\rho^2}\,, \qquad (17)$$

$$r^2x'=t(r^2-\rho'z')-uz'\sqrt{r^2-\rho'^2}\,, \qquad (17')$$

$$r^2y=u(r^2-\rho z)+tz\sqrt{r^2-\rho^2}\,, \qquad (18)$$

$$r^2y'=u(r^2-\rho'z')+tz'\sqrt{r^2-\rho'^2}\,. \qquad (18')$$

M. de St-Laurent en conclut, en ayant toujours égard à l'équation (1),

$$r^2(xy'-x'y)=z'(r^2-\rho z)\sqrt{r^2-\rho'^2}-z(r^2-\rho' z')\sqrt{r^2-\rho^2}\ ; \qquad (19)$$

on en peut conclure aussi

$$r^2(xx'+yy')=(r^2-\rho z)(r^2-\rho' z')+zz'\sqrt{(r^2-\rho^2)(r^2-\rho'^2)}\ . \qquad (20)$$

Alors l'équation de la caustique sera le résultat de l'élimination de ρ, ρ', z, z', entre les quatre équations (11), (11'), (13), (14) et l'une ou l'autre des deux équations (19) et (20).

Pour première application de ces formules, M. de St-Laurent cherche d'abord à en déduire l'équation de la caustique par réflexion d'une manière moins laborieuse qu'il ne l'avait fait (*Annales*, tom. XVII, pag. 128). On a dans ce cas $\lambda'=-\lambda$ et $\rho'=\rho$, ce qui réduit l'équation (14)

$$(z+z')\rho=2zz'\ ; \qquad (\alpha)$$

l'équation (13) devient alors inutile, mais elle prouve que les deux radicaux doivent être pris en signes contraires; de sorte que les équations (19) et (20) deviennent

$$r^2(xy'-x'y)=\{z'(r^2-\rho z)+z(r^2-\rho z')\}\sqrt{r^2-\rho^2}\ , \qquad (\beta)$$

$$r^2(xx'+yy')=(r^2-\rho z)(r^2-\rho z')-zz'(r^2-\rho^2)\ ; \qquad (\gamma)$$

il faudra y joindre les équations (11) et (11'), qui sont

$$x^2+y^2=r^2+z(z-2\rho)\ , \quad (\delta) \qquad x'^2+y'^2=r^2+z'(z'-2\rho)\ . \quad (\delta')$$

Il sera facile de chasser ρ des quatre dernières, au moyen de l'équation (α); on n'aura plus alors qu'à éliminer z et z', et on trouvera facilement, comme M. de St-Laurent l'avait déjà obtenu la première fois,

$$\{4(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)-r^2[(x+x')^2+(y+y')^2]\}^3=27r^4(xy'-x'y)^2(x^2+y^2-x'^2-y'^2)^2. \quad (21)$$

Il serait à désirer que l'on pût mettre cette équation, comme celle de la caustique par réfraction relative à la ligne droite, sous la forme irrationnelle ; elle en deviendrait probablement plus concise.

Pour deuxième application, M. de St-Laurent suppose que le point rayonnant est sur la circonférence même du cercle séparateur ; ce qu'on exprime en écrivant

$$x'^2+y'^2=r^2\ , \qquad z'=2\rho'\ .$$

C'est alors l'équation (11') qui devient inutile, l'équation (14) se réduit à

$$\lambda z\rho'=2\lambda\rho(z-\rho)\ ; \qquad (\alpha')$$

les équations (19) et (20) deviennent

$$r^2(xy'-x'y)=2\rho'(r^2-\rho z)\sqrt{r^2-\rho'^2}-z(r^2-2\rho'^2)\sqrt{r^2-\rho^2}\ , \quad (\beta')$$

$$r^2(xx'+yy')=(r-\rho z)(r^2-2\rho'^2)-2\rho'z\sqrt{(r^2-\rho^2)(r^2-\rho'^2)}\ ; \quad (\gamma')$$

on doit y joindre les équations (11) et (13), qui sont

$$x^2+y^2=r^2+z(z-z\rho)\ , \quad (\delta') \qquad \frac{\sqrt{r^2-\rho^2}}{\lambda}=\frac{\sqrt{r^2-\rho'^2}}{\lambda'}\ . \quad (\varepsilon')$$

Au moyen des équations (α') et (ε'), on chasse facilement de (β') et (γ') ρ', ρ'^2 et $\sqrt{r^2-\rho'^2}$ des équations (β') et (γ') ; et il ne reste plus alors qu'à éliminer ρ et z entre les deux équations résultantes et l'équation (δ'). On trouve ainsi

$$r^2\{4\lambda'^2(x^2+y^2)-\lambda^2[(x^2+y^2)+2(xx'+yy')+r^2]\}^3=27\lambda^4\lambda'^2(xy'-x'y)^2(x^2+y^2-r^2)^2. \quad (22)$$

En multipliant de part et d'autre par r^4, faisant passer le facteur r^6 du premier membre entre les crochets et se rappelant qu'ici $r^2=x'^2+y'^2$, cette équation pourra être écrite comme il suit :

$$\{4\lambda'^2(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)-\lambda^2r^2[(x+x')^2+(y+y')^2]\}^3=27\lambda^4\lambda'^2r^4(xy'-x'y)^2(x^2+y^2-x'^2-y'^2)^2 .$$

Posant alors $\lambda r=\lambda'\rho$, elle deviendra, en divisant par λ'^6,

$$\{4(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)-\rho^2[(x+x')^2+(y-y')^2]\}^3=27\rho^4(xy'-x'y)^2(x^2+y^2-x'^2-y')^2 ;$$

qui ne diffère de (21) qu'en ce que r y est changé en ρ. Il en résulte ce théorème remarquable.

La caustique par réfraction relative au cercle, dans le cas où le point rayonnant se trouve situé à la circonférence même du cercle séparateur, est en même temps la caustique par réflexion relative au même point rayonnant et à un cercle réflecteur de même centre que le premier, mais dont le rayon serait au sien dans le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence.

Pour troisième application, M. de St-Laurent suppose que la distance du point rayonnant au centre du cercle séparateur est au rayon de ce cercle comme le sinus d'incidence est au sinus de réfraction. Cette supposition donne

$$\lambda^2(x'^2+y'^2)=\lambda'^2r^2 ;$$

ou, en vertu de l'équation (11')

$$(\lambda'^2-\lambda^2)r^2=\lambda^2z'(z'-2v') ;$$

mais l'équation (13) donne

$$(\lambda'^2-\lambda^2)r^2=\lambda'^2v^2-\lambda^2v'^2 ;$$

donc

$$\lambda'^2 p^2 - \lambda^2 p'^2 = \lambda^2 z'(z' - 2p')$$

ou bien en transposant

$$\lambda'^2 p^2 = \lambda^2 (z'^2 - 2p'z' + p'^2) = \lambda^2 (z' - p')^2 \ ;$$

d'où, en extrayant les racines

$$\frac{p}{\lambda} = \frac{z' - p'}{\lambda'} \ , \qquad (\alpha'')$$

équation qui, comparée à (14), donne

$$\frac{z - p}{z} = \frac{p'}{z'} \ ; \qquad (\beta'')$$

en cherchant à éliminer entre ces deux équations l'une des deux quantités p et p', l'autre disparaît aussi, et il vient

$$\frac{z}{\lambda} = \frac{z'}{\lambda'} \ . \qquad (\gamma'')$$

Cette équation nous apprend que les longueurs z, z' des rayons incident et réfracté sont ici dans un rapport constant. Or, c'est une des propriétés du cercle que les distances de tous les points de sa circonférence à deux points conjugués par rapport à lui sont dans un rapport constant. On a donc ce théorème :

Lorsque la distance d'un point rayonnant au centre du cercle séparateur de deux milieux est au rayon de ce cercle dans le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, les rayons émanés de ce point, après s'être réfractés convergent vers le point qui lui est conjugué.

Ce théorème dû à M. de la Rive (*Annales*, tom. XVI, pag. 76), outre que quelquefois il est *physiquement* faux, est de plus incomplet en ce qu'il ne donne que la caustique qui répond à une partie des rayons incidens. Pour le compléter, M. de St-Laurent observe, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, qu'on peut fort bien changer les signes de v et v'; et, en ayant égard à cette circonstance, il arrive à l'équation

$$\begin{aligned}\{4\lambda^4(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)-r^2[(\lambda'^2x+\lambda^2x')^2+(\lambda'^2y+\lambda^2y')^2]\}^3\\=27\lambda^4r^4(xy'-x'y)^2[\lambda'^2(x^2+y^2)-\lambda^2(x'^2+y'^2)]^2\ ;\end{aligned}\tag{23}$$

qui rentre dans l'équation (21) lorsqu'on y remplace le point rayonnant par son conjugué. Il en résulte ce théorème, non moins remarquable que le premier :

La caustique par réfraction relative au cercle, lorsque la distance du point rayonnant à son centre est à son rayon dans le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, se compose 1.° *du conjugué du point rayonnant*, 2.° *de la caustique par réflexion relative au même cercle, considéré comme courbe réflechissante, et à ce point conjugué considéré comme point rayonnant.*

M. de St-Laurent, en renversant ses deux théorèmes, en tire cette conséquence que la caustique par réflexion relative au cercle peut, de deux manières différentes, être considérée comme une caustique par réfraction, savoir :

1.° En la considérant comme caustique par réfraction relative au même point rayonnant, mais à un cercle séparateur concentrique au premier, passant par le point rayonnant, et pour deux milieux tels que le rapport des sinus d'incidence et de réfraction soit le même que celui des rayons des cercles séparateur et réfléchissant ;

2.° En la considérant comme caustique par réfraction pour le même cercle devenu séparateur, mais pour un nouveau point rayonnant qui serait le conjugué du premier, par rapport à ce cercle, et pour deux milieux tels que le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction serait le même que le rapport de la distance de ce point conjugué au centre du cercle à son rayon.

M. de St-Laurent considère enfin le cas des rayons incidens parallèles. On peut, pour ce cas, poser d'abord

$$x'=\rho\text{Cos.}\psi\ ,\qquad y'=\rho\text{Sin.}\psi\ ;$$

ρ sera ainsi la distance du point rayonnant au centre du cercle séparateur, et ψ sera l'inclinaison du rayon sur l'axe des x; en substituant dans l'équation (11') et supposant ensuite ρ infini, on aura aussi z' infini, par suite de quoi l'équation (14) deviendra simplement

$$\frac{\nu(z-\nu)}{\lambda z}=\frac{\nu'}{\lambda'}\ ;\qquad (\alpha''')$$

substituant ces mêmes valeurs dans les équations (19) et (20) et observant qu'on peut, après la substitution, supposer $z'=\rho$ et l'un et l'autre infinis, il viendra simplement

$$r^2(x\text{Sin}\,\psi-y\text{Cos}\,\psi)=(r^2-\nu z)\sqrt{r^2-\nu'^2}+\nu'z\sqrt{r^2-\nu^2}\ ,\qquad (\beta''')$$

$$r^2(x\text{Cos.}\psi+y\text{Sin.}\psi)=z\sqrt{(r^2-\nu^2)(r^2-\nu'^2)}-\nu'(r^2-\nu z)\ ;\qquad (\gamma''')$$

équations auxquelles il faudra adjoindre les équations (11) et (13) qui sont

$$x^2+y^2=r^2+z(z-2\nu)\ ;\quad (\delta''')\qquad \frac{\sqrt{r^2-\nu^2}}{\lambda}=\frac{\sqrt{r^2-\nu'^2}}{\lambda'}\ ,\quad (\varepsilon''')$$

au moyen des équations (α''') et (ε''') on pourra chasser des trois autres ν', ν'^2 et $\sqrt{r^2-\nu^2}$; et on n'aura plus qu'à éliminer ν et z entres les équations résultantes et l'équation (δ'''). M. de St-Laurent supposant, pour abréger, que les rayons sont parallèles à l'axe des x, parvient à l'équation

$$(\lambda'^2-\lambda^2)x=\{(q^2r)^{\frac{2}{3}}-(p^2y)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}}+\{(pqr)^{\frac{2}{3}}-(q^2y)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}}\ ;\quad (24)$$

équation résolue par rapport à x.

ARITHMÉTIQUE APPLIQUÉE.

Théorie élémentaire de la sommation des piles de boulets ;

Par M. Roche, professeur de mathématiques, de physique et de chimie à l'école royale d'artillerie de la marine de Toulon.

On présente ordinairement la sommation des piles de boulets comme une application de la théorie des suites dont le terme général est une fonction rationnelle et entière de l'indice, et ce problème est très-propre, en effet, à faire comprendre l'utilité de cette théorie. Mais elle n'est guère accessible aux sous-officiers et soldats d'artillerie, dont l'instruction est généralement bornée à l'arithmétique et tout au plus à quelques notions très-élémentaires de géométrie; et pourtant le problème de la sommation des piles de boulets se présente continuellement à leurs recherches. On pourrait bien, à la vérité, se borner à leur faire apprendre les énoncés des règles pratiques et les exercer à en faire l'application ; mais, outre qu'il est pénible, pour des êtres doués d'intelligence d'employer des procédés dont ils ne savent pas se rendre compte, il est souvent à craindre, dans ce cas, que, par l'effet d'un défaut d'exercice plus ou moins long, les préceptes venant à se brouiller, dans leur mémoire, ils n'en viennent à appliquer à un cas la règle qui convient à un autre. Ce danger est beaucoup moins à craindre lorsque celui qui opère sait se rendre compte à lui-même des motifs de ses procédés.

Nous croyons donc ne pas faire une chose dépourvue d'utilité, en essayant ici de ramener le problème de la sommation des diverses sortes de piles de boulets aux notions d'arithmétique les plus élémentaires. Nous emploîrons pour abréger les signes algébriques, mais on verra aisément que leur emploi n'est pas indispensable.

Avant de nous occuper de la sommation des piles de boulets, occupons-nous d'abord de la sommation des boulets, des faces qui les terminent. Ces faces peuvent être des rectangles, des quarrés, des trapèzes ou des triangles.

1. Si m et n sont les nombres de boulets de deux côtés d'une face rectangulaire, il est manifeste que le nombre des boulets de cette face sera mn; et il en serait encore de même si, par l'effet d'une construction vicieuse, le parallélogramme était obliquangle, au lieu d'être rectangle.

2. Si le rectangle devenait un quarré dont chaque côté fut formé par n boulets, le nombre des boulets de ce quarré serait donc n^2; et il en serait encore de même si, par l'effet d'une construction viciense, le quarré dégénerait en un rhombe.

3. Supposons qu'il en soit ainsi, et que la petite diagonale du rhombe soit égale à chacun de ses côtés, ce rhombe équivaudra alors à deux triangles équilatéraux ayant base commune; de sorte que, si l'on voulait en former deux triangles équilatéraux isolés l'un de l'autre, il faudrait introduire une nouvelle base de n boulets. Ainsi, pour former deux faces triangulaires ayant chacune des côtés de n boulets, il est nécessaire d'employer n^2+n ou $n(n+1)$ boulets; donc le nombre des boulets contenus dans une seule face triangulaire, dont les côtés contiennent n boulets, est $\frac{n(n+1)}{2}$.

4. Soit enfin une face figurée en trapèze; et soit n le nombre des boulets de l'un des côtés non parallèles et m le nombre de ceux de la petite base, comme il y a à sa suite, et parallèlement à sa direction, $n-1$ rangées de boulets, croissant constamment d'un bou-

let d'une rangée à l'autre, il s'ensuit que le nombre des boulets de la grande base du trapèze sera $m+n-1$.

Ce trapèze sera évidemment composé d'un parallélogramme ayant n boulets dans un sens et m dans l'autre, et d'un triangle ayant tous ses côtés de n boulets; ces deux figures ayant un côté commun de n boulets. Si on veut les isoler l'une de l'autre, il faudra introduire dans l'une les n boulets du côté commun enlevés par l'autre. Le nombre total des boulets du triangle et du parallélogramme sera ainsi (1) et (3) $\frac{n(n+1)}{2}+mn$; donc le nombre des boulets du trapèze est seulement $\frac{n(n+1)}{2}+mn-n=\frac{n(2m+n-1)}{2}$.

On pourrait encore considérer le trapèze comme la différence entre deux triangles, dont le plus grand aurait à tous ses côtés $m+n-1$ boulets, tandis que le côtés de l'autre n'en auraient seulement que $m-1$; on trouverait d'après cela (3), pour le nombre des boulets du trapèze, $\frac{(m+n-1)(m+n)}{2}-\frac{(m-1)m}{2}=\frac{n(2m+n-1)}{2}$, comme ci-dessus.

5. On peut résumer ces diverses formules dans ce principe unique : *Le nombre des boulets d'une face en trapèze, parallélogramme ou triangle s'obtient en multipliant un côté par la demi-somme des arêtes parallèles qui s'y terminent;* pourvu que, dans l'application, on se rappelle que l'une des arêtes parallèles, pour la face triangulaire, n'a qu'un boulet seulement.

6. Passons au nombre des boulets des piles. On ne saurait former des piles en forme de parallélipipède rectangle qu'en les encaissant. Si les trois arêtes d'un même angle d'une telle pile étaient m, n, p, le nombre des boulets de la pile serait évidemment mnp; et il en irait exactement de même si le parallélipipède était obliquangle.

7. Si le parallélipipède avait pour base un quarré ou un rhombe dont chaque côté fut de n boulets, et que ses arêtes se terminant

à cette base fussent de m boulets, le nombre total des boulets du parallélipipède serait alors mn^2, soit que ses arêtes latérales fussent perpendiculaires à cette base ou qu'elles lui fussent obliques.

8. Et si le parallélipipède se réduisait à un cube dont chaque arête contient n boulets, le nombre total des boulets du cube serait n^3; et il en irait encore ainsi, si la pile, au lieu d'être cubique était un parallélipipède obliquangle terminé par six rhombes.

9 Considérons de nouveau la pile qui a pour base un rhombe dont les côtés contiennent n boulets chacun et dont les arêtes latérales contiennent m boulets; cette pile contiendra (7) mn^2 boulets. Supposons que la petite diagonale du rhombe soit égale à ses côtés; le parallélipipède sera formé de deux prismes triangulaires, à base équilatérale, ayant une face rhombe commune qui contiendra mn boulets. Pour isoler ces deux piles l'une de l'autre, il deviendra nécessaire de rétablir pour l'une d'elles ces mn boulets enlevés par l'autre; les deux prismes triangulaires contiendront donc entre eux mn^2+mn ou $m\,n(n+1)$ boulets; d'où il suit que le nombre des boulets de chacun d'eux sera $m.\frac{n(n+1)}{2}$.

10. Dans le cas particulier où il y aurait, dans les arêtes latérales autant de boulets que dans les côtés de la base, le nombre des boulets de la pile prismatique triangulaire deviendrait $\frac{n^2(n+1)}{2}$.

11. Supposons qu'il en soit ainsi; le prisme sera composé de trois tétraèdres tels que l'un d'entre eux aura une face commune avec chacun des deux autres et que toutes leurs arêtes auront n boulets. Si l'on veut isoler ces tétraèdres les uns des autres, il faudra retablir, pour deux d'entre eux, la face commune enlevée par le troisième, ce qui consommera (3) $n(n+1)$ nouveaux boulets; le nombre total des boulets des trois tétraèdres sera ainsi $\frac{n^2(n+1)}{2}+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$, d'où il suit que le nombre des boulets de l'un d'eux ou de la pile tétraèdre, improprement appelée *pile triangulaire*, sera $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

12. Supposons que, par l'effet de la mauvaise conformation de cette pile, sa base soit un triangle rectangle isocèle, et que sa face adjacente à l'hypothénuse de cette base soit perpendiculaire à son plan. Si l'on construit deux pareilles piles, on pourra les réunir de manière à en former une pile pyramidale quadrangulaire, improprement appelée *pile quarrée*; mais il sera nécessaire pour cela d'enlever à l'une d'elles les $\frac{n(n+1)}{2}$ boulets de la face qui doit lui devenir commune avec l'autre. Le nombre des boulets de la pile quarrée sera donc ainsi $2.\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

13. Il ne sera pas difficile, d'après cela, d'obtenir le nombre des boulets de ce qu'on appelle *pile oblongue*, c'est-à-dire, d'une pile dont la base est un rectangle et qui se termine, à la partie supérieure, par une arête unique, parallèle aux longs côtés de sa base. Soient m le nombre des boulets de cette arête, et n le nombre de ceux de l'un des petits côtés de la base; il est aisé de voir (4) que le nombre des boulets des longs côtés de cette base sera $m-n+1$.

La pile pourra être considérée comme formée de deux autres, l'une quarrée ayant n boulets à ses arêtes et l'autre prismatique triangulaire ayant aussi n boulets aux côtés de ses bases et m à ses arêtes latérales; ces deux piles ayant une face triangulaire commune. Si l'on veut les isoler l'une de l'autre, il faudra rétablir, pour l'une d'elles, la face commune enlevée par l'autre, et on aura alors pour le nombre total des boulets des deux piles (9) et (11) $m.\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; d'où il suit que le nombre des boulets de la pile oblongue sera seulement $m.\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{6}$.

En rapprochant toutes ces formules on s'assurera que, *pour avoir le nombre des boulets d'une pile triangulaire quarrée ou oblongue* *il faut constamment multiplier le nombre des boulets de l'une des faces triangulaires par le tiers de la somme des trois arêtes parallèles qui s'y terminent*, en observant qu'une de ces arêtes, pour la pile quarrée, et deux, pour la pile triangulaire se réduisent à un boulet.

Une pile peut n'être pas terminée, c'est-à-dire, qu'on peut avoir à évaluer le nombre des boulets dans des piles tronquées triangulaires, quadrangulaires ou oblongues; c'est une chose facile, d'après ce qui précède.

14. Soient m le nombre des boulets des côtés de la base supérieure d'un tronc de pile triangulaire et n le nombre des boulets des arêtes latérales; le nombre des boulets des côtés de la base inférieure sera (4) $m+n-1$. On pourra ainsi considérer le tronc comme la différence entre deux piles triangulaires dont la plus grande aurait $m+n-1$ et la plus petite $m-1$ boulets à chaque arête. Le nombre des boulets du tronc sera donc (11)

$$\frac{(m+n-1)(m+n)(m+n+1)-(m-1)m(m+1)}{6}.$$

15. Soient m le nombre des boulets des côtés de la base supérieure d'un tronc de pile quarrée et n le nombre des boulets des arêtes latérales; le nombre des boulets des côtés de la base inférieure sera encore ici (4) $m+n-1$. On pourra alors considérer le tronc comme la différence entre deux piles quarrées dont la plus grande aurait $m+n-1$ et la plus petite $m-1$ boulets à chaque arête. Le nombre des boulets du tronc sera donc

$$\frac{(m+n-1)(m+n)(2m+2n-1)-(m-1)m(2m-1)}{6}.$$

16. Soient enfin m et n les nombres de boulets des deux côtés de la base supérieure d'un tronc de pile oblongue et p le nombre des boulets des arêtes latérales, les nombres de boulets des deux côtés de la base inférieure seront respectivement (4) $m+p-1$ et $n+p-1$. En supposant $m>n$, on pourra considérer le tronc

comme la différence entre deux piles oblongues qui auroient l'une et l'autre $m-n+1$ boulets à l'arête supérieure et dans lesquelles le petit côté de la base aurait $n+p-1$, boulets pour la plus grande, et $n-1$ pour la plus petite. Le nombre des boulets du tronc sera donc (13)

$$\frac{(n+p-1)(n+p)(3m-n+2p-1)-n(n-1)(3m-n-1)}{6},$$

ou bien, en développant et réduisant

$$\frac{p}{6}\left\{2p^2+3(m+n-1)p+(6mn-3m-3n+1)\right\};$$

formule symétrique en m et n, comme cela doit être, et qui renferme, comme cas particuliers, ceux de la pile oblongue et de la pile quarrée; le premier s'en déduisant si l'on fait $n=1$, et l'autre si l'on fait en outre $m=1$.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des quatre théorèmes de géométrie proposés à la page 255 du précédent volume;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole royale des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

THÉORÈME I. *Trois lignes du* m.$^{\text{ième}}$ *ordre étant tracées dans un même plan; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en construire trois autres qui, ayant entre elles les mêmes* m^2 *points d'intersection, soient*

THÉORÈME I. *Trois lignes du* m.$^{\text{ième}}$ *ordre étant tracées sur un même plan; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en construire trois autres qui, ayant entre elles les mêmes* m^2 *tangentes communes,* *telles en outre que chacune d'elles passe par les* m² *points d'intersection de deux des trois premières.*

II. Quatre surfaces du m.ième *ordre étant données dans l'espace ; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en construire quatre autres, ayant entre elles les mêmes* m³ *points communs, et telles en outre que chacune d'elles ait aussi les mêmes* m³ *points communs avec trois des quatre premières.*

soient telles en outre que chacune d'elles ait les m² *mêmes tangentes communes avec deux des trois premières.*

II. Quatre surfaces du m.ième *ordre étant données dans l'espace ; on peut toujours, d'une infinité de manières différentes, en construire quatre autres, ayant entre elles les mêmes* m³ *plans tangens communs, et telles en outre que chacune d'elles ait aussi les mêmes* m³ *plans tangens communs avec trois des quatre premières.*

Démonstration.

I. Si l'on représente par

$$M=0\ ,\quad (1)\qquad M'=0\ ,\quad (2)\qquad M''=0\ ,\quad (3)$$

les équations de trois lignes quelconques du *m.*ième ordre, tracées sur un même plan, les suivantes

$$M''+\lambda M=0\ ,\quad (4)\qquad\qquad M''+\lambda' M'=0\ ,\quad (5)$$

appartiendront, quelles que soient les constantes λ et λ', à deux nouvelles lignes du *m.*ième ordre, passant, la première par les m^2 points d'intersection des lignes (1) et (3), et la seconde par les m^2 points d'intersection des lignes (2) et (3). L'équation

$$(M''+\lambda' M')+\mu(M''+\lambda M)=0\ ,$$

c'est-à-dire,

$$\lambda\mu M+\lambda' M'+(1+\mu)M''=0\ ,\qquad (6)$$

exprimera, par la même raison, une ligne assujettie à passer par les m^2 points communs aux lignes (4) et (5), et contiendra de plus les points d'intersection des lignes (1) et (2), si son équation est vérifiée par le système $M=0$, $M'=0$; condition à laquelle on peut satisfaire, sans rien spécifier sur λ et λ', en posant simplement $1+\mu=0$, d'où $\mu=-1$, ce qui réduit l'équation (6) à

$$\lambda M-\lambda' M'=0\ ;$$

ce qui démontre le *théorème I*, d'où on déduit son corrélatif, par la théorie des polaires réciproques.

II. Soient présentement

$M=0$, (1) $\quad M'=0$, (2) $\quad M''=0$, (3) $\quad M'''=0$, (2)

les équations de quatre surfaces quelconques du $m.^{\text{ième}}$ ordre, les suivantes

$$M'''+\lambda M''+\mu M'=0\ , \qquad (5)$$
$$M'''+\lambda' M+\mu' M''=0\ , \qquad (6)$$
$$M'''+\lambda'' M'+\mu'' M=0\ , \qquad (7)$$

appartiendront, quelles que soient les valeurs des constantes λ, λ', λ'', μ, μ', μ'', à trois nouvelles surfaces du même ordre assujetties à passer respectivement, savoir :

la surface (5), par les m^3 intersections des surfaces (2), (3), (4) ;
la surface (6), par les m^3 intersections des surfaces (3), (4), (1) ;
la surface (7), par les m^3 intersections des surfaces (4), (1), (2) .

L'équation

$$M'''+\lambda'' M'+\mu'' M+\nu(M'''+\lambda M''+\mu M')+\nu'(M'''+\lambda' M+\mu' M'')=0\ ,$$

ou bien

$$(\mu''+\lambda'\nu')M+(\lambda''+\mu\nu)M'+(\lambda\nu+\mu'\nu')M''+(1+\nu+\nu')M'''=0 \qquad (8)$$

appartiendra, par la même raison, à une huitième surface du $m.^{\text{ième}}$

ordre, passant par les m^3 points d'intersection des trois surfaces (5), (6), (7); mais cette équation contiendra en outre les m^3 points d'intersection des surfaces (1), (2), (3), si son équation se vérifie par le système

$$M=0\,,\quad M'=0\,,\quad M''=0\,,$$

ce qui exige seulement qu'en laissant aux constantes λ, λ', λ'', μ, μ', μ'', toute leur indétermination, on détermine les constantes ν, ν', par la condition $1+\nu+\nu'=0$ ou $\nu'=-(1+\nu)$ et réduit ainsi l'équation (8) à la forme

$$[\mu''-\lambda'(1+\nu)]M+(\lambda''+\mu\nu)M'+[\nu'(\lambda-\mu')-\mu']M''=0\,,$$

ce qui démontre le *théorème II*, d'où on conclut ensuite son corrélatif, par la considération des polaires réciproques.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'optique.

En supposant qu'un point rayonnant est situé hors d'un cercle séparateur de deux milieux plans homogènes, d'un pouvoir réfringent inégal; à quelle caustique donneront naissance les rayons de lumière qui auront entièrement traversé le cercle, après s'être réfractés à leur entrée et à leur sortie ?

Théorème de géométrie.

Si, par un point pris arbitrairement dans l'intérieur d'un triangle, on mène des parallèles à ses trois côtés, ces droites le diviseront en six compartimens, dont trois seront des parallélogrammes et les trois autres des triangles; et le produit des aires des trois parallélogrammes sera huit fois plus grand que le produit des aires des trois triangles.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Mémoire sur les contacts et sur les intersections des cercles ;

Par M. PLUKER, docteur en l'Université de Bonn.

NOUS nous proposons, dans ce qu'on va lire, de déduire d'une analyse que le lecteur trouvera peut-être assez simple, diverses solutions du problème où il s'agit de décrire un cercle qui touche trois cercles donnés, ainsi que des autres problèmes compris dans celui-là, comme cas particuliers. Nous enseignerons aussi, plus généralement, à décrire un cercle qui en coupe trois autres sous des angles donnés ; et aussi à décrire un cercle qui coupe quatre cercles donnés sous des angles égaux ; ou, plus généralement, sous des angles dont les cosinus soient entre eux dans un rapport donné. Nous montrerons enfin comment on peut résoudre des problèmes analogues sur les surfaces du second ordre.

Dans un des numéros du journal de M. Crelle, publié à Berlin, M. Steiner a donné, sans démonstration, la construction de divers problèmes, parmi lesquels ceux-ci se trouvent compris, en déclarant que ces constructions se déduisaient d'une théorie qu'il a exposée avec assez de développement ; mais la publicité que ce géomètre a donnée à son travail ne nous a pas paru un motif suffisant pour renoncer à publier un sommaire du nôtre, qu'on sera peut-être bien aise de lui comparer, et dont on trouvera peut-être même la marche plus rapide et plus simple à quelques égards.

1. Soient

$$c=0\ , \qquad c'=0\ , \qquad c''=0\ ,$$

les équations de trois cercles, tracés sur un même plan, et rapportés aux mêmes axes; chacune des trois équations

$$c'-c''=0\ , \qquad c''-c=0\ , \qquad c-c'=0\ ,$$

étant linéaire en x et y, et ayant lieu en même temps que celles de deux de ces cercles, sera conséquemment celle de leur corde commune, réelle ou idéale, c'est-à-dire, de leur *axe radical*; mais chacune de ces trois dernières équations est évidemment comportée par les deux autres; donc elles sont toutes trois satisfaites par le même système de valeurs de x et de y; donc, finalement, *les axes radicaux de trois cercles quelconques, tracés sur un même plan, et pris tour à tour deux à deux, concourent tous trois en un même point* que nous appellerons à l'avenir le *centre radical* des trois cercles dont il s'agit (*).

(*) Ce tour de raisonnement, dont la première idée paraît appartenir à M. Gergonne, mérite une attention toute particulière, attendu qu'il peut être utilement employé dans beaucoup d'autres rencontres.

Nous nous bornerons seulement ici à faire remarquer que le théorème subsiste, lorsqu'on remplace un ou deux des cercles donnés, ou même tous les trois, par des points, dont on peut mettre les équations sous cette forme

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0\ .$$

Deux points qui ont avec un même cercle le même axe radical sont dits *conjugués* l'un à l'autre, par rapport à ce cercle. Soit un cercle donné par l'équation

$$x^2+y^2=r^2\ ,$$

et deux points donnés par celles-ci

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0\ ,$$

On pourra facilement, d'après cela, *décrire un cercle qui, passant par deux points donnés, touche un cercle donné*. On peut remarquer, en effet, que le problème a deux solutions et que les deux cercles qui le résolvent ont, avec le cercle donné, un centre radical qui doit se trouver à la fois sur la droite qui joint les deux points donnés, et au point de concours des tangentes com-

---

$$(x-a')^2+(y-b')^2=0\ ;$$

leurs axes radicaux par rapport au cercle seront donnés par les équations

$$2ax+2by-(a^2+b^2+r^2)=0\ ,$$

$$2a'x+2b'y-(a'^2+b'^2+r^2)=0\ .$$

Afin donc que ces deux axes radicaux se confondent, on devra avoir

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{a^2+b^2+r^2}{a'^2+b'^2+r^2}\ .$$

La première partie de cette double équation prouve que les deux points dont il s'agit doivent être en ligne droite avec le centre du cercle; d'où il suit que, si l'on suppose $b=0$, on devra avoir aussi $b'=0$. Notre double équation se réduira ainsi à

$$\frac{a}{a'}=\frac{a^2+r^2}{a'^2+r'^2}\ ,$$

d'où on tirera

$$aa'=r^2\ ;$$

ce qui prouve 1.° que les deux points doivent être situés d'un même côté du centre ; 2.° que le rayon doit être moyen proportionnel entre leurs distances à ce centre.

Il résulte de là que, si l'un de ces points est sur la circonférence, l'autre se confondra avec lui; et que conséquemment l'axe radical d'un cercle et d'un point de sa circonférence n'est autre que la tangente à ce cercle en ce point.

munes à ces deux mêmes cercles et au cercle donné. Ce centre radical demeurera donc le même si l'on remplace l'un des deux cercles cherchés par un autre cercle qui, passant comme lui par les deux points donnés, coupe le cercle donné ; puisque ce point se trouvera toujours à l'intersection des deux mêmes droites. Décrivant donc arbitrairement un tel cercle ; sa corde commune avec le cercle donné coupera la droite menée par les deux points en un point duquel menant des tangentes au cercle donné, leurs points de contact avec lui seront aussi ceux où il doit être touché par les cercles cherchés. Menant donc des rayons par ces deux points, ces rayons seront coupés par la perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les deux points donnés aux centres des deux cercles cherchés.

2. Cette construction se trouve en défaut, lorsque le cercle donné

Rien de plus facile d'après cela que d'obtenir l'équation de la tangente à un cercle

$$x^2+y^2=r^2,$$

en l'un quelconque

$$(x-x')^2+(y-y')^2=0$$

de ses points. En prenant en effet la différence de leurs équations, et ayant égard à la condition

$$x'^2+y'^2=r^2,$$

on aura, sur-le-champ, pour l'équation cherchée de la tangente au cercle,

$$x'x+y'y=r^2.$$

La même méthode est applicable à toutes les lignes du second ordre. Appliquée aux lignes des ordres plus élevés, au lieu de leurs tangentes, elle donnerait leurs lignes osculatrices.

(*Note de* M. PLUCKER).

dégénère en une droite donnée. Voyons comment alors on peut y suppléer. Soient

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \ ,$$

$$(x-a')^2+(y-b'^2)^2=r'^2 \ ,$$

les équations de deux cercles quelconques, en retranchant on aura

$$2(a-a')x+2(b-b')y+(r^2-a^2-b^2)-(r'^2-a'^2-b'^2) \ .$$

Si donc on place l'origine en un quelconque des points de l'axe radical, on aura

$$r^2-(a^2+b^2)=r'^2-(a'^2+b'^2) \ ;$$

ce qui veut dire que *si*, *de l'un quelconque des points de l'axe radical de deux cercles*, *on mène des tangentes à ces deux cercles*, *ces tangentes auront même longueur*.

Il sera facile, d'après cela, de *décrire un cercle qui*, *passant par deux points donnés*, *touche une droite donnée*. On voit, en effet, que les deux cercles qui résolvent le problème doivent avoir pour axe radical la droite qui joint les deux points donnés et pour tangente commune la droite donnée; d'où il suit que la première de ces deux droites doit couper l'autre au milieu de l'intervalle entre les deux points de contact. Or, si à l'un des deux cercles cherchés on en substitue un autre, passant comme lui par les deux points donnés, l'axe radical ne changera pas, et les tangentes menées aux deux cercles de l'un quelconque des points de cet axe seront encore de même longueur. La construction se réduit donc à ce qui suit : Soit décrit arbitrairement un cercle qui passe par les deux points donnés; par l'intersection de la droite qui joint ces deux points avec la droite donnée soit menée une tangente à ce cercle; soit portée la longueur de cette tangente de part et d'autre du même point sur la droite donnée ; on déterminera ainsi ses points de contact avec les cercles cherchés ; alors les perpendiculaires élevées à cette droite par ces deux points couperont la perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les deux points donnés aux centres de ces mêmes cercles.

3. Occupons-nous présentement de la recherche des cercles qui touchent trois cercles donnés. Soient les équations de ces trois cercles.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad ,$$

$$(x-a')^2+(y-b')^2=r'^2 \quad ,$$

$$(x-a'')^2+(y-b'')^2=r''^2 \quad ;$$

soient trois autres cercles, concentriques avec ceux-là, ayant des rayons respectivement égaux aux leurs, augmentés d'une même longueur quelconque R, positive ou négative. Les équations de ces nouveaux cercles seront

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(r+R)^2 \quad ,$$

$$(x-a')^2+(y-b')^2=(r'+R)^2 \quad ,$$

$$(x-a'')^2+(y-b'')^2=(r''+R)^2 \quad .$$

On obtiendra les équations des axes radicaux de ces derniers cercles en prenant les différences de leurs équations deux à deux. Supposons, pour plus de simplicité, qu'on ait pris pour origine des coordonnées le centre radical des trois cercles primitifs ; on aura alors

$$r^2-(a^2+b^2)=r'^2-(a'^2+b'^2)=r''^2-(a''^2+b''^2) \quad ,$$

et en conséquence les équations des axes radicaux des trois nouveaux cercles, pris tour à tour deux à deux, seront

$$(a'-a'')x+(b'-b'')y+(r'-r'')R=0\ ,$$

$$(a''-a)x+(b''-b)y+(r''-r)R=0\ ,$$

$$(a-a')x+(b-b')y+(r-r')R=0\ .$$

En prenant la somme de leurs produits respectifs par r, r', r'' la longueur R disparaît, et l'on obtient l'équation linéaire

$$\{r(a'-a'')+r'(a''-a)+r''(a-a')\}x+\{r(b'-b'')+r'(b''-b)+r''(b-b')\}y=0,$$

d'une droite qui passe par l'origine et qui doit contenir évidemment le centre radical des trois nouveaux cercles, quel que soit R. On a donc ce théorème : *Si les rayons de trois cercles, tracés sur un même plan, croissent ou décroissent d'une même quantité quelconque, leur centre radical, variable de position, parcourra une ligne droite.* Cette droite est facile à obtenir, puisqu'elle doit passer par le centre radical des trois cercles primitifs et par le centre radical des trois cercles qu'on en déduirait en augmentant ou diminuant leurs rayons d'une même quantité quelconque.

4. On sait que les équations des centres de similitude directe des trois cercles primitifs, pris tour à tour deux à deux, sont

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{r'a''-r''a'}{r'-r''}\ ,\\[2ex] y=\dfrac{r'b''-r''b'}{r'-r''}\ ,\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{r''a-ra''}{r''-r}\ ,\\[2ex] y=\dfrac{r''b-rb''}{r''-r}\ ,\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{ra'-r'a}{r-r'}\ ,\\[2ex] y=\dfrac{rb'-r'b}{r-r'}\ ;\end{array}\right.$$

lesquels points sont sur une même droite, qu'on appelle l'*axe de similitude* directe des trois cercles, et dont on trouvera facilement l'équation

$$\{r(b'-b'')+r'(b''-b)+r''(b-b')\}x=\{r(a'-a'')+r'(a''-a)+r''(a-a')\}y\ ;$$

or, cette droite est perpendiculaire à l'autre; on a donc ce nouveau théorème : *La droite que parcourt le centre radical de trois cercles, lorsque leurs rayons croissent ou décroissent d'une même quantité quelconque, est perpendiculaire à leur axe de similitude directe.* Il suffira donc, pour obtenir cette droite, d'abaisser du centre radical des trois cercles une perpendiculaire sur leur axe de similitude directe.

5. Si des centres de similitude directe des trois cercles primitifs, pris tour à tour deux à deux, on décrit trois nouveaux cercles, tels que chacun d'eux ait avec les deux cercles dont le centre de similitude est son centre, le même axe radical, ces trois nouveaux cercles auront évidemment leur centre radical commun avec les trois premiers; et, comme ils ont leurs centres en ligne droite, ils devront avoir un axe radical unique passant par ce centre et perpendiculaire à cette droite. Cet axe radical ne sera donc autre chose que la droite dont il s'agit ici; on a donc encore ce nouveau théorème : *La droite que parcourt le centre radical de trois cercles dont les rayons croissent ou décroissent à la fois d'une même quantité quelconque, est l'axe radical commun de trois autres cercles qui ont leurs centres aux centres de similitude directe de ces trois cercles, pris tour à tour deux à deux, et dont chacun a le même axe radical que deux de ces cercles* (*); ce qui peut offrir une troisième détermination de la droite dont il s'agit.

Si, au lieu d'augmenter ou de diminuer à la fois des rayons des trois cercles, on faisait croître les uns et décroître les autres, mais toujours d'une même quantité quelconque, leur centre radical décrirait encore une ligne droite; mais cette droite serait alors per-

(*) Ces trois nouveaux cercles sont ce que nous avons appelé, d'après M. Steiner, *cercles de commune puissance* des trois cercles primitifs, pris deux à deux (tom. XVII, pag. 311).

J. D. G.

pendiculaire à l'un des axes de similitude inverse des trois cercles ; elle serait axe radical commun de trois nouveaux cercles dont les centres seraient aux trois centres de similitude situés sur cet axe, et dont chacun aurait toujours le même axe radical avec deux des cercles donnés. On doit remarquer enfin que tout ce qui précède subsiste encore, lorsqu'on remplace un quelconque des cercles donnés par une droite ou un point.

L'application de ceci au problème qui nous occupe est visible. Que l'on demande, en effet, un cercle qui touche à la fois trois cercles donnés ; supposons ce cercle déjà obtenu, et soit R son rayon. Supposons, pour fixer les idées, que ce cercle touche les trois autres de la même manière, c'est-à-dire, qu'il les touche tous trois extérieurement ou qu'il les enveloppe tous trois, ou enfin qu'il en soit lui-même enveloppé. Si l'on décrit trois nouveaux cercles, concentriques avec les premiers, et passant tous par le centre de celui-là, ce centre en sera le centre radical ; mais leurs rayons ne seront que les rayons des cercles primitifs, augmentés ou diminués du rayon R ; donc le centre du cercle cherché se trouvera (4) sur la perpendiculaire à l'axe de similitude directe des trois cercles primitifs, menée par leur centre radical. En variant donc les hypothèses, sur la nature des contacts, on parviendra à ce théorème général : *Les centres des huit cercles qui touchent à la fois les trois mêmes cercles donnés sont distribués, deux à deux, sur les perpendiculaires abaissées du centre radical de ces trois cercles sur leurs quatre axes de similitude.*

On pourrait, en partant de là, et en suivant une marche analogue à celle de Viète, dans son *Apollonius Gallus*, parvenir à la solution du problème ; mais, en poursuivant notre analyse, nous en déduirons des constructions beaucoup plus élégantes et plus brièves.

6. Soient

$$(x-a)^2+y^2=r^2\ , \qquad \text{(c)}$$

$$(x-a')^2+y'^2=r'^2\ , \qquad \text{(c')}$$

les équations de deux cercles ; en prenant leur axe radical pour axe des y, nous aurons

$$a^2-r^2=a'^2-r'^2\ .$$

Soit ensuite

$$(x-A)^2+(y-B)^2=R^2 \qquad (C)$$

l'équation d'un troisième cercle que, pour fixer les idées, nous supposons toucher extérieurement les deux premiers ; il en résultera

$$(A-a)^2+B^2=(R+r)^2\ ,$$

$$(A-a')^2+B'^2=(R+r')^2\ ;$$

d'où, en retranchant et ayant égard à la relation ci-dessus,

$$(a-a')A=-(r-r')R\ .$$

Si, au contraire, le cercle (C) enveloppait les deux autres ou en était enveloppé, le signe du second membre serait positif; de sorte que, pour comprendre les deux cas dans un seul, il faudra écrire

$$(a-a')A=\pm(r-r')R\ ;$$

dans tous les cas, $\frac{A}{R}$ sera une quantité constante.

Si donc on considère deux cercles touchans (C), (C'), on aura

$$\frac{A}{R}=\frac{A'}{R'}\ , \qquad \text{ou} \qquad RA'-R'A=0\ ,$$

d'où résultera encore

$$\frac{RA'-R'A}{R-R'}=0\,;$$

or, c'est là la valeur de x pour le centre de similitude directe des deux cercles (C), (C'); donc ce centre de similitude est sur l'axe radical de (c) et (c'). Ainsi, *le centre de similitude directe de deux cercles qui ont avec deux autres cercles un même mode de contact*, *est sur l'axe radical de ces deux-ci.* On démontrera avec la même facilité que ce sera le *centre de similitude inverse* de ces deux cercles qui sera sur l'axe de similitude des deux autres, si les premiers ont des modes de contact inverses avec les deux autres. Il est d'ailleurs évident que ces relations doivent être réciproques; c'est-à-dire, qu'à l'inverse l'un des deux centres de similitude des deux cercles (c) et (c') doit se trouver sur l'axe radical des deux cercles (C) et (C'). Donc, si l'on a un troisième cercle (C''), tangent comme les deux autres aux deux cercles (c), (c'), le centre radical de ces trois cercles coïncidera avec l'un des deux centres de similitude de ces deux-ci, savoir: avec leur centre de similitude directe ou avec leur centre de similitude inverse, suivant que les trois cercles (C), (C'), (C'') seront touchés de la même manière ou d'une manière différente par les deux cercles (c) et (c'); d'où l'on voit encore que si les cercles (C), (C'), (C'')..... étaient en plus grand nombre, ils auraient tous leur centre radical au même point.

7. Si donc de ce point comme centre et avec la tangente menée du même point à l'un d'eux pour rayon, on décrit un nouveau cercle, il coupera tous les cercles (C), (C'), (C'')..... orthogonalement; et, à cause de cette propriété, nous l'appellerons le *cercle orthogonal* de tous ceux-là (*). Or, si les deux cercles (c), (c')

(*) C'est le cercle de *commune puissance* de M. Steiner.

J. D. G.

se coupent, on pourra considérer leurs points d'intersection comme deux cercles de rayon nul qui les touchent tous deux; d'où il suit qu'alors le cercle orthogonal passera par ces deux points; ce qui offre un moyen facile de le construire dans ce cas. Dans tous les cas, il aura même axe radical avec ces deux-là.

8. Deux cercles (c), (c′) étant tracés sur un même plan, on peut toujours concevoir tant d'autres cercles qu'on voudra qui les touchent tous trois, soit de la même manière soit d'une manière différente. Soient (C), (C'), (C'') trois de ces cercles; on voit que les cercles (C), (C'), (C''), pris deux à deux, auront l'un de leurs centres de similitude (7) sur l'axe radical de (c) et (c′) et que conséquemment trois de leurs six centres de similitude seront sur cette droite. C'est le théorème de Monge, qu'on peut encore énoncer ainsi: *Les quatre axes de similitude de trois cercles sont en même temps les axes radicaux de quatre couples de cercles tangens à la fois à ces trois-là.*

9. De ce qui précède on peut déduire divers modes de construction des cercles tangens à la fois à trois cercles donnés.

I. Soient construits le cercle qui coupe orthogonalement les trois cercles donnés, ainsi que leurs quatre axes de similitude. Si ces axes coupent le cercle orthogonal, on achevera (8) la construction, en décrivant (1) des cercles passant par chaque couple de points d'intersection et touchant en même temps l'un quelconque des cercles donnés.

10. Soient p et p' les deux points où les cercles (c) et (c′) sont touchés par (C); la droite pp' passera par l'un des centres de similitude de (c) et (c′), ou, ce qui revient au même (6), par le centre radical des trois cercles (C), (C'), (C''). De plus, les tangentes communes aux points p et p' vont concourir en un point de l'axe radical de (c) et (c′), centre radical de (c), (c′) et (C); d'où il suit que cette droite pp' passe par le pôle de cet axe radical relatif à (C). De là résulte cette autre construction:

II. Que l'on construise le centre radical des trois cercles donnés, leurs quatre axes de similitude et les *douze* pôles de ces quatre axes, par rapport à ces trois cercles. Que l'on mène ensuite des droites du centre radical à ces douze pôles. Ces droites détermineront, sur les trois cercles, leurs *vingt-quatre* points de contact avec les huit cercles qui résolvent le problème.

L'on sait qu'on peut construire le pôle d'une droite par l'intersection des polaires de deux quelconques de ses points. En prenant pour ces points deux centres de similitude, on tombe précisément sur l'élégante construction de M. Gergonne (*Annales*, tom. VII, pag. 289) (*).

11. La polaire d'un point quelconque de pp' passant par son pôle, intersection des tangentes communes en p et p' ; ce point est aussi situé sur la polaire du centre radical de (C), (C'), (C'') relative à (C), ce qui fournit cette troisième construction :

III. Que l'on construise les quatre axes de similitude, et en outre les polaires du centre radical relatives aux trois cercles, ces polaires auront avec les axes de similitude *douze* points d'intersection, desquels menant des tangentes aux cercles respectifs, on obtiendra de nouveau les *vingt-quatre* points de contact des huit cercles cherchés.

Les constructions indiquées, sans analyse, par M. Poncelet (*Annales*, tom. XI, pag. 318) doivent nécessairement rentrer dans les précédentes.

12. Les modifications que doivent subir ces diverses constructions lorsqu'on substitue des points ou des droites à un ou à deux des cercles donnés, n'offrent aucune difficulté. On peut prouver, par exemple, en toute rigueur analytique, que les deux points où un cercle est coupé par la perpendiculaire menée à une droite indéfinie, par son centre, sont les deux centres de similitude de

---

(*) C'est la même qui a été reproduite, tom. XVII, pag. 309.
J. D. G.

ce cercle et de cette droite. Ainsi, en combinant un cercle avec deux droites, les quatre axes de similitude formeront un rectangle inscrit, dont les diagonales seront respectivement perpendiculaires aux deux droites données. En nous arrêtant à ce cas, pour y appliquer la seconde construction, l'on voit d'abord que les pôles des axes de similitude sont les sommets du parallélogramme circonscrit au cercle, dont les côtés sont parallèles aux droites données ; le point d'intersection de ces droites est d'ailleurs ici le centre radical ; et l'on obtient ainsi la construction suivante :

Pour décrire un cercle qui touche à la fois un cercle donné et deux droites données, circonscrivez au cercle donné un parallélogramme dont les côtés soient respectivement parallèles aux deux droites données ; joignez ses quatre sommets à l'intersection de ces deux droites par quatre autres droites qui, par leurs intersections avec la circonférence, détermineront les points où le cercle donné doit être touché par les huit cercles qui, en général, résolvent le problème.

13. Reprenons présentement notre analyse du n.° 6. Au lieu de supposer que le troisième cercle (C) touche les deux autres (c) et (c'), supposons qu'il les coupe sous des angles égaux ou supplémentaires quelconques, que nous représenterons par ω. Convenons, pour fixer les idées, de prendre constamment pour l'angle de deux cercles l'angle de deux arcs dont les concavités sont tournées dans le même sens ; nous aurons

$$(A-a)^2+B^2=R^2+r^2 \pm 2rR\,\text{Cos.}\,\omega\,,$$

$$(A-a')^2+B^2=R^2+r'^2 \pm 2r'R\,\text{Cos.}\,\omega\ ;$$

les signes inférieurs étant relatifs aux supplémens ; nous aurons en retranchant, et ayant toujours égard à la relation qui résulte de ce que l'axe des y et l'axe radical des deux cercles coupés,

$$(a-a')A=\pm(r\pm r')R\text{Cos.}\omega\ .$$

En considérant trois cercles (C), (C'), (C'') coupant (c) sous les angles respectifs ω, ω', ω'', et (c′) sous les mêmes angles ou sous leurs supplémentaires, on aura

$$\frac{R\text{Cos.}\omega}{A}=\frac{R'\text{Cos.}\omega'}{A'}=\frac{R''\text{Cos.}\omega''}{A''}\ ;$$

et par conséquent

$$\frac{A''R'\text{Cos.}\omega'-A'R''\text{Cos.}\omega''}{R'-R''}=\frac{AR''\text{Cos.}\omega''-A''R\text{Cos.}\omega}{R''-R}=\frac{A'R\text{Cos.}\omega-AR'\text{Cos.}\omega'}{R-R'}=0\ ;$$

d'où l'on voit que l'axe des y, c'est-à-dire, l'axe radical des deux cercles (c) et (c′) est un axe de similitude de trois cercles concentriques à (C), (C'), (C'') et dont les rayons $R\text{Cos.}\omega$, $R'\text{Cos.}\omega'$, $R''\text{Cos.}\omega$ seraient égaux aux leurs, diminués dans le rapport de l'unité aux cosinus respectifs des angles ω, ω', ω'' ; savoir l'axe de similitude directe ou un axe de similitude inverse, facile à reconnaître, suivant que les trois angles ω, ω', ω'' sont de même espèce ou d'espèces différentes.

Les dernières expressions ne changeant pas tant que les rapports

$$\frac{\text{Cos.}\omega}{\lambda}\ ,\quad \frac{\text{Cos.}\omega'}{\lambda'}\ ,\quad \frac{\text{Cos}\ \omega''}{\lambda''}\ ,$$

restent les mêmes ; il en résulte que tout cercle qui coupe (C), (C'), (C'') sous des angles dont les cosinus sont dans le rapport constant de λ, λ', λ'' a le même axe radical avec (c) et (c′). Parmi ces cercles, se range évidemment le cercle orthogonal des trois cercles (C), (C'), (C''), pour lequel ces trois cosinus sont nuls ; d'où résulte la construction suivante du problème où l'on propose de décrire un cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles donnés ω, ω', ω''.

Soit diminué le rayon de chacun des cercles donnés dans le rapport de l'unité au cosinus de l'angle sous lequel il doit être coupé par le cercle cherché. On obtiendra ainsi trois nouveaux cercles, dont on déterminera un des axes de similitude, savoir : l'axe de similitude *directe*, si les trois angles ω, ω', ω'' sont de même espèce et celui des trois axes de similitude *inverse* qui passe par le centre de similitude directe des deux cercles pour lesquels les angles sont de même espèce, dans le cas contraire. Soit construit ensuite le cercle orthogonal des trois cercles donnés. Construisant enfin les deux cercles qui ont avec celui-ci pour axe radical l'axe de similitude dont il vient d'être question, ces deux cercles résoudront le problème.

Cette construction se prête, sans difficulté, aux méthodes ordinaires de la géométrie analytique, même dans le cas où le cercle orthogonal devient imaginaire, c'est-à-dire, lorsque le quarré de son rayon devient négatif. Le problème a deux solutions ou bien il est impossible. Dans le premier cas, les deux cercles ainsi construits coupent l'un et l'autre les cercles donnés sous les angles donnés, ou bien ils les coupent tous deux sous les supplémens de ces angles, ou enfin l'un d'eux les coupe sous ces angles même, tandis que l'autre les coupe sous leurs supplémens.

14. Il résulte de ce qui vient d'être dit que les centres de tous les cercles qui coupent les trois donnés (C), (C'), (C'') sous des angles dont les cosinus sont dans le rapport constant des trois nombres λ, λ', λ'', sont situés en ligne droite; conséquence qu'on déduirait aussi d'un calcul analogue à celui du n° 3. En combinant de même les deux cercles (C), (C') avec un quatrième cercle (C'''), on trouvera une seconde droite, lieu des centres des cercles qui coupent ces trois-là sous des angles dont les cosinus sont dans le rapport constant de λ, λ', λ'''; le point où cette droite coupera la première sera le centre d'un cercle qui coupera les quatre cercles don-

nés (C), (C'), (C''), (C''') sous des angles dont les cosinus seront entre eux dans le rapport des nombres λ, λ', λ'', λ'''.

La construction de ce cercle revient donc à décrire, du point d'intersection des deux droites comme centre, un cercle qui ait avec l'orthogonal de (C), (C'), (C''), pour axe radical, l'axe de similitude dont il a été question ci-dessus. Comme les quatre cercles donnés peuvent se combiner trois à trois de quatre manières différentes, on peut construire quatre droites passant par le centre du cercle demandé; tout comme on peut aussi construire quatre droites qui soient les axes radicaux du cercle cherché et des quatre cercles orthogonaux des cercles donnés, pris trois à trois. Si l'un quelconque de ces axes radicaux coupe le cercle orthogonal correspondant, le cercle à construire sera réel; dans le cas contraire il sera imaginaire.

Le cercle cherché peut être réel sans rencontrer tous ou partie des cercles donnés.

De ce qui précède, on déduit la construction suivante du cercle coupant quatre cercles donnés (C), (C'), (C''), (C''') sous des angles dont les cosinus soient respectivement entre eux comme les nombres λ, λ', λ'', λ'''.

Soient construits pour deux fois trois cercles, pris arbitrairement parmi les quatre cercles donnés, les deux cercles orthogonaux. Soient diminués ensuite, en conservant le rayon du premier des quatre cercles donnés, les rayons des trois autres dans les rapports de λ à λ', de λ à λ'', de λ à λ''', et soient construits les axes de similitude directe des systèmes de trois cercles, pris parmi les quatre cercles transformés, qui répondent aux systèmes primitifs, pour lesquels on avait construit les deux cercles orthogonaux; le cercle cherché sera celui qui, pris successivement avec les deux cercles orthogonaux, aura pour axes radicaux avec eux ces deux axes de similitude.

15. Le cercle que nous venons d'enseigner à construire sera unique, tant qu'on ne prendra pas indistinctement l'angle d'intersec-

tion et son supplément; dans le cas contraire, le problème aura huit solutions, comme il résulte des huit combinaisons qu'on peut faire des signes $+$ et $-$ devant les rapports de l'une quelconque des quatre quantités λ, λ', λ'', λ''' aux trois autres. Pour les sept autres cas, les modifications à faire subir à la construction qui vient d'être indiquée, consistent à remplacer des axes de similitude directe par des axes de similitude inverse.

16. La construction d'un cercle qui coupe quatre cercles donnés sous des angles égaux est implicitement comprise dans ce qui précède (14). On peut aussi l'obtenir par le procédé que voici :

Soient construits, pour deux systèmes quelconques de trois cercles, choisis parmi les quatre cercles donnés, deux couples de cercles tangens. Le cercle à construire devra passer par les intersections des deux cercles de chaque couple; ou, plus généralement, il aura avec eux le même axe radical.

17. La construction suivante, où nous nous bornons aux angles d'intersection égaux, n'est qu'une légère modification de celle du n.° 14.

Soient construits les centres de similitude directe de trois couples de cercles choisis à volonté parmi les quatre cercles donnés; de manière toutefois que ces quatre cercles s'y trouvent compris. Par ces trois points soient fait passer trois cercles nouveaux, ayant même axe radical avec les cercles du couple correspondant. Le cercle à construire sera le cercle orthogonal de ces trois derniers cercles.

18. De la même manière qu'il a été expliqué au n.° 12, on pourra, par des modifications convenables, rendre ces constructions propres au cas où des points ou des droites remplaceront un ou plusieurs des cercles donnés.

19. Des constructions analogues à celles qui viennent d'être indiquées se présentent, sans difficulté, pour les problèmes relatifs aux contacts et aux intersections des sphères; et ces mêmes constructions s'appliquent aussi immédiatement aux cercles tracés sur

une même sphère. Nous nous arrêterons seulement quelques instans sur ce dernier cas. L'on sait que, dans la projection stéréographique, dite de Ptolémée ou de Mercator, les cercles se projettent suivant des cercles et les angles suivant d'autres angles qui leur sont égaux. L'on peut aller plus loin encore. En suivant la démonstration analytique de la première partie de ce théorème; celle de de M Puissant, par exemple, on aperçoit sur-le-champ la vérité du théorème suivant, beaucoup plus général. En prenant pour tableau un plan situé d'une manière quelconque, par rapport à une surface d'un second ordre, et en plaçant l'œil à l'extrémité du diamètre de cette surface qui passe par son point de contact avec le plan tangent parallèle à ce tableau, les projections des sections faites dans cette même surface par des plans quelconques seront toutes des courbes semblables. On sait en outre qu'en général toute surface du second ordre peut, et même dans deux sens différens, être coupée par des plans parallèles suivant des circonférences de cercles. Il en résulte qu'en projetant de la manière qui vient d'être dite, sur un plan parallèle à ceux de ces cercles, les projections des sections planes faites dans la surface, suivant toutes les directions possibles seront également des cercles. En particulier, pour les surfaces de révolution du second ordre, l'œil doit être à une des extrémités de l'axe et le tableau normal à cet axe. Dans le cas du paraboloïde de révolution, il faut projeter orthographiquement sur un plan normal à son axe.

Il suit de toutes ces remarques qu'on peut, pour des lignes du second ordre tracées sur une surface du même ordre, résoudre des problèmes analogues à ceux que nous avons résolus pour des cercles tracés sur un même plan, et tous les problèmes du même genre; celui de Malfatti, par exemple, dans toute sa généralité. Il suffira pour cela de projeter les données sur un plan tellement situé que les projections soient des cercles; de résoudre le problème plan pour ces cercles et de projeter ensuite les cercles obtenus sur la surface du second ordre.

OPTIQUE.

Démonstration abrégée de deux théorèmes de M. de St-Laurent, *sur les caustiques par réfraction relatives au cercle*;

Par M. Gergonne.

En réfléchissant sur les recherches d'optique de M. de St-Laurent, dont nous avons rendu compte au commencement de ce volume, nous avons reconnu qu'on pouvait parvenir fort simplement aux deux théorèmes obtenus par l'auteur; et nous publions d'autant plus volontiers les résultats de nos réflexions sur ce sujet épineux, qu'ils paraissent offrir une voie nouvelle pour parvenir, sans trop de calcul, à l'équation générale dont M. de St-Laurent n'a considéré que quelques cas particuliers.

Soit toujours pris le centre du cercle séparateur, dont nous supposons le rayon r, pour origine des coordonnées rectangulaires; soient (x',y') le point rayonnant et le rapport de λ' à λ celui du sinus d'incidence au sinus de réfraction. On sait que si, de tous les points de la circonférence séparatrice, pris tour à tour pour centres et avec des rayons qui soient aux distances de ces centres au point rayonnant dans le rapport de λ à λ', on décrit des cercles, l'enveloppe de tous ces cercles sera une des trajectoires orthogonales des rayons réfractés ; et l'on trouve facilement pour l'équation de cette trajectoire l'équation donnée page 3 ; c'est-à-dire,

$$\{\lambda'^2(x^2+y^2-r^2)-\lambda^2(x'^2+y'^2-r^2)\}^2=4\lambda^2\lambda'^2r^2\{(x-x')^2+(y-y')^2\}\,;\quad(1)$$

de sorte que la caustique n'est autre que la développée de cette courbe.

Si, d'après cela, on demandait une des trajectoires orthogonales, pour un cercle réfléchissant d'un rayon R, concentrique à celui-là, et pour un point rayonnant (X, Y), il faudrait poser, dans cette équation, $x'=X$, $y'=Y$, $r=R$ et $\lambda'=-\lambda$; ce qui donnerait

$$(x^2+y^2-X^2-Y^2)^2=4R^2\{(x-X)^2+(y-Y)^2\}\,.\quad(2)$$

La comparaison des équations (1) et (2) va nous conduire directement à notre but.

I. Supposons d'abord, dans l'équation (1) que le point rayonnant est sur la circonférence du cercle séparateur ; nous exprimerons cette circonstance en écrivant

$$x'^2+y'^2=r^2\,;\qquad(3)$$

au moyen de quoi cette équation deviendra, en éliminant r^2 de son premier membre et divisant ensuite par λ'^4,

$$(x^2+y^2-x'^2-y'^2)^2=4\left(\frac{\lambda}{\lambda'}r\right)^2\{(x-x')^2+(y-y')^2\}\,.$$

Or, pour faire coïncider cette dernière équation avec l'équation (2), il suffit de poser

$$x'=X\,,\quad y'=Y\,,\quad \frac{\lambda}{\lambda'}r=R\,; \tag{4}$$

on a donc ce théorème :

La caustique par réfraction, relative à un cercle et à un point rayonnant situé sur sa circonférence, n'est autre que la caustique par réflexion relative au même point et à un cercle réfléchissant qui, étant concentrique au cercle séparateur, aurait un rayon égal à celui de ce cercle, multiplié par le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence.

Puis donc que la caustique par réflexion relative à un cercle réfléchissant dont le rayon est R et à un point rayonnant (X, Y) a pour équation (*Annales*, tom. XVII, pag. 134)

$$\{4(X^2+Y^2)(x^2+y^2)-R^2[(x+X)^2+(y+Y)^2]\}^2=27R^4(Yx-Xy)^2(x^2+y^2-X^2-Y^2)^2\,; \tag{5}$$

en y mettant pour X, Y, R les valeurs (4) ci-dessus, on aura, pour l'équation de la caustique par réfraction relative au cercle dont le rayon est r et à un point (x', y') situé sur la circonférence de ce cercle

$$\{4\lambda'^2(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-\lambda^2r^2[(x+x')^2+(y+y')^2]\}^2=27\lambda^4r^4(y'x-x'y)^2(x^2+y^2-x'^2-y'^2)^2\,;$$

précisément comme M. de St-Laurent l'a trouvée.

II. Supposons, en second lieu, que la distance du point rayonnant au centre du cercle séparateur soit au rayon de ce cercle comme le sinus d'incidence est au sinus de réfraction; nous exprimerons cette circonstance en écrivant

$$\frac{r^2}{x'^2+y'^2}=\frac{\lambda'^2}{\lambda'^2}\,,\qquad \text{d'où}\qquad \lambda'^2=\lambda^2\,\frac{x'^2+y'^2}{r^2}\,, \tag{6}$$

en substituant cette valeur dans l'équation (1) et divisant par λ^4, elle deviendra

$$\{(x'^2+y'^2)(x^2+y^2-r^2)-r^2(x'^2+y'^2-r^2)\}^2=4r^4(x'^2+y'^2)\{(x-x')^2+(y-y')^2\}\ ;$$

ou bien

$$\{[(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-r^4]-2r^2(x'^2+y'^2-r^2)\}^2=4r^4(x'^2+y'^2)\{(x-x')^2+(y-y')^2\}\ ;$$

ou encore, en développant le premier membre, comme le quarré d'un binome et transposant

$$\{(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-r^4\}^2$$

$$=4r^2(x'^2+y'^2-r^2)[(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-r^4]-4r^4(x'^2+y'^2+r^2)^2+4r^4(x'^2+y'^2)\{(x-x')^2+(y-y')^2\}\ ;$$

ou bien, en développant le second membre et en ordonnant par rapport à r

$$\{(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-r^4\}^2$$

$$=4r^2\{(x'^2+y'^2)^2(x^2+y^2)-2r^2(x'^2+y'^2)(xx'+yy')+r^4(x'^2+y'^2)\}$$

$$=4r^2\{[(x'^2+y'^2)x-r^2x']^2+[(x'^2+y'^2)y-r^2y']^2\}\ ;$$

d'où, en divisant par $(x'^2+y'^2)^2$,

$$\left\{(x^2+y^2)-\frac{r^4}{x'^2+y'^2}\right\}^2$$

$$=4r^2\left\{\left[x-\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}\right]^2+\left[y-\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}\right]^2\right\}$$

ou bien enfin

$$\left\{x^2+y^2-\left(\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}\right)^2-\left(\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}\right)^2\right\}^2$$

$$=4r^2\left\{\left[x-\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}\right]^2+\left[y-\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}\right]^2\right\}.$$

Or, pour faire coïncider cette dernière équation avec l'équation (2), il suffit de poser

$$\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}=X\,,\qquad \frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}=Y\,,\quad r=R\,,\qquad (7)$$

ce qui donne

$$(X^2+Y^2)(x'^2+y'^2)=r^4\,,\qquad \frac{X}{x'}=\frac{Y}{y'}\,,$$

et prouve ainsi que le point (X, Y) est le conjugué de (x', y'), par rapport au cercle séparateur; on a donc ce théorème :

La caustique par réfraction, relative au cercle, et à un point rayonnant dont la distance au centre du cercle séparateur est au rayon de ce cercle dans le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, n'est autre que la caustique par réflexion relative au même cercle, considéré comme cercle réfléchissant, et à un autre point rayonnant qui serait le conjugué de celui-là.

Au moyen de la relation (6), les valeurs (7) deviennent

$$X=\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}x'\,,\qquad Y=\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}y'\,,\qquad R=r\,;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (5), on obtiendra, pour l'équation de la caustique par réfraction qui répond au cas particulier qui nous occupe,

$$\{4\lambda^4(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-r^2[(\lambda'^2x+\lambda^2x')^2+(\lambda'^2y+\lambda^2y')^2]\}^2$$

$$=\lambda^4r^4(y'x-x'y)^2\{\lambda'^4(x^2+y^2)-\lambda^4(x'^2+y'^2)\}^2\ ;$$

exactement comme l'a trouvé M. de St-Laurent.

Les deux théorèmes que nous venons de démontrer, d'une manière qui nous paraît assez briève, donnent lieu de soupçonner qu'il se pourrait bien qu'en général la caustique par réfraction, relative à un cercle séparateur et à un point rayonnant donnés, ne fût qu'une caustique par réflexion relative soit au même cercle soit à un autre cercle, concentrique ou non concentrique à celui-là, du même rayon ou d'un rayon différent, considéré comme cercle réflecteur et au même point ou à un autre point rayonnant.

Si ce soupçon était conforme à la vérité, ce que pourtant nous n'oserions affirmer, le procédé que nous venons de suivre, convenablement modifié et généralisé, paraîtrait le plus propre à conduire facilement à l'équation de cette courbe. Comme d'ailleurs elle doit être symétrique par rapport à la droite qui joint le point donné au centre du cercle donné, il est manifeste que le nouveau point rayonnant et le centre du cercle réflecteur devraient être tous deux situés sur cette droite; et voici, d'après cette remarque, de quelle manière on pourrait procéder.

Sur une même droite indéfinie on placerait les centres de deux cercles C et C', le premier réputé séparateur et le second réflecteur, ayant des rayons quelconques R et R'. Sur la même droite, on supposerait des points rayonnans P et P', respectivement relatifs à ces deux cercles. On chercherait ensuite les trajectoires orthogonales, tant des rayons réfractés relatifs au premier de ces points et au premier cercle que des rayons réfléchis relatifs au second point et à l'autre cercle ; et il ne s'agirait plus que d'exprimer que ces deux trajectoires se confondent, et de déduire de là la grandeur du second cercle, ainsi que sa situation et celle du point P', par rapport au cercle C et au point P.

Nous observerons seulement à ceux qui voudraient s'engager dans cette voie, et en particulier à M. de St-Laurent, à qui il ne saurait convenir sans doute, après s'être approché si près du but, de le laisser atteindre par d'autres, que, dans ce qui précède, nous n'avons employé qu'une trajectoire orthogonale déterminée, et que peut-être ici il serait nécessaire, pour ne se priver d'aucune chance de coïncidence, d'employer l'équation générale de toutes les trajectoires, contenant une constante arbitraire, ou tout au moins leur équation différentielle commune.

En admettant même que les caustiques par réfraction relatives au cercle ne soient pas toutes des caustiques par réflexion relatives à la même courbe ; le procédé que nous indiquons ici serait encore propre à faire découvrir si les deux cas que nous venons de signaler sont les seuls où il en soit ainsi, ou si au contraire il y en a d'autres et quels ils sont.

C'est, il faut en convenir, une sorte de honte pour la science et pour ceux qui la cultivent que, depuis plus d'un siècle que l'on connaît les caustiques et qu'on sait très-bien qu'elles seules peuvent offrir à l'optique une base solide, on se soit encore si peu occupé à les étudier ; et que, tandis que nous possédons tant d'habiles géomètres, que tant de difficiles problèmes ont été résolus par eux, et qu'en particulier nous emmagasinons par centaines des intégrales définies, dont la plupart ne trouveront peut-être jamais d'application, nous en soyons encore réduits aujourd'hui à attendre du hasard ou d'un tâtonnement empyrique de bons oculaires composés pour nos lunettes. Ce n'est seulement que depuis une douzaine d'années qu'on sait que la caustique par réfraction relative à la ligne droite est la développée d'une section conique ; c'est depuis moins de temps encore qu'il a été reconnu que les verres plans à faces parallèles amplifient les objets ; et c'est depuis l'an dernier seulement que l'équation générale de la caustique par réflexion relative au cercle est connue.

En vain dirait-on que les théorèmes de Petit offrent un moyen facile de construire par points les caustiques relatives au cercle, tant par réflexion que par réfraction : il est manifeste en effet que les constructions graphiques ne sauraient donner que des caustiques individuelles, et que les équations de ces courbes ont seules le privilége de les renfermer toutes. En vain dirait-on encore qu'on n'a besoin, dans la théorie des lunettes, que de connaître les portions de caustiques voisines de l'axe des lentilles, et qu'alors on peut à la vérité rigoureuse substituer des approximations faciles, comme l'a fait en particulier M. le professeur de la Rive ; ces moyens d'abréviation pourraient au plus être tolérables pour une réfraction unique ; mais qui oserait répondre de l'influence des quantités négligées sur le résultat final, lorsqu'un rayon de lumière a traversé successivement les deux faces de trois ou quatre lentilles ?

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de géométrie.

I. QUEL est le point de l'intérieur d'un triangle dont la moindre distance à son périmètre est la plus grande possible ?

II. Quel est le point de l'intérieur d'un triangle dont la plus grande distance à son périmètre est la moindre possible ?

III. Quel est le point de l'intérieur d'un tétraèdre dont la moindre distance à sa surface est la plus grande possible ?

IV. Quel est le point de l'intérieur d'un tétraèdre dont la plus grande distance à sa surface est la moindre possible ?

Théorème de géométrie.

Si à une même surface du second ordre on inscrit et on circonscrit deux tétraèdres, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit ; 1.° les intersections des plans des faces opposées dans les deux tétraèdres seront toutes quatre dans un même plan ; 2.° les droites qui joindront les sommets opposés dans les deux tétraèdres passeront toutes quatre par un même point, pôle de ce point.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Recherches sur les courbes à double courbure dont les développantes sont sphériques;

Par M. Bobillier, professeur de Mathématiques à l'Ecole royale des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Soient x', y', z' les coordonnées courantes d'une courbe à double courbure, x_1, y_1, z_1 celles de l'extrémité d'un fil tangent à la courbe au point (x', y', z') et s la longueur de ce fil, comptée du point de contact, ou, ce qui revient au même, la longueur de l'arc de cette courbe compris depuis le point de contact jusqu'à l'origine du développement. Les projections du fil sur les trois axes, supposés rectangulaires, seront $x'-x_1$, $y'-y_1$, $z'-z_1$ et conséquemment ces mêmes quantités, divisées par s, donneront les cosinus tabulaires des angles formés par la direction de ce même fil avec les trois axes; en sorte que l'on aura

$$\frac{dx'}{ds}=\frac{x'-x_1}{s}\,, \qquad \frac{dy'}{ds}=\frac{y'-y_1}{s}\,, \qquad \frac{dz'}{ds}=\frac{z'-z_1}{s}\,;$$

et, par suite,

$$x_1=x'-s\frac{dx'}{ds}\,, \quad y_1=y'-s\frac{dy'}{ds}\,, \quad z_1=z'-s\frac{dz'}{ds}\,. \qquad (1)$$

Différentiant ces trois équations en regardant s comme la variable indépendante, et conséquemment ds comme constante, ce qui permet de poser

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}x'^2+\mathrm{d}y'^2+\mathrm{d}z'^2)=0\ ,\quad \text{d'où}\quad \mathrm{d}x'\mathrm{d}^2x'+\mathrm{d}y'\mathrm{d}^2y'+\mathrm{d}z'\mathrm{d}^2z'=0\ , \quad (2)$$

il viendra, en supprimant les termes qui se détruisent,

$$\mathrm{d}x_1=-s\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}\ ,\quad \mathrm{d}y_1=-s\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}\ ,\quad \mathrm{d}z_1=-s\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}\ ; \quad (3)$$

prenant la somme des produits respectifs de ces trois équations par $\mathrm{d}x'$, $\mathrm{d}y'$, $\mathrm{d}z'$, en remarquant (2) que le second membre de l'équation résultante est nul, on trouvera

$$\mathrm{d}x'\mathrm{d}x_1+\mathrm{d}y'\mathrm{d}y_1+\mathrm{d}z'\mathrm{d}z_1=0\ ; \qquad (4)$$

équation qui exprime évidemment que la développante est constamment perpendiculaire à la direction du fil.

Soit actuellement

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

l'équation de la sphère sur laquelle doit se trouver la développante; on en tirera, par différentiation,

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=0\ ;$$

or, comme le point (x_1, y_1, z_1) s'y trouve situé, on doit avoir

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=a^2\ ,$$

d'où

$$x_1\mathrm{d}x_1+y_1\mathrm{d}y_1+z_1\mathrm{d}z_1=0\ . \qquad (5)$$

Mettant dans l'avant dernière équation les valeurs (1), et dans la dernière les valeurs (2), il vient

$$\left(x'-s\,\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(y'-s\,\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(z'-s\,\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}\right)^2=a^2\ , \quad (6)$$

$$x_1 \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}+y_1 \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}+z_1 \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}=0\ . \qquad (7)$$

L'équation (6) établit un relation entre l'arc de la courbe cherchée, ses coordonnées courantes et leurs différentielles; en la développant, elle prend la forme

$$x'^2+y'^2+z'^2-2s\left(x'\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}+y'\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}+z'\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}\right)+s^2=a^2\ . \quad (8)$$

En intégrant l'équation (7) et remarquant que

$$\int x_1 \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}=x_1\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}-\int\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}x_1\ ,$$

$$\int y_1 \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}=y_1\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}-\int\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}y_1\ ,$$

$$\int z_1 \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}=z_1\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}-\int\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}z_1\ ,$$

on trouve

$$x_1\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}+y_1\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}+z_1\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}-\int\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}x_1+\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}y_1+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}z_1\right)=C\ .$$

ou, parce qu'en vertu de l'équation (4) la quantité soumise au signe d'intégration est nulle,

$$x_1\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}+y_1\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s}+z_1\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}=C\ . \qquad (9)$$

Si l'on désigne par φ l'angle que fait la direction du fil avec celle de la normale au point (x_1, y_1, z_1) de la sphère où il se termine, on aura, en vertu d'une formule connue, et parce que

$\frac{x_1}{a}$, $\frac{y_1}{a}$, $\frac{z_1}{a}$ sont les cosinus des angles que forme cette normale avec les axes

$$\text{Cos}\,\varphi = \frac{x_1}{a}\,\frac{dx'}{ds} + \frac{y_1}{a}\,\frac{dy'}{ds} + \frac{z_1}{a}\,\frac{dz'}{ds}\ ;$$

ou, en vertu de l'équation (9)

$$\text{Cos.}\varphi = \frac{c}{a}\ ;$$

d'où il suit que *le fil est toujours également incliné sur la surface de la sphère.*

L'équation $a\text{Cos.}\varphi = c$ signifie que c est la projection, sur la direction du fil, du rayon qui passe par son extrémité, et que par conséquent la sphère intercepte sur tous les élémens de la courbe cherchée des cordes constantes $2c$. Soit r la perpendiculaire abaissée de l'origine sur l'un de ces élémens, on aura visiblement

$$r = \sqrt{a^2 - c^2}\ ;$$

ainsi, *les élémens d'une courbe à double courbure dont la développante se trouve sur une sphère donnée, sont tous tangens à une même sphère concentrique à la première.*

Si l'on substitue dans l'équation (9) les valeurs (1), on obtient

$$\left(x' - s\frac{dx'}{ds}\right)\frac{dx'}{ds} + \left(y' - s\frac{dy'}{ds}\right)\frac{dy'}{ds} + \left(z' - s\frac{dz'}{ds}\right)\frac{dz'}{ds} = C\ ;$$

ou en développant et réduisant

$$x'\frac{dx'}{ds} + y'\frac{dy'}{ds} + z'\frac{dz'}{ds} - s = c\ ;$$

quarrant les deux membres de celle-ci, et retranchant ensuite l'équation (8), il vient

$$(x'^2+y'^2+z'^2)-\left(x'\frac{dx'}{ds}+y'\frac{dy'}{ds}+z'\frac{dz'}{ds}\right)^2=a^2-c^2 .$$

En remplaçant a^2-c^2 par r^2, ds^2 par $dx'^2+dy'^2+dz'^2$, cette équation deviendra

$$(x'^2+y'^2+z'^2-r^2)(dx'^2+dy'+dx'^2)=(x'dx'+y'dy'+z'dz')^2 , \quad (10)$$

qu'on pourra encore mettre sous cette autre forme

$$(x'dy'-y'dx')^2+(y'dz'-z'dy')^2+(z'dx'-x'dz')^2=r^2(dx'^2+dy'^2+dz'^2) .$$

C'est là conséquemment une des équations différentielles du premier ordre des courbes à double courbure cherchées.

Mettons présentement dans l'équation (5) les valeurs (1); nous aurons

$$\left(x'-s\frac{dx'}{ds}\right)dx_1+\left(y'-s\frac{dy'}{ds}\right)dy_1+\left(z'-s\frac{dz'}{ds}\right)dz_1=0 ,$$

qui, à cause de la relation (4), se réduit simplement à

$$x'dx_1+y'dy_1+x'dz_1=0 . \quad (11)$$

Les équations (5) et (11) prouvent que le plan

$$xdx_1+ydy_1+zdz_1=0$$

contient les deux points (x_1, y_1, z_1) et (x', y', z'), et conséquemment le fil descripteur; ce plan passe d'ailleurs par l'origine; donc il n'est autre que le plan tangent à la surface conique ayant son sommet à l'origine et pour directrice la développée. En outre, ce plan est normal à la développante, comme il résulte immédiatement de la comparaison de son équation avec celles de la tangente à la développante qui sont

$$x-x_1=\frac{dx_1}{dz_1}(z-z_1)\ , \qquad y-y_1=\frac{dy_1}{dz_1}(z-z_1)\ ;$$

il existe conséquemment entre le cône dont il s'agit et la développante une relation telle que tout plan tangent au cône est normal à la développante et réciproquement.

Pour énoncer ce résultat d'une manière simple, supposons que l'on enveloppe un fil sur le périmètre d'une courbe tracée sur une sphère et qu'on le développe ensuite de manière qu'il ne sorte point de la surface sphérique et qu'il soit constamment tendu, auquel cas il se dirigera constamment suivant un arc de grand cercle tangent à cette courbe. L'extrémité du fil décrira visiblement une autre courbe située sur la sphère, et partout perpendiculaire à la direction du fil. On peut donner à cette dernière courbe le nom de *développante sphérique* de la première.

Cela posé, on voit que, *lorsque la développante d'une courbe est située sur une sphère, elle est en même temps la développante sphérique de la ligne de pénétration de la surface de la sphère par le cône ayant son centre pour sommet et la développée non sphérique pour directrice.*

La développée jouit, sur le cône dont il vient d'être question, d'une propriété remarquable : elle est, sur cette surface, *la plus courte ligne entre deux de ses points*, ou, en d'autres termes, elle se transforme en une ligne droite lorsqu'on développe ce cône sur un plan. En effet, on fait voir, dans le calcul des variations (*), que, si une surface a pour équation différentielle

$$z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y\ ,$$

les équations de la ligne la plus courte sur cette surface seront

(*) Voy. tom. XIII, pag. 87.

J. D. G.

$$\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+p\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=0\ , \qquad \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+q\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=0\ ,$$

dont le système satisfait à l'équation différentielle de la surface dont il s'agit. Si cette surface est un cône ayant son sommet à l'origine, il existera, comme l'on sait, entre les coefficiens différentiels p et q, la relation

$$px+qy=z\ ;$$

éliminant p et q entre ces trois équations, on trouve

$$x\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+y\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+z\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=0\ ;$$

or, il est facile de voir que les courbes de développement sphérique satisfont à cette équation; car, en substituant dans l'équation (11) les formules (2), il vient

$$x'\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s}+y'\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+z'\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s}=0\ .$$

Si l'on suppose que le centre de la sphère soit situé à l'infini, cette surface dégénèrera en un plan et le cône en un cylindre qui lui sera perpendiculaire; on aura ainsi les deux premiers résultats énoncés à la pag. 254 du présent volume.

S'il s'agissait de trouver, sur une surface donnée

$$z=\mathrm{f}(x,y)\ ,$$

les courbes à développantes sphériques, il faudrait joindre à cette équation son équation différentielle

$$\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y\ ,$$

et l'équation de condition

$$(x^2+y^2+z^2-r^2)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)=(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)^2 \;; \quad (12)$$

éliminant une des variables et sa différentielle entre ces trois équations, on aura l'équation différentielle du premier ordre de la projection des lignes cherchées sur l'un des plans coordonnés.

Appliquons ce procédé au cylindre droit à base circulaire dont l'équation est

$$x^2+y^2=R^2 ,$$

et, pour simplifier, posons $a=r$, ce qui correspond au cas où la direction du fil est tangente à la sphère, lieu du développement.

En retranchant cette équation de celle de la sphère

$$x^2+y^2+z^2=r^2 ,$$

on trouve

$$z^2=r^2-R^2 \quad \text{d'où} \quad z=\pm\sqrt{r^2-R^2} ,$$

ces valeurs de z sont les distances des plans des cercles de pénétration des deux surfaces au plan des xy. Soit fait $r^2-R^2=b^2$.

Si l'on différentie l'équation du cylindre, on trouve

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0 \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=\frac{R^2\mathrm{d}x^2}{R^2-x^2} ,$$

substituant dans l'équation (12), il vient, en remplaçant r^2-R^2 par b^2

$$(z^2-b^2)\left(\frac{R^2\mathrm{d}x^2}{R^2-x^2}+\mathrm{d}z^2\right)=z^2\mathrm{d}z^2 ,$$

puis, en séparant les variables,

$$\frac{R^2\mathrm{d}x^2}{R^2-x^2}=\frac{b^2\mathrm{d}z^2}{z^2-b^2}$$

ou bien en extrayant la racine quarrée et supposant que les variables x et z ne croissent pas en même temps.

$$-\frac{R\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{b\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-b^2}}\ ;$$

équation dont l'intégrale est

$$R\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{x}{R}\right)=b\text{Log.}(z+\sqrt{x^2-b^2})+\text{Const.}$$

Pour déterminer la constante, supposons que le développement commence au point $x=R$, $y=0$, $z=b$; ce qui donne

$$0=b\text{Log.}b+\text{Const.}$$

et en retranchant,

$$R\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{x}{R}\right)=b.\text{Log.}\left(\frac{z+\sqrt{z^2-b^2}}{b}\right)\ ;$$

d'où l'on tire aisément

$$z+\sqrt{z^2-b^2}=b.e.^{\frac{R}{b}\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{x}{R}\right)}\ ;$$

cette équation peut se transformer en celle-ci

$$z-\sqrt{z^2-b^2}=b.e^{-\frac{R}{b}\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{x}{R}\right)}\ ,$$

d'où en ajoutant,

$$z=\frac{b}{2}\left\{e^{+\frac{R}{b}\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{x}{R}\right)}+e^{-\frac{R}{b}\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{x}{R}\right)}\right\}$$

c'est l'équation de la projection de la courbe cherchée sur le plan des xz.

On reconnaît facilement la nature de cette courbe en développant le cylindre sur un plan. Supposons que ce plan ait pour équation $x=R$ et que le développement s'effectue à partir de l'arête opposée à celle de contact ; soient pris pour axes cette dernière arête et la trace du plan tangent sur celui des xy ; soient u et t les coordonnées respectivement relatives à ces axes, on aura

$$u=z\ ,\qquad t=R\,\mathrm{Arc.}\left(\mathrm{Cos.}=\frac{x}{R}\right)\ ;$$

d'où, en substituant dans l'équation précédente,

$$u=\frac{b}{2}\left(e^{+\frac{t}{b}}+e^{-\frac{t}{b}}\right)\ ;$$

c'est l'équation de la courbe développée. On voit qu'elle appartient à une chaînette formée par un fil uniformément pesant, parfaitement flexible et inextensible, dont le rayon de courbure, au point le plus bas, est égal à b (*).

De là résulte ce curieux théorème : *Si l'on fixe à deux des points de la surface d'un cylindre droit, dont l'axe est vertical, les deux extrémités d'un fil uniformément pesant, parfaitement flexible et inextensible, qui n'éprouve aucun frottement de la part de la surface du cylindre, ce fil abandonné ainsi à l'action de la pesanteur, se pliera sur ce cylindre suivant une courbe à double courbure dont les développantes appartiendront à des surfaces sphériques.*

(*) Voy. *Annales*, tom. I, pag. 58.

J. D. G.

P. S. Tous les plans tangens au cylindre dont il vient d'être question coupent la sphère sur laquelle est située une quelconque des développantes suivant des cercles égaux auxquels sont tangens les divers élémens de la chaînette cylindrique ; et il est clair qu'il devra encore en être de même après le développement du cylindre sur le plan tangent conduit par un des points de cette courbe.

Or, de là résulte un moyen fort simple de mener une tangente à la chaînette cylindrique développée. Soient AM cette courbe, (fig. 1), A son point le plus bas, AD sa tangente en ce point, BC une parallèle à cette tangente, qui en soit distante d'une quantité AB, égale au rayon de courbure de la courbe en ce point A ; et soit M le point par lequel on se propose de mener une tangente. Par ce point on abaissera une perpendiculaire sur les deux parallèles AD et BC, les coupant en D et C. Du point C comme centre, et avec CD pour rayon, on décrira un cercle ; et la tangente MN à ce cercle sera aussi tangente à la courbe.

On peut remarquer que l'arc AM est égal à la tangente MN.

Il résulte de cette construction que la chaînette cylindrique développée est la développée d'une courbe dont les tangentes CN, terminées à BC, sont constantes.

On peut aussi démontrer, par le calcul, que l'aire ABCM a pour mesure $AB \times AM = AB \times MN$, et que conséquemment cette aire est double de celle du triangle rectangle MCN. On s'assurera aussi que, si l'on prolonge les normales au-dessous de la chaînette de quantités égales aux rayons de courbure correspondans, les extrémités des prolongemens se trouveront toutes situées sur l'horizontale BC. On trouvera enfin que la tension absolue du fil, en l'un quelconque de ses points M, est égale au poids du fil de même nature d'une longueur égale à MC.

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Note sur un symptôme d'existence des racines imaginaires, dans une équation de degré quelconque ;

Par M. A. Dupré, Elève de l'Ecole préparatoire du Collége de Louis-le-Grand.

Soit l'équation en x

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\dots+A_{n-1}x^{m-n+1}+A_nx^{m-n}+A_{n+1}x^{m-n-1}+\dots$$
$$+A_{m-2}x^2+A_{m-1}x+A_m=X=0\,; \quad (1)$$

on sait que l'équation

$$y=X \qquad (2)$$

est celle d'une courbe qui a un cours continu et indéfini, dans le sens des x, de part et d'autre de l'axe des y ; et que les segmens qu'elle détermine sur l'axe des x, comptés de l'origine sont les racines réelles de la proposée. On sait de plus qu'une parallèle quelconque à l'axe des y, parallèle qui coupe nécessairement la courbe, ne saurait la couper en plus d'un point.

Il suit de là qu'entre deux intersections consécutives quelconques, il y aura toujours un point de la courbe, au moins, pour lequel la tangente sera parallèle à l'axe des x, et dont l'abscisse sera conséquemment racine de l'équation

$$mA_0x^{m-1}+(m-1)A_1x^{m-2}+(m-2)A_2x^{m-3}+\ldots+2A_{m-2}x+A_{m-1}=X'=0\ ; \quad (3)$$

d'où il suit que, si la proposée a k racines réelles, l'équation (3) en aura $k-1$, au moins.

Donc, si la proposée a ses m racines réelles, l'équation (3) devra avoir $m-1$ racines réelles, au moins; et puisqu'elle est du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement, elle n'aura point de racines imaginaires. Donc, à l'inverse, si cette équation (3) a des racines imaginaires, la proposée devra en avoir également. Il est aisé de voir d'ailleurs que la présence des racines égales dans la proposée n'altèrerait en rien la vérité de cette proposition. Il arriverait seulement que toutes ces racines, excepté une de chaque sorte, se reproduiraient dans l'équation (3).

Or, comme on peut raisonner sur chaque dérivée, par rapport à celle qui la précède immédiatement, comme nous venons de le faire de l'équation (3) par rapport à la proposée, on peut établir en principe que, *lorsqu'une équation a toutes ses racines réelles, toutes ses dérivées, jusqu'à la dernière, ont aussi toutes leurs racines réelles;* d'où il suit que, *si une seule des dérivées d'une équation a des racines imaginaires, toutes ses dérivées supérieures, et par suite la proposée elle-même, auront aussi des racines imaginaires.* Cette remarque, dit-on, a déjà été faite par M. Cauchy, dans un mémoire dont nous n'avons pas eu connaissance.

Cela posé, la $(m-2)^{ieme}$ dérivée de l'équation proposée est, en multipliant par *deux* et réduisant,

$$m(m-1)A_0x^2+2(m-1)A_1x+2A_2=0\ , \qquad (4)$$

laquelle aura ses racines imaginaires si l'on a

$$(m-1)^2A_1^2-2m(m-1)A_0A_2<0$$

ou, plus simplement,

$$(m-1)A_1^2<2mA_0A_2\ , \qquad (5)$$

donc, dans ce cas aussi, la proposée aura des racines imaginaires.

Si, dans la proposée, on change x en $\frac{1}{y}$, elle deviendra, en chassant les dénominateurs et ordonnant,

$$A_my^m+A_{m-1}y^{m-1}+A_{m-2}y^{m-2}+\ldots\ldots+A_2x^2+A_1x+A_0=0\ ; \qquad (6)$$

et, d'après ce qui vient d'être dit, cette dernière équation aura nécessairement des racines imaginaires si l'on a

$$(m-1)A^2_{m-1}<2mA_mA_{m-2}\ ; \qquad (7)$$

mais, les racines imaginaires sont nécessairement en même nombre dans l'équation (6) et dans la proposée; donc, si cette dernière équation a lieu, la proposée aura nécessairement des racines imaginaires.

Soit prise présentement la $(m-n-1)^{ieme}$ dérivée de la proposée; en la modifiant convenablement, elle se terminera ainsi

$$+(m-n+1)(m-n)A_{n-1}x^2+2(m-n)A_nx+2A_{n+1}=0\ ;$$

mais, d'après le résultat (7), si elle se terminait ainsi,

$$+A'_{m-2}x^2+A'_{m-1}x+A'_m=0$$

elle aurait des racines imaginaires, et conséquemment la proposée en aurait aussi, si l'on avait

$$(m-1)A'^2_{m-1}<2mA'_mA'_{m-2}\ ;$$

faisant donc

$$A'_{m-2}=(m-n+1)(m-n)A_{n-1}\ ,$$

$$A'_{m-1}=2(m-n)A_n\ ,$$

$$A'_m=2A_{n+1}\ ,$$

il viendra, en substituant et réduisant,

$$(m-1)(m-n)A^2_n<m(m-n+1)A_{n-1}A_{n+1}\ ; \qquad (8)$$

de sorte que, si une telle relation a lieu entre trois termes consécutifs quelconques de la proposée, cette équation aura nécessairement des racines imaginaires.

Si l'on a $A^2_n<A_{n-1}A_{n+1}$, à plus forte raison la relation (8) aura-t-elle lieu ; donc la proposée aura des racines imaginaires (*) ; et, comme cette dernière inégalité est nécessairement satisfaite, si l'on a $A_n=0$ et A_{n-1}, A_{n+1} de mêmes signes, on retombe ainsi sur sa remarque déjà faite par Descartes, savoir : que toute équation dans laquelle il manque un terme, entre deux autres de mêmes lignes, a nécessairement des racines imaginaires.

(*) Cette proposition a déjà été établie à la page 385 du XVI.e volume du présent recueil, où l'on a prouvé, en outre, qu'autant de fois cette relation avait lieu entre trois termes consécutifs d'une équation, autant au moins l'équation avait de couples de racines imaginaires. Il serait intéressant de savoir s'il en est de même à l'égard de la relation (8), dont celle-là n'est qu'un cas particulier.

J. D. G.

STATIQUE.

Sur quelques démonstrations du principe du parallélogramme des forces ;

Par M. GERGONNE.

L'AUTEUR de la démonstration du principe du parallélogramme des forces que l'on rencontre aujourd'hui dans la presque totalité des traités élémentaires de statique, nous a souvent témoigné le regret de n'avoir pu parvenir à son but sans déplacer, et même plus d'une fois, le point d'application des composantes. Sans doute, cela n'infirme en rien ni la vérité du théorème ni la validité de sa démonstration ; mais les esprits méthodiques peuvent désirer, lorsqu'ils s'occupent d'abord uniquement des forces qui agissent sur un même point, de n'avoir pas à considérer des forces qui agissent tantôt sur un point d'un plan et tantôt sur un autre. D'ailleurs, quelque incontestable que puisse paraître le principe qui autorise le déplacement, sur la direction d'une force, de son point d'application, ce principe n'en a pas moins été mis en doute par un géomètre dont on ne saurait certainement contester le mérite (*) ; et c'est dire assez qu'il peut être bon de ne pas trop s'en prévaloir vis-à-vis des commençans, surtout dès le début.

Dans un mémoire sur la composition des forces appliquées à un même point, qui fait partie de la deuxième livraison du premier volume de ses

(*) Voy. *Annales*, tom. V, pag. 215 et tom. VI, pag. 201.

Exercices de mathématiques (pag. 29) , M. Cauchy vient récemment d'éluder cette difficulté d'une manière fort ingénieuse et bien propre à prouver qu'on peut quelquefois ne pas se trouver moins bien en mécanique qu'en géométrie du recours aux trois dimensions de l'espace, pour la démonstration des théorèmes qui n'en embrassent que deux seulement. Comme peut-être beaucoup de professeurs de nos colléges pourraient ne pas songer à aller chercher cette démonstration dans le savant recueil qui la contient, et comme d'ailleurs nous y avons introduit quelques simplifications, nous croyons faire une chose agréable pour eux en la présentant ici telle que nous l'avons adoptée pour l'enseignement qui nous est confié.

Mais auparavant il est nécessaire que nous rappellions brièvement ici diverses propositions préliminaires qui se trouvent établies dans la plupart des traités de statique, ou du moins qui peuvent être facilement déduites de celles qu'on y rencontre, afin de n'avoir plus qu'à y renvoyer à mesure que nous aurons besoin de nous en appuyer.

1. Lorsque des forces sont appliquées à un même point de l'espace, ou bien elles se font équilibre, ou bien elles ont une résultante unique dont la direction passe par ce point.

2. Si elles se font équilibre, chacune d'elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.

3. Plusieurs systèmes en équilibre autour d'un même point ne forment qu'un système unique en équilibre autour de ce point.

4. Et comme la proposition ne cesse pas d'être vraie lorsque les forces sont égales chacune à chacune dans ces divers systèmes, et que les directions des forces homologues coïncident, il s'ensuit qu'on ne trouble pas l'équilibre de plusieurs forces, appliquées à un même point, lorsque, sans changer leur direction, on les rend toutes m fois plus grandes, quel que soit d'ailleurs le nombre entier m. Donc aussi (2) si, sans changer les directions de plusieurs forces qui ne sont pas en équilibre autour d'un point, on les rend tou-

tes m fois plus grandes, leur résultante, sans changer de direction, deviendra aussi m fois plus grande.

5. Donc aussi on ne troublera pas l'équilibre de plusieurs forces, appliquées à un même point, si, sans changer les directions des forces du système, on les rend toutes n fois plus petites, quel que soit d'ailleurs le nombre entier n. Car si, par cette transformation, on leur faisait acquérir une résultante, il arriverait, contrairement à l'hypothèse, que le système primitif, au lieu d'être en équilibre, aurait une résultante n fois plus grande que celle-là. Donc aussi (2), si, sans changer les directions de plusieurs forces qui ne sont point en équilibre autour d'un point, on les rend toutes n fois plus petites, leur résultante, sans changer de direction, deviendra également n fois plus petite.

6. Donc (5, 6) on ne troublera pas l'équilibre de plusieurs forces autour d'un point, si, sans changer leurs directions, on les multiplie toutes par la fraction $\frac{m}{n}$, quels que soient d'ailleurs les deux nombres entiers m et n. Donc aussi (2), si, sans changer les directions de plusieurs forces qui ne sont pas en équilibre autour d'un point, on les multiplie toutes par la fraction $\frac{m}{n}$, leur résultante, sans changer de direction, se trouvera aussi multipliée par $\frac{m}{n}$.

7. Et comme on peut toujours choisir m et n de telle sorte que la différence entre la fraction $\frac{m}{n}$ et un nombre incommensurable donné soit moindre qu'une quantité donnée, si petite qu'on la suppose, on peut dire, plus généralement, que des forces en équilibre autour d'un point demeurent telles, lorsque, sans changer leurs directions, on les multiplie toutes par un nombre quelconque ; et que, si les forces ne sont pas en équilibre, leur résultante, sans changer de direction, se trouvera multipliée par ce même nombre.

8. Des forces appliquées à un même point et situées dans un

même plan, ont leur résultante comprise dans ce plan. Si ces forces sont au nombre de deux seulement leur résultante agira dans l'angle formé par leurs directions; si enfin elles sont égales, la direction de leur résultante divisera cet angle en deux parties égales.

Ces préliminaires ainsi établis, nous allons démontrer que *la résultante de deux forces rectangulaires, appliquées à un même point, est représentée, tant en intensité qu'en direction, par la diagonale du rectangle construit sur les droites qui représentent les composantes, tant en intensité qu'en direction.*

1.° Démontrons d'abord que cette diagonale représente la résultante *en intensité.*

Soient P et Q deux forces perpendiculaires l'une à l'autre, appliquées à un même point; soit R leur résultante, d'intensité et de direction inconnues, et que nous savons seulement (8) être dirigée dans l'angle des composantes. Soient α et β les angles que forme cette résultante avec elle. Ces angles seront complémens l'un de l'autre.

A la force P nous pourrons en substituer deux autres, l'une $\frac{P^2}{R}$, dirigée suivant R et l'autre $\frac{PQ}{R}$ perpendiculaire à celle-là. En effet (7) ces deux dernières forces se trouvant rectangulaires, comme P et Q, et n'étant autre chose que ces forces P et Q, multipliées toutes deux par $\frac{P}{R}$, leur résultante devra, comme R, former des angles α et β avec les composantes et conséquemment être dirigée suivant P, et son intensité devra être $R.\frac{P}{R}=P$.

Par une semblable raison, nous pourrons remplacer la force Q par deux autres, l'une $\frac{Q^2}{R}$, dirigée suivant R et l'autre $\frac{PQ}{R}$, perpendiculaire à la direction de cette résultante. Nous aurons ainsi, au lieu des deux forces P et Q, quatre autres forces dont R devra toujours être la résultante.

Mais, de ces quatre forces, deux sont égales et directement opposées, tandis que les deux autres agissent dans le sens de R; donc R doit être simplement égale à la somme de ces deux dernières, c'est-à-dire, qu'on doit avoir

$$R=\frac{P^2}{R}+\frac{Q^2}{R}\text{ , ou }R^2=P^2+Q^2\text{ , ou enfin }R=\sqrt{P^2+Q^2}\ ;$$

ce qui démontre la première partie de la proposition.

Cette démonstration est au fond celle de la mécanique céleste, que M. Cauchy n'a fait simplement que rendre indépendante du calcul différentiel qui, comme l'on voit, y avait été introduit bien gratuitement.

2.° Prouvons présentement que la diagonale du rectangle des forces, qui déjà représente la résultante en intensité, la représente aussi en direction.

Prouvons d'abord que, si cette proposition était reconnue vraie pour deux forces P et M, elle le serait également pour deux autres forces P et $\sqrt{P^2+M^2}$.

Pour le démontrer, concevons trois forces P, P, M dirigées suivant les trois arêtes d'un même angle d'un parallélipipède rectangle. Pour en avoir la résultante, il faudra d'abord déterminer la résultante de deux quelconques d'entre elles, puis la résultante de cette résultante et de la troisième. Or, par l'hypothèse, la résultante $\sqrt{P^2+M^2}$, de M et de l'une des deux forces P, est dirigée suivant la diagonale de la face qui contient les deux composantes; d'où il suit (8) que la résultante des trois forces sera dans le plan qui contient cette diagonale de face et l'arête qui lui est opposée. Mais il existe deux tels plans dans le parallélipipède, et dans lesquels conséquemment la résultante des trois forces doit se trouver à la fois; cette résultante sera donc dirigée suivant leur intersection, diagonale du parallélipipède, laquelle est aussi diagonale du rectangle des deux forces P et $\sqrt{P^2+M^2}$; il est donc prouvé que la proposition sera vraie pour deux telles forces rectangulaires, si elle l'est pour les forces rectangulaires P et M.

En posant $M=P\sqrt{k}$ et substituant, on conclura de là que, si la proposition est vraie pour deux forces rectangulaires P et $P\sqrt{k}$, elle le sera aussi pour les deux forces P et $P\sqrt{k+1}$, quel que soit le nombre entier k. Or, la proposition est vraie (8) pour les deux forces P et $P\sqrt{1}$, puisque ce sont des forces égales; donc elle sera vraie aussi pour les forces rectangulaires P et $P\sqrt{2}$, P et $P\sqrt{3}$, P et $P\sqrt{4}$, ... P et $P\sqrt{k}$; et comme k est ici quelconque, en posant $k=m^2$, il demeurera prouvé que la proposition est vraie pour deux forces rectangulaires multiples l'une de l'autre P et mP; et il en serait évidemment de même pour deux forces rectangulaires P et nP, quels que pussent être les nombres entiers m et n.

Prouvons encore que, si la proposition est vraie pour deux forces rectangulaires P et M, et pour deux autres forces rectangulaires P et N, elle le sera également pour les deux forces rectangulaires M et N.

En effet, soient trois forces P, M, N agissant sur un même sommet d'un parallélipipède rectangle, et dirigées suivant les arêtes de ce parallélipipède, que nous supposons les représenter en intensité. Pour en obtenir la résultante, on pourra d'abord chercher la résultante $\sqrt{P^2+M^2}$ des deux forces P et M, laquelle, par hypothèse, sera dirigée suivant la diagonale de la face qui contient les deux composantes, et composer ensuite cette résultante avec N; ou bien on pourra chercher d'abord la resultante $\sqrt{P^2+N^2}$ des deux forces P et N, laquelle, par hypothèse, sera dirigée suivant la diagonale de la face qui contient les deux composantes, et composer ensuite cette résultante avec M.

Il suit de là que la résultante des trois forces se trouvera à la fois située dans le plan qui contient la diagonale $\sqrt{P^2+M^2}$ et l'arête opposée N, et dans le plan qui contient la diagonale $\sqrt{P^2+N^2}$ et l'arête opposée M ; cette résultante sera donc dirigée suivant l'intersection de ces deux plans, laquelle n'est autre chose que la diagonale du parallélipipède.

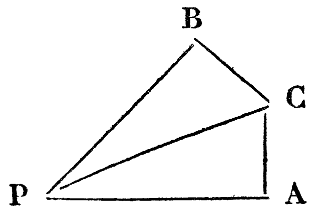
Mais on peut aussi chercher d'abord la résultante des deux forces M et N pour la composer avec P ; et, comme l'on doit retomber également sur la diagonale du parallélipipède, il faut (8) que cette diagonale soit dans le plan de P et de la résultante de M et N; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que cette résultante sera dirigée suivant la diagonale de la face qui contient ces deux forces.

D'après ce qui a été démontré ci-dessus, la proposition est vraie pour P et M et pour P et N, lorsqu'on a $M=mP$ et $N=nP$, donc, d'après ce qui vient d'être prouvé, elle est vraie aussi pour M et N, lorsqu'on a $M=mP$ et $N=nP$; c'est-à-dire qu'elle est vraie pour deux forces rectangulaires commensurables quelconques. Il est facile de démontrer qu'elle est également vraie lorsque les deux forces rectangulaires sont incommensurables.

Ainsi la résultante de deux forces rectangulaires quelconques, agissant sur un même point, est représentée à la fois, en intensité et en direction, par la diagonale du rectangle construit sur les deux droites qui représentent les composantes tant en intensité qu'en direction.

Soient présentement deux forces P et Q agissant sur un même point dans des directions quelconques, et soit construit un parallélogramme sur les droites qui représentent ces forces en intensité et en direction. Soient considérées P et Q comme les diagonales de deux rectangles ayant un de leurs côtés dirigé suivant la diagonale du parallélogramme ; il est aisé de voir que cette diagonale sera égale à la somme ou à la différence de ces mêmes côtés, suivant qu'ils seront dirigés dans le même sens ou en sens contraire, tandis que, dans tous les cas, les autres côtés des deux rectangles seront égaux et dirigés en sens contraire. Si donc, on décompose respectivement P et Q suivant les côtés de ces deux rectangles, ces forces se trouveront remplacées par quatre autres, dont deux se détruiront, tandis que les deux autres se composeront en une seule, représentée en intensité et en direction par la diagonale; ce qui constitue le théorème qu'il s'agissait d'établir.

Dans la quatrième livraison du *Journal de mathématiques* de M. Crelle (pag. 369), M. le docteur Burg a donné une démonstration du principe du parallélogramme des forces, qui n'occupe que quelques lignes, mais qui n'est malheureusement qu'un très-spirituel paralogisme; paralogisme que nous croyons d'autant plus nécessaire de signaler ici, que le mérite éminent du recueil sous la garantie duquel il se trouve publié, pourrait séduire quelques jeunes lecteurs. Voici le fond du raisonnement de M. Burg.



Soient données les intensités de deux forces agissant sur un même point P, et l'angle que comprennent entre elles leurs directions; l'intensité et la direction de leur résultante se trouveront complètement déterminées. En menant les droites PA et PB, qui représentent ces composantes en intensité et en direction, la droite PC qui doit représenter leur résultante en intensité et en direction se trouvera tout à fait déterminée. Si donc l'on mène les droites CA et CB, le quadrilatère APBC se trouvera complètement déterminé par ces trois données PA, PB et l'angle APB.

Ce quadrilatère sera *trapézoïde*, *trapèze* ou *parallélogramme*; or, il ne saurait être un trapézoïde, qui ne se détermine que par *cinq* conditions; il ne saurait être non plus un trapèze, qui en exige *qua-*

tre ; ce sera donc un parallélogramme, qui n'en demande que *trois* seulement.

Pour faire bien ressortir le vice logique de ce raisonnement, supposons, pour un moment, qu'il ait plu aux géomètres, comme ils en avaient certes bien le droit, de classer les quadrilatères, non pas d'après le parallélisme ou le non parallélisme de leurs côtés opposés, mais d'après la perpendicularité ou la non perpendicularité de leurs côtés consécutifs. On aurait eu ainsi des quadrilatères *obliquangles*, *rectangles*, *bi-rectangles* et *tri-rectangles*, dépendant respectivement de *cinq*, *quatre*, *trois* et *deux* conditions ; et, en leur appliquant littéralement le raisonnement de M. Burg, on aurait été conduit à conclure que le quadrilatère APBC doit être bi-rectangle, et qu'ainsi le point C doit être déterminé par le concours des perpendiculaires menées respectivement à AP et BP, par les points A et B, ce qui est généralement faux.

Si l'on nous objectait que, parmi les quadrilatères que nous appelons obliquangles et que nous disons ne pouvoir être déterminés que par cinq conditions, se trouvent compris des parallélogrammes qui n'en exigent que trois, nous observerions à notre tour que parmi les trapézoïdes, qu'on nous dit exiger cinq conditions, se trouvent compris des quadrilatères bi-rectangles, qui n'en exigent également que trois ; de sorte qu'il y a exacte parité entre les deux raisonnemens.

De ce que le quadrilatère APBC ne dépend que de trois conditions seulement, tout ce qu'on est fondé à en conclure, c'est que la nature du problème doit, indépendamment des trois données qui varient d'une question à l'autre, l'assujettir à deux autres conditions, sans qu'il soit possible d'assigner ces deux autres conditions *à priori*.

Mais en voilà peut-être déjà beaucoup trop sur une démonstration qui occupe à peine une demi-page du recueil de M. Crelle, et à laquelle nous ne pensons pas que l'auteur attache une grande importance. Il est même juste de dire que, si M. Burg s'est mépris en cette rencontre, il n'est peut-être pas donné à beaucoup de monde de faillir d'une manière aussi ingénieuse.

Dans les *Transactions de la société philosophique de Cambridge* (tom. II, 1.re partie, pag. 45) on trouve aussi une démonstration fort courte et fort élégante du principe du parallélogramme des forces. On sait que tout se réduit à démontrer le théorème pour deux forces égales, formant entre elles un angle quelconque (*); et voici comment l'auteur, M. J. King, y parvient.

Soient ces deux forces égales à P, 2θ l'angle qu'elles forment et R leur résultante, dont la direction doit évidemment diviser l'angle 2θ en deux parties égales. Cette résultante devra être nulle pour toutes les valeurs de θ comprises dans la double série.

$$\pm\frac{\varpi}{2},\quad \pm\frac{3\varpi}{2},\quad \pm\frac{5\varpi}{2},\quad \pm\frac{7\varpi}{2},\quad \ldots\ldots$$

c'est-à-dire, qu'elle devra être nulle en même temps que chacune des quantités

$$1-\frac{4\theta^2}{\varpi^2},\quad 1-\frac{4\theta^2}{9\varpi^2},\quad 1-\frac{4\theta^2}{25\varpi^2},\quad \ldots\ldots$$

et ne pourra d'ailleurs l'être que dans ces seuls cas; d'où l'auteur conclut qu'on doit avoir

$$R=kP\left(1-\frac{4\theta^2}{\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4\theta^2}{9\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4\theta^2}{25\varpi^2}\right)\ldots\ldots$$

k étant un coefficient indépendant de P et θ; or, cela revient, comme l'on sait, à

(*) Voy. la Mécanique de M. Francœur.

$$R = kP\cos.\theta\ ;$$

et comme, pour $\theta = 0$, on doit avoir $R = 2P$, il s'ensuit que $k = 2$; ce qui donne finalement

$$R = 2P\cos\theta\ .$$

Il resterait seulement à expliquer pourquoi on n'aurait pas

$$R = kP\left(1 - \frac{4\theta^2}{\varpi^2}\right)^\alpha\left(1 - \frac{4\theta^2}{9\varpi^2}\right)^\beta\left(1 - \frac{4\theta^2}{25\varpi^2}\right)^\gamma \ldots\ldots$$

α, β, γ, ... étant des nombres entiers positifs différens de l'unité. Nous avons employé un tour de raisonnement analogue, à la page 118 de notre premier volume; mais nous avons eu soin (pag. 119) de nous mettre à couvert de cette objection.

Au surplus, si l'on renonçait à tenir la statique dans un isolement complet de la dynamique, isolement beaucoup moins philosophique peut-être qu'on se le figure, on s'épargnerait bien des difficultés. En appelant forces égales celles qui sont capables d'imprimer des vitesses égales à une même masse, forces doubles celles qui sont capables de lui imprimer des vitesses doubles, et ainsi de suite, le principe du parallélogramme des forces deviendrait celui du parallélogramme des vitesses, si facile à établir nettement à la manière de d'Alembert dans sa Dynamique. Il resterait plus tard à prouver que des forces qui impriment les mêmes vitesses à des masses inégales sont proportionnelles à ces masses. Mais il semble qu'on se plaise à semer des épines sur les pas des commençans, de peur sans doute qu'ils ne prennent trop de goût pour les sciences, et qu'elles ne deviennent ainsi trop populaires.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de géométrie énoncé à la page 380 du précédent volume ;

Par MM. LENTHÉRIC, professeur au Collége royal de Montpellier ; THOMAS DE ST-LAURENT, capitaine d'Etat-Major; ROCHE, professeur à l'Ecole d'artillerie de la Marine, A. V., professeur de Rhétorique, et W. H. T.

PROBLÈME. *Diviser géométriquement le quart de la circonférence en trois arcs dont les cosinus soient entre eux dans le rapport de trois longueurs données ?*

Solution. Soient r le rayon du cercle, x, y, z les trois arcs demandés, a, b, c les trois longueurs données ; les équations du problème seront

$$x+y+z=\tfrac{1}{2}\varpi r\ , \qquad (1)$$

$$\frac{\text{Cos.}x}{a}=\frac{\text{Cos.}y}{b}=\frac{\text{Cos.}z}{c}\ . \qquad (2)$$

Si l'on pose chaque membre de la double équation (2) égal à λ, la question se trouvera réduite à déterminer λ et l'on aura

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos.}x=\lambda a\ ,\\ \text{Cos.}y=\lambda b\ ,\\ \text{Cos.}z=\lambda c\ ;\end{array}\right\}\qquad(3)$$

l'équation (1) donne d'ailleurs facilement

$$r^2(\text{Cos.}^4x+\text{Cos.}^4y+\text{Cos.}^4z)-2r^2(\text{Cos.}^2x\text{Cos.}^2y+\text{Cos.}^2x\text{Cos.}z^2$$
$$+\text{Cos.}^2y\text{Cos.}^2z)+4\text{Cos.}^2x\text{Cos.}^2y\text{Cos.}^2z=0\ ;$$

d'où, en vertu des valeurs (3) et en divisant par λ^4,

$$\lambda=r.\frac{\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}{2abc}\ ,$$

ou encore

$$\lambda=\frac{r\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{2abc}\ ;$$

ce qui montre d'abord que le problème n'est possible qu'autant qu'aucune des trois droites données a, b, c n'est plus grande que la somme des autres ; c'est-à-dire, qu'autant qu'on peut former un triangle avec ces trois droites. Si l'on désigne par T l'aire de ce triangle et par R le rayon du cercle circonscrit, on aura, comme l'on sait,

$$4T=\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\ ,\qquad 4TR=abc\ ;$$

donc

$$\lambda=\frac{r}{2R}\ ;$$

donc (3)

$$\text{Cos.}x=\frac{ar}{2R}\ ,\quad \text{Cos.}y=\frac{br}{2R}\ ,\quad \text{Cos}\,z=\frac{cr}{2R}\ ,\qquad (4)$$

expressions facile à construire.

Telle est la manière la plus naturelle de résoudre le problème, et telles sont aussi les formules qui ont été données en premier lieu par M. de St-Laurent ; mais il remarque ensuite qu'en désignant par α, β, γ les angles du triangle respectivement opposés à a, b, c, on doit avoir

$$\frac{\text{Sin.}\alpha}{a}=\frac{\text{Sin.}\beta}{b}=\frac{\text{Sin.}\gamma}{c}\ ,$$

et par suite (2)

$$\frac{\text{Cos.}x}{\text{Sin.}\alpha}=\frac{\text{Cos.}y}{\text{Sin.}\beta}=\frac{\text{Cos.}z}{\text{Sin.}\gamma}\ ;$$

équation à laquelle on satisfait en prenant pour x, y, z les complémens respectifs de α, β, γ, puisqu'alors la somme des trois premiers arcs vaut un quart de circonférence et la somme des trois derniers une demi-circonférence, comme cela doit être.

Les trois arcs cherchés sont donc les arcs décrits du rayon donné entre les côtés des complémens des angles du triangle formé par les trois droites données, et des sommets de ces complémens comme centres. Cette construction peut d'ailleurs se justifier *à priori*, et c'est aussi de cette manière qu'elle a été présentée par M. Roche.

Comme les arcs semblables de différens cercles ont leurs cosinus proportionnels, si l'on parvient à construire, pour un rayon quelconque, trois arcs dont les cosinus soient dans le rapport des trois longueurs données et dont la somme soit un quart de circonférence, il sera facile ensuite de construire de tels arcs pour le rayon donné.

Or, si l'on veut que les cosinus des trois arcs soient les longueurs

a, b, c elles-mêmes, les formules (4) prouvent qu'il faudra pour cela prendre $r=2R$. Ainsi, si l'on décrit un cercle dont le rayon soit le diamètre du cercle circonscrit au triangle T, les arcs de ce cercle dont les cosinus seront a, b, c vaudront ensemble le quart de sa circonférence; et c'est à justifier cette assertion que revient la solution de M. A. V.

M. W. H. T. remarque que, si des sommets du triangle T on abaisse des perpendiculaires sur les côtés qui leur sont respectivement opposés, ces perpendiculaires diviseront les angles de ce triangle en six segmens égaux deux à deux et complémens de ces mêmes angles. La somme de trois de ces segmens, choisis de manière à être tous inégaux, vaudra donc un angle droit et les cosinus de ces mêmes angles, respectivement égaux aux sinus des angles du triangle T, seront conséquemment proportionnels aux côtés opposés de ce triangle, c'est-à-dire, aux longueurs données a, b, c.

Donc, si des sommets du triangle T comme centres, et avec le rayon r on décrit des arcs entre leurs côtés, en prenant trois segmens d'arcs, de manière que ces segmens soient inégaux, ils rempliront les conditions du problème; ce qui rentre, à peu près, dans la construction de M. de St-Laurent.

M. Roche observe qu'on résoudrait avec la même facilité le problème où il s'agirait de *diviser, soit une demi-circonférence, soit une circonférence entière, en trois parties dont les sinus fussent entre eux dans un rapport donné.* On voit, en effet, que les arcs décrits du rayon donné entre les côtés des angles du triangle T, et de leurs sommets comme centres, résolvent le premier problème, tandis que les arcs décrits du même rayon et des mêmes centres entre les côtés des angles extérieurs du triangle résolvent évidemment le second (*).

(*) M. Roche désire que nous informions nos lecteurs qu'il désavoue formellement l'article publié sous son nom à la page 19 du présent volume;

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de statique.

DONNER l'équation de la chaînette uniformément pesante appuyée, sans frottement, contre la surface soit extérieure soit intérieure d'un cône droit dont l'axe est vertical ?

Problèmes de géométrie.

I. Construire un tétraèdre dont les arêtes soient respectivement parallèles à six droites données et non situées deux à deux dans un même plan ?

II. Quel est le lieu des centres communs de gravité de tous les systèmes de rayons vecteurs d'une même ellipse ?

III. Peut-on partager par des droites tout polygone plan en compartimens dont les centres de gravité soient des points donnés, dans l'intérieur de ce polygone ?

IV. Peut-on diviser tout polyèdre par des cloisons planes en por-

---

et cela parce qu'à titre d'ancien artilleur, ayant souvent fait empiler des gargousses en triangles et en trapèzes, dans les magasins, et dans la vue de rendre l'article plus complet, nous nous sommes permis d'en étendre et d'en modifier un peu la rédaction. Le lecteur aura au surplus remarqué, comme nous, qu'à la dernière formule il y a un caractère i_p qui doit être remplacé par p. C'est une faute survenue pendant le tirage.

tions dont les centres de gravité soient des points donnés dans son intérieur ?

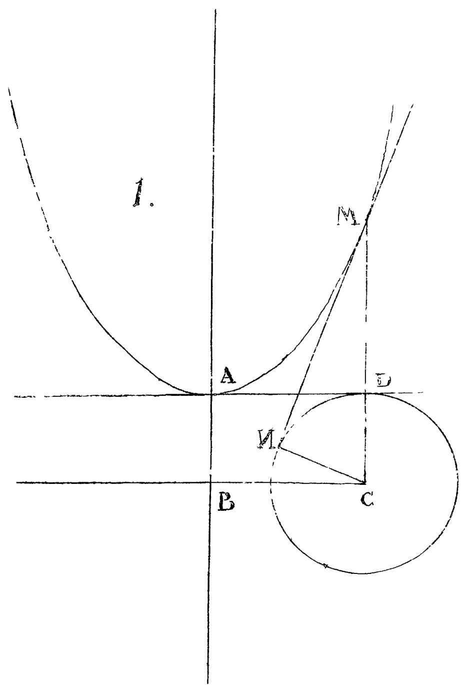
V. Il est connu que, si, dans l'intérieur d'un quadrilatère convexe, on décrit quatre cercles tels que chacun d'eux touche trois de ses côtés, les centres de ces quatre cercles appartiendront à une même circonférence. Quel est le théorème qu'on peut déduire de celui-là par la théorie des polaires réciproques ?

Théorème de géométrie.

Si, par la base circulaire d'un cône oblique et par son sommet on fait passer une sphère ; le plan tangent à cette sphère conduit par le sommet du cône sera le plan polaire de l'une des lignes focales de la surface conique (*).

(*) Voy., pour la définition des lignes focales, le Mémoire de la page 33 du XV.e volume du présent recueil.

p. 57 - 89



J. D. G. fecit.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Démonstration de quelques théorèmes sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

En désignant généralement par $f_n(x,y)$, une fonction rationnelle, entière et homogène de n dimensions en x et y, l'équation de toute ligne algébrique du m.ième ordre pourra être écrite comme il suit :

$$f_m(x,y)+f_{m-1}(x,y)+\ldots\ldots+f_2(x,y)+f_1(x,y)+1=0\ . \quad (1)$$

Si l'on veut passer aux coordonnées polaires, en prenant pour pôle l'origine des coordonnées, qu'on peut toujours supposer un quelconque des points du plan de la courbe, il suffira de poser

$$x=tr\ ;\qquad y=ur\ ; \qquad (2)$$

r étant le rayon vecteur et t, u les cosinus des angles variables formés par ce rayon avec les deux axes ; cosinus liés entre eux par la relation

$$t^2+u^2=1\ . \qquad (3)$$

L'équation deviendra ainsi

$$r^m f_m(t,u)+r^{m-1}f_{m-1}(t,u)+\ldots\ldots+r^2f_2(t,u)+rf_1(t,u)+1=0\,; \quad (4)$$

et donnera m valeurs pour le rayon vecteur, à chaque direction qu'on voudra lui faire prendre ; ce qui prouverait, s'il en était besoin, qu'une ligne du $m.^{ieme}$ ordre ne saurait couper une droite en plus de m points ; et que conséquemment toute courbe qui coupe une droite en m points est une ligne du $m.^{ieme}$ ordre au moins.

Pour que le rayon vecteur soit tangent à la courbe, il faut que l'équation (4) donne tout au moins deux valeurs égales pour r, et que conséquemment la dérivée de son premier membre, prise par rapport à cette lettre, soit nulle ; ce qui donne

$$mr^{m-1}f_m(t,u)+(m-1)r^{m-2}f_{m-1}(t,u)+\ldots\ldots+2rf_2(t,u)+f_1(t,u)=0\,; \quad (5)$$

équation qui, pour les points de contact des tangentes issues de l'origine, doit avoir lieu en même temps que l'équation (4), et qui, jointe à elle, en ayant égard à la relation (3), servirait à les déterminer tous ; c'est-à-dire, que l'équation (5) est l'équation polaire d'une courbe qui coupe la proposée en ses points de contact.

Mais, quand un système de points est donné par deux courbes dont ces points sont les intersections, on peut toujours, dans la recherche de ces mêmes points, remplacer l'une d'elles par une autre courbe, dont l'équation serait une combinaison quelconque des leurs. Or, en prenant la somme des produits respectifs des équations (4) et (5), par m et $-r$, il vient, en réduisant,

$$r^{m-1}f_{m-1}(t,u)+2r^{m-2}f_{m-2}(t,u)+\ldots\ldots+(m-2)r^2f_2(t,u)+(m-1)rf_1(t,u)+m=0\,; \quad (6)$$

de sorte que c'est là l'équation polaire d'une courbe qui, comme celle qui est donnée par l'équation (5), coupe la proposée en ses points de contact avec les tangentes menées à cette dernière par l'origine.

Si présentement on veut repasser aux coordonnées rectangulaires, il faudra faire (2)

$$t=\frac{x}{r}\ ,\quad u=\frac{y}{r}\ ,$$

ce qui donnera, en substituant dans l'équation (6),

$$f_{m-1}(x,y)+2f_{m-2}(x,y)+\dots+(m-2)f_2(x,y)+(m-1)f_1(x,y)+m=0\ ; \quad (7)$$

équation du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement, appartenant à une courbe qui coupe la ligne du $m.^{ieme}$ ordre donnée par l'équation (1) à ses points de contact avec les tangentes menées à celle-ci par l'origine des coordonnées.

En se rappelant donc qu'ici l'origine est un quelconque des points du plan de la courbe proposée, on en conclura le théorème suivant :

THÉORÈME I. Les points de contact d'une ligne du m.^{ieme} *ordre avec les tangentes à cette courbe, issues d'un même point de son plan, sont tous situés sur une seule et même ligne du* $(m-1)^{ieme}$ *ordre au plus.*

En désignant généralement par $f_n(x,y,z)$, une fonction rationnelle, entière et homogène de n dimensions en x, y, z, l'équation de toute surface algébrique du $m.^{ieme}$ ordre pourra être écrite comme il suit :

$$f_m(x,y,z)+f_{m-1}(x,y,z)+\dots\dots+f_2(x,y,z)+f_1(x,y,z)+1=0\ . \quad (1)$$

Si l'on veut passer aux coordonnées polaires, en prenant pour pôle l'origine des coordonnées, qu'on peut toujours supposer quelconque dans l'espace, il suffira de poser

$$x=tr\ ,\quad y=ur\ ,\quad z=vr\ ; \qquad (2)$$

r étant le rayon vecteur et t, u, v les cosinus des angles variables que fait sa direction avec les trois axes, cosinus liés entre eux par la relation

$$t^2+u^2+v^2=1\ . \qquad (3)$$

L'équation deviendra ainsi

$$r^m f_m(t,u,v)+r^{m-1}f_{m-1}(t,u,v)+\ldots+r^2f_2(t,u,v)+rf_1(t,u,v)+1=0\ , \quad (4)$$

et donnera m valeurs pour le rayon vecteur, à chaque direction qu'on voudra lui faire prendre ; ce qui prouverait, s'il en était besoin, qu'une surface du $m.^{ieme}$ ordre ne saurait couper une droite en plus de m points ; et que conséquemment toute surface qui coupe une droite en m points est du $m.^{ieme}$ ordre au moins.

Pour que le rayon vecteur soit tangent à cette surface, il faut que l'équation (4) donne tout au moins deux valeurs égales pour r, et que conséquemment la dérivée de son premier membre, prise par rapport à cette lettre, soit nulle ; ce qui donne

$$mr^{m-1}f_m(t,u,v)+(m-1)r^{m-2}f_{m-1}(t,u,v)+\ldots+2rf_2(t,u,v)+f_1(t,u,v)=0\ ; \quad (5)$$

équation qui, pour les points de contact des tangentes issues de l'origine, doit avoir lieu en même temps que l'équation (4), et qui, jointe à elle, en ayant égard à la relation (3), servirait à les déterminer tous ; c'est-à-dire, que l'équation (5) est l'équation polaire d'une surface courbe qui coupe la proposée suivant ses lignes de contact avec la surface conique circonscrite qui aurait son sommet à l'origine.

Mais, quand des lignes sont données dans l'espace par deux surfaces dont elles sont l'intersection, on peut toujours, dans la recherche de ces mêmes lignes, remplacer l'une d'elles par une autre surface dont l'équation serait une combinaison quelconque des leurs. Or, en prenant la somme des produits respectifs des équations (4) et (5) par m et $-r$, il vient, en réduisant,

$$r^{m-1}f_{m-1}(t,u,v)+2r^{m-2}f_{m-2}(t,u,v)+\ldots+(m-2)r^2f_2(t,u,v)+(m-1)rf_1(t,u,v)+m=0\ ; \quad (6)$$

de sorte que c'est là l'équation polaire d'une surface qui, comme celle qui est donnée par l'équation (5), coupe la proposée suivant ses lignes de contact avec la surface conique circonscrite à cette dernière dont le sommet est à l'origine.

Si présentement on veut repasser aux coordonnées rectangulaires, il faudra faire (2)

$$t=\frac{x}{r}\ , \qquad u=\frac{y}{r}\ , \qquad v=\frac{z}{r}\ ,$$

ce qui donnera, en substituant dans l'équation (6),

$$f_{m-1}(x,y,z)+2f_{m-2}(x,y,z)+\ldots\ldots+(m-2)f_2(x,y,z)+(m-1)f_1(x,y,z)+m=0\ ; \quad (7)$$

équation du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement, appartenant à une surface qui coupe la surface du $m.^{ieme}$ ordre donnée par l'équation (1), suivant ses lignes de contact avec la surface conique circonscrite à celle-ci dont le sommet est à l'origine des coordonnées.

En se rappelant donc qu'ici l'origine est un quelconque des points de l'espace, on en conclura le théorème suivant:

THÉORÈME II. Les lignes de contact d'une surface du m.^{ieme} *ordre avec toute surface conique circonscrite sont toutes situées sur une seule et même surface du* (m—1)^{ieme} *ordre au plus.*

Ce théorème et le précédent sont dus tous deux à M. Vallès (*Annales*, tom. XVI, pag. 315), et nous avons eu uniquement en vue d'en donner une démonstration qui pût être introduite dans l'enseignement élémentaire.

Soient une ligne du $m.^{ieme}$ ordre et une droite, données respectivement par les équations

$$M=0\ , \qquad y=ax\ .$$

dont les différentielles respectives sont

$$\frac{dM}{dx}+\frac{dM}{dy}\,\frac{dy}{dx}=0\ , \qquad \frac{dy}{dx}=a\ .$$

En éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre ces différentielles, l'équation résultante

$$\frac{dM}{dx}+a\frac{dM}{dy}=0\ , \qquad (\alpha)$$

du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement, sera celle d'une courbe coupant la proposée en tous ceux de ses points par lesquels on peut lui mener des tangentes parallèles à la droite donnée; on a donc le théorème suivant que l'on pourrait aussi déduire du *Théorème I*, comme l'a fait M. Vallès, à l'endroit cité.

THÉORÈME III. Les points de contact d'une ligne du m.^{ieme} *ordre avec les tangentes menées à cette courbe, parallèlement à une droite donnée quelconque, appartiennent tous à une seule et même ligne du* $(m-1)^{ieme}$ *ordre au plus.*

On peut aussi satisfaire à l'équation (α), quel que soit a, en posant, à la fois

$$\frac{dM}{dx}=0\ , \qquad \frac{dM}{dy}=0\ ;$$

équations qui appartiennent à deux lignes du $(m-1)^{ieme}$ ordre, se coupant en $(m-1)^2$ points au plus; ce qui donne cet autre théorème:

THÉORÈME IV. Les lignes du $(m-1)^{ieme}$ *ordres auxquelles appartiennent les diverses séries de points de contact d'une même ligne du* m.^{ieme} *ordre, avec des systèmes de tangentes à cette courbe parallèles à des droites arbitraires, passent toutes par les mêmes* $(m-1)^2$ *points fixes.*

Soient une surface du $m.^{ieme}$ ordre et une droite, données respectivement par les équations

$$M=0\,, \quad x=az\,, \quad y=bz\,,$$

dont les différentielles respectives sont

$$\frac{dM}{dx}\,\frac{dx}{dz}+\frac{dM}{dy}\,\frac{dy}{dz}+\frac{dM}{dz}=0\,, \quad \frac{dx}{dz}=a\,, \quad \frac{dy}{dz}=b\,.$$

En éliminant entre ces différentielles $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, l'équation résultante

$$a\frac{dM}{dx}+b\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}=0\,, \qquad (\alpha\alpha)$$

du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement, sera celle d'une surface coupant la proposée suivant les lignes par tous les points desquelles on peut lui mener des tangentes parallèles à la droite donnée; on a donc le théorème suivant que l'on pourrait aussi déduire du *Théorème II*, comme l'a fait M. Vallès, à l'endroit cité.

THÉORÈME V. Les lignes de contact d'une surface du m.^{ieme} *ordre avec la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à une droite donnée quelconque, appartiennent toutes à une seule et même surface du* (m—1)^{ieme} *ordre au plus.*

On peut aussi satisfaire à l'équation $(\alpha\alpha)$, quels que soient a et b, en posant à la fois

$$\frac{dM}{dx}=0\,, \quad \frac{dM}{dy}=0\,, \quad \frac{dM}{dz}=0\,;$$

équations qui appartiennent à trois surfaces du $(m-1)^{ieme}$ ordre se coupant en $(m-1)^3$ points au plus; ce qui donne cet autre théorème:

THÉORÈME VI. Les surfaces du(m—1)^{ieme} *ordre auxquelles appartiennent les diverses séries des lignes de contact d'une même* *surface du* m.^{ieme} *ordre avec des surfaces cylindriques circonscrites, ayant leurs génératrices parallèles à des droites arbitraires, passent toutes par les mêmes* $(\mathrm{m}-1)^3$ *points fixes.*

Si, sans laisser la droite donnée tout-à-fait indéterminée, on l'assujettit à se mouvoir dans un plan fixe passant par l'axe des z ; c'est-à-dire, dans un plan fixe quelconque, en supposant l'équation de ce plan

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B},$$

on devra avoir

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}.$$

Tirant de cette dernière équation la valeur de b, pour la substituer dans l'équation ($\alpha\alpha$), celle-ci deviendra

$$\left(A\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}+B\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\right)a+A\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}=0.$$

Cette équation est satisfaite, quel que soit a, en posant, à la fois,

$$A\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}+B\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}=0, \qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}=0;$$

équations qui appartiennent à deux surfaces du $(m-1)^{ieme}$ ordre, et conséquemment à la courbe fixe à double courbure suivant laquelle ces deux surfaces se pénètrent. On a donc ce nouveau théorème :

THÉORÈME VII. Les surfaces du $(\mathrm{m}-1)^{ieme}$ *ordre auxquelles appartiennent les diverses séries de lignes de contact d'une même surface du* m.^{ieme} *ordre, avec des surfaces cylindriques circonscrites, ayant leurs génératrices parallèles à des droites tracées arbitrairement dans un même plan quelconque, passent toutes par une seule et même courbe à double courbure.*

Ces théorèmes ainsi démontrés, il sera facile, soit par la théorie des polaires réciproques, soit par celle des projections, d'en déduire les suivans, que nous nous contenterons d'énoncer.

THÉORÈME VIII. *Les tangentes menées à une ligne du* m.$^{\text{ieme}}$ *ordre, par ses intersections avec une même droite, sont toutes tangentes à une seule et même ligne du* (m—1)$^{\text{ieme}}$ *ordre au plus.*

THÉORÈME IX. *Les surfaces développables circonscrites à une surface du* m.$^{\text{ieme}}$ *ordre, suivant ses intersections avec un même plan, sont toutes circonscrites à une seule et même surface du* (m—1)$^{\text{ieme}}$ *ordre au plus* (*).

THÉORÈME X. *Les lignes du* (m—1)$^{\text{ieme}}$ *ordre auxquelles sont tangentes les tangentes menées à une même ligne du* m.$^{\text{ieme}}$ *ordre, par ses points d'intersection avec des droites parallèles, ou concourant en un même point, ont toutes les* (m—1)^2 *mêmes tangentes communes.*

THÉORÈME XI. *Les surfaces du* (m—1)$^{\text{ieme}}$ *ordre auxquelles sont circonscrites les surfaces développables circonscrites à une même surface du* m.$^{\text{ieme}}$ *ordre, suivant ses intersections avec des plans parallèles à une même droite, ou concourant en un même point ont toutes les mêmes* (m—1)^3 *plans tangens communs.*

THÉORÈME XII. *Les lignes du* (m—1)$^{\text{ieme}}$ *ordre auxquelles appartiennent les points de contact d'une même ligne du* m.$^{\text{ieme}}$ *ordre avec les systèmes de tangentes menées à cette courbe, par les différens points d'une même droite, passent toutes par les* (m—1)^2 *mêmes points.*

THÉORÈME XIII. *Les surfaces du* (m—1)$^{\text{ieme}}$ *ordre auxquelles appartiennent les lignes de contact d'une même surface du* m.$^{\text{ieme}}$ *ordre avec des surfaces coniques circonscrites dont les sommets*

(*) Ces deux théorèmes avaient déjà été donnés par M. Gergonne (*Annales*, tom. XVII, pag. 225 et 241).

sont dans un même plan, passent toutes par les $(m-1)^3$ *mêmes points.*

THÉORÈME XIV. Les surfaces du $(m-1)^{ieme}$ *ordre auxquelles sont circonscrites les surfaces développables, circonscrites elles-mêmes à une même surface du* m.^{ieme} *ordre, suivant ses intersections avec des plans parallèles, ou se coupant suivant la même droite, sont toutes inscriptibles à une seule et même surface développable.*

THÉORÈME XV. Les surfaces du $(m-1)^{ieme}$ *ordre auxquelles appartiennent les lignes de contact d'une même surface du* m.^{ieme} *ordre avec des surfaces coniques circonscrites dont les sommets appartiennent à une même droite, passent toutes par une seule et même courbe à double courbure.*

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du dernier des deux problèmes de géométrie énoncés à la page 232 du XVI.e volume des Annales;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne (*).

PROBLÈME. *Deux angles trièdres, l'un fixe et l'autre mobile, ont leurs sommets sur une même droite fixe et indéfinie, et sont tels*

(*) M. Bobillier a résolu l'autre problème de l'endroit cité, à la page 335 du tome XVII.

J. D. G.

d'ailleurs que leurs arêtes correspondantes sont dans un même plan ; d'où il suit que les intersections de leurs faces correspondantes sont trois droites constamment situées dans un même plan variable de situation dans l'espace comme l'angle trièdre mobile. On demande, dans toutes les situations de cet angle trièdre mobile, à quelle surface ce plan variable sera constamment tangent ?

Solution. Soient a, b, c les pôles des faces de l'angle trièdre fixe, et a', b', c' les pôles des faces correspondantes de l'angle trièdre mobile considéré dans l'une de ses positions, déterminés les uns et les autres par rapport à une surface directrice du second ordre (un paraboloïde elliptique, par exemple), dont l'axe principal coïncide avec la droite fixe qui joint les sommets des deux angles trièdres. Par cette disposition, les plans (a, b, c), (a', b', c') seront perpendiculaires à cet axe, et conséquemment parallèles; et les pôles des trois plans fixes qui contiennent les arêtes correspondantes des deux angles trièdres seront situés à l'infini ; mais les droites ab et $a'b'$, bc et $b'c'$, ca et $c'a'$, polaires réciproques des arêtes correspondantes, doivent aller concourir à ces pôles respectifs ; donc ces couples de droites seront parallèles, c'est-à-dire, que les deux triangles abc, $a'b'c'$ auront leurs côtés correspondans parallèles, et seront conséquemment semblables ; d'où il suit que les trois droites aa', bb', cc', polaires conjuguées respectives des intersections des plans des faces correspondantes des deux tétraèdres, concourront en un même point o ; ce qui démontre déjà que ces trois intersections sont constamment dans un même plan dont le pôle est en ce point o.

Présentement, si l'on fait mouvoir le second angle trièdre, parallèlement à lui-même, de sorte que son sommet parcourre l'axe de la surface directrice ; les points a', b', c' décriront trois de ses diamètres, lesquels sont parallèles à cet axe et comme tels perpendiculaires au plan (a, b, c) ; d'après quoi il est aisé de reconnaître que le point mobile o décrira lui-même un quatrième diamètre, passant par le centre de similitude des projections des triangles abc, $a'b'c'$ sur un plan quelconque, parallèle aux leurs; donc, puisque la polaire conjuguée de ce diamètre est située à l'infini, ils s'ensuit que le plan déterminé par les intersections des plans des faces correspondantes des deux angles trièdres sera mu parallélement à lui-même.

Démonstration d'un théorème relatif aux lignes du second ordre circonscrites à un même quadrilatère, renfermant la solution du premier des trois problèmes de géométrie énoncés à la page 284 du précédent volume;

Par M. Gergonne.

Théorème. *Un quadrilatère convexe quelconque étant donné sur un plan, 1.° on peut toujours lui circonscrire une infinité d'ellipses et deux paraboles seulement; 2.° le lieu des centres de toutes ces ellipses est une hyperbole dont les asymptotes sont respectivement parallèles aux axes des deux paraboles; 3.° les conjugués des diamètres de ces ellipses parallèles à une même droite fixe quelconque concourent tous en un même point fixe de l'hyperbole lieu des centres; 4.° les conjugués des diamètres de ces ellipses parallèles à une des deux asymptotes de l'hyperbole, lieu de leurs centres, sont parallèles à l'autre asymptote de cette hyperbole; 5.° enfin, de toutes ces ellipses, la plus approchante du cercle est celle dont les diamètres conjugués parallèles aux asymptotes de l'hyperbole sont en même temps des diamètres conjugués égaux.*

Ce qu'il y a de nouveau dans cet élégant théorème appartient à M. J. Steiner qui l'a publié dans la première livraison du deuxième volume du Journal allemand de M. Crelle. Mais M. Steiner n'a point démontré la totalité des propositions qui lui appartiennent, et n'a démontré les autres qu'en s'appuyant sur celles qui ne lui appartiennent pas, et qu'il a supposé généralement connues. Cependant, comme ces dernières mêmes ne se trouvent point dans la plupart des traités sur la matière, nous croyons faire une chose agréable au lecteur en démontrant ici le théorème dans son entier, sans rien emprunter de quelque ouvrage que ce puisse être.

Démonstration. Soient pris pour axes des coordonnées deux côtés opposés quelconques du quadrilatère; soient a, a' les distances de l'origine aux deux sommets situés sur l'axe des x, et b, b' les distances de la même origine aux deux sommets situées sur l'axe des y; l'équation de la ligne du second ordre sera de la forme

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0 . \qquad (1)$$

Les segmens déterminés par cette courbe sur les axes des x et des y, à partir de l'origine, seront donnés respectivement par les deux équations

$$Ax^2+2Dx+F=0 , \qquad By^2+2Ey+F=0 ; \qquad (2)$$

d'où il suit qu'on devra avoir

$$a+a'=-\frac{2D}{A} , \qquad aa'=\frac{F}{A} ,$$

$$b+b'=-\frac{2E}{B} , \qquad bb'=\frac{F}{B} .$$

d'où

$$\left.\begin{array}{ll} A=\dfrac{F}{aa'} , & D=-\dfrac{a+a'}{2aa'}F , \\[2ex] B=\dfrac{F}{bb'} , & E=-\dfrac{b+b'}{2bb'}F . \end{array}\right\} \quad (3)$$

Or, on peut toujours supposer F donné et constant pour toutes les lignes du second ordre circonscrites au quadrilatère ; auquel cas A, B, D, E seront aussi donnés et constans ; de sorte que ces courbes ne différeront les unes des autres qu'à raison de l'indétermination du seul coefficient C.

Observons présentement que, pour que le quadrilatère soit convexe, il est nécessaire que b et b' soient de mêmes signes ou de signes contraires, en même temps que a et a' ; c'est-à-dire, en d'autres termes, qu'il faut que aa' et bb' soient tous deux de même signe, ce qui (3) donnera aussi le même signe à A et B, et rendra ainsi AB positif. En conséquence, on pourra, et même d'une infinité de manières différentes, choisir l'indéterminée C, de telle sorte que C^2-AB soit négatif, ou que la courbe (1) soit une ellipse. On pourra, en outre, choisir C de manière à rendre cette quantité nulle, ou à rendre la courbe une parabole, et pour cela il faudra poser

$$C=\pm\sqrt{AB}\;; \qquad (4)$$

donc 1.° *à un même quadrilatère convexe quelconque, on peut circonscrire une infinité d'ellipses et seulement deux paraboles.*

En adoptant la double valeur (4) de C, l'équation (1) prend la forme

$$(x\sqrt{A}\pm y\sqrt{B})^2+2Dx+2Ey+F=0\;, \qquad (5)$$

qui, combinée avec la double équation

$$x\sqrt{A}\pm y\sqrt{B}=0\;, \qquad (6)$$

se réduit simplement à

$$2Dx+2Ey+F=0\;; \qquad (7)$$

ce qui montre que la double droite (6) ne coupe la double courbe (5) qu'en un point unique donné par les deux équations (6) et (7) ; donc la double droite (6) doit être une parallèle menée par l'origine à l'axe de la double parabole (5).

Si l'on désigne par (t,u) le centre de l'une des ellipses circonscrites au quadrilatère, ce centre sera donné, comme l'on sait, par les deux équations

$$At+Cu+D=0\ , \qquad Bu+Ct+E=0\ . \qquad (8)$$

On obtiendra donc le lieu des centres de toutes les ellipses circonscrites au quadrilatère, en éliminant entre ces deux équations l'indéterminée C, ce qui donnera

$$t(At+D)=u(Bu+E)\ ; \qquad (9)$$

équation qui, parce que A et B sont de même signe, appartient à une hyperbole.

En mettant l'équation de la courbe sous la forme

$$A\left(t+\frac{D}{2A}\right)^2-B\left(u+\frac{E}{2B}\right)^2=\frac{BD^2-AE^2}{4AB}\ ; \qquad (10)$$

ce qui donne, pour les équations de son centre,

$$t=-\frac{D}{2A}\ , \qquad u=-\frac{E}{2B}\ ; \qquad (11)$$

l'équation commune à ses asymptotes est

$$\left(t+\frac{D}{2A}\right)\sqrt{A}\pm\left(u+\frac{E}{2B}\right)\sqrt{B}=0\ , \qquad (12)$$

équation commune à deux droites respectivement parallèles aux droites (6) ; ainsi 2.° *le lieu des centres de toutes les ellipses circonscrites à un même quadrilatère convexe quelconque, est une hyperbole dont les asymptotes sont respectivement parallèles aux* *axes des deux seules paraboles qui puissent être circonscrites à ce même quadrilatère.*

En remarquant que l'équation (9) est satisfaite par les divers systèmes de valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} t=0\,, \\ u=0\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} t=0\,, \\ u=-\dfrac{E}{B}\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} t=-\dfrac{D}{A}\,, \\ u=0\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} t=-\dfrac{D}{A}\,, \\ u=-\dfrac{E}{B}\,; \end{array}\right.$$

remettant pour A, B, D, E leurs valeurs (3), observant que les axes des coordonnées sont deux côtés opposés quelconques, et peuvent être aussi les deux diagonales considérées comme côtés opposés, on s'assurera, comme on l'a déjà fait (*Annales*, tom. IX, pag. 396), que l'hyperbole, lieu des centres de toutes les ellipses circonscrites à un même quadrilatère convexe passe 1.° par les trois points de concours des côtés opposés et des diagonales; 2.° par les six points milieux des quatre côtés et des deux diagonales; 3.° enfin par les quatrièmes sommets des trois parallélogrammes dont deux sommets opposés seraient les milieux, soit de deux côtés opposés, soit des deux diagonales, et le troisième le point de concours de ces mêmes côtés ou diagonales. Les formules (11), envisagées de la même manière, prouveront que le centre de cette hyperbole est la commune section des trois droites qui joignent les milieux, tant des côtés opposés que des diagonales du quadrilatère.

En posant pour abréger

$$Dt+Eu+F=k\,, \tag{13}$$

et ayant égard aux équations (8), l'équation (1) prendra cette forme

$$A(x-t)^2+B(y-u)^2+2C(x-t)(y-u)+k=0\,; \tag{14}$$

et l'équation d'un diamètre quelconque de l'une quelconque des ellipses circonscrites au quadrilatère sera de celle-ci

$$y-u=m(x-t) \,. \qquad (15)$$

En combinant celle-ci avec l'équation (14), on obtiendra, pour les coordonuées de l'une des deux extrémités du diamètre,

$$x=t+\sqrt{\frac{-k}{A+Bm^2+2Cm}} \,, \qquad y=u+m\sqrt{\frac{-k}{A+Bm^2+2Cm}} \,. \quad (16)$$

Mais l'équation de la tangente à la courbe (1), en un quelconque (x', y') de ses points, est

$$(Ax'+Cy'+D)x+(By'+Cx'+E)y+(Dx'+Ey'+F)=0 \,, \quad (17)$$

qui, en y mettant pour x' et y' les valeurs (16) et ayant égard aux relations (8) et (13) devient

$$\{(A+Cm)x+(Bm+C)y+(D+Em)\}\sqrt{\frac{-k}{A+Bm^2+2Cm.}}+k=0 \,. \quad (18)$$

Telle est donc l'équation de la tangente à l'extrémité du diamètre (15); d'où il suit que l'équation de son conjugué sera

$$(A+Cm)(x-t)+(Bm+C)(y-u)=0 \,; \qquad (19)$$

ou plus simplement, en ayant égard aux relations (8),

$$(A+Cm)x+(Bm+C)y+(D+Em)=0 \,. \qquad (20)$$

En donnant donc à l'indéterminée C des valeurs différentes, on obtiendra (15), pour toutes les ellipses circonscrites au quadrilatère dont il s'agit, les conjugués du diamètre parallèle à la droite fixe dont l'équation serait

$$y=mx \,. \qquad (21)$$

Mais, en mettant l'équation (20) sous cette forme

$$Ax+mBy+(D+mE)+(mx+y)C=0 ,$$

on voit qu'elle est satisfaite, quelle que soit l'indéterminée C, en posant, à la fois,

$$Ax+mBy+(D+mE)=0 , \qquad mx+y=0 ; \qquad (22)$$

donc, dans toutes les ellipses circonscrites au quadrilatère, le conjugué du diamètre parallèle à la droite fixe quelconque (21) passe par le point fixe donné par les deux équations (22). Il est donc vrai 3.° que *les conjugués des diamètres parallèles de toutes les ellipses circonscrites à un même quadrilatère concourent tous en un même point* (*). Il est en outre facile de voir que *ce point est constamment un des points du périmètre de l'hyperbole lieu des centres ;* car, si l'on élimine m entre les équations (22) qui le déterminent, on tombe sur l'équation

$$x(Ax+D)=y(By+E) ,$$

qui est précisément (9) l'équation de cette hyperbole.

Il faut pourtant excepter de la proposition ci-dessus le cas où m aurait une valeur qui rendît les droites (22) parallèles, car alors le point de concours des conjugués des diamètres parallèles, se trouverait infiniment éloigné, c'est-à-dire, que ces conjugués seraient eux-mêmes parallèles. C'est ce qui arriverait si l'on avait

$$\frac{A}{m}=mB \qquad \text{ou} \qquad m=\sqrt{\frac{A}{B}} ;$$

(*) On trouve une démonstration fort élégante de cette proposition, ainsi que beaucoup d'autres choses intéressantes, dans un petit ouvrage de M. Lamé, ayant pour titre : *Examen des différentes méthodes*, *etc.*; in-8° (Paris, *Courcier*, 1818).

alors les équations des deux diamètres conjugués deviendraient (12) et (22)

$$y-u=(x-t)\sqrt{\frac{A}{B}}\ , \qquad y-u=-(x-t)\sqrt{\frac{A}{B}}\ ;$$

de sorte que ces deux diamètres pourraient être compris dans l'équation unique

$$(x-t)\sqrt{A}\pm(y-u)\sqrt{B}=0\ ; \qquad (23)$$

d'où l'on voit (12) qu'ils seraient alors respectivement parallèles aux deux asymptotes de l'hyperbole lieu des centres ; ainsi 4.° *le conjugué du diamètre de chacune des ellipses circonscrites à un même quadrilatère, parallèles à l'une quelconque des asymptotes de l'hyperbole lieu des centres de toutes ces ellipses, est constamment parallèle à l'autre asymptote de cette hyperbole.*

En posant

$$-\frac{A+Cm}{Bm+C}=m'\ ;$$

d'où

$$A+C(m+m')+Bmm'=0\ , \qquad (24)$$

les équations de nos deux diamètres conjugués deviendront

$$y-u=m(x-t)\ , \qquad y-u=m'(x-t)\ . \qquad (25)$$

En désignant par θ l'angle de ces diamètres on aura

$$\text{Tang.}\theta=\frac{(m-m')\text{Sin.}\gamma}{1+(m+m')\text{Cos.}\gamma+mm'}\ . \qquad (26)$$

Si l'on veut que, pour une valeur déterminée de C, ces diamètres conjugués soient égaux, il faudra, comme l'on sait, que l'angle θ soit minimum, et conséquemment que la différentielle de sa tangente soit nulle, ce qui donnera, toutes réductions faites,

$$(1+2m'\mathrm{Cos}.\gamma+m'^2)\mathrm{d}m=+(1+2m\mathrm{Cos}.\gamma+m^2)\mathrm{d}m' ;$$

mais, en différentiant l'équation (24) on a

$$(Bm+c)\mathrm{d}m'=-(Bm'+c)\mathrm{d}m ;$$

d'où, en multipliant et réduisant

$$(Bm+C)(1+2m'\mathrm{Cos}.\gamma+m'^2)+(Bm'+C)(1+2m\mathrm{Cos}.\gamma+m^2)=0 ,$$

ou bien en développant

$$\{B(m+m')-2(C-2B\mathrm{Cos}.\gamma)\}mm'+\{C(m+m')^2+(B+C\mathrm{Cos}.\gamma)(m+m')+2C\}=0 . \quad (27)$$

Mais l'équation (24) donne

$$mm'=-\frac{C(m+m')+A}{B} , \quad (28)$$

qui, substitué dans (27), donne

$$m+m'=-2.\frac{C(A+B)-2AB\mathrm{Cos}.\gamma}{2C^2-B(A-B)-2BC\mathrm{Cos}.\gamma} ; \quad (29)$$

cette valeur, substituée à son tour dans (28), donne

$$mm'=\frac{2C^2+A(A-B)-2AC\mathrm{Cos}.\gamma}{2C^2-B(A-B)-2BC\mathrm{Cos}.\gamma} ; \quad (30)$$

de sorte que m et m' sont racines d'une même équation du second degré, comme on pouvait bien s'y attendre.

En retranchant du quarré de la valeur de $m+m'$ le quadruple de celle de mm', et extrayant la raciné quarrée du résultat, il vient

$$m-m'=2.\ \frac{\sqrt{(AB-C^2)\{(A+B-2C\text{Cos.}\gamma)^2-4(AB-C^2)\text{Sin.}^2\gamma\}}}{2C^2-B(A-B)-2BC\text{Cos.}\gamma}\ ;$$

on trouve ensuite

$$1+(m+m')\text{Cos.}\gamma+mm'=\frac{(A+B-2C\text{Cos.}\gamma)^2-4(AB-C^2)\text{Sin.}^2\gamma}{2C^2-B(A-B)-2BC\text{Cos.}\gamma}\ ;$$

ces valeurs étant substituées dans la formule (26), elle deviendra

$$\text{Tang.}\theta=\sqrt{\frac{4(AB-C^2)\text{Sin.}^2\gamma}{(A+B-2C\text{Cos.}\gamma)^2-4(AB-C^2)\text{Sin.}^2\gamma}}\ ;$$

d'où

$$\text{Sin}\ \theta=2\text{Sin.}\gamma.\ \frac{\sqrt{AB-C^2}}{A+B-2C\text{Cos.}\gamma}\ . \qquad (31)$$

Tel est donc, pour chaque valeur de l'indéterminée C, l'angle des diamètres conjugués égaux.

Or, soient $2a$ et $2b$ les deux diamètres principaux d'une ellipse et α l'angle de ses diamètres conjugués, on aura, comme l'on sait, $\text{Tang.}\frac{1}{2}\alpha=\frac{b}{a}$, d'où l'on voit que l'angle α approchera d'autant plus d'un angle droit, que les deux diamètres $2a$ et $2b$ approcheront le plus d'être égaux et conséquemment d'autant plus que cette ellipse sera plus approchante du cercle. Si donc on veut savoir quelle est, de toutes les ellipses circonscrites à notre quadrilatère, celle qui approche le plus du cercle, il ne s'agira que d'assigner la valeur de C qui, dans la formule (31), rend $\text{Sin.}\theta$ maximum, ou sa différentielle nulle.

Égalant donc cette différentielle à zéro, on trouvera

$$2AB\text{Cos.}\gamma-C(A+B)=0\ ;$$

d'où

$$C=\frac{2AB\text{Cos.}\gamma}{A+B}\ . \qquad (32)$$

Ces valeurs substituées dans les formules (29) et (30) donnent

$$m+m'=0\ , \qquad mm'=-\frac{A}{B}\ ;$$

d'où

$$m=\pm\sqrt{\frac{A}{B}}\ , \quad m'=\mp\sqrt{\frac{A}{B}}\ ;$$

ce qui prouve que, dans l'ellipse dans laquelle les diamètres conjugués égaux forment le plus grand angle aigu, ces diamètres conjugués sont (12) parallèles aux deux asymptotes de l'hyperbole; ainsi 5.° *de toutes les ellipses circonscrites à un même quadrilatère, la plus approchante du cercle est celle dont les diamètres conjugués parallèles aux asymptotes de l'hyperbole lieu des centres de toutes les ellipses circonscrites, sont en même temps des diamètres conjugués égaux;* c'est la solution du problème énoncé à la page 284 du précédent volume (*) et le complément du théorème que nous nous étions proposés de démontrer.

Nous espérons que M. Steiner ne voudra pas laisser son ouvrage incomplet, et que, dans un prochain numéro du Journal de M. Crelle, il nous fera connaître aussi l'ellipse la plus approchante du cercle, entre toutes celles qui sont inscrites à un même quadrilatère.

(*) Le problème avait été proposé par M. Bobillier.

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 28 du présent volume ;

Par MM. Roche, professeur de mathématiques, de physique et de chimie à l'Ecole d'artillerie de la marine; Reynard, répétiteur de mathématiques à l'Ecole d'artillerie de la Garde Royale, et Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

THÉORÈME. *Trois droites respectivement parallèles aux trois côtés d'un triangle, menées par un même point pris arbitrairement dans l'intérieur de ce triangle, le partagent en trois parallélogrammes et en trois triangles ; tels que le produit des aires des trois parallélogrammes est égal à huit fois le produit des aires des trois triangles.*

Démontration. Soit $AA'A''$ (fig. 1) un triangle quelconque, et soit P un point pris arbitrairement dans son intérieur. Soient menées, par ce point P,

$B'C''$, parallèle à $A'A''$, et se terminant à AA' et AA'',

$B''C$, parallèle à $A''A$, et se terminant à $A'A''$ et $A'A$,

BC', parallèle à AA', et se terminant à $A''A$ et $A''A'$.

On aura, par des théorèmes connus,

$$\textit{Parall.}\ PA=PB.PC.\textit{Sin.}A\ ,$$
$$\textit{Parall.}\ PA'=PB'.PC'.\textit{Sin.}A'\ ,$$

$$Parall.\ PA''=PB''.PC''.Sin.A'',$$

$$PB''.PC'.Sin.A=2Triang.B''PC',$$

$$PB.PC''.Sin.A'=2Triang.BPC'',$$

$$PB'.PC.Sin.A''=2Triang.B'PC\ ;$$

d'où on conclura, en multipliant et en supprimant les facteurs communs aux deux membres de l'équation produit

$$Parall.PA\times Parall.PA'\times Parall.PA''=8Tri.B''PC'\times Tri.BPC''\times Tri.B'PC\ ;$$

comme on l'avait annoncé.

On peut également parvenir au but sans rien emprunter de la trigonométrie. On démontre en effet, dans les élémens, que, si un angle d'un triangle est égal à un angle d'un autre triangle, les aires de ces deux triangles sont entre elles comme les produits des côtés qui comprennent les angles égaux; d'où il suit que, si un parallélogramme et un triangle ont un angle égal, l'aire du parallélogramme sera à l'aire du triangle comme le double du produit des côtés du parallélogramme qui comprennent l'angle dont il s'agit, est au produit des côtés qui comprennent son égal dans le triangle. En conséquence, on aura

$$\frac{Parall.PA}{Tri.B''PC'}=2.\frac{PB.PC}{PB''.PC'},$$

$$\frac{Parall.PA'}{Tri.BPC''}=2.\frac{PB'.PC'}{PB.PC''},$$

$$\frac{Parall.PA''}{Tri.B'PC}=2.\frac{PB''.PC''}{PB'.PC}\ ;$$

d'où, en multipliant et simplifiant,

$$\frac{Parall.PA \times Parall.PA' \times Parall.PA''}{Tri.B''PC' \times Tri.BPC'' \times Tri.B'PC}=8\,;$$

équation qui revient à la précédente (*).

Démonstration de ce théorème et de quelques autres, ainsi que de leurs analogues relatifs au tétraèdre;

Par M. Vallès, élève ingénieur des ponts et chaussées.

Théorème I. Les parallèles à deux des côtés d'un triangle, menées par un quelconque des points du troisième, partagent ce triangle en deux autres T′ *et* T″ *et un parallélogramme* P, *tels qu'on a*

$$P^2-4T'T''=0\ .$$

Démonstration. Soit SS′S″ (fig. 2) le triangle dont il s'agit. Soit C un point pris arbitrairement sur le côté S′S″ de ce triangle, par lequel on a mené les parallèles CA′, CA″ à ses deux autres côtés, se terminant à ces mêmes côtés. Ces parallèles diviseront le triangle en deux autres CA′S′, CA″S″, que nous représenterons respectivement par T', T'' et en un parallélogramme CS que nous représenterons par P. Posons en outre CS′$=a'$, CS″$=a''$.

(*) Plusieurs élèves du collége royal de Montpellier, auxquels le théorème a été proposé, l'ont démontré de l'une et de l'autre manière. Il est dû à l'élève Ch. Sicard, du collége de S.te-Barbe, à Paris, qui a démontré en outre que PB.PB′.PB″=PC.PC′.PC″.

J. D. G

En considérant CA$'$ comme la base commune de P et T' leurs hauteurs seront proportionnelles à A$'$S et A$'$S$'$, d'où il résulte qu'on aura

$$\frac{P}{T'}=2.\frac{A'S}{A'S'}=2\frac{CS''}{CS'}=2\frac{a''}{a'}\;.$$

Par une semblable raison, on aura

$$\frac{P}{T''}=2\frac{a'}{a}\;;$$

d'où en multipliant, simplifiant, chassant le dénominateur et transposant

$$P^2-4T'T''=0\;;$$

comme nous l'avions annoncé.

THÉORÈME II. Les parallèles aux trois côtés d'un triangle, conduites par un même point pris arbitrairement dans son intérieur, partagent le triangle en trois parallélogrammes P, P$'$, P$'''$ *et en trois triangles respectivement opposés* T, T$'$, T$''$, *tels qu'on a*

$$P^2=4T'T''\;,\qquad P'^2=4T''T\;,\qquad P''=4TT'\;.$$

Démonstration. C'est une conséquence toute naturelle de ce que les systèmes de surfaces T', T'' et P, T'', T et P', T, T' et P'' (fig. 3) se trouvent exactement dans le cas des trois surfaces du *Théorème I.*

Si, entre ces trois équations, on élimine tout à tour deux des trois quantités T, T', T'', il viendra

$$2TP=P'P''\;,\quad 2T'P'=P''P\;,\quad 2T''P''=PP'\;.$$

En divisant ces dernières deux à deux, on parvient à cette double équation

$$TP^2=T'P'^2=T''P''^2 .$$

Enfin en extrayant la racine quarrée du produit des équations primitives, on parvient à l'équation

$$PP'P''=8TT'T'' ,$$

qui est précisément celle qui était proposée à démontrer.

THÉORÈME III. *Les plans parallèles à deux des faces d'un tétraèdre, conduits par un quelconque des points de l'arête suivant laquelle se coupent ses deux autres faces, partagent le tétraèdre en deux autres* T', T'' *et en un hexaèdre heptagone* Q, *tronc de prisme quadrangulaire, dont une des arêtes latérales est nulle, tels que*

$$Q=3(\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T''})\sqrt[3]{T'T''} .$$

Démonstration. Soit SS'S''S''' (fig. 4) le tétraèdre dont il s'agit. Par un point C, pris arbitrairement sur l'arête S'S'', soient conduits les plans A'CB', A''CB'', respectivement parallèles aux faces SS''S''', SS'S''', qui contiennent l'arête SS''', opposée à S'S''. Ces plans diviseront le tétraèdre donné en deux autres S'A'CB', S''A''CB'', que nous représenterons respectivement par T', T'', et un corps hexaèdre heptagone, terminé par les deux parallélogrammes CS, CS''', les deux triangles A'CB', A''CB'' et les deux trapèzes SA'B'S''', SA''B''S'''; lequel corps que nous représenterons par Q, n'est autre qu'un tronc de prisme quadrangulaire, dont une des arêtes latérales est nulle.

Soit conduit, par CB' et CA'', un plan coupant en D l'arête SS''; ce plan divisera le corps Q en deux prismes triangulaires, l'un que nous représenterons par P, ayant pour ses deux bases A'CB' et SA$''$D ; et l'autre, que nous représenterons par P''', ayant pour ses deux bases A$''$CB$''$ et DB$'$S$'''$. Posons enfin CS$'=a'$, CS$''=a''$. Nous aurons d'abord

$$P+P'''=Q\,. \qquad (1)$$

En considérant le triangle A$'$CB$'$ comme la base commune du prisme triangulaire P et du tétraèdre T', leurs hauteurs seront proportionnelles à A$'$S et A$'$S$'$; de sorte qu'on aura

$$\frac{P}{T'}=3.\frac{A'S}{A'S'}=3.\frac{CS''}{CS'}=3\frac{a''}{a'}\,. \qquad (2)$$

Pour une semblable raison, on aura aussi

$$\frac{P'''}{T''}=3\frac{a'}{a''}\,. \qquad (3)$$

En considérant A$'$S$'$B$'$ comme la base du tétraèdre T$'$, ce tétraèdre aura même hauteur que le prisme P'''; de sorte que P''' sera à T$'$ comme le triple de l'aire du triangle B$'$S$'''$D est à l'aire du triangle S$'$B$'$A$'$. Mais, parce que ces triangles sont semblables, leurs aires sont proportionnelles aux quarrés de leurs côtés homologues ; de sorte qu'on aura

$$\frac{P'''}{T'}=3\frac{\overline{B'S'''}^2}{\overline{S'B'}^2}=3\frac{\overline{CS''}^2}{\overline{CS'}^2}=3\frac{a''^2}{a'^2}\,. \qquad (4)$$

Pour une semblable raison, on aura aussi

$$\frac{P}{T''}=3\frac{a'^2}{a''^2}\,. \qquad (5)$$

Prenant, tour à tour, la somme des équations (2) et (4), et celle des équations (3) et (5), en ayant égard à l'équation (1), il viendra

$$\frac{Q}{T'}=3\,\frac{a''}{a'}\left(1+\frac{a''}{a'}\right),$$

$$\frac{Q}{T''}=3\,\frac{a'}{a''}\left(1+\frac{a'}{a''}\right);$$

ou, en chassant les dénominateurs, transposant et ordonnant

$$Qa'^2-3T'a'a''-3T'a''^2=0,$$

$$3T''a'^2+3T''a'a''-Qa''^2=0.$$

Prenant successivement la somme des produits de ces équations, d'abord par $3T''$ et $-Q$, puis par Q et $-3T'$, en divisant le premier résultat par a'' et le second par a', il viendra

$$3T''(Q+3T')a'=(Q^2-9T'T'')a'',$$

$$3T'(Q+3T'')a''=(Q^2-9T'T'')a';$$

d'où, en multipliant membre à membre et divisant par $a'a''$,

$$(Q^2-9T'T'')^2=9T'T''(Q+3T')(Q+3T'');$$

ou bien enfin, en développant, réduisant, transposant et ordonnant

$$Q^3-27T'T''Q-27T'T''(T'+T'')=0.$$

Or, cette équation a deux racines imaginaires qui ne sauraient convenir à la question qui nous occupe. En ne prenant donc que sa racine réelle, on aura simplement, comme l'annonce le théorème,

$$Q=3(\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T''})\sqrt[3]{T'T''}\ .$$

THÉORÈME IV. Les plans conduits par un même point, pris arbitrairement dans l'intérieur de la base d'un tétraèdre, parallèlement à ses trois autres faces, partagent ce tétraèdre en trois autres tétraèdres T′, T″, T‴, *trois hexaèdres heptagones, respectivement opposés* Q′, Q″, Q‴, *lesquels sont des troncs de prismes triangulaires, ayant une arête latérale nulle, et enfin un parallélipipède* P, *tels qu'on a*

$$1.^{\circ}\ \left\{\begin{array}{l} Q'=3(\sqrt[3]{T''}+\sqrt[3]{T'''})\sqrt[3]{T''T'''}\ , \\ Q''=3(\sqrt[3]{T'''}+\sqrt[3]{T'})\sqrt[3]{T'''T'}\ , \\ Q'''=3(\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T''})\sqrt[3]{T'T''}\ ; \end{array}\right.$$

$$2.^{\circ}\qquad P^3=216T'T''T'''\ .$$

Démonstration. Les trois premières équations résultant tout naturellement de ce que chacun des trois systèmes de corps T″, T‴ et Q′; T‴, T′ et Q″, T′, T″ et Q‴ se trouve dans le même cas que les trois corps du *théorème III;* la quatrième seule a besoin d'être démontrée.

Pour y parvenir, soit S′S″S‴ (fig. 5) la base du tétraèdre donné, et soit O le point pris arbitrairement dans son intérieur par lequel on a conduit des plans respectivement parallèles à ses trois autres faces; ces plans coupant le plan de la base suivant les droites

$A'B''$, parallèle à $S''S'$, se terminant à $S'''S''$ et $S'''S'$;

$A''B'''$, parallèle à $S'''S''$, se terminant à $S'S'''$ et $S'S''$;

$A'''B'$, parallèle à $S'S'''$, se terminant à $S''S'$ et $S''S'''$.

Les triangles $A'OB'$, $A''OB''$, $A'''OB'''$ seront les bases de nos trois tétraèdres dont nous supposerons les sommets respectifs en C', C'', C''', et que nous représenterons respectivement par T', T'', T'''. Alors OC', OC'', OC''' seront les trois arêtes d'un même angle du parallélipipède P; et cet angle sera évidemment égal à chacun des angles C', C'', C''' des tétraèdres T', T'', T'''.

Mais, lorsqu'un parallélipipède et un tétraèdre ont un angle trièdre égal, le volume du parallélipipède est au volume du tétraèdre, comme six fois le produit des trois arêtes du parallélipipède qui comprennent l'angle dont il s'agit, est au produit des trois arêtes qui comprennent son égal dans le tétraèdre. En observant donc que le parallélipipède P a une arête commune avec chacun des tétraèdres T', T'', T''', et que ces trois tétraèdres sont semblables, on aura

$$\frac{P}{T'}=6.\frac{OC''.OC'''}{C'A'.C'B'}=6.\frac{OB''.OA'''}{OA'.OB'},$$

$$\frac{P}{T''}=6.\frac{OC'''.OC'}{C''A''.C''B''}=6.\frac{OB'''.OA'}{OA''.OB''},$$

$$\frac{P}{T'''}=6.\frac{OC'.OC''}{C'''A'''.C'''B'''}=6.\frac{OB'.OA''}{OA'''.OB'''}.$$

Mais, si l'on représente par t', t'', t''' les bases respectives des tétraèdres T', T'', T''', et par p', p'', p''' les parallélogrammes opposés OS$'$, OS$''$, OS$'''$, qui avec eux composent la base du tétraèdre proposé, on aura

$$\frac{p'}{t'}=2.\frac{OB''.OA''}{OA'.OB'},$$

$$\frac{p''}{t''}=2.\frac{OB'''.OA'}{OA''.OB''},$$

$$\frac{p'''}{t'''}=2.\frac{OB'.OA''}{OA'''.OB'''};$$

équations qui, comparées aux précédentes, les changent en celles-ci

$$\frac{P}{T'}=3\frac{p'}{t'},\quad \frac{P}{T''}=3\frac{p''}{t''},\quad \frac{P}{T'''}=3\frac{p'''}{t'''},$$

dont le produit est

$$\frac{P^3}{T'T''T'''}=27\frac{p'p''p'''}{t't''t'''}.$$

Mais, par le *théorème II*, on a

$$\frac{p'p''p'''}{t't''t'''}=8;$$

donc, en substituant et chassant le dénominateur,

$$P^3=216T'T''T''';$$

comme l'annonce le théorème.

De ces quatre équations on en peut déduire plusieurs autres ; et d'abord cette dernière donne

$$\sqrt[3]{T''T'''}=\frac{P}{6\sqrt[3]{T'}}\ ,\quad \sqrt[3]{T'''T'}=\frac{P}{6\sqrt[3]{T''}}\ ,\quad \sqrt[3]{T'T''}=\frac{P}{6\sqrt[3]{T'''}}\ .$$

Substituant ces valeurs dans les trois premières, et chassant les dénominateurs, il viendra

$$2Q'\sqrt[3]{T'}=P(\sqrt[3]{T''}+\sqrt[3]{T'''})\ ,$$

$$2Q''\sqrt[3]{T''}=P(\sqrt[3]{T'''}+\sqrt[3]{T'})\ ,$$

$$2Q'''\sqrt[3]{T'''}=P(\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T''})\ .$$

En éliminant entre ces équations deux quelconques des quantités $\sqrt[3]{T'}$, $\sqrt[3]{T''}$, $\sqrt[3]{T'''}$, la troisième disparaîtra d'elle-même et on aura

$$P^3+(Q'+Q''+Q''')P^2-Q'Q''Q'''=0\,.$$

THÉORÈME V. Les plans conduits parallèlement aux faces d'un tetraèdre, par un même point pris arbitrairement dans son intérieur, partagent ce tétraèdre en quatorze parties dont quatre P, P′, P″, P‴ *sont des parallélipipèdes ayant chacun un angle trièdre commun avec lui ; quatre autres* T, T′, T″, T‴ *sont des tétraèdres qui lui sont semblables, et qui sont respectivement opposés à ces parallélipipèdes ; enfin les six dernières que nous désignerons par* (pp′), (pp″), (p′p″), (pp‴), (p′p‴), (p″p‴), *suivant les parallélipipèdes entre lesquels elles se trouveront situées, sont des troncs de prismes quadrangulaires, ayant une arête la-*

térale nulle ; et on a, entre ces quatorze parties, les dix relations suivantes :

$$1.^{\circ}\left\{\begin{array}{ll}
(pp')=3(\sqrt[3]{T''}+\sqrt[3]{T'''})\sqrt[3]{T''T'''}\,, & (p''p''')=3(\sqrt[3]{T}+\sqrt[3]{T'})\sqrt[3]{TT'}\,,\\
(pp'')=3(\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T'''})\sqrt[3]{T'T'''}\,, & (p'p''')=3(\sqrt[3]{T}+\sqrt[3]{T''})\sqrt[3]{TT''}\,,\\
(p'p'')=3(\sqrt[3]{T}+\sqrt[3]{T'''})\sqrt[3]{TT'''}\,, & (pp''')=3(\sqrt[3]{T'}+\sqrt[3]{T''})\sqrt[3]{T'T''}\,,
\end{array}\right.$$

$$2.^{\circ}\left\{\begin{array}{l}
P^3=216T'T''T'''\,,\\
P'^3=216T''T'''T\,,\\
P''^3=216T'''TT'\,;\\
P'''^3=216TT'T''\,.
\end{array}\right.$$

Démonstration. Ces relations résultent tout naturellement de ce que les quatre systèmes de sept corps

$$P,\ T',\ T'',\ T''',\ (p'p''),\ (p'p'''),\ (p''p''')\,,$$

$$P',\ T'',\ T''',\ T,\ (pp''),\ (pp'''),\ (p''p''')\,,$$

$$P'',\ T''',\ T,\ T',\ (pp'),\ (pp'''),\ (p'p''')\,,$$

$$P''',\ T,\ T',\ T'',\ (pp'),\ (pp''),\ (p'p'')\,,$$

se trouvent, les uns par rapport aux autres, dans le cas du *théorème IV*.

De ces relations on peut en déduire une multitude d'autres, parmi lesquelles nous nous contenterons de signaler les plus remarquables.

En extrayant la racine cubique du produit des quatre dernières, on obtient, sur-le-champ,

$$PP'P''P'''=1296TT'T''T''' .$$

Si, entre ces mêmes quatre dernières équations, on élimine tour à tour trois des quatre quantités T, T', T'', T''', on aura

$$6P^2T=P'P''P''' ,$$

$$6P'^2T'=P''P'''P ,$$

$$6P''^2T''=P'''PP' ,$$

$$6P'''^2T'''=PP'P'' .$$

On tire encore de ces équations, en les multipliant par T, T', T'', T''', et remarquant qu'alors leurs seconds membres deviennent égaux,

$$P^3T=P'^3T'=P''^3T''=P'''^3T''' .$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de géométrie.

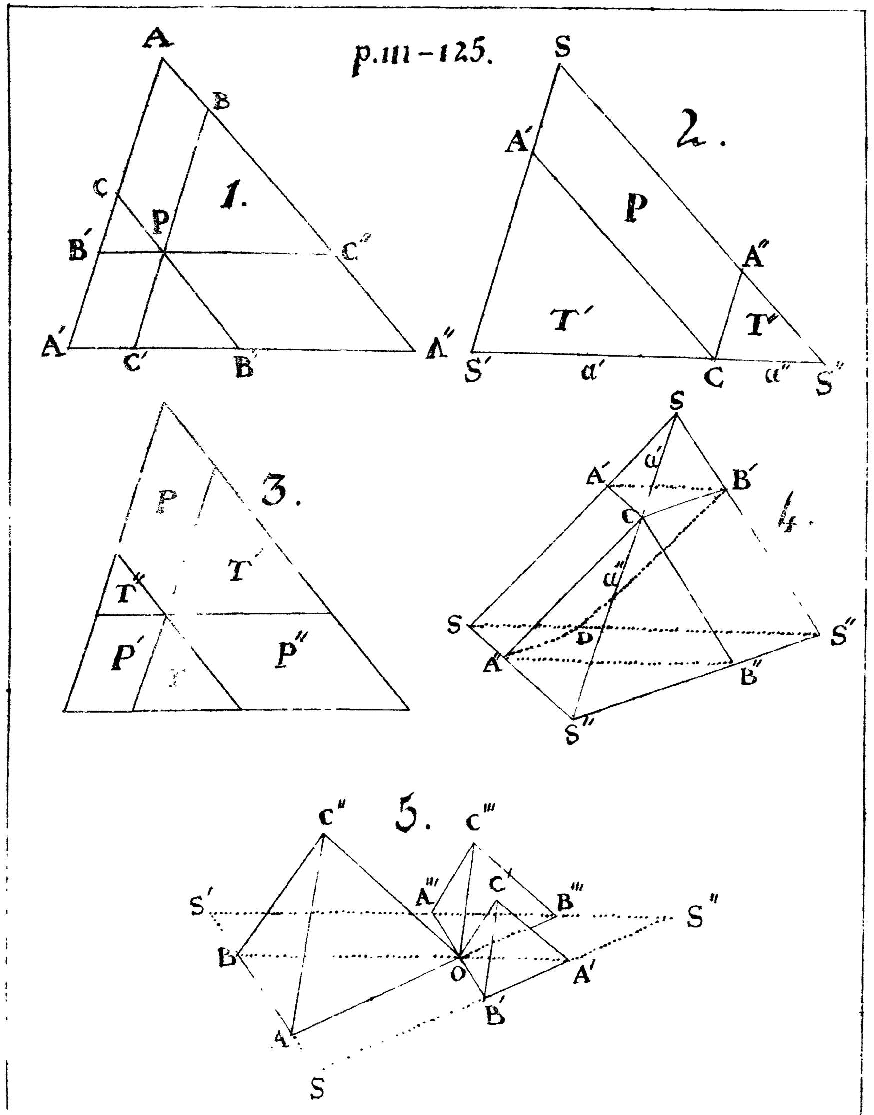
I. Dans l'intérieur d'un triangle on en a construit un autre, à volonté, dont les côtés sont parallèles aux siens, et qui peut d'ailleurs être tourné dans le même sens que lui ou en sens inverse. Les côtés du triangle intérieur, prolongés jusqu'au périmètre de l'autre triangle, partagent celui-ci en sept parties. Quelles sont les relations diverses qui existent entre ces parties ?

II. Dans l'intérieur d'un tétraèdre on en a construit un autre, à volonté, dont les faces sont parallèles aux siennes, et qui peut d'ailleurs être tourné dans le même sens que lui ou en sens inverse. Les faces du tétraèdre intérieur, prolongées jusqu'à la surface de l'autre, partagent celui-ci en quinze parties. Quelles sont les relations diverses qui existent entre ces parties.

III. De l'origine des coordonnées rectangulaires, comme centre commun, on a décrit, sur les plans des yz, des zx et des xy, des cercles dont les rayons respectifs sont a, b, c. Une droite indéfinie se meut dans l'espace, de manière à passer constamment par les circonférences de ces trois cercles. Quelle est l'équation de la surface gauche qu'elle engendrera dans son mouvement ?

IV. Quel serait, pour les lignes du second ordre inscrites à un même quadrilatère, le théorème qu'on pourrait déduire, par la théorie des polaires réciproques, de celui qui vient d'être démontré (pag. 100) sur les lignes du second ordre circonscrites ?

p. 111-125.



POLÉMIQUE MATHÉMATIQUE.

Réclamation de M. le capitaine Poncelet,

(*Extraite du* Bulletin universel des annonces et nouvelles scientifiques);

avec des notes ;

Par M. GERCONNE.

M. PONCELET de qui, depuis plus de dix ans, je n'ai cessé d'accueillir les recherches, de signaler les travaux, de défendre et de propager les doctrines, vient de publier dans le dernier numéro du *Bulletin universel* (août 1827, pag. 109) une sorte de note diplomatique, en forme de manifeste, où, à travers des expressions beaucoup trop flatteuses pour moi, on voit percer, de toutes parts, beaucoup d'amertume, des reproches et même des accusations assez graves. Si, croyant avoir à se plaindre de ma part de quelque manque de procédé, bien involontaire sans doute, M. Poncelet s'était directement adressé à moi, j'ose croire qu'il ne m'eût pas été difficile de le convaincre que ses préventions étaient tout-à-fait dénuées de fondement ; mais puisqu'il a préféré m'accuser devant le public, je crois entrer dans ses vues en consignant sa plainte dans mon Recueil, afin d'ajouter encore, s'il est possible, à la publicité qu'il a désiré d'obtenir pour elle.

Note sur divers articles du Bulletin des sciences de 1826 et de 1827, *relatifs à la* Théorie des polaires réciproques, *à la* dualité *des propriétés de situation de l'étendue, etc.;*

Par M. PONCELET.

« On lit à la pag. 275 du *Bulletin* de mai 1827 que, *dans un mémoire présenté récemment à l'Académie royale des sciences*, *M.*

Poncelet a repris, avec de plus amples développemens, les recherches de M. Gergonne sur la *dualité des propriétés de situation; dualité* que ce dernier géomètre a *signalée* (1) dans les premiers numéros des *Annales de mathématiques* de l'année 1826, et dont il a été rendu un compte fort détaillé à la pag. 112 du *Bulletin* de février de la même année. Or, il m'importe beaucoup que les géomètres qui n'ont pas l'avantage d'assister aux séances de l'Académie des sciences sachent : 1.° que le *mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques*, dont il s'agit, a été présenté à

---

(1) « *Le lecteur remarquera que ces recherches de M. Gergonne ne comprennent que les relations de situation du point, de la ligne droite et du plan, dont la réciprocité ou la dualité est de première évidence, et que c'est par erreur que l'auteur de l'article cité du* Bulletin, *mentionne aussi* tous les théorèmes de la trigonométrie sphérique, *puisque M. Gergonne ne s'en est point occupé* (*) ».

(Note de M. PONCELET).

(*) Dire que les théorèmes dont je me suis occupé sont doubles, *comme le sont ceux de la trigonométrie sphérique*, ce n'est point dire, ce me semble, que je me sois occupé de ces derniers; ce que disent là MM. les Rédacteurs me paraît n'être que la suite des idées qu'ils avaient mises en avant dans un autre article (Février 1826, pag. 113).

Il aurait été fort inutile d'ailleurs que je m'occupasse de la *dualité* des théorèmes de la *trigonométrie sphérique*, car il n'est, je pense, aucun géomètre pour qui cette dualité soit un mystère (*Annales*, tom. XV, pag. 302), (*Bulletin*, avril 1825, pag. 222). Quant au reproche que fait M. Poncelet à mon article de n'offrir que des cas de *dualité* de première évidence, que M. Poncelet veuille bien me dire dans quel ouvrage cette *dualité* avait été *signalée* avant la publication de l'article auquel il paraît attacher si peu d'importance. J'ai eu dessein, en le composant, d'écrire les premières pages d'un traité élémentaire, suivant les vues de M. Poncelet, qui sont aussi les miennes; j'ai voulu prouver que le principe de *dualité* pourrait être mis en évidence dès les premiers pas dans l'étude de la géométrie; et on n'aurait pas été fondé à plus exiger de moi que je n'avais eu dessein de faire.

J. D. G.

cette Académie dans sa séance du 12 avril 1824 (1), par conséquent deux années avant l'époque où M. Gergonne a publié ses idées sur la *dualité* de certains théorèmes de géométrie (*) ; 2.° qu'il a été lu, dans cette même séance, une notice étendue qui avait pour but de signaler fortement à l'attention des géomètres, non seulement la *réciprocité* des relations descriptives ou de situation des figures, mais encore celle des relations métriques de distances, d'angles et de lignes trigonométriques ; 3.° que ce mémoire a été renvoyé à l'examen d'une commission composée de MM. Legendre, Poinsot et Cauchy, rapporteur qui en possède encore le manuscrit. S'il était nécessaire d'appuyer des faits aussi authentiques (**), il me suffirait d'invoquer le témoignage des personnes présentes à la séance du 12 avril 1824, lesquelles se rappeleront très-bien, m'avoir entendu lire la notice dont l'extrait a paru dans le numéro de mars 1827, des *Annales de mathématiques* ; notice dont la singularité des vues a même fait dire plaisamment à d'illustres académiciens : Que c'était de la *géométrie romantique*, de la *géométrie à quatre dimensions.*

» On ne me reprochera pas, sans doute, d'avoir attendu jus-

---

(1) « Voyez le résumé de cette séance dans les divers journaux du temps, et notamment pag. 74 du tom. II du *Bulletin* de 1824 ».

(*Note de M.* PONCELET).

(*) Au commencement de 1819, M. Coriolis me transmet, sans démonstration, un élégant théorème relatif à la géométrie de la règle. Sans même songer à la manière dont il pourrait être démontré, j'écris aussitôt son corrélatif à sa suite, et je les propose tous deux dans mon Recueil (tom. IX, pag. 289). Mes idées sur la *dualité* de situation étaient donc alors déjà bien fixées ; ce que prouve encore l'article de la pag. 321 du même volume. Ce sont aussi les mêmes idées qui ont donné naissance au mémoire sur les *lois générales qui régissent les polyèdres* (tom. XV, pag. 157).

J. G. D.

(**) Mais qui songe donc à les nier ?

J. G. D.

qu'ici, sans réclamations, le jugement de MM. les commissaires de l'Institut; mon silence prouve, tout au plus, le prix que j'attache à ce jugement, le respect que je professe pour la personne des commissaires, enfin le peu d'empressement que je mets à tirer avantage de mes recherches géométriques.

» Le fait est que le *mémoire sur la théorie des polaires réciproques* et celui qui a pour objet la *théorie générale du centre des moyennes harmoniques*, dont il a été rendu compte l'année dernière à l'Académie, par M. Cauchy (*), composent les préliminaires d'un grand travail sur les propriétés des lignes et des surfaces géométriques, déjà annoncé dans le *Traité des propriétés projectives des figures.* Les occupations de mon service militaire ne m'ont pas permis, jusqu'à présent, de perfectionner et de mettre au jour ce travail, et je suis encore moins à même de le terminer, depuis que son excellence le Ministre de la guerre m'a chargé de créer le cours de mécanique appliquée aux machines, à l'école spéciale de l'artillerie et du génie, à Metz (**). Mais si, dans cette position, j'ai dû renoncer à l'idée de poursuivre et de publier

(*) Voy. *Annales*, tom. XVI, pag. 349.

(**) Personne n'a été plus fâché que moi de voir M. Poncelet chargé de ce cours; je m'en suis expliqué à son ami le colonel Vainsot, dès qu'il m'en a donné la première nouvelle, et plus tard j'ai dit publiquement ce que j'en pensais (tom. XVII, pag. 274). Il ne manque pas en effet d'hommes propres à appliquer les sciences; et on ne saurait laisser trop de loisirs au petit nombre des esprits privilégiés qui peuvent en reculer les limites. Malheureusement tout le monde ne pense pas ainsi. La *roue à aubes courbes* de M. Poncelet lui a valu d'honorables récompenses, et sa *théorie des polaires réciproques* (*Annales*, tom. VIII, pag. 201), bien que d'une toute autre importance, a passé pour ainsi dire inaperçue.

Mais, parce que M. Poncelet est empêché de publier les résultats de ses recherches, s'ensuit-il que tout le monde sera tenu de se croiser les bras pour l'attendre? Je ne puis me persuader qu'il pousse l'exigence à ce point.

J. D. G.

prochainement mes recherches géométriques, je n'en dois pas moins être jaloux de m'assurer la possession de celles qui ont pu arriver à la connaissance des géomètres. Comme j'ai eu d'ailleurs occasion de communiquer, depuis long-temps, quelques-uns des résultats de ma théorie à différentes personnes, je crois pouvoir déclarer ici que l'objet de ces recherches embrasse les propriétés descriptives et métriques les plus générales de l'*intersection*, de l'*osculation* des lignes et des surfaces de divers ordres, et que, c'est en prenant principalement pour base les deux mémoires ci-dessus, les principes de la *projection centrale* ou *perspective* et ceux de la *théorie des transversales*, que je suis parvenu aux résultats de mon travail; je crois devoir déclarer, en outre, que la méthode par laquelle j'applique la théorie des transversales à la découverte des propriétés des lignes et surfaces, présente les caractères d'une véritable analyse, qui permet de combiner les relations des figures et de reconnaître ce qui leur appartient, même quand ces relations prennent la *forme de l'indétermination*, ou que certaines grandeurs deviennent *imaginaires*, *infinies*, etc. J'ajouterai que, pour faciliter l'intelligence de cette méthode, j'ai commencé par l'appliquer aux sections coniques, et que je suis ainsi parvenu à établir, en quelques pages, les propriétés les plus fécondes, les plus générales de ces courbes, notamment celles des hexagones inscrits et circonscrits, celles du contact des divers ordres, celles enfin que Desargues a nommées *involutions* : ces dernières relations, comme on sait, ont été étudiées spécialement par M. Brianchon, dans son intéressant *mémoire sur les lignes du second ordre ;* elles se trouvent reproduites dans le *Traité des propriétés projectives*, et elles ont servi de base à M. Sturm pour établir, dons les *Annales de mathématiques* (tom. XVI et XVII, *Bulletin des sciences*, mai 1826 et février 1827), plusieurs des propriétés des sections coniques, considérées isolément ou combinées entre elles. On conçoit aussi que la démonstration de l'hexagone de Pascal, donnée par M. Gergonne, tom. XVII des *Annales de mathématiques*, pag. 143, en parlant des propriétés des sécantes du cercle, démonstration mentionnée pag. 93 du *Bulletin des sciences* de février 1827; que cette démonstration, dis-je, doit se trouver comprise nécessairement dans l'application particulière que j'ai faite de la théorie des transversales aux sections coniques (*); et s'il fallait à ce sujet un témoignage plus spécial, j'invoquerais celui de M. Brianchon auquel, depuis nombre d'années, j'ai fait part de ma méthode avec cette *confiance* qu'on doit à un *ami*, à un *savant modeste*, assez riche de son propre fond pour n'avoir rien à *envier* à ses émules (**).

» En entrant dans ces développemens, mon intention n'est pas de revendiquer, pour mon compte, toutes les propositions sur les courbes et surfaces qui rentrent dans l'objet spécial de mes recherches; à Dieu ne plaise! Je prétends seulement qu'on m'accorde

---

(*) Je suis flatté sans doute que cette démonstration ait fixé l'attention de M. Poncelet; mais peut-il penser sérieusement qu'après avoir démontré le théorème (*Annales*, tom. IV, pag. 78) par les *propriétés projectives*; qu'après en avoir donné une *démonstration analytique* assez simple (*ibid.*, pag. 381); qu'après en avoir enfin publié spontanément deux autres démonstrations fort élégantes de M. Dandelin (*Annales*, tom. XV, pag. 395 et tom. XVI, pag. 325) j'attache beaucoup d'importance à celle-là que je n'ai même publiée que parce qu'elle s'est présentée sous ma plume en corrigeant l'épreuve du mémoire de M. Ferriot, auquel elle se rapporte, et qui n'a d'autre mérite à mes yeux que de pouvoir être introduite dans les élémens de géométrie plane? Pense-t-il surtout que je la mette le moins du monde en parallèle avec celle que j'ai donnée plus récemment (tom. XVII, pag. 222) et qui a été reproduite dans le *Bulletin* (mars 1827, pag. 166); laquelle, non seulement n'exige ni construction ni calcul, mais même peut être communiquée de vive voix, en très-peu de mots, et fait de cet important théorème une vérité presque triviale?

J. D. G.

(**) Qui sait? J'écoutais peut-être aux portes.

J. D. G.

que je n'ai pas emprunté aux autres les principes et les méthodes qui en constituent la base essentielle (*).

» Revenons à la dualité, dont le *Bulletin des sciences* attribue uniquement la découverte à M. le Rédacteur des *Annales de mathématiques* (**). Je ne manquai pas de faire remarquer à cet estimable géomètre l'analogie de ses idées avec les miennes, dès l'apparition, en janvier 1826, de son mémoire sur la *dualité* (***) ; et, d'après la demande qu'il voulut bien me faire ensuite de lui donner une idée plus étendue de mes dernières recherches, concernant la *théorie des polaires réciproques*, je me hâtai de lui en adresser l'analyse au mois de décembre 1826 ; j'y joignis un article de réclamations qui me paraissait assez intéresser la philosophie de la science pour mériter une place dans les *Annales de mathématiques*. Je respecte les motifs qui ont empêché M. Gergonne d'insérer, avant le numéro de mars 1827 de son Recueil, l'analyse dont il s'agit, et qui lui on fait supprimer entièrement ma *réclamation*. J'ignore d'ailleurs pourquoi il a cru devoir répondre à cette réclamation, dans ce même numéro, sans la citer et sans mettre ses lecteurs en état d'apprécier ses propres observations. Enfin, je ne comprends pas

---

(*) Mais personne ne songe à le contester ; et on va voir tout à l'heure de quel côté vient l'accusation d'emprunt.

J. D. G.

(**) Si le *Bulletin* s'était exprimé ainsi, il serait assez difficile de lui prouver qu'il a dit faux ; car probablement M. Poncelet n'a pas tenu plus que moi journal de ses pensées sur ce sujet ; mais le *Bulletin* dit simplement que j'ai *signalé* cette *dualité*, et ici les dates font foi. Je veux bien d'ailleurs que le *Bulletin* se soit trompé, pour peu que cela puisse être agréable à M. Poncelet, car l'essentiel est ici que la vérité se manifeste, et il importe peu qu'elle emploie tel ou tel autre organe.

J. D. G.

(***) M. Poncelet convenait donc, à cette époque, que je ne lui avais rien emprunté.

J. D. G.

davantage pourquoi il a totalement négligé de mentionner mes recherches dans ses deux mémoires de janvier et février 1827, sur les *lois générales qui régissent les lignes et surfaces courbes*; mémoire dont l'analyse a été donnée dans les cahiers de mars et d'avril dernier du présent *Bulletin.* J'ai d'autant plus lieu d'en être étonné que la publication de ces mémoires est postérieure à l'envoi de ma réclamation, et qu'ils sont entièrement basés sur la partie de la théorie des polaires réciproques, que j'ai le plus d'intérêt à revendiquer pour mon compte, puisqu'elle concerne la *réciprocité* ou, si l'on veut, la *dualité* des propriétés des lignes et des surfaces courbes, réciprocité que j'ai étudiée d'une manière toute spéciale, soit dans mon mémoire d'avril 1824, soit dans le *Traité des propriétés projectives*, et dont j'avais même déjà exposé les principes fondamentaux et signalé l'importance, dès janvier 1818, dans un article inséré au tom. VIII des *Annales des mathématiques* (*).

(*) Voilà qui est fort clair. J'ai, méchamment et à dessein, supprimé la date du mémoire présenté par M. Poncelet à l'Académie des sciences, dans le but de laisser croire qu'il était postérieur à celui de janvier 1826, dont alors on l'aurait supposé le simple développement. La lecture de l'analyse qui m'en a été adressée par M. Poncelet ayant produit chez moi une *illumination soudaine*, je me suis mis en toute hâte à brocher sur ce sujet un long mémoire, occupant deux livraisons, dans lequel je me suis bien gardé de citer M. Poncelet, du mémoire duquel j'ai publié postérieurement l'analyse, en supprimant soigneusement sa réclamation qui aurait mis mon larcin à découvert. Voilà sans doute une accusation fort grave. Voyons pourtant si ce ne serait pas un pur fantôme, que le souffle le plus léger pourrait faire aisément évanouir.

La lettre d'envoi de l'analyse du mémoire de M. Poncelet porte la date du 19 décembre 1826, et m'est parvenue le 26 du même mois. A cette époque, ainsi qu'il arrive communément, l'imprimeur m'avait déjà remis la livraison imprimée de janvier 1827, contenant la première partie de mon mémoire sur les lignes et surfaces courbes, et je lui avais déjà transmis à Nismes, pour être imprimé en janvier, le manuscrit de la livraison de fé-

» Quoique les deux mémoires de M. Gergonne, que nous venons de citer en dernier lieu, renferment, quant à l'objet en discussion, beaucoup de conséquences qui, suivant nous, sont plus que sujettes à controverse, et dont la publication peut faire tort aux

---

vrier, qui contenait le reste du mémoire. J'ai fait paraître l'analyse du mémoire de M. Poncelet dans celle de mars, et M. Poncelet lui-même sera forcé de convenir, malgré sa préoccupation et ses préventions, qu'il m'eût été difficile de faire plus de diligence. Certes, les géomètres qui me font l'honneur de correspondre avec moi ne sont pas tous toujours traités avec autant de faveur. Que doit penser, d'après cela, M. Poncelet de MM. les commissaires de l'Académie qui, depuis trois ans, paraissent ne point avoir présenté encore leur rapport sur son mémoire?

Il m'était donc impossible de citer les nouvelles recherches de M. Poncelet, dans un mémoire que j'écrivais sans en avoir connaissance. Je l'ai pourtant cité une fois, et j'aurais désiré pouvoir le faire plus souvent; mais, si l'on veut bien comparer mon mémoire avec l'analyse du sien, on reconnaîtra aisément que les idées qui ont présidé à la rédaction de ces deux écrits n'ont presque aucune analogie entre elles. Je n'ai emprunté à M. Poncelet que l'art de doubler les théorèmes, à l'aide de la théorie des polaires réciproques; et, si j'ai négligé de répéter en cet endroit qu'il est l'auteur de cette théorie, c'est que je l'ai dit tant d'autres fois, c'est que son nom me paraît tellement identifié avec elle, que j'ai regardé la chose comme superflue. C'est ainsi qu'aujourd'hui, par exemple, on invoque sans cesse la théorie des pôles, sans rappeler à qui elle est due, et les propriétés du triangle rectangle, sans nommer Pythagore.

Je donnerai, à la suite de cet extrait, puisque M. Poncelet y attache tant d'importance, le préambule et le post-scriptum de son analyse, et le lecteur pourra voir alors si ce n'était pas bien plutôt dans l'intérêt de M. Poncelet que dans le mien que j'avais cru ne devoir pas les publier. J'ai d'autant plus lieu présentement de regretter cette suppression qu'elle a entraîné celle de la date de la présentation du mémoire à l'Académie, laquelle, se trouvant indiquée dans le préambule, a été dès lors écartée de mes yeux. Au surplus tout ce *quiproquo* aurait été évité si, dès 1824, M. Poncelet m'avait fait l'honneur de m'adresser son analyse; les *Annales* y auraient gagné un article fort piquant, et tous les miens n'eussent ainsi paru qu'après celui-là.

J. D. G.

vues philosophiques de l'auteur sur le principe de la dualité (*), on avouera que, d'après l'importance même qu'il leur accorde, nous avions quelque droit d'espérer qu'il ne tairait pas ce que nous avons fait dans ce genre de recherches. Nous professons au surplus, envers sa personne et son caractère, une trop haute estime pour ne pas croire qu'il serait revenu, dans les numéros suivans des *Annales*, sur ce qui nous concerne (**), et nous eussions gardé presque indéfiniment le silence sur l'objet de la présente réclamation, si l'article inséré à la pag. 275 du *Bulletin des sciences* de 1827, n'était pas rédigé de manière à laisser croire aux géomètres qu'en effet nos recherches sont postérieures à celles de M. Gergonne. L'auteur de cet article est d'autant plus excusable d'ailleurs, que l'omission, dans les *Annales de mathématiques*, de la date de la présentation du *mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques*, la suppression d'une partie de la lettre d'envoi de l'analyse de ce mémoire, enfin les réflexions même dont M. Gergonne a jugé

(*) M. Poncelet qui a *étudié d'une manière toute spéciale la réciprocité* des propriétés des lignes et surfaces courbes aurait dû, ce me semble, s'exprimer ici d'une manière plus décisive. S'il n'est pas sûr de son fait, pourquoi accuse-t-il? S'il l'est, au contraire, pourquoi ne montre-t-il pas où est la faute? Cela serait beaucoup moins désobligeant que des insinuations obliques. Je reviendrai plus loin sur ce sujet.

J. D. G.

(**) Il se peut que, parmi les nombreux théorèmes que j'ai démontrés, quelques-uns se trouvent dans le *Traité des propriétés projectives*, où les recherches sont assez difficiles à faire, à raison du grand nombre des résultats de détail qu'il embrasse; mais je m'étais mis, ce me semble, à l'abri de tout reproche sur ce point, en déclarant formellement, dès le début, que j'avais beaucoup moins en vue de découvrir des théorèmes nouveaux que d'indiquer une méthode nouvelle et facile, propre à démontrer un grand nombre de théorèmes connus.

J. D. G.

à propos d'accompagner cette analyse, ne sont pas très-propres à éclairer la conscience des lecteurs sur l'objet en discussion (*).

» Par exemple, tout en avouant (tom. XVII, pag. 274 et 275) que les points principaux de la nouvelle doctrine se trouvent indiqués dans le *Traité des propriétés projectives*, il avance « que » c'est d'une manière si fugitive, qu'il n'en est fait aucune mention, ni dans le rapport des commissaires de l'Académie, ni dans » la préface de l'auteur, ni même dans son introduction de trente » pages » ; puis il ajoute : « N'est-on pas fondé, d'après cela, à penser que M. Poncelet avait d'abord regardé cette partie de son ouvrage comme très-accessoire, surtout lorsqu'on lui voit recommander les élémens d'Euclide, et qu'on le voit débuter par des proportions et des calculs ». Un peu plus loin il nous accuse d'avoir laissé glisser, parmi les doctrines qui font l'objet du *Traité des propriétés projectives*, des doctrines qui sont tout au moins sujettes à controverse (**). Or, rien n'est plus facile que de réfuter ces assertions; et, sans parler de l'omission qui a pu être faite dans l'avertissement de deux pages du traité dont il s'agit, ne paraît-il pas évident que les commissaires de l'Académie ont dû se borner, dans leur rapport, à parler de ce qui était contenu dans la première section de l'ouvrage, la seule qui ait été soumise à leur jugement,

---

(*) Il est manifeste, en effet, que c'est mon étourderie qui a induit en erreur MM. les rédacteurs du *Bulletin universel*. Mais, Dieu merci, tout va être amplement et solennellement réparé.

J. D. G.

(**) Je persiste à penser, comme je l'écrivais alors, que M. Poncelet a gravement compromis ses doctrines, en mêlant au *classique*, que tout le monde admet, le *romantique* que, pour ma part, je suis fort loin de repousser, mais sur lequel enfin on dispute encore, et que MM. les commissaires de l'Académie eux-mêmes, au jugement de qui M. Poncelet déclare attacher beaucoup de prix, ont traité assez sévèrement.

J. D. G.

à quelques propositions près, relatives au contact et à l'intersection des cercles ? Quant à l'introduction de trente pages, nous ferons observer que, indépendamment de ce qu'elle a été rédigée fort à la hâte, à l'instant même où l'on terminait l'impression du texte, cette introduction n'est point une analyse et n'a pour objet que de signaler le but et l'esprit général de l'ouvrage, mais non pas son contenu (*). Tout ce qu'avance à ce sujet M. Gergonne ne saurait donc prouver que nous n'avons pas donné une attention très-sérieuse à la *théorie des polaires réciproques* et à la *dualité* qui en dérive, dès la publication du *Traité des propriétés projectives*, en 1822, et même avant cette publication. Il est vrai qu'à l'époque dont il s'agit, nous n'avions point fait, de cette théorie, l'objet d'un mémoire ou d'un chapitre spécial, et que nous nous réservions d'y revenir avec plus de détail dans la partie de nos recherches relatives aux propriétés générales des lignes et des surfaces courbes : toujours est-il vrai que nous en avons traité à toute occasion et avec assez de développement pour être à l'abri des reproches que nous adresse M. le rédacteur des *Annales de mathématiques* (**).

» Au surplus, cette discussion doit paraître bien superflue, et

(*) Le lecteur en pensera tout ce qu'il lui plaira ; mais je persiste à regarder comme fort étrange que, l'esprit fortement préoccupé d'une idée majeure, on écrive trente pages in-4.° , dans lesquelles cette idée peut et doit même peut-être tout naturellement trouver place, sans lui consacrer une seule ligne. D'ailleurs le principe de dualité n'est guère plus apparent dans l'ouvrage que dans l'introduction. Je suis loin d'en faire un reproche à l'auteur qui était certes bien le maître de n'en faire même aucune mention ; mais toujours sera-t-il vrai de dire qu'il ne s'y présentait que d'une manière assez fugitive pour excuser un peu les lecteurs qui n'avaient pas su l'y apercevoir.

J. D. G.

(**) C'est là précisément ce que je nie. Le lecteur jugera. Je ne fais d'ailleurs aucun reproche, j'énonce simplement une opinion.

J. D. G.

l'importance que nous attachions à la chose bien démontrée, d'après l'empressement que nous avons mis à faire suivre, presque immédiatement, le *Traité des propriétés projectives*, du *mémoire sur la théorie des polaires réciproques* (1); il est seulement surprenant que l'apparition de ce *Traité* n'ait pas stimulé davantage l'esprit d'investigation des géomètres (*), et que l'année 1823 toute entière se soit écoulée sans qu'on ait songé à rien publier qui ait trait à cette théorie (**). Cela nous prouve que les idées répandues dans notre ouvrage auront quelque peine à s'établir (***), et qu'il se passera encore des années avant qu'on en ait saisi le véritable esprit et qu'on lui rende le degré de justice qui peut lui être dû (****);

---

(1) *Nous avions déjà annoncé les conséquences étendues de ce mémoire, pour la démonstration des théorèmes de géométrie, dans l'introduction qui accompagne le* mémoire sur la théorie des centres de moyennes harmoniques, *c'est-à-dire, avant la fin de l'année* 1823, *époque à laquelle nous remîmes à M. Arago la copie de ce dernier mémoire, pour en faire hommage à l'Académie royale des sciences.*

(*Note de M.* PONCELET).

(*) Je crois en avoir expliqué l'une des principales causes. C'est au surplus une chose fort heureuse, d'abord pour M. Poncelet qui paraît tenir beaucoup à la priorité de sa découverte, et qui aurait pu ainsi être débordé, et ensuite pour ceux qui auraient traité ces matières, que M. Poncelet aurait peut-être accusé d'envahissement sur ses domaines.

J. D. G.

(**) J'ai déjà prouvé que, dès 1819, la dualité des théorèmes de situation n'était plus pour moi une chose douteuse.

J. D. G.

(***) Voilà précisément ce que j'avais prévu (tom. XVII, pag. 274 et 275).

J. D. G.

(****) S'il en arrive ainsi, ce ne sera pas du moins à moi que M. Poncelet devra en imputer la faute; toutes les fois que l'occasion s'en est directement ou indirectement présentée, j'ai reproduit les idées qu'il cherche à populariser, au risque de m'exposer à en devenir ennuyeux.

J. D. G.

les rapports qui en ont été faits à l'Académie royale des sciences n'ont malheureusement que trop servi à reculer cette époque, en jetant une sorte de défaveur sur les principes d'où nous sommes partis, et en donnant à penser qu'il s'agit d'une espèce de géométrie où l'on remplace la rigueur du raisonnement par des inductions hasardées, des aperçus de pur sentiment. Le fait est que ce reproche a été reproduit vaguement par divers géomètres et par M. Gergonne lui-même, sans motifs plausibles, disons plus, sans avoir suffisamment approfondi le sujet (*). Nous aurions bien mal employé notre temps et nos peines, si nous n'avions pas réussi, aux yeux des personnes non prévenues, à mettre le résultat de nos démonstrations à l'abri de toute attaque; peut-être même n'en saurait-on dire autant de beaucoup d'écrits géométriques de notre époque, où la logique sévère des anciens est quelquefois négligée par suite de l'habitude acquise assez généralement, d'accorder aux symboles et aux opérations de l'algèbre une rigueur mathématique presque indéfinie (**).

» Nous n'en dirons pas davantage, pour le moment, sur ce qui

(*) J'ai dit simplement ce que je croyais qu'on penserait des principes de M. Poncelet, et non ce que j'en pensais moi-même; et, de son aveu, j'ai deviné assez juste. En jetant mes regards en arrière; en voyant que les progrès notables des sciences avaient presque toujours eu leurs sources premières dans quelque heureuse témérité, je me suis dès long-temps accoutumé à beaucoup de bienveillance pour tout ce qui s'écarte des routes battues; et voilà comment, en particulier, il m'est arrivé de lutter une fois avec quelque chaleur (tom. IV, pag. 222) contre le meilleur de mes amis, en faveur d'une théorie nouvelle, sujette aussi à controverse, et qui n'est pas tout-à-fait étrangère à celles que M. Poncelet cherche à faire admettre.

J. D. G.

(**) Ceci, je crois, n'est point pour moi: mais c'est un nouvel exemple de ces insinuations obliques, d'autant plus désobligeantes qu'elles donnent souvent à penser au lecteur beaucoup plus qu'elles ne signifient en réalité.

J. D. G.

concerne le manque de rigueur dont M. Gergonne accuse quelques-unes des doctrines qui entrent dans le *Traité des propriétés projectives*. Quant au reproche qu'il nous adresse d'avoir recommandé, dans l'introduction de ce *Traité*, les élémens d'Euclide, en lisant la pag. 26 de cette introduction, on comprendra, de reste, que nous avons entendu parler, en général, de tous les traités élémentaires où l'on emploie la *synthèse* pour établir l'enchaînement des propositions, et dans lesquels on prétend se borner aux considérations les plus simples sur chaque objet. Cette recommandation de la géométrie synthétique sera, si l'on veut, une concession faite aux idées du siècle, un moyen détourné de faire goûter les nouvelles doctrines (*) et de ne point effrayer les géomètres qui tiennent à l'ancienne forme des élémens; mais, à coup sûr, on n'en conclura point, avec M. Gergonne, que nous n'ayons point senti l'importance de ces mêmes doctrines, au développement desquelles nous avons consacré presque entièrement un volume de 400 pages (**). Pareillement on comprendra, sans difficulté, qu'en débutant par des proportions et des calculs, nous avons cherché à éviter le reproche que nous adresse ce géomètre dans ses *réflexions* du numéro de mars 1827, de son Recueil, d'avoir voulu *brusquer une révolution* (***); on reconnaîtra que, toute nécessaire que cette

---

(*) Ne serait-il pas plus exact de dire : *Un moyen de faire tout-à-fait prendre le change au lecteur sur le but réel de l'ouvrage ?*

J. D. G.

(**) J'ai dit que les théorèmes de situation présentaient ces deux caractères, 1.° d'être doubles ; 2.° de pouvoir être établis sans aucune sorte de calcul; est-ce à prouver ces deux assertions et à les mettre dans tout leur jour que sont *presque entièrement consacrées* les 400 pages de M. Poncelet ? J'en appelle, sur ce point, à M. Poncelet lui-même.

J. D. G.

(***) Il n'était pas nécessaire, ce me semble, pour ne point brusquer une révolution, de débuter par des proportions et des calculs. M. Poncelet au-révolution ait pu paraître à nos propres yeux, comme à ceux de M. Gergonne, nous avons agi prudemment en prenant d'abord un vol moins élevé (*), et en procédant d'après la manière ordinaire d'envisager la science de l'étendue, dans un ouvrage dont les derniers chapitres devaient s'en éloigner considérablement, et qui devait contenir une multitude de relations *métriques* ou de longueur, qui rentreront nécessairement, et quoiqu'on fasse, dans le domaine de la science du calcul (**).

» Le savant rédacteur des *Annales de mathématiques*, qui ne paraît pas avoir été frappé, comme nous, de l'existence de la dualité de ces dernières relations, et qui n'a eu jusqu'à présent en vue que les propriétés de situation les plus simples, a donc tout-à-fait méconnu le but véritable de nos recherches (***) ; peut-être même

---

rait pu débuter par une géométrie dans le genre de celle dont j'ai ébauché les premières pages (tom. XVI, pag. 209) et contre laquelle aucune objection ne se serait élevée. Il aurait pu traiter ensuite de la théorie des transversales et des projections, dont les principes sont également admis par tout le monde, et réserver, pour la fin de son livre, tout ce qui pouvait être controversé.

J. D. G.

(*) C'est précisément là ce que nous avons essayé de faire (tom. XVI, pag. 209), et justement M. Poncelet a trouvé que cela était trop terre à terre.

J. D. G.

(**) Il est clair, en effet, que les relations *métriques* sont du domaine du *calcul* ; mais il n'était nullement question de ces relations dans mes réflexions sur l'analyse du mémoire de M. Poncelet.

J. D. G.

(***) Je pourrais dire, à mon tour, que M. Poncelet a tout-à-fait pris le change et sur le sujet de mes recherches, et sur ce que j'ai dit des siennes. Je n'ai jamais prétendu nier que son ouvrage ne renfermât un grand nombre de faits en faveur de la dualité des relations métriques. J'ai dit seulement que la dualitié des relations de situation, la seule dont je me sois s'en est-il exagéré, à ses propres yeux, l'importance, quand il a prétendu (numéros de janvier et de février 1827 des *Annales*, pag. 214 et 229) soumettre indistinctement au principe de dualité toutes les propriétés descriptives des figures (*) ; car nos propres méditations nous prouvent que, si cette dualité est exactement applicable aux lignes et aux surfaces des deux premiers degrés, il s'en faut qu'elle le soit aux lignes et aux surfaces des degrés supérieurs, du moins de la manière dont il l'a entendu dans ses deux derniers mémoires : nous n'oserions, par exemple, affirmer avec lui que, de ce que deux lignes de degrés m et n s'entrecoupent en général sur un plan, en mn points au plus, de pareilles lignes n'ont aussi, en général, que mn tangentes communes, ni que la réciproque polaire d'une ligne d'un certain ordre soit elle-même de cet ordre, etc. (**). En nous occupant des mêmes questions, dans un article cité plus

---

occupé, et à laquelle M. Poncelet ne paraît pas attacher toute l'importance qu'elle me semble mériter, n'y était que très-faiblement indiquée.

J. D. G.

(*) Voici qui semblerait prouver que la foi à la *dualite* des propriétés *de situation* n'est pas encore très-vive chez M. Poncelet. On peut, sans doute, se méprendre quelquefois dans les applications, d'autant que la découverte de cette dualité ne date, pour ainsi dire, que d'hier, et qu'on est contraint, dans les recherches qui lui sont relatives, de parler encore une langue qui n'a point été construite pour les idées qu'elle fait naître ; et c'est parce que je suis bien convaincu de tout cela que j'ai pris un langage si timide dans les conclusions de mon mémoire (tom. XVII, pag. 251) : mais, quant au principe en lui-même, c'est tout autre chose ; et il ne saurait souffrir ni exceptions ni modifications aucunes ; il s'étend aux lignes et surfaces transcendantes, comme aux lignes et surfaces algébriques, aux lignes et surfaces discontinues, comme aux lignes et surfaces continues ; il est, en un mot, pour me servir de l'expression favorite de M. Wronski, d'une *généralité absolue*

J. D. G.

(**) Si M. Poncelet n'avait pas autant dédaigné l'étude de la dualité de situation, il pourrait prendre ici un ton plus décisif.

J. D. G.

haut (*Annales de mathématiques*, tom. VIII, pag. 211), nous sommes arrivés à des résultats très-différens (*) et que nous avons reproduits, avec l'extention convenable, dans notre dernier *mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques*; or, nous ne pensons pas qu'on puisse attaquer l'exactitude de ces résultats, bien qu'ils conduisent à des conséquences qui ne sont pas entièrement d'accord avec celles que M. Gergonne a déduites des siennes propres dans ses *recherches sur les lois qui régissent les lignes et surfaces algébriques* ».

Préambule omis dans l'impression de l'analyse du mémoire de M. Poncelet.

« Le mémoire dont M. Arago a bien voulu, Monsieur, vous entretenir, lors de son passage à Montpellier, a pour objet la *théorie générale des polaires réciproques*, et fait suite à la *théorie des centres de moyennes harmoniques*, dont vous avez inséré le rapport fait à l'Institut par M. Cauchy, dans votre cahier du mois de mai dernier. C'est précisément le mémoire dont j'ai eu l'honneur de vous entretenir dans ma dernière lettre, à l'occasion du *principe de dualité* que vous avez mis en avant et développé d'une manière très-philosophique à la pag. 209 du XVI.e volume des *Annales de mathématiques*. Il se trouve, en effet, que le mémoire sur la théorie des polaires réciproques que j'ai présenté à l'Académie royale des sciences, le 12 avril 1824, et sur lequel j'ai lu une notice fort étendue en présence des membres de cette société célè-

(*) M. Poncelet, dans l'endroit cité, a prouvé que, m étant le degré de l'équation d'une courbe, sa polaire réciproque ne pouvait être d'un degré supérieur à $m(m-1)$; or, je n'ai rien dit qui démentît cette assertion.

J. D. G.

bre, n'a d'autre objet que de démontrer, dans toute sa généralité, cette double existence, si je puis m'exprimer ainsi, des relations soit métriques soit descriptives qui appartiennent aux *figures projectives* du plan ou de l'espace, et que j'avais déjà fortement recommandée, pour ce qui concerne les relations descriptives, à l'attention des géomètres, soit dans votre Recueil (tom. VIII, pag. 201 et suiv.) soit dans le *Traité des propriétés projectives* (n.os 235, 400, 406, 407, etc., et supplément n.os 592, etc.).

Dans un article du *Bulletin des sciences mathématiques* de M. le baron de Férussac (février 1826, pag. 112) où l'on rend compte, Monsieur, de vos vues sur ce sujet, sans mentionner mes propres recherches (*) antérieures de quelques années, et d'ailleurs plus étendues, puisqu'elles embrassent les lignes et surfaces ainsi que les relations métriques; dans cet article, dis-je, on a avancé que, *si la théorie des pôles et polaires* a mis en évidence la dualité d'une partie notable de la géométrie, ce n'est certainement pas en vertu des propriétés de cette théorie, mais bien en vertu de la nature même de l'étendue, qu'elle a lieu; ce qui signifie simplement, ce me semble, qu'un théorème quelconque préexiste à sa démonstration ou plutôt existe indépendamment du principe qui y a conduit; or cela ne prouve nullement que l'on y fût arrivé sans ce principe, ni surtout qu'il n'y eût aucune difficulté à l'établir et à le signaler. Il est même très-peu philosophique d'avancer que certaines analogies de propriétés de l'étendue soient étrangères aux théories qui y ont conduit, car les mots *analogie*, *corrélation*, *dualité* sont en eux-mêmes vides de sens, si l'on ne spécifie les caractères par lesquels on les définit rigoureusement (**). Par exemple, c'est ce que

(*) Tout comme, en rendant compte des recherces de M. Poncelet, le *Bulletin* ne serait pas tenu de mentionner les miennes.

J. D. G.

(**) Ils ont cela de commun avec tous les autres mots de toutes les langues faites et à faire.

J. D. G.

fait la théorie des projections ordinaires et centrales, le principe de continuité, enfin la théorie des polaires réciproques qui, par là même, sont seules aptes à justifier et à faire découvrir les propriétés, les relations qui, selon la définition admise, répondent à des relations, à des propriétés déjà connues. Voilà pourquoi aussi l'on ne saurait dire qu'il n'y a simplement que dualité de certaines propriétés des figures; et il serait facile, au contraire, de prouver qu'il y a souvent *trialité*, etc. (*).

» Quant à ce que l'on a dit, à l'endroit déjà cité, de l'indépendance où sont ces propriétés qui vont par couple, de toute espèce de calcul, il me semble que j'ai fait, dans mon *Traité des propriétés projectives*, assez d'efforts pour la mettre hors de doute, et que je n'ai point été sans obtenir quelque succès (n.os 247, 248, 281, 282, ... 293, 294, 295, 300, 301, 302, ... 577, 578, 583, 587, 589, ...). Je ne puis pas même admettre, avec M. Sarrus (tom. XVI, pag. 378) (**), que les géomètres de l'école de Monge ne soient pas encore parvenus à démontrer, sans calcul, les propriétés des *axes*, des *plans* et des *centres radicaux* des cercles et des sphères, supposé toutefois que l'on ne tienne pas à la définition primitive de ces mots (***); et pour le convaincre qu'il s'est *totalement trompé* à cet égard (****), il me suffira de le ren-

---

(*) Si le lecteur ne trouve pas tout ceci extrêmement intelligible, il voudra bien se rappeler que c'est M. Poncelet qui a désiré de le voir mettre au jour.

J. D. G.

(**). On ne s'attendait guère
A voir *Sarrus* en cette affaire.

J. D. G.

(***) Mais M. Sarrus y tient, et c'est dans ce sens qu'il s'est exprimé, comme le prouve sa démonstration.

J. D. G.

(****) Je n'aurai jamais pensé que l'on pût employer une expression aussi voyer à l'ouvrage déjà souvent cité, ainsi qu'à ceux de Monge, de Dupin, etc. Enfin j'ai peine à comprendre pourquoi quelques géomètres, tout en rendant justice à ce qu'ils appellent l'*Ecole de Monge*, montrent une telle répugnance à en adopter les méthodes, qu'ils se croient obligés de refaire la démonstration de théorèmes qu'elles ont servi à découvrir et à établir (*). Sans contester d'ailleurs le mérite réel de ces nouvelles démonstrations, je me permettrai cependant d'observer qu'elles conduisent rarement à quelque chose de neuf, et sont circonscrites dans des limites fort étroites, tandis que les méthodes en question, qui ne sont actuellement un mystère pour personnne, offrent, comme vous l'avez vous-même observé, Monsieur, des moyens larges et puissans de démontrer et de découvrir en géométrie. Au surplus, ces reproches ne s'adressent qu'à un petit nombre d'écrits géométriques de notre époque ; ils ne sauraient concerner ceux du savant rédacteur des *Annales de mathématiques* qui a suffisamment prouvé, dans divers endroits de ce Recueil, que, non seulement il avait goûté ces méthodes, mais qu'encore il savait les appliquer heureusement à la recherche de vérités nouvelles et utiles ».

POST-SCRIPTUM SUPPRIMÉ

Dans l'impression de l'Analyse du mémoire de M. Poncelet.

« Permettez-moi, Monsieur, de profiter de l'occasion de cette notice pour vous adresser quelques réclamations relatives à des

peu courtoise, dans un écrit pour lequel on sollicitait les honneurs de l'impression. Le reproche tombe en outre tout-à-fait à faux, comme je viens de le faire observer.

J. D. G.

(*) Seigneur, *Durrande* est mort, laissons en paix sa cendre.

articles insérés récemment dans les *Annales de mathématiques*.

» M le docteur Plucker (*) a donné (tom. XVII, pag. 37 et 69) divers problèmes et théorèmes sur les contacts des sections coniques, fort intéressans en eux-mêmes, mais dont, ce me semble, il aurait dû citer plus scrupuleusement les auteurs. Par exemple, le théorème énoncé au bas de la pag. 71, et la construction qui en dérive pour le cercle osculateur des sections coniques, sont, si je ne me trompe, bien les mêmes que le théorème du n.° 336 du *Traité des propriétés projectives*, et que la solution donnée au n.° 405 de cet ouvrage (**); le théorème du n.° 404, dont elle a été déduite, est même plus général que celui de M. Plucker, quoiqu'il soit encore un cas particulier de l'énoncé du n.° 403 qui, en observant que le système de deux droites peut être considéré comme une section conique, comprend aussi les lemmes et théorèmes fondamentaux du mémoire à deux colonnes, inséré à la pag. 37 du tome cité des *Annales*. Que l'on compare également les autres théorèmes de ce mémoire et les solutions de problèmes qu'il renferme sur les contacts des sections coniques, avec ce qui a été dit n.° 297 ou 326 du *Traité des propriétés projectives* (***), et spécialement

(*) En voici présentement pour M. Plucker qui, je ne sais trop pourquoi, avait déjà excité l'animadversion de M. Sturm, lequel, à son tour, n'aura peut-être pas été à l'abri de celle de M. Poncelet. M. Plucker se vengera, sans doute, en continuant de composer pour les *Annales* des articles que les lecteurs, excepté M. Poncelet, et peut-être M. Sturm, aiment beaucoup à y rencontrer.

J. D. G.

(**) Eh bon Dieu ! M. Plucker a dit formellement, à la fin de son article (pag. 72) que la construction qu'il venait d'indiquer rentrait dans une autre qui était déjà connue. D'ailleurs il s'agit là principalement d'investigation et non de construction.

J. D. G.

(***) Je ne vois plus désormais d'autre salut pour les géomètres, que d'apprendre ce traité par cœur, sans en omettre un seul numéro.

J. D. G.

du n.° 318 au n.° 326; que l'on compare enfin les figures 41, 42 et 43 de cet ouvrage, qui sont relatives à des exemples particuliers, avec celles qui résultent de plusieurs des énoncés de M. Plucker, et l'on trouvera que ce géomètre n'a pas eu beaucoup de difficulté à *refaire*, en partant des belles propriétés de Pascal et de Brianchon, sur les hexagones inscrits et circonscrits aux coniques, les démonstrations des théorèmes et des problèmes contenus dans son mémoire sur les contacts de ces courbes (*). Je dirai même plus, c'est que les endroits cités du *Traité des propriétés projectives*, malgré leur laconisme, indiquent des solutions plus générales, plus directes et plus complètes des problèmes en question (**), puisqu'elles permettent de trouver, au moyen de la section conique donnée, tout ce qui appartient à celle qu'on cherche; par exemple, son centre, ses axes et diamètres, ses intersections avec une droite donnée, ses tangentes partant d'un point également donné, etc. (Voy. les n.os 302 et suiv., 328 et suiv. de l'ouvrage cité).

» M. le docteur Plucker a bien voulu rappeler, dans une note de la pag. 52 de son mémoire, que j'avais énoncé (*Annales*, tom. VIII) la construction de la section conique osculatrice du second ordre, en un point donné d'une autre section conique, mais sans en donner la démonstration. Je crois à propos de remarquer que la construction dont il s'agit est uniquement relative au contact du troisième ordre, et qu'elle a été justifiée complètement, ainsi que

---

(*) Mais conçoit-on qu'on puisse ainsi accuser grossièrement et contre toute vraissemblance, du plus insigne et du plus honteux plagiat, un homme qui nous est tout-à-fait inconnu? Qu'on juge à présent dans quels intérêts j'avais fait main-basse sur le *préambule* et le *post-scriptum*.

J. D. G.

(**) Mais qui donc songe à le nier ? Cela prouve tout au moins que ce n'est point là que M. Plucker a puisé; supposé toutefois qu'il ait puisé quelque part, ce dont je doute fort.

J. D. G.

beaucoup d'autres, dans les endroits cités du *Traité des propriétés projectives* que M. Plucker connaît sans doute (*), et qu'il aurait pu citer, comme il l'a fait à l'occasion de la construction particulière dont il s'agit (**). Il me semble d'ailleurs que, s'il est louable de développer, dans des articles spéciaux, les théories qui n'ont pu l'être en détail dans les ouvrages qui embrassent un grand nombre de sujets divers, on n'est pas pour cela dispensé, en aucune manière, d'indiquer les sources où on a puisé ses principes et ses moyens de solution (***).

» Quant à l'usage de mettre en deux colonnes les propositions de la géométrie de la règle (****), il me semble que c'est un double emploi très-pénible, peu motivé quant aux démonstrations (*****); et qu'il suffira toujours d'indiquer, d'après les principes de la théorie des polaires réciproques, la manière de conclure les unes de ces propositions des autres déjà démontrées. Du moins ne saurait-on arguer, de ce que quelqu'un n'aurait pas employé un tel mode de rédaction, qu'il n'aurait point établi ni démontré les propositions réciproques qui dérivent aussi immédiatement des principes déjà posés.

(*) Pourquoi *sans doute*, lorsque la citation de M. Plucker prouve précisément le contraire?

J. D. G.

(**) Eh! non: il a cité les *Annales*.

J. D. G.

(***) Mais, encore un coup, qui garantit que M. Plucker ait jamais ouvert le Traité des propriétés projectives?

J. D. G.

(****) Voici de nouveau pour moi. Je persiste pourtant à croire, n'en déplaise à M. Poncelet, que mes quelques articles à deux colonnes ont plus efficacement servi la cause de la *dualité* que ne l'ont fait les 400 pages de son ouvrage.

J. D. G.

(*****) J'en ai déduit les motifs, tom. XVI, pag. 211.

J. D. G.

» J'aurais, Monsieur, plusieurs autres réclamations à vous adresser pour mon propre compte (*), mais elle trouveront naturellement leur place ailleurs, et la tâche deviendra alors pour moi moins délicate et moins pénible (**). Permettez-moi, au surplus, d'espérer que la notice qui précède et les réflexions qui l'accompagnent pourront trouver place dans votre savant recueil, et que vous ne les considérerez pas comme dénuées entièrement d'intérêts pour vos lecteurs ».

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Rectification de quelques théorèmes énoncés dans les Annales ;

Par M. Gergonne.

L'HABITUDE que l'on a contractée, depuis Descartes, de représenter les lignes et les surfaces courbes par des équations entre deux ou trois variables, a conduit tout naturellement à les classer d'après le *degré* plus ou moins élevé de ces équations que l'on a dit aussi

(*) Le lecteur pensera sans doute, avec nous, qu'il y en a bien suffisamment comme cela. Certes, il paraît que si la censure s'étendait jusqu'aux recueils scientifiques, et qu'elle fût dévolue à M. Poncelet, les ciseaux n'en demeureraient pas oisifs dans ses mains.

J. D. G.

(**) Ce qui signifie apparemment qu'ici M. Poncelet s'est singulièrement modéré.

J. D. G.

être celui de ces lignes ou de ces surfaces ; degré qui demeure invariable, à quelque système d'axes d'ailleurs qu'on les rapporte.

Mais, dans la *géométrie de situation* où il n'y a ni axes ni coordonnées ni équations, cette classification ne saurait être employée; et le mot *degré*, pris dans le sens qu'on y attache communément, y est un mot tout-à-fait vide de sens.

Toutefois, dans cette géométrie, on peut employer un mode de classification qui a un rapport très-intime avec celui-là, c'est celui qui consiste à classer les lignes et les surfaces courbes d'après le nombre plus ou moins grand des points communs qu'elles peuvent avoir avec une même droite.

Mais, dans la géométrie de situation, tout ce qui n'est pas symétrique de soi-même doit inévitablement être double ; et on ne saurait y introduire cette classification sans l'accompagner d'une autre qui en soit la correlative ; or, pour peu que l'on soit au courant de ce sujet, on apercevra aussitôt que cet autre système de classification devra consister à classer les courbes planes d'après le nombre plus ou moins grand des tangentes qu'il sera possible de leur mener de l'un quelconque des points de leur plan, et les surfaces courbes par le nombre plus ou moins grand des plans tangens qui pourront leur être conduits par une même droite. On pourra donc poser les propositions suivantes :

I. Les courbes planes peuvent être distribuées d'après le nombre plus ou moins grand des intersections qu'elles peuvent avoir avec une même droite.

II. Les surfaces courbes peuvent être distribuées d'après le nombre plus ou moins grand des points où elles peuvent être percées par une même droite.

I. Les courbes planes peuvent être distribuées d'après le nombre plus ou moins grand des tangentes qui peuvent leur être menées d'un même point de leur plan.

II Les surfaces courbes peuvent être distribuées d'après le nombre plus ou moins grand des plans tangens qui peuvent leur être menés par une même droite.

Il est manifeste, en outre, que ces deux modes de distribution sont tels que toujours deux courbes ou surfaces polaires réciproques l'une de l'autre seront des courbes ou surfaces de même rang dans les deux séries.

Nous aurions présentement besoin de deux mots, l'un pour exprimer qu'une courbe est telle qu'une droite la coupe en m points, ou qu'une surface courbe est telle qu'une droite la perce en m points, et l'autre pour exprimer qu'une courbe est telle qu'on peut lui mener m tangentes par un même point de son plan, ou qu'une surface courbe est telle que, par une même droite, on peut lui mener m plans tangens; mais, pour ne point introduire ici des mots nouveaux pour lesquels la répugnance du public, bien qu'assez peu fondée peut-être, est néanmoins presque invincible, nous adopterons le mot *degré* pour le premier cas, et le mot *classe* pour le second; c'est-à-dire, que nous introduirons les définitions suivantes:

Définition I. Une courbe plane est dite du $m.^{ieme}$ degré, lorsqu'elle a avec une même droite m intersections réelles ou idéales.

Définition I. Une courbe plane est dite de $m.^{ieme}$ classe, lorsqu'on peut lui mener d'un même point de son plan m tangentes réelles ou idéales.

Définition II. Une surface courbe est dite du $m.^{ieme}$ degré, lorsqu'elle a avec une même droite m intersections réelles ou idéales.

Définition II. Une surface courbe est dite de $m.^{ieme}$ classe, lorsque par une même droite on peut lui mener m plans tangens réels ou idéaux (*).

Et de là résulteront immédiatement ces théorèmes :

I. Deux lignes des $m.^{ieme}$ et $n.^{ieme}$ degrés, tracées sur un même plan,

I. Deux lignes des $m.^{ieme}$ et $n.^{ieme}$ classes, tracées sur un même plan,

(*) J'écris *idéaux*, comme Berruyer a écrit *littéraux*, et Desfontaines *triviaux*. Je me range toujours du côté de l'uniformité, pour peu qu'elle ait des exemples en sa faveur.

ont, en général, mn points communs, réels ou idéaux.

II. Trois surfaces des $p.^{ieme}$, $q.^{ieme}$, $r.^{ieme}$ degrés ont, en général, pqr points d'intersection, réels ou idéaux.

ont, en général, mn tangentes communes, réelles ou idéales.

II. Trois surfaces des $p.^{ieme}$, $q.^{ieme}$, $r.^{ieme}$ classes ont, en général, pqr plans tangens communs, réels ou idéaux.

Voilà ce que nous aurions dû dire aux pag. 216 et 229 de notre XVII.e volume ; mais l'emploi du mot *ordre*, qui était tout-à-fait déplacé en cette rencontre, nous a induit en erreur, comme nous en avions déjà manifesté le pressentiment au haut de la pag. 252, et nous avons une sincère obligation à M. Poncelet dont les doutes, bien qu'assez vaguement exprimés, nous ont conduit à examiner de nouveau notre travail et à nous faire sentir la nécessité de le rectifier.

Toutefois, les rectifications à y introduire ne sont ni très-nombreuses ni très-difficiles. On conçoit d'abord que, dans toute l'étendue du mémoire, tout ce que renferment les colonnes de gauche est exact, puisque tout cela est déduit, indépendamment du principe de *dualité*, d'une analyse très-simple et très-rigoureuse. Il en sera de même aussi des propositions des colonnes de droite (et c'est le plus grand nombre) qui ne sont relatives qu'aux lignes et surfaces du second ordre seulement, puisque ces lignes et surfaces sont à la fois du *second degré* et de la *seconde classe*. Mais l'entière correction du mémoire, d'après les idées que nous venons d'omettre peut être renfermée dans ce peu de mots : *Remplacer le mot* ordre *par le mot* degré *dans la colonne de gauche, et par le mot* classe, *dans la colonne de droite ; et entendre ensuite ces deux derniers mots comme il a été expliqué plus haut.*

Il faudra aussi faire subir les mêmes modifications aux théorèmes démontrés par M. Bobillier, pag. 25 et 89 du présent volume. Mais, comme les derniers ne sont point disposés en colonnes, nous allons, par forme d'exemple et pour plus grande intelligence de la chose, les reproduire ici, tels qu'ils doivent être énoncés, suivant le langage que nous venons d'admettre, en les réduisant à quatre seulement.

THÉORÈME I. Si, de tant de points qu'on voudra, d'une droite tracée arbitrairement sur le plan d'une courbe du m.$^{\text{ieme}}$ *degré, on mène à cette courbe toutes les tangentes possibles, les courbes qui contiendront les points de contact des divers faisceaux de tangentes, lesquelles ne seront que du* $(m-1)^{\text{ieme}}$ *degré seulement, se couperont toutes aux* $(m-1)^2$ *mêmes points.*

THÉORÈME I. Si, par un même point pris arbitrairement sur le plan d'une courbe de m.$^{\text{ieme}}$ *classe, on mène à cette courbe tant de sécantes qu'on voudra, puis ensuite des tangentes, par ses points d'intersection avec chacune de ces sécantes, les courbes auxquelles seront circonscrites les tangentes des divers faisceaux, lesquelles ne seront que de* $(m-1)^{\text{ieme}}$ *classe seulement, seront toutes inscrites aux* $(m-1)^2$ *mêmes droites.*

THÉORÈME II. Si tant de points qu'on voudra d'un plan, situé d'une manière quelconque dans l'espace, sont des sommets de surfaces coniques circonscrites à une même surface du m.$^{\text{ieme}}$ *degré, les surfaces courbes qui contiendront les lignes de contact de ces diverses surfaces coniques, lesquelles ne seront que du* $(m-1)^{\text{ieme}}$ *degré seulement, se couperont toutes aux* $(m-1)^3$ *mêmes points. Si, de plus, les sommets des surfaces coniques sont tous situés sur une même droite,*

THÉORÈME II. Si, par un même point quelconque de l'espace, on conduit à une même surface de m.$^{\text{ieme}}$ *classe tant de plans sécans qu'on voudra et qu'ensuite on lui circonscrive des surfaces développables, suivant ses intersections avec ces différens plans, les surfaces courbes auxquelles ces diverses surfaces pourront être circonscrites, lesquelles ne seront que de* $(m-1)^{\text{ieme}}$ *classe seulement, auront toutes les* $(m-1)^3$ *mêmes plans tangens. Si, de plus, les plans sécans se coupent tous* *ces mêmes surfaces du* $(m-1)^{\text{ieme}}$ *degré se couperont toutes, suivant une même courbe à double courbure.*

suivant une même droite, ces mêmes surfaces de $(m-1)^{\text{ieme}}$ *classe seront toutes circonscriptibles à une seule et même surface développable.*

Ces théorèmes de M. Bobillier qui comprennent, comme cas très-particuliers, la théorie des pôles, polaires, plans polaires et polaires conjuguées des lignes et surfaces du second ordre, sont, comme l'on voit, un fort beau supplément aux *lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres.*

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de géométrie.

La nature et la situation de la ligne ou de la surface du second ordre prise pour *directrice* peut-elle avoir quelque influence sur le *degré* de l'équation de la *polaire réciproque* d'une courbe ou d'une surface courbe d'un *degré* donné; et, si cette influence existe, quel est, pour une courbe ou pour une surface d'un *degré* donné, le minimum du *degré* de sa polaire réciproque?

I. Si, de divers point d'une ligne du $n.^{\text{ième}}$ degré, on mène des tangentes à une même courbe du $m.^{\text{ième}}$ degré, située dans le même plan avec elle, les points de contact des divers faisceaux de tangentes seront sur des courbes du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré. Combien ces di-

I. Si des tangentes à une courbe de $n.^{\text{ième}}$ classe sont sécantes à une même courbe de $m.^{\text{ième}}$ classe, située dans le même plan avec elle, et que, par les points d'intersection des sécantes avec cette dernière courbe, on lui mène des tangentes, les tangentes des difverses courbes auront-elles de points communs?

II. Si l'on circonscrit à une même surface du $m.^{ieme}$ degré des surfaces coniques dont les sommets soient sur une même surface du $n.^{ieme}$ degré, les lignes de contact de ces surfaces coniques appartiendront à des surfaces courbes du $(m-1)^{ieme}$ degré. Combien ces surfaces auront-elles de points communs?

férens faisceaux seront circonscrites à des courbes de $(m-1)^{ieme}$ classe. Combien ces dernières auront-elles de tangentes communes?

II. Si l'on coupe une même surface de $m.^{ieme}$ classe par des plans tangens à une autre surface de $n.^{ieme}$ classe, et qu'ensuite on circonscrive des surfaces développables à la première de ces deux surfaces, suivant ses intersections avec les plans sécans, ces surfaces développables se trouveront circonscrites aussi à des surfaces de $(m-1)^{ieme}$ classe. Combien ces dernières auront-elles de plans tangens communs (*)?

Autres Problèmes.

I. Décrire un cercle qui intercepte, sur les trois côtés d'un triangle donné, des longueurs respectivement égales à trois longueurs données?

II. Décrire un cône de révolution, de même sommet qu'un angle trièdre donné, de telle sorte que les angles plans que ce cône

I. Décrire un cercle tel que les angles circonscrits qui auront leurs sommets aux trois sommets d'un triangle donné, soient respectivement égaux à trois angles donnés?

II. Décrire un cône de révolution, de même sommet qu'un angle trièdre donné, de telle sorte que les angles dièdres circonscrits

(*) Voy., pour la définition des *classes de courbes et de surfaces*, l'article précédent.

interceptera sur ses faces soient respectivement égaux à trois angles plans donnés ?

III. Décrire une sphère qui intercepte, sur les quatre faces d'un tétraèdre donné, des cercles dont les rayons soient respectivement égaux à quatre longueurs données ?

qui auront pour arêtes les trois arêtes de cet angle trièdre soient respectivement égaux à trois angles dièdres donnés ?

III. Décrire une sphère telle que les cônes circonscrits, qui auront leurs sommets aux quatre sommets d'un tétraèdre donné aient leurs angles générateurs respectivement égaux à quatre angles plans donnés ?

Théorème de géométrie.

Deux droites n'étant point comprises dans un même plan, si l'on prend sur la première deux points A, B et sur la seconde deux points C, D, de telle sorte qu'on ait $AB \times CD = Const.$, le volume du tétraèdre sera constant, quelle que soit la situation de ses quatre sommets sur ces deux droites.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Recherches sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Dans tout ce qui va suivre, j'emploîrai les mots *degré* et *classe* comme les a entendus M. Gergonne (pag. 151) ; c'est-à-dire, qu'une ligne ou une surface sera dite du m.ieme degré lorsqu'elle aura m intersections, réelles ou idéales, avec une même droite, et qu'elle sera dite de m.ieme classe lorsqu'on pourra lui mener m tangentes, réelles ou idéales, concourant en un même point, ou bien m plans tangens, réels ou idéaux, se coupant suivant une même droite.

THÉORÈME I. Soit C_m *une courbe plane du* m.ieme *degré. Soient* C_{m-1}, C_{m-2}, C_{m-3}, ... C_3, C_2, C_1, *une suite d'autres lignes des degrés respectifs* $m-1$, $m-2$, $m-3$, ... 3, 2, 1, *telles que* C_{m-1} *passe par les points de contact de* C_m *avec ses tangentes issues d'un même point fixe* P *de son plan ; et que chacune des autres soit par rapport à celle qui la précède immédiatement et pour le même point* P, *ce qu'est* C_{m-1} *par rapport à* C_m, *la dernière* C_1 *de ces lignes, se réduira à une droite.*

Si, par différens points de la droite C_1, *on mène à la courbe* C_m *toutes les tangentes possibles, les lignes du* $(m-1)$ieme *degré déterminées par les points de contact des tangentes issues des mê-*

mes points de cette droite, lesquelles, comme l'on sait (*), *auront les mêmes* $(m-1)^2$ *points communs, passeront toutes par le point P.*

Démonstration. Si l'on désigne généralement par u_n une fonction homogène du $n.^{ieme}$ degré en x et y ; l'équation de la courbe C_m, rapportée à deux axes conduits par le point P, sera de la forme

$$u_m+u_{m-1}+u_{m-2}+\ldots\ldots+u_n+\ldots\ldots+u_3+u_2+u_1+\text{Const.}=0\,, \quad (1)$$

les équations des lignes C_{m-1}, C_{m-2}, C_{m-3}, ... C_3, C_2, C_1, seront respectivement (**)

$$1u_{m-1}+2u_{m-2}+3u_{m-3}+\ldots\ldots+(m-n)u_n+\ldots\ldots+(m-2)u_2+(m-1)u_1+m\text{Const.}=0\,,$$

$$1.2u_{m-2}+2.3u_{m-3}+\ldots\ldots+(m-n-1)(m-n)u_n+\ldots\ldots+(m-2)(m-1)u_1+(m-1)m\text{Const.}=0\,,$$

$$1.2.3.u_{m-3}+2.3.4u_{m-4}+\ldots\ldots+(m-n-2)(m-n-1)(m-n)u_n+\ldots\ldots+(m-3)(m-2)(m-1)u_1+(m-2)(m+1)m\text{Const.}=0$$

. . . .

$$1.2.3\ldots\ldots(m-1)u_1+1.2.3\ldots\ldots(m-1)m\text{Const.}=0\,.$$

Cette dernière équation, qui appartient à la droite C_1, divisée par $1.2.3\ldots.(m-1)$ devient $u_1+m\text{Const.}=0$; et, si l'on appelle (x',y') un point quelconque de cette droite, on aura

$$u'_1+m\text{Const.}=0\,. \qquad (2)$$

Actuellement, pour trouver l'équation de la ligne L qui contient les points de contact des tangentes menées à la ligne C_m par le point (x',y'), il faut d'abord transporter l'origine en ce point, ce qu'on

---

(*) Voy. la pag. 153 du présent volume.

(**) Voy. la pag. 89 du présent volume.

fera en changeant, dans l'équation (1) x et y, respectivement, en $x+x'$ et $y+y'$; il faudra ensuite multiplier respectivement les termes des degrés m, $m-1$, $m-2$, ... 3, 2, 1, 0, en x et y, respectivement par 0, 1, 2, 3.... $m-2$, $m-1$, m; il faudra enfin revenir aux axes primitifs, en remplaçant x et y, respectivement $x-x'$ et $y-y'$.

Il suffit, pour la démonstration du théorème énoncé, de trouver, dans l'équation de la ligne L, le terme indépendant de x et y, que nous désignerons par T. Pour épargner les trop longs calculs, nous représenterons aussi par t_n la partie de ce terme produite par u_n; de sorte qu'on aura

$$T=t_m+t_{m-1}+t_{m-2}+\ldots\ldots+t_n+\ldots\ldots+t_2+t_1+t_0\,. \qquad (3)$$

Cela posé, la fonction u_n, quand on y change respectivement x et y en $x+x'$ et $y+y'$, devient

$$\begin{array}{l}
u'_n+\frac{du'_n}{dx'}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2u'_n}{dx'^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^3u'_n}{dx'^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{d^nu'_n}{dx'^n}\cdot\frac{x^n}{1.2\ldots n}\\
+\frac{du'_n}{dy'}\cdot\frac{y}{1}+\frac{d^2u'_n}{dx'd'y}\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1}+\frac{d^3u'_n}{dx'^2dy'}\,\frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{y}{1}+\ldots+\frac{d^nu'_n}{dx'^{n-1}dy'}\cdot\frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\cdot\frac{y}{1}\\
\qquad+\frac{d^2u'_n}{dy'^2}\cdot\frac{y^2}{1.2}+\frac{d^3u'_n}{dx'dy'^2}\,\frac{x}{1}\cdot\frac{y^2}{1.2}+\ldots+\frac{d^nu'_n}{dx'^{n-2}dy'^2}\cdot\frac{x^{n-2}}{1..(n-2)}\cdot\frac{y^2}{1.2}\\
\qquad\qquad+\frac{d^3u'_n}{dy'^3}\,\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\qquad\qquad\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{d^nu'_n}{dy'^n}\cdot\frac{y^n}{1.2\ldots n}
\end{array}$$

En multipliant les diverses colonnes respectivement par m, $m-1$,

$m-2$, ... $m-n$, puis changeant respectivement x et y en $x-x'$ et $y-y'$, il viendra

$$mu'_n+(m-1)\left\{\frac{du'_n}{dx}(x-x')+\frac{du'_n}{dy}(y-y')\right\}$$

$$+\frac{m-2}{1.2}\left\{\frac{d^2u'_n}{dx'^2}(x-x')^2+2\frac{d^2u'_n}{dx'dy'}(x-x')(y-y')+\frac{d^2u'_n}{dy'^2}(y-y')^2\right\}$$

$$+\frac{m-3}{1.2.3}\left\{\frac{d^3u'_n}{dx'^3}(x-x')^3+3\frac{d^3u'_n}{dx'^2dy'}(x-x')^2(y-y')+3\frac{d^3u'_n}{dx'dy'^2}(x-x')(y-y')^2+\frac{d^3u'_n}{dy'^3}(y-y')^3\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{m-n}{1.2\ldots n}\left\{\frac{d^nu'_n}{dx'^n}(x-x')^n+\frac{n}{1}\frac{d^nu'_n}{dx'^{n-1}dy'}(x-x')^{n-1}(y-y')+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{d^nu'_n}{dy'^n}(y-y')^n\right\}$$

Or, le terme t_n représentant la quantité indépendante de x et de y dans cette expression, il faudra, pour l'obtenir, y supposer $x=0$ et $y=0$, ce qui donnera

$$t_n=mu'_n-\frac{m-1}{1}\left(\frac{du'_n}{dx'}x'+\frac{du'_n}{dy'}y'\right)$$

$$+\frac{m-2}{1.2}\left(\frac{d^2u'_n}{dx'^2}x'^2+2\frac{d^2u'_n}{dx'dy'}x'y'+\frac{d^2u'_n}{dy'^2}y'^2\right)$$

$$-\frac{m-3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u'_n}{dx'^3}x'^3+3\frac{d^3u'_n}{dx'^2dy'}x'^2y'+3\frac{d^3u'_n}{dx'dy'^2}x'y'^2+\frac{d^3u'_n}{dy'^3}y'^3\right)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm\frac{m-n}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^nu'_n}{dx'^n}x'^n+\frac{n}{1}\frac{d^nu'_n}{dx'^{n-1}dy'}x'^{n-1}y'+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\frac{d^nu'_n}{dx'^{n-2}dy'^2}x'^{n-2}y'^2+\ldots\ldots+\frac{d^nu'_n}{dy'^n}y'^n\right).$$

Mais en vertu du *théorème des fonctions homogènes*, on a

$$\frac{du'_n}{dx'}x'+\frac{du'_n}{dy'}y'=nu'_n\,,$$

$$\frac{d^2u'_n}{dx'^2}x'^2+2\frac{d^2u'_n}{dx'dy'}x'y'+\frac{d^2u'_n}{dy'^2}y'^2=n(n-1)u'_n\,,$$

$$\frac{d^3u'_n}{dx'^3}x'^3+3\frac{d^3u'_n}{dx'^2dy'}x'^2y'+3\frac{d^3u'_n}{dx'dy'^2}x'y'^2+\frac{d^3u'_n}{dy'^3}y'^3=n(n-1)(n-2)u'_n\,,$$

. . . .

$$\frac{d^nu'_n}{dx'^n}x'^n+\frac{n}{1}\frac{d^nu'_n}{dx'^{n-1}dy'}x'^{n-1}y'+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\frac{d^nu'_n}{dx'^{n-2}dy'^2}x'^{n-2}y'^2+\ldots\ldots+\frac{d^nu'_n}{dy'^n}y'^n=1.2.3\ldots\ldots nu'_n\,;$$

En substituant donc, il viendra

$$t_n=u'_n\left\{m-(m-1)\frac{a}{1}+(m-2)\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}-(m-3)\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}+\ldots\pm(m-n)\right\};$$

c'est-à-dire,

$$t_n=mu'_n\left(1-\frac{n}{1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}-\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}+\ldots\ldots\pm1\right)$$

$$+nu'_n\left(1-\frac{n-1}{1}+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}-\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}+\ldots\ldots\mp1\right)$$

ou bien encore

$$t_n=u'_n\{m(1-1)^n+n(1-1)^{n-1}\}\,.$$

Pour toutes les valeurs de n plus grande que l'unité, cette quantité devient nulle; pour $n=1$, elle se réduit à u'_1; et, comme u'_0 est une constante, pour $n=0$, elle se réduit à mConst. On a donc

$t_m=0\,,\ t_{m-1}=0\,,\ t_{m-2}=0\,,\ \ldots\ldots\ t_n=0\,,\ \ldots\ldots\ t_2=0\,,\ t_1=u'_1\,,\ t_0=m\text{Const.}$

En substituant ces valeurs dans l'équation (3), on aura

$$T=u'_1+m\text{Const.}$$

ou simplement, en vertu de l'équation (2), $T=0$. L'équation de la ligne L est donc dépourvue du terme indépendant de x et de y ; cette ligne L passe donc par l'origine, c'est-à-dire, par le point P, comme nous l'avions annoncé.

Ce théorème offre le moyen de faire passer par deux points donnés P et P′ une transversale curviligne du $(m-1)^{ieme}$ degré, qui coupe une courbe donnée du $m.^{ieme}$ degré en des points pour lesquels les tangentes à cette dernière courbe concourent toutes en un point unique. En déterminant, en effet, les droites C_1 et C'_1 correspondant respectivement aux deux points P et P′, les tangentes menées à la courbe proposée par leur intersection auront leurs points d'intersection sur une ligne du $(m-1)^{ieme}$ degré qui, suivant le théorème, devra passer à la fois par les deux points P et P′, et sera conséquemment la transversale demandée.

Il est clair que la même construction subsisterait encore, si les droites C_1, C'_1 étaient parallèles ; mais, si elles se confondaient en une seule, le problème deviendrait indéterminé, et l'on pourrait se donner arbitrairement un troisième point P″ de la transversale curviligne demandée.

Si l'on appelle généralement *pôles* d'une droite, par rapport à une courbe du $m.^{ieme}$ degré, les $(m-1)^2$ points fixes suivant lesquels se coupent constamment les courbes du $(m-1)^{ieme}$ degré, déterminées par les points de contact des divers faisceaux de tangentes à la courbe, issues des différens points de cette droite, on voit qu'un seul de ces pôles étant connu, on en peut déduire tous les autres. On voit en même temps que la même droite C_1 peut être déduite de $(m-1)^2$ points différens.

De ce théorème, par la théorie des polaires réciproques, on pourra déduire le suivant :

THÉORÈME II. Soit C_m *une courbe plane de* m.^{ieme} *classe. Soient* C_{m-1}, C_{m-2}, C_{m-3}, ... C_3, C_2, C_1 *une suite d'autres lignes, des classes respectives* m$-$1, m$-$2, m$-$3, ... 3, 2, 1, *telles que* C_{m-1} *soit enveloppée par toutes les tangentes menées à* C_m *par ses intersections avec une droite fixe* D; *et que chacune des autres soit, par rapport à celle qui la précède immédiatement, et pour la même droite* D, *ce qu'est* C_{m-1} *par rapport à* C_m, *la dernière* C_1 *de ces courbes se réduira à un point.*

Si, aux points d'intersection de la courbe C_m *avec les diverses sécantes conduites par le point* C_1, *on lui mène des tangentes, les courbes de* (m$-$1)^{ieme} *classe, inscrites aux divers systèmes de tangentes répondant à ces différentes sécantes, lesquelles, comme l'on sait* (*), *seront toutes inscrites aux* (m$-$1)^2 *mêmes droites fixes, auront toutes la droite* D *pour tangente commune.*

On déduira de ce théorème le moyen de faire toucher à deux droites données D et D$'$ une courbe de $(m-1)^{ieme}$ classe, telle qu'en lui menant des tangentes communes avec une courbe donnée de $m.^{ieme}$ classe, tous les points de contact de ces tangentes avec cette dernière appartiennent à une droite unique. En déterminant, en effet, les points C_1 et C'_1, correspondant respectivement aux droites D et D$'$, les tangentes menées à la courbe par ses points d'intersection avec la sécante conduite par ces deux points, toucheront une même ligne de $(m-1)^{ieme}$ classe qui, suivant le théorème, devra toucher à la fois les deux droites D et D$'$, et sera conséquemment la courbe demandée.

Il se pourrait que les points C_1 et C'_1 se confondissent ; le problème serait alors indéterminé, et l'on pourrait se donner arbitrairement une troisième tangente D$''$ à la courbe demandée.

(*) Voy. la pag. 153 du présent volume.

Si l'on appelle généralement *polaires* d'un point, par rapport à une courbe de m.ième classe, les $(m-1)^2$ droites que touchent à la fois toutes les courbes de $(m-1)$ième classe, inscrites aux systèmes de tangentes à la courbe proposée, qui répondent à ses intersections avec diverses sécantes menées arbitrairement par ce point, on voit qu'une seule de ces polaires étant connue, on en peut déduire toutes les autres. On voit, en même temps, que le même point C_1 peut être déduit de $(m-1)^2$ droites différentes.

THÉORÈME III. Soit S_m *une surface du* m.ième *degré, et soient* S_{m-1}, S_{m-2}, S_{m-3}, ... S_3, S_2, S_1, *une suite d'autres surfaces des degrés respectifs* $m-1$, $m-2$, $m-3$, ... 3, 2, 1, *telles que* S_{m-1} *passe par la ligne de contact de* S_m *avec la surface conique circonscrite à cette surface qui a son sommet à un point fixe* P *de l'espace, et que chacune des autres soit, par rapport à celle qui la précède immédiatement, ce qu'est* S_{m-1} *par rapport à* S_m, *la dernière* S_1 *de ces surfaces se réduira à un plan.*

Si les différens points du plan S_1 *sont pris tour à tour pour sommets d'une suite de surfaces coniques circonscrites à la surface* S_m, *les surfaces du* (m−1)ième *degré auxquelles appartiendront leurs lignes de contact, lesquelles, comme l'on sait* (*), *auront les mêmes* $(m-1)^3$ *points communs, passeront toutes par le point* P.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est en tout semblable à celle du *Théorème I;* il suffit seulement de supposer que u_n est une fonction homogène du n.ième degré en x, y et z.

De là on déduira la solution de ce problème : Faire passer par trois points donnés P, P′, P″ une surface du $(m-1)$ième degré qui coupe une surface donnée du m.ième degré suivant une courbe telle que la surface développable, circonscrite suivant cette courbe, soit

(*) Voy. la pag. 153 du présent volume.

une surface conique ; problème qui peut quelquefois être indéterminé, ce qui permettra d'assujettir la surface cherchée à passer par un ou deux nouveaux points, pris arbitrairement dans l'espace.

Si l'on appelle généralement *pôles* d'un plan, par rapport à une surface du $m.^{ieme}$ degré, les $(m-1)^3$ points fixes suivant lesquels se coupent constamment les surfaces du $(m-1)^{ieme}$ degré déterminées par les lignes de contact de toutes les surfaces coniques circonscrites qui ont leurs sommets dans ce plan ; on voit qu'un seul de ces pôles étant connu on peut en déduire tous les autres. On voit en même temps que le même plan S_1 peut être déduit de $(m-1)^3$ points différens.

Ce théorème, par la théorie des polaires réciproques, conduit au suivant :

THÉORÈME IV. Soit S_m *une surface de* $m.^{ieme}$ *classe, et soient* S_{m-1}, S_{m-2}, S_{m-3}, ... S_3, S_2, S_1 *une suite d'autres surfaces des classes respectives* $m-1$, $m-2$, $m-3$, ... 3, 2, 1, *telles que* S_{m-1} *soit inscrite à la surface développable circonscrite à* S_m, *suivant son intersection avec un plan fixe* P ; *et que chacune des autres soit, par rapport à celle qui la précède immédiatement et pour le même plan* P, *ce qu'est* S_{m-1} *par rapport à* S_m, *la dernière* S_1 *de ces surfaces se réduira à un point.*

Si, suivant les lignes d'intersection de la surface S_m *avec les divers plans conduits par le point* S_1, *on lui circonscrit des surfaces développables, les surfaces de* $(m-1)^{ieme}$ *classe inscrites à ces diverses surfaces, lesquelles, comme l'on sait* (*), *auront toutes les* $(m-1)^3$ *mêmes plans tangens fixes, auront toutes le plan* P *pour plan tangent commun.*

De là on déduira la solution de ce problème : Faire toucher à trois plans donnés P, P′, P″ une surface de $(m-1)^{ieme}$ classe telle

---

(*) Voy. la pag. 153 du présent volume.

que ses surfaces développables circonscrites, communes avec une surface donnée de $m.^{ieme}$ classe, touchent cette dernière suivant des courbes planes comprises dans un plan unique; problème qui peut être indéterminé, ce qui permettra d'assujettir la surface cherchée à toucher un ou deux autres plans, pris arbitrairement dans l'espace.

Si l'on appelle généralement *plans polaires* d'un point de l'espace, par rapport à une surface de $m.^{ieme}$ classe, les $(m-1)^3$ plans que touchent à la fois les surfaces de $(m-1)^{ieme}$ classe, inscrites aux surfaces développables qui touchent la surface proposée suivant ses intersections avec divers plans conduits par le point dont il s'agit; on voit qu'un seul de ces plans polaires étant connu, on en peut déduire tous les autres. On voit en même temps que le même point S_1 peut être déduit de $(m-1)^3$ plans différens.

MÉTÉOROLOGIE.

Résumé de neuf années d'observations barométriques faites à Montpellier;

Par M. GERGONNE.

DEPUIS le commencement de 1827, je fais tous les jours, à des heures fixes, des observations barométriques, thermométriques et hygrométriques, avec des instrumens qui méritent la plus entière confiance. Je me propose d'en consigner les résultats dans le présent recueil, après l'expiration de chaque année.

Mais, pendant le cours des neuf années qui ont précédé celle-là, j'avais déjà accumulé un très-grand nombre d'observations du baromètre; et bien que ces observations, au nombre de plus de dix mille, que j'avais entreprises presque machinalement, et sans aucun but bien déterminé, n'aient pas été faites avec la ponctualité que j'y apporte aujourd'hui, elles sont pourtant assez précises pour que je ne croie pas inutile d'en offrir ici un résumé. Elles auront dumoins cet avantage qu'on saura bien positivement avec quels instrumens elles ont été faites et comment ces instrumens étaient placés; condition indispensable pour qu'on puisse tirer parti de ces sortes d'observations, et qui n'en est pas pas moins fréquemment négligée. Je les donne d'ailleurs avec d'autant plus de confiance que je les ai toutes faites et calculées moi-même; ce qui n'arrive pas toujours, même dans les grands établissemens scientifiques où l'on abandonne trop souvent ce fastidieux travail à des subalternes qui n'ont aucun intérêt à y apporter le soin nécessaire, et qui remplacent même quelquefois, par des observations simulées, les observations effectives qu'ils ont négligées.

Les observations des huit premières années ont été faites avec un baromètre à large cuvette, construit par Bouschet, opticien de cette ville, donnant, par son vernier, les douzièmes de lignes du pied de roi. A ce baromètre était annexé un thermomètre de Réaumur à alcohol, sur lequel je pouvais aisément estimer à l'œil les vingtièmes de degrés

Les observations de 1826 ont été faites avec un baromètre de Fortin, à niveau constant, soigneusement comparé par M. Arago à celui de l'observatoire royal de Paris, avant sa translation ici, et reconnu se tenir à 26 centièmes de millimètre au-dessous de celui-là. Ce baromètre, donnant par son vernier les vingtièmes de millimètre, est garni de son thermomètre centigrade à mercure. A son arrivée ici, il a été placé à côté de celui de Bouschet, et comparé à ce dernier, ainsi que leurs thermomètres, cinq ou six fois le jour, durant deux mois. De leur comparaison et de celle qui avait été faite précédemment du baromètre de Fortin avec celui de l'observatoire royal, j'ai pu déduire une formule propre à ramener toutes mes observations à ce qu'elles auraient été si elles eussent été faites avec ce dernier instrument. Enfin, je les ai toutes réduites, à l'aide d'une table publiée par M. Bouvard, dans la *Connaissance des temps pour* 1829, à la température de la glace fondante, ainsi qu'on doit toujours le faire, si l'on veut rendre les observations comparables.

D'après un grand nivellement géométrique exécuté, il y a quelques années, par MM. les officiers au 3.me régiment du génie, j'avais estimé la hauteur de la cuvette de mon baromètre au-dessus du niveau moyen de la mer à 39m,25. Dans le courant de mai 1827, des observations faites à Cette, durant plusieurs jours, par M. Gambart, père, professeur de navigation à Arles, avec un baromètre de Fortin, comparé ensuite au mien avec beaucoup de soin, m'ont appris que cette détermination méritait toute confiance; elles m'ont donné une moyenne d'environ 39 mètres et demi.

Pendant les neuf années dont je donne ici les observations, la moyenne barométrique journalière a communément été déduite de deux observations faites, la première, le matin de 5 à 9 heures, et la seconde, le soir de 9 à 11; mais très-souvent le nombre des observations journalières a été porté à trois, quatre, cinq et même six, à peu près uniformément réparties dans le cours de la journée. Quelquefois aussi, mais assez rarement, une seule observation a eu lieu, tantôt le matin et tantôt le soir; mais, excepté le mois de septembre 1819, durant lequel une absence m'a contraint de discontinuer les observations, le nombre des jours durant lesquels elles ont été tout-à-fait omises, dans le cours de ces *neuf années*, ne s'élève qu'à *trente-deux* seulement.

J'ai dressé un tableau du maximum, un autre de la moyenne et un troisième du minimum de la hauteur barométrique, pour chacun des 107 mois d'observations; et c'est à l'aide de ces trois tableaux que j'ai dressé les deux suivans dont le premier présente les résultats par années, tandis que le second les présente par mois; les uns et les autres étant exprimés en millimètres et centièmes de millimètres.

I. *Résultats par années.*

ANNÉES.	MAXIM.	MOYENN.	MINIM.	ÉTENDUE DES OSCILLAT.
1818	771,48	759,65	739,13	32,35
1819	771,94	758,32	739,06	32,88
1820	770,10	758,65	741,47	28,63
1821	778,82	759,68	729,27	49,55
1822	772,65	760,28	740,54	32,11
1823	772,05	758,14	721,28	50,77
1824	772,06	759,43	736,85	35,21
1825	774,46	759,92	735,70	38,76
1826	771,40	758,87	740,08	30,32
Max.	778,82	760,28	741,47	50,77
Moy.	772,77	759,22	735,93	36,84
Min.	770,10	758,14	721,28	26,63
Étendue des oscillat.	8,72	2,14	20,19	24.14

II. *Résultats par mois.*

Mois.	Maxim.	Moyenn.	Minim.	Étendue des oscillat.
Janvier	774,46	760,84	739,78	34,68
Février	778,82	761,25	721,28	57,54
Mars	772,65	759,13	740,08	32,57
Avril	768,14	757,60	739,13	29,01
Mai	770,38	757,95	746,72	23,66
Juin	769,10	758,99	749,79	19,31
Juillet	764,21	759,13	748,69	15,52
Août	766,26	759,34	750,17	16,09
Septembre	765,73	759,62	748,95	16,78
Octobre	769,41	758,21	737,10	22,31
Novembre	768,79	759,59	739,77	29,02
Décembre	771,27	759,05	729,27	42,00
Max.	778,82	761,25	748,95	57,54
Moy.	769,94	759,22	740,89	29,05
Min.	764,21	757,60	721,28	15,52
Etendue des oscillat.	14,61	3,65	27,67	42,02

Ces deux tableaux donnent donc, pour la moyenne barométrique des neuf années, exprimée en millimètres et réduite à la température de la glace fondante, 759,22.

Les mêmes tableaux montrent aussi que, durant ces neuf années, la plus grande hauteur barométrique observée, qui répond à février 1821, est 778,81, tandis que la moindre, qui répond à février 1823, est seulement 721,28; la différence est 57,54; et telle est au moins, durant ces neuf années, la longueur parcourue dans le tube, par le sommet de la colonne de mercure. Je dis *au moins*, car il faut bien remarquer qu'il ne s'agit ici que de hauteurs *observées*; et qu'il serait possible que, dans l'intervalle des observations, la colonne eût franchi l'une et l'autre des deux limites que je lui assigne ici. Ce ne pourrait jamais être, au surplus, que d'une quantité fort petite.

Il est très-digne de remarque que, malgré l'étendue et l'extrême irrégularité de la marche de ces diverses excursions, les moyennes considérées par mois et plus encore les moyennes considérées par années, ne présentent entre elles que des différences fort peu sensibles. On voit, en effet, que la moyenne des neuf mois de février, la plus grande de toutes est 761,25; et que celle des neuf mois d'avril, la plus petite de toutes, qui est 757,60, n'en diffère seulement que de 3,60.

La plus grande moyenne d'année 760,28, qui répond à 1822, ne diffère de la plus petite 758,14, qui répond à 1823, que de 2,14 seulement.

Si l'on fait abstraction des anomalies causées et par l'élévation extraordinaire de 778,82, qui a eu lieu le 6 février 1821, et par les abaissemens extraordinaires de 729,27 et 721,28, qui ont eu lieu, le premier, le 24 décembre même année et l'autre le 2 février 1823, circonstances qui ne sont pas de nature à se reproduire fréquemment, l'inspection du deuxième tableau ne laissera aucun doute relativement à la grande influence qu'exercent les saisons sur l'étendue des oscillations de la colonne barométrique. On voit, en effet, que ces circonstances extraordinaires mises à part, cette étendue qui n'est pour juillet que 15,52 va continuellement croissant jusqu'en janvier où elle atteint son maximum 36,68, et que, partant de là, elle décroît continuellement jusqu'en juillet.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux problèmes de géométrie énoncés à la pag. 348 du précédent volume ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

PROBLÈME I. *Deux lignes du second ordre, tracées sur les deux faces d'un angle dièdre variable, de telle sorte que l'arête de cet angle en soit une corde commune, réelle ou idéale, déterminent, quelle que soit d'ailleurs l'ouverture de l'angle dièdre, deux surfaces coniques du second ordre, dont elles sont les intersections. On suppose que, l'une des faces de l'angle dièdre restant fixe, ainsi que son arête, son autre face tourne sur cette arête, comme sur une charnière, et on demande quelle ligne les sommets des deux surfaces coniques décriront dans l'espace ?*

Solution. Soient A et B deux lignes du second ordre, situées dans un même plan, de manière à avoir une sécante commune S, réelle ou idéale. Si l'on inscrit à A un polygone quelconque P de m côtés, on pourra, comme l'on sait, en inscrire à B deux autres Q et Q′, aussi de m côtés, de telle sorte que les côtés et diagonales de Q et Q′ concourront avec leurs analogues de P sur la sécante commune S, et tels encore que les sommets correspondans se trouveront sur autant de rayons issus du céntre direct ou inverse d'homologie (*) ; de sorte que, si P et Q sont deux polygones directement homologues, relativement à la sécante S, P et Q′ seront deux polygones inversement homologues, par rapport à cette même sécante.

Cela posé, la courbe A et le polygone P restant fixes, faisons tourner la courbe B et les polygones Q et Q′ autour de la sécante S, et arrêtons cette figure dans une position quelconque ; les sommets homologues de P et Q se trouveront alors sur m droites qui concourront en un même point C, et ceux de P et Q′ sur m autres droites qui concourront en un même point C′. Or, si l'on imagine deux surfaces coniques ayant pour base commune la courbe A, et pour sommets les points C et C′, il est visible qu'en supposant $m>4$, la surface B se trouvera sur l'une et sur l'autre, et que par conséquent C et C′ seront précisément les sommets des deux surfaces coniques déterminées par A et B. Le problème se trouve donc ramené à celui de la pag. 335 du précédent volume, d'où il résulte que le lieu cherché est le système de deux circonférences dont les plans sont perpendiculaires à l'arête C, mais qui lui sont excentriques.

PROBLÈME II. Deux surfaces coniques du second ordre, qui ont un angle dièdre circonscrit commun, réel ou idéal, déterminent, quelle que soit la distance entre leurs sommets, sur l'arête de cet angle, deux lignes planes du second ordre qui en sont les intersections. On suppose que l'une des deux surfaces coniques, ainsi que l'angle dièdre circonscrit commun, restant fixes, l'autre surface conique se meut parallèlement à elle-même, de manière à être toujours circonscrite à l'angle dièdre, et on demande à quelles surfaces les plans des deux courbes d'intersection seront constamment tangens ?

(*) Voy., pour cette dénomination, le *Traité des propriétés projectives* de M. Poncelet.

Solution. Imaginons un paraboloïde elliptique P, ayant son axe dans l'arête de l'angle dièdre circonscrit aux deux surfaces coniques; soient C, C′ ces deux surfaces, S, S′ leurs sommets; les polaires de C, C′, par rapport à P, seront deux lignes du second ordre c, c', dont les plans, ayant pour pôles S, S′, seront perpendiculaires à l'axe de la surface directrice et par suite parallèles. Or, puisque les deux cônes C, C′ ont deux plans tangens communs, dont les pôles sont à l'infini, les courbes c, c' auront une sécante commune pareillement à l'infini; donc ces courbes seront semblables et semblablement disposées. Représentons par k et k' les sommets des deux cônes déterminés par c et c'; tout point commun à C et C′ aura pour plan polaire un plan tangent aux deux courbes c, c', et qui par conséquent passera par l'un des deux points k, k'. Supposons maintenant que le premier cône C restant fixe, ainsi que les deux plans tangens, le second cône C′ se transporte parallélement à lui-même, de telle sorte que son sommet S′ décrive l'axe de P; les pôles de ses plans tangens décriront autant de diamètres perpendiculaires au plan de la courbe c. D'un autre côté, ces points seront constamment dans un plan parallèle à ce dernier; donc la courbe c' est invariable et engendre une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe de P. Il est facile maintenant de reconnaître que les sommets k et k' décrivent des diamètres de P, passant par les centres de similitude des projections de c, c' sur un plan fixe quelconque, parallèle aux leurs. Or, ces lignes ont des polaires à l'infini, donc les plans des courbes d'intersection de C et C′ se meuvent parallélement à eux-mêmes. L'intersection de ces plans a pour polaire la droite kk', et, parce qu'elle passe toujours par le centre de c, il s'ensuit que cette intersection décrit un plan.

Solution des quatre problèmes de géométrie énoncés à la pag. 56 *du présent volume;*

Par MM. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne; Roche, professeur de Mathématiques, de physique et de chimie à l'École d'artillerie de la marine, et Vallès, élève ingénieur des ponts et chaussées.

Lorsqu'un corps pesant pose par plusieurs points ou par une base finie sur un plan horizontal, on sait qu'il ne peut y être en équilibre qu'autant que la projection de son centre de gravité sur ce plan, tombe dans l'intérieur ou du moins ne tombe pas en dehors du plus petit polygone convexe qui enferme tous les points d'appui.

Mais la stabilité de l'équilibre d'un tel corps peut être plus ou moins grande; et d'abord elle sera évidemment d'autant plus grande, toutes choses égales d'ailleurs, que son centre de gravité sera plus voisin de sa base; et, pour le dire en passant, c'est par la raison contraire que nos voitures publiques versent si fréquemment.

La base du corps étant donnée, ainsi que l'élévation de son centre de gravité, si cette base est un cercle et que le centre de gravité se projette à son centre, il est manifeste que l'équilibre sera également stable dans toutes les directions; mais il n'en sera plus de même dans le cas contraire, c'est-à-dire, lorsque la base cessera d'être un cercle ou lorsque cette base étant un cercle, la projection du centre de gravité ne coïncidera plus avec son centre.

Si, par exemple, cette base est une courbe fermée, et que du point où le centre de gravité se projette sur elle, on lui mène des normales, il est manifeste que la stabilité sera la plus grande possible dans le sens de la normale la plus longue, et la moindre possible du côté de la plus courte. Il est visible, en outre, que, par un changement de disposition dans les parties du corps qui, sans élever ni abaisser le centre de gravité, en déplacerait seulement la projection, on ne pourrait augmenter la stabilité dans un sens sans la diminuer en même temps dans l'autre. Si, par exemple on faisait coïncider la projection du centre de gravité avec l'une des extrémités de la plus longue corde qui pût être menée dans la base, on aurait, dans la direction de cette extrémité à l'autre, la plus grande stabilité possible, et une stabilité tout-à-fait nulle dans la direction opposée.

Toutes ces remarques subsistent également, soit que la courbe fermée qui forme la base du corps soit soumise à la continuité mathématique, soit qu'elle soit simplement soumise à la continuité physique, ainsi qu'il arriverait si elle était formée par des courbes diverses et des droites, tangentes les unes aux autres. Quant au cas où le périmètre de cette base présenterait des angles rectilignes, curvilignes ou mixtilignes, on pourrait remplacer leurs sommets par des courbes infiniment petites d'un rayon de courbure nul, dirigé vers la projection du centre de gravité; de sorte qne les droites menées de ce centre aux sommets des angles de la base devraient être réputées des normales.

Pour qu'un corps pose le plus convenablement sur un plan qu'il touche par une base finie, il convient que, dans le sens même où ce corps a la moindre stabilité, cette stabilité soit néanmoins aussi grande qu'elle puisse l'être. Il poserait, au contraire, de la manière la moins favorable, si, dans le sens de la plus grande stabilité, sa stabilité était la moindre possible.

On se trouve donc conduit, par ces considérations, à se proposer les deux problèmes généraux que voici :

I. *Quel est, dans l'intérieur d'un polygone plan rectiligne, mixtiligne ou curviligne, ou d'une courbe plane fermée, continue ou discontinue, le point dont la moindre distance à son périmètre est* *la plus grande possible, ou celui dont la plus grande distance à son périmètre est la moindre possible ?*

En étendant la question aux trois dimensions de l'espace, on est conduit à cet autre problème général :

II. *Quel est dans l'intérieur d'un polyèdre terminé par des surfaces planes ou courbes, ou dans l'intérieur d'une surface courbe fermée, continue ou discontinue, le point dont la moindre distance à cette surface est la plus grande possible, ou celui dont la plus grande distance à cette même surface est la moindre possible ?*

Ce sont ces problèmes, bornés au triangle et au tétraèdre, les polygone et polyèdre les plus simples, que nous avons entendu proposer à la pag. 56 du présent volume, et nous regrettons de ne pas en avoir fait précéder l'énoncé des développemens dans lesquels nous venons d'entrer, et qui en auraient mieux fait saisir l'esprit.

Il est résulté de là que deux des géomètres qui se sont occupés de ces problèmes, MM. Roche et Vallès, ont entendu, par plus courte distance d'un point au périmètre d'un triangle, la plus courte des perpendiculaires abaissées de ce point sur ses côtés, et par plus longue distance de ce point à ce même périmètre la plus longue des droites menées de ce point aux trois sommets, et ils en ont agi d'une manière analogue pour le tétraèdre. Quant à M. Bobillier, il a constamment considéré le mot *distance* comme synonyme de *perpendiculaire sur les côtés.*

Les deux problèmes qu'il s'agissait de résoudre paraissaient être ceux-ci :

I. *Placer un point dans l'intérieur d'un triangle, de telle sorte qu'en menant de ce point des perpendiculaires sur les côtés du triangle et des droites à ses sommets, la plus courte de ces six droites soit la plus grande possible, ou de telle sorte que la plus longue de ces six droites soit la plus courte possible ?*

II. *Placer un point dans l'intérieur d'un tétraèdre, de telle sorte qu'en menant de ce point des perpendiculaires sur ses faces et des droites à ses sommets, la plus courte de ces huit droites soit la plus* *longue possible, ou de telle sorte que la plus longue de ces huit droites soit la plus courte possible ?*

Au lieu de cela, MM. Vallès et Roche se sont proposés les quatre problèmes que voici :

I. *Quel est le point de l'intérieur d'un triangle dont la plus courte distance à ses côtés est la plus grande possible ?*

II. *Quel est le point de l'intérieur d'un triangle dont la plus grande distance à ses sommets est la moindre possible ?*

III. *Quel est le point de l'intérieur d'un tétraèdre dont la plus courte distance à ses faces est la plus grande possible ?*

IV. *Quel est le point de l'intérieur d'un tétraèdre dont la plus grande distance à ses sommets est la moindre possible ?*

Nous ne prétendons pas dire que les deux problèmes ci-dessus ne se ramènent pas à ces quatre derniers ; mais, pour en compléter l'analyse, encore faudrait-il faire voir qu'ils s'y rapportent.

MM. Vallès et Roche ont trouvé tous deux que les deux premiers problèmes sont respectivement résolus par les centres des cercles inscrit et circonscrit, et que les deux derniers l'étaient respectivement par les centres des sphères inscrite et circonscrite.

Supposons en effet, dit M. Vallès, que du centre c du cercle inscrit on abaisse des perpendiculaires r sur les trois côtés du triangle, ces perpendiculaires le diviseront en trois quadrilatères bi-rectangles, et tout autre point p, intérieur au triangle, appartiendra nécessairement à un de ces quadrilatères. La distance de ce point p au côté opposé sera nécessairement plus grande que r, et la somme de ses distances aux deux autres sera moindre que $2r$; d'où il suit que l'une d'elles au moins sera moindre que r ; M. Vallès conclut de là que le point c, centre du cercle inscrit, est celui dont la moindre distance aux côtés du triangle est la plus grande possible.

Pour prouver cette même assertion, M. Roche imagine que par le point c on a mené des parallèles aux trois côtés du triangle, et il remarque qu'il n'est aucun point p de son intérieur qui ne soit compris entre un côté et sa parallèle ; d'où il conclut que la plus courte distance de ce point p à ce côté sera moindre que la distance r au même côté du centre c du cercle inscrit.

M. Vallès suppose ensuite que du centre C du cercle circonscrit on ait mené, aux trois sommets du triangle, des droites R qui le diviseront en trois autres, dans l'un desquels se trouvera nécessairement tout autre point P de son intérieur. La distance de ce point au sommet opposé sera évidemment plus grande que R, et la somme de ses distances aux deux autres sommets sera moindre que $2R$; d'où il résulte que l'une d'elles au moins sera moindre que R; le centre C du cercle circonscrit, conclut M. Vallès, est donc le point de l'intérieur du triangle dont la plus grande distance à ses sommets est la moindre possible.

Pour prouver cette même assertion, M. Roche imagine que, des trois sommets du triangle pris pour centres et avec le rayon R du cercle circonscrit, on ait décrit trois arcs entre ses côtés, et il remarque qu'il n'est aucun point P de l'intérieur de ce triangle, autre que le centre C de ce cercle circonscrit, qui ne soit extérieur à l'un de ces trois arcs au moins; d'où il conclut que la distance de ce point P au sommet qui est le centre de cet arc, sera plus grande que la distance du centre C du cercle circonscrit au même sommet.

M. Vallès ne néglige pas d'observer que cette dernière solution est en défaut pour les triangles obtusangles, pour lesquels il faut remplacer le centre du cercle circonscrit par le milieu du plus grand des trois côtés.

L'extension de tout ceci au tétraèdre est trop facile pour que nous croyons nécessaire de nous y arrêter.

Dans sa manière d'envisager la question, M. Bobillier s'est borné à démontrer ces deux théorèmes :

I. *Il n'est aucun point, dans l'intérieur d'un triangle, dont la moindre distance à ses côtés soit plus grande, ni dont la plus grande distance à ces mêmes côtés soit moindre que le rayon du cercle inscrit.*

II. *Il n'est aucun point, dans l'intérieur d'un tétraèdre, dont la moindre distance à ses faces soit plus grande, ni dont la plus grande distance à ses faces soit moindre que le rayon de la sphère inscrite.*

La manière dont M. Bobillier justifie ces deux assertions est remarquable par sa netteté, sa simplicité et son élégance.

I. Soient d'abord A, B, C les trois sommets d'un triangle, a, b, c les cotés respectivement opposés, r le rayon du cercle inscrit et T sa surface; on aura, comme l'on sait,

$$2T=r(a+b+c) .$$

Soit ensuite P un point situé d'une manière quelconque dans l'intérieur du triangle, duquel soient abaissées respectivement sur ses côtés les perpendiculaires α, β, γ. En considérant ce point P comme le sommet commun de trois autres triangles, ayant respectivement pour bases les trois côtés a, b, c, on aura

$$2T=a\alpha+b\beta+c\gamma ,$$

et par conséquent

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=r(a+b+c) ;$$

ou encore

$$a(\alpha-r)+b(\beta-r)+c(\gamma-r)=0 .$$

Or, comme la somme de trois quantités des mêmes signes ne saurait être nulle, on voit déjà que les distances α, β, γ ne sauraient être ni toutes trois plus grandes ni toutes trois moindres que r.

Il est donc absurde de supposer que la moindre des trois est plus grande que le rayon r, puisque les deux autres le seraient, à plus forte raison; ni que la plus grande est moindre que ce rayon, puisque les deux autres devraient l'être aussi.

II Soient, en second lieu, A, B, C, D, les quatre sommets d'un tétraèdre, a, b, c, d, les aires des faces respectivement opposées, r le rayon de la sphère inscrite et T le volume du tétraèdre; on aura, comme l'on sait,

$$3T=r(a+b+c+d)\ .$$

Soit ensuite un point P, situé d'une manière quelconque dans l'intérieur du tétraèdre, duquel soient abaissées respectivement sur ses faces les perpendiculaires α, β, γ, δ. En considérant ce point P comme le sommet commun de trois autres tétraèdres, ayant respectivement pour bases les quatre faces a, b, c, d, on aura

$$3T=a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta\ ,$$

et par conséquent

$$a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta=r(a+b+c+d)\ ;$$

ou encore

$$a(\alpha-r)+b(\beta-r)+c(\gamma-r)+d(\delta-r)=0\ .$$

En raisonnant sur cette dernière équation, comme nous l'avons fait ci-dessus sur son analogue, on verra, sur-le-champ, 1.° que les perpendiculaires α, β, γ, δ ne sauraient être ni toutes les quatre plus grandes ni toutes les quatre plus petites que le rayon r; 2.° que par conséquent la moindre d'entre elles ne saurait être plus grande ni la plus grande d'entre elles moindre que ce rayon r.

On pourrait aussi se proposer ces deux problèmes :

I. *Quel est le point de l'intérieur d'une surface plane fermée, dont les distances aux divers points de son périmètre sont les moins inégales possibles, de telle sorte que l'excès de la plus grande de ces distances sur la plus petite soit un* minimum ?

II. *Quel est le point de l'intérieur d'un corps dont les distances aux différens points de sa surface sont les moins inégales possibles, de telle sorte que l'excès de la plus grande de ces distances sur la plus petite soit un* minimum ?

Ne serait-ce point alors le centre de gravité du périmètre qui résoudrait le premier de ces deux problèmes, et le centre de gravité de la surface qui résoudrait le second ?

Solution du problème de géométrie descriptive énoncé à la pag. 83 *du présent volume* ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne, et M. Garbinski, professeur, à Varsovie.

PROBLÈME. *Construire rigoureusement la droite qui coupe à la fois quatre droites données dans l'espace, non comprises deux à deux dans un même plan ?*

Solution de M. Bobillier.

Soient A, B, C, D les quatre droites données. Les trois dernières déterminent un paraboloïde hyperbolique qui généralement coupe la première en deux points. La génératrice du paraboloïde doit donc, dans deux de ses positions, passer par ces deux points de A, et comme elle pose constamment sur les trois directrices B, C, D, il s'ensuit que, dans ces deux positions, elle satisfait aux conditions du problème.

Mais il peut fort bien se faire que le paraboloïde ne fasse que toucher la droite A, ou même ne la rencontre pas ; d'où il suit que si, généralement parlant, le problème admet deux solutions, il peut fort bien, dans des cas particuliers, n'en admettre qu'une seule, ou même devenir impossible. Il pourrait même se faire que la droite A se trouvât située tout entière dans le paraboloïde, auquel cas toute droite qui poserait à la fois sur B, C, D poserait aussi sur A et satisferait conséquemment aux conditions du problème. Le problème serait donc alors indéterminé.

Supposons qu'aucun de ces cas particuliers n'ait lieu. Par B soit conduit arbitrairement un plan ; en joignant par une droite les points où il coupe C et D, cette droite sera une quatrième arête E du paraboloïde, et, en variant la situation de ce plan, on en obtiendra une cinquième F.

Soit ensuite conduit par A un plan arbitraire coupant B, C, D, E, F en b, c, d, e, f respectivement, ces points seront ceux d'une section plane du paraboloïde, c'est-à-dire, d'une conique, dont les intersections avec la droite A seront les points où cette droite doit être coupée par les deux droites qui résolvent le problème. Ce problème se trouve donc ramené à construire, sur un plan, les intersections d'une droite avec une conique donnée seulement par cinq des points de son périmètre.

Pour cela, par b, c je mène des parallèles à A et je détermine, par le théorème de Pascal, les points g et h où ces parallèles sont de nouveau coupées par la courbe. Je joins les milieux des cordes bg et ch parallèles à A par une droite, et le point O où cette droite coupe A est le milieu de l'intervalle entre les deux points cherchés.

Je décris un cercle passant par b, g, d, et je détermine le quatrième point k où ce cercle coupe la courbe. Tous les cercles ayant la corde dk commune avec cette conique la couperont suivant d'autres parallèles à A, d'où il suit que d, k et les deux points cherchés sont situés sur une même circonférence.

Si donc on élève une perpendiculaire sur le milieu de dk et une perpendiculaire sur A au point O, et que du point où elles se coupent, pris pour centre et avec ld ou lk pour rayon, on décrive un cercle, ce cercle coupera la droite A aux deux points cherchés.

Solution de M. Garbinski.

Si une droite mobile glisse sur trois quelconques des quatre droites données, par exemple sur A, B, C, elle engendrera, comme l'on sait, une surface gauche du second ordre qui, en général, coupera la quatrième D en deux points d et d' que l'on déterminera rigoureusement par la méthode de M. Brianchon ou par celle de Petit. (*Correspondance sur l'Ecole polytechnique*, tom. I, pag. 434—440).

Cela posé, concevons, par le point d et par l'une quelconque B des trois directrices de la surface gauche, un plan et désignons par c son intersection avec la directrice C. Une droite que l'on fera passer par c et d sera, comme l'on sait, l'une des génératrices de la surface, ou, ce qui est la même chose, elle coupera à la fois les trois directrices A, B, C; et, comme elle passe aussi par le point d qui appartient à D, elle résoudra complètement le problème, puisqu'elle coupera à la fois les quatre droites données.

Ce que nous venons de dire du point d pourra ensuite être appliqué au point d', de manière que, généralement parlant, *il existe toujours deux droites qui en coupent à la fois quatre autres données, non situées deux à deux dans un même plan* (*).

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de géométrie.

Quel est le lieu des sommets de toutes les surfaces coniques du second ordre circonscrites à un meme hexagone gauche donné ?

Quelle est l'enveloppe des plans de toutes les lignes du second ordre inscrites à un même angle hexaèdre gauche donné ?

(*) Il serait curieux d'examiner si le problème ne pourrait pas être résolu par les simples élémens.

J. D. G.

GÉOMÉTRIE PURE.

Démonstration de divers théorèmes de géométrie ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

1. Il est connu que le pôle d'une droite par rapport à un cercle est sur la direction du rayon perpendiculaire à cette droite ; et, comme d'ailleurs, lorsqu'un quadrilatère a deux angles droits, ses deux autres angles sont égaux, il s'ensuit que *l'angle des rayons d'un cercle qui contiennent les polaires de deux droites, est égal à l'angle de ces deux droites* (*).

Cette observation fort simple conduit à des conséquences assez remarquables; on en déduit d'abord ces deux théorèmes:

I. *Si, d'un point pris arbitrairement sur le plan d'un triangle, on mène des droites à ses sommets, puis, par le même point, des perpendiculaires à ces droites; ces dernières détermineront, sur les côtés respectivement opposés, trois points qui appartiendront à une même droite.*

II. *Si, d'un point pris arbitrairement sur le plan d'un triangle, on mène des droites à ses sommets et qu'ensuite, par le même point, on mène six autres droites divisant en deux parties égales*

(*) Deux droites tracées sur un même plan déterminent quatre angles égaux deux à deux ; mais nous n'entendons parler ici que des angles aigus.

tant les angles que forment les trois premiers deux à deux que les supplémens de ces angles ; ces dernières détermineront, sur la direction de chacun des côtés opposés, deux points tels que les six points ainsi déterminés se trouveront aux intersections de quatre droites.

Si, en effet, dans chacun des deux cas, on construit la polaire réciproque de la figure dont il s'agit, relative à un cercle de rayon arbitraire, ayant son centre au point de départ des droites qui vont aux trois sommets du triangle, cette polaire réciproque sera, dans le premier cas, un autre triangle et les perpendiculaires abaissées de ses sommets sur les directions des côtés opposés, et dans le second un triangle avec les six droites qui divisent en deux parties égales tant les angles de ce triangle que leurs supplémens. Or, on sait que les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les directions des côtés opposés se coupent toutes trois au même point; d'où il suit que les points dont ces droites sont les polaires doivent appartenir tous trois à une même droite. On sait, en outre, que les six droites qui divisent tant les angles d'un triangle que leurs supplémens en deux parties égales joignent deux à deux quatre points, centres des cercles qui touchent à la fois ses trois côtés; donc les six points dont ces droites sont les polaires doivent être aux intersections de quatre droites.

2. Soient a, b, c, d, ... tant de points qu'on voudra, situés dans un même plan, auxquels soient menées des droites oa, ob, oc, od, ... par un autre point quelconque o de ce plan. Supposons qu'il existe, entre les distances mutuelles ab, ac, bc, ad, ... des points du système, une relation telle que cette relation subsiste encore en substituant respectivement à ces distances les sinus des angles aob, aoc, boc, aod, ... En d'autres termes, supposons qu'en coupant le faisceau des droites partant du point o, par une transversale arbitraire, en des points A, B, C, D, ..., il y ait entre les distances AB, AC, BC, AD, ... les mêmes relations qui existent entre les dis-

tances ab, ac, bc, ad, ... Si l'on construit la polaire réciproque de la figure, relative à un cercle situé d'une manière quelconque sur son plan, les pôles respectifs a', b', c', d', ... des droites oa, ob, oc, od, ... seront tous situés en ligne droite sur la polaire du point o, et les rayons $o'a'$, $o'b'$, $o'c'$, $o'd'$, ... menés à ces pôles du centre du cercle, feront entre eux des angles $a'o'b'$, $a'o'c'$, $b'o'c'$, $a'o'd'$, ... dont les sinus seront respectivement égaux à ceux des angles aob, aoc, boc, aod, ...; d'où il suit qu'il devra y avoir, entre les distances $a'b'$, $a'c'$, $b'c'$, $a'd'$, ... ou entre les angles $a'o'b'$, $a'o'c'$, $b'o'c'$, $a'o'd'$, ..., les mêmes relations qui existent entre les distances ab, ac, bc, ad, ... ou entre les angles aob, aoc, boc, aod, ...

Donc, *s'il existe une relation de nature projective entre les distances mutuelles de différens points* a, b, c, d, ... *d'un même plan, et que* a', b', c', d', ... *soient respectivement les points où une transversale arbitraire coupe les polaires de ces différens points, relatives à un cercle tracé arbitrairement sur leur plan; cette relation subsistera encore lorsqu'on aura accentué toutes les lettres qui désignent les points dont il s'agit.*

Ainsi, par exemple, *les polaires de quatre points harmoniques forment un faisceau harmonique et réciproquement.*

On peut déduire de là le théorème indiqué par M. Poncelet (*Annales*, tom. XVII, pag. 272) et même un théorème plus général, en remplaçant le triangle sécant par un polygone quelconque.

3 Soit r le rayon du cercle directeur, et soient d, d' les distances d'une droite arbitraire et de son pôle au centre de ce cercle; on aura, comme l'on sait $dd'=r^2$, d'où

$$d=\frac{r^2}{d'}\quad,\qquad d'=\frac{r^2}{d}\quad;$$

par conséquent, s'il existe une relation quelconque entre les distances du centre du cercle directeur aux points et aux droites d'une figure rectiligne, on obtiendra, en faisant usage de ces formules, la relation correspondante entre les distances de ce même centre aux points et aux droites de la figure rectiligne, polaires réciproques de celle dont il s'agit.

Pour faire une application de cette remarque, par le centre O du cercle directeur, soit menée à un autre cercle C une sécante arbitraire qui le coupe aux points M et N; on aura

$$OM.ON=Const.$$

Les polaires des points de la circonférence du cercle C seront, comme l'on sait, tangentes à une même conique; et, en particulier, celles des points M et N seront deux tangentes parallèles. Si l'on désigne par M′ et N′ les pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur ces tangentes, on aura, en vertu des formules ci-dessus,

$$OM'.ON'=Const.\ ;$$

d'où il suit que les points M′ et N′ sont à la circonférence d'un même cercle; et, attendu que les tangentes parallèles les plus distantes sont les tangentes aux deux extrémités du grand axe de la conique, il s'ensuit que ce grand axe est le diamètre du cercle dont il s'agit. On sent d'ailleurs que, si la polaire réciproque du cercle C est une parabole, le cercle lieu des points M′ et N′ dégénérera en une tangente au sommet de cette courbe.

On voit donc qu'en général, si l'un des côtés d'un angle droit mobile passe constamment par le point O, et que l'autre côté de cet angle droit soit constamment tangent à la polaire réciproque du cercle C, son sommet décrira une circonférence qui aura pour diamètre le grand axe de cette polaire. On reconnaît aisément par là (*) que le point O est un foyer de cette polaire.

(*) Voy. *Annales*, tom. V, pag. 51.

On peut parvenir à ce résultat d'une manière plus satisfaisante au moyen des considérations suivantes :

Menons au cercle C deux tangentes parallèles quelconques ; les points de contact et le centre se trouveront sur un même diamètre qui sera en même temps perpendiculaire aux deux tangentes.

Dans la conique polaire réciproque du cercle C, cette propriété répond à la suivante :

Si, dans la conique polaire réciproque du cercle C, on mène une corde arbitraire qui passe par le centre O du cercle directeur, puis des tangentes à la courbe par les extrémités de cette corde, ces tangentes iront concourir sur la polaire du centre du cercle C, et, en outre, la droite qui unira le point O au point de concours des tangentes sera perpendiculaire à la corde de contact.

Or, le centre du cercle directeur et la polaire du centre du cercle C ne peuvent jouir d'une telle propriété à l'égard de la conique polaire de ce dernier cercle, sans être respectivement le foyer et la directrice de cette conique ; on a donc ce théorème :

La polaire réciproque d'un cercle, relative à un autre cercle considéré comme directeur, est une conique qui a pour foyer le centre du cercle directeur et pour directrice la polaire du centre de l'autre cercle.

Les tangentes menées au cercle C, par le centre O du cercle directeur, sont les polaires des points de la conique situés à l'infini, et leurs points de contact sont les pôles des tangentes en ces points, c'est-à-dire, des asymptotes ; donc la conique polaire réciproque du cercle C est une *ellipse*, une *parabole* ou une *hyperbole*, suivant que le centre O du cercle directeur est intérieur au cercle C sur sa circonférence ou extérieur à ce cercle.

4. Ce dernier théorème est susceptible d'un grand nombre d'applications ; nous nous bornerons à en indiquer quelques-unes, en énonçant d'abord un théorème connu, et en plaçant immédiatement à sa suite celui qui s'en déduit en vertu de ce qui précède.

On sait que *tous les angles inscrits à un même segment de cercle sont égaux.*

Donc, *l'angle sous lequel on voit, du foyer d'une conique, la portion d'une tangente mobile interceptée entre deux tangentes fixes quelconques est un angle constant.*

On sait que, *lorsqu'un angle mobile invariable, a son sommet fixé en un des points de la circonférence d'un cercle, la corde qu'il soutend dans le cercle enveloppe un autre cercle concentrique au premier, tandis que le pôle de cette corde, relatif au cercle primitif, décrit un troisième cercle qui lui est également concentrique.* On sait de plus que, si l'angle invariable est droit, l'un des deux cercles concentriques au cercle primitif se réduit à son centre, tandis que l'autre passe à l'infini.

Donc, *si un angle variable, circonscrit à une conique, se meut de manière à intercepter, entre ses côtés, une portion d'une tangente fixe quelconque qui soit vue du foyer sous un angle constant,* 1.° *le sommet de l'angle mobile et variable décrira une seconde conique;* 2.° *la corde de contact enveloppera une troisième conique;* 3.° *ces trois coniques auront même foyer et même directrice.* Si l'angle constant sous lequel la portion de tangente interceptée est vue du foyer est un angle droit, le sommet de l'angle variable décrira la directrice de la conique donnée, et sa corde de contact passera constamment par le foyer de cette courbe.

On sait que, *dans tout quadrilatère formé par deux tangentes à un même cercle et par les rayons menés aux points de contact, les deux diagonales se coupent orthogonalement et font respectivement des angles égaux, soit avec les tangentes, soit avec les rayons.*

Donc, *une corde étant arbitrairement inscrite à une conique, si, de l'un de ses foyers, on mène des rayons vecteurs* (1) *et* (2) *aux deux extrémités de cette corde, un rayon vecteur* (3) *au point où cette corde coupe la directrice qui répond à ce foyer, un rayon vecteur* (4) *au sommet de l'angle circonscrit qui répond à la corde inscrite, enfin deux autres rayons vecteurs* (5) *et* (6) *aux points* *où les côtés de cet angle circonscrit coupent cette même directrice, il arrivera alors que le rayon vecteur* (4) *divisera en deux parties égales l'angle des deux rayons vecteurs* (1) *et* (2) *; que le rayon vecteur* (3) *divisera en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs* (5) *et* (6), *et qu'enfin ces deux rayons vecteurs* (3) *et* (4) *seront perpendiculaires l'un à l'autre.*

Les quatre sommets du quadrilatère dont il vient d'être question ci-dessus appartenant à une même circonférence, il s'ensuit que *les côtés d'un angle circonscrit à une conique, la corde de contact et la directrice touchent une autre conique qui a même foyer que la première.*

Mais on sait que *les obliques abaissées dans le même sens et sous la même inclinaison du foyer d'une conique sur toutes ses tangentes, ont leurs pieds sur une même circonférence.*

Donc, *si, du foyer d'une conique, on abaisse, sous un même angle et dans le même sens, des obliques sur les deux côtés d'un angle circonscrit et sur sa corde de contact, la circonférence déterminée par les pieds de ces obliques, et toutes les circonférences déterminées par une semblable construction se couperont toutes au même point.* Si l'on fait varier l'angle des obliques, ce point décrira la directrice relative au foyer qu'on aura choisi.

On sait que, *si, de l'un quelconque des points de la circonférence du cercle circonscrit à un triangle, on mène, dans le même sens, des obliques également inclinées sur les trois côtés de ce triangle, les pieds de ces obliques appartiendront tous trois à une même droite.*

Donc, *un triangle étant circonscrit arbitrairement à une conique, si l'on mène de son foyer des droites aux trois sommets du triangle, puis du même point trois nouvelles droites faisant, dans le même sens, avec celles-là, des angles égaux quelconques, toute tangente à la courbe coupera ces trois dernières droites de telle sorte qu'en joignant les points d'intersection aux sommets correspondans du triangle par des droites, ces trois droites concourront en un même point.*

On sait que *tous les angles droits, circonscrits à une même conique pourvue de centre, ont leurs sommets sur la circonférence d'un cercle concentrique à cette conique.*

Donc, *si un angle droit, mobile sur le plan d'une conique, tourne autour de son sommet fixe, la corde soutendue par cet angle droit enveloppera une autre conique ayant pour foyer le sommet fixe de l'angle mobile.*

On sait que *tous les angles droits circonscrits à une même parabole ont leurs sommets sur la directrice.*

Donc, *un angle droit mobile ayant son sommet fixe en l'un quelconque des points du périmètre d'une conique, la corde qui le soutendra passera constamment par un même point de la normale menée à la courbe par le sommet de l'angle mobile.*

On sait que *tous les angles égaux circonscrits à une même parabole ont leurs sommets sur une même hyperbole équilatère.*

Donc, *si un angle quelconque, mobile et invariable, a son sommet fixé en un quelconque des points du périmètre d'une conique, la corde qui le soutendra enveloppera une autre conique.*

Etc., *etc.*

5. Les principes desquels nous avons déduit ces divers théorèmes et ces théorèmes eux-mêmes mettent en évidence la vérité de l'assertion contenue dans la lettre de M. Poncelet (*ibid.*, pag. 270), savoir : que *les propriétés descriptives et angulaires d'un système de coniques confocales sont les réciproques de celles qui appartiennent à un système de cercles situés dans un même plan.* Ainsi tous les théorèmes relatifs aux points de concours des tangentes communes à trois cercles, et les problèmes de contact, fournissent autant de théorèmes et de solutions de problèmes relatifs à des coniques confocales. Ainsi, par exemple, de ce que *les cordes communes deux à deux à trois cercles qui se coupent concourent toutes trois au même point*, il s'ensuit que *les sommets des angles circonscrits communs à trois coniques confocales, prises tour à*

tour deux à deux, appartiennent tous trois à une même droite.

Voici encore deux applications :

Il est visible que, *si un angle invariable se meut, sur le plan de deux cercles concentriques, de manière que ses côtés soient respectivement tangens à ces deux cercles, son sommet engendrera un troisième cercle concentrique à ces deux-là, tandis que la corde de contact en engendrera un quatrième qui leur sera également concentrique.*

Donc, *si un angle mobile et invariable a constamment son sommet au foyer commun de deux coniques de même directrice, la droite qui joindra le point d'intersection de l'un des côtés de cet angle avec une des coniques au point d'intersection de l'autre côté du même angle avec l'autre conique, enveloppera une troisième conique de même foyer et de même directrice que les deux premières; en outre, le point de concours des tangentes menées aux deux courbes, par les extrémités de cette droite, décrira une quatrième conique qui aura aussi même foyer et même directrice que les trois autres.*

On trouve aisément que, *si, sur la droite qui joint le centre de similitude directe de deux cercles à leur centre de similitude inverse, prise pour diamètre, on décrit un troisième cercle, les deux premiers seront vus sous des angles égaux de chacun des points de la circonférence de ce troisième cercle.*

Donc, *si une droite se meut sur le plan de deux sections coniques confocales, de telle sorte que les cordes interceptées par les deux courbes soient vues constamment de leur foyer commun sous des angles égaux, cette droite enveloppera, dans son mouvement, une troisième conique, de même foyer que les deux premières.*

6. Si l'on remarque que le pôle d'un plan, relatif à une sphère directrice, est situé sur la perpendiculaire abaissée de son centre sur ce plan, et que la polaire conjuguée d'une droite, par rapport

à cette même sphère, se trouve située dans le plan conduit perpendiculairement à cette droite par le centre de la même sphère, on en pourra tirer les conclusions suivantes :

1.° *L'angle de deux plans est égal à celui des rayons de la sphère qui contiennent leurs pôles.*

2.° *L'angle de deux droites est égal à l'angle des plans conduits par le centre de la sphère et par leurs polaires conjuguées.*

3.° *L'angle d'une droite et d'un plan est égal à l'angle du rayon qui contient le pôle du plan et du plan qui, passant par le centre de la sphère, contient la polaire conjuguée de la droite* (*).

Soit placé au centre de la sphère directrice le sommet d'un angle polyèdre quelconque ; les rayons vecteurs des pôles de ses faces, lesquels pôles seront infiniment distants, seront des diamètres respectivement perpendiculaires à ces faces, et les plans vecteurs des polaires conjuguées de ses arêtes seront les plans consécutifs déterminés par ces mêmes diamètres. On formera donc ainsi un nouvel angle polyèdre qui sera dit le *supplémentaire* du premier, attendu que les angles plans de chacun d'eux seront les supplémens des angles dièdres correspondans de l'autre.

Considérons, plus généralement, un angle polyèdre gauche, c'est-à-dire, un assemblage de plans consécutifs qui, au lieu de concourir tous au même point, concourent deux à deux suivant les côtés d'un polygone gauche. Il est visible que les rayons vecteurs des pôles de ses faces constitueront les arêtes d'un angle polyèdre ordinaire dont les faces seront les plans vecteurs des polaires conjuguées des arêtes du premier. Ainsi les angles plans et les angles dièdres de l'angle polyèdre gauche auront, pour supplémens respectifs, les angles dièdres et les angles plans correspondans de l'angle polyèdre ordinaire.

Ces considérations sont susceptibles d'une multitude d'applications

(*) On comprend qu'ici, comme au commencement de l'article, il ne peut être question que d'angles aigus.

diverses, parmi lesquelles nous choisirons, comme exemples, les deux suivantes :

Il est connu que *les arcs de grands cercles abaissés des trois sommets d'un triangle sphérique, sur les directions des côtés respectivement opposés, se coupent tous trois au même point.*

Donc, *dans deux triangles sphériques, polaires l'un de l'autre, les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent tous trois à un même arc de grand cercle.*

Il a été démontré par MM. Hachette et Binet que, *si deux plans mobiles sont assujettis à passer constamment par deux droites fixes non situées dans un même plan, et à se couper constamment à angle droit, le lieu de leur intersection sera une surface gauche du second ordre, se réduisant à une surface conique, si les deux droites sont dans un même plan, et à un cylindre, si elles sont parallèles.*

Donc, *lorsqu'une droite glisse sur deux autres, non situées dans un même plan, de telle sorte que la partie interceptée entre elles soit constamment vue sous un angle droit d'un certain point de l'espace ; cette droite engendrera une surface gauche du second ordre, laquelle, lorsque les deux droites fixes seront dans un même plan, se réduira au plan de ces droites.* Dans le dernier cas, la droite mobile enveloppera une ligne du second ordre.

7 Concevons que, par l'accroissement progressif du nombre et la diminution progressive de la grandeur de ses angles plans et de ses angles dièdres, l'angle polyèdre gauche, dont il a été question ci-dessus, devienne une surface développable, l'angle polyèdre supplémentaire correspondant deviendra une surface conique, et ces deux surfaces conserveront les propriétés relatives de celles dont elles seront les limites.

Si les génératrices rectilignes de cette surface développable sont d'inclinaison constante par rapport à un certain plan, les rayons vecteurs des pôles de ses plans tangens feront des angles égaux avec le rayon vecteur du pôle de ce plan, et conséquemment la surface conique supplémentaire sera une surface de révolution.

Si, dans ce même cas, l'arête de rebroussement de la surface développable se réduit à un point, cette surface développable se transformera en un cône de révolution et sa polaire en une courbe plane; d'où on voit que la surface conique, qui a pour base la courbe polaire d'un cône de révolution, est elle-même de révolution.

8. Par une droite quelconque pq, et par chacun des points a, b, c, d, ... de l'espace, faisons passer des plans paq, pbq, pcq, pdq, ..., et supposons qu'il existe, entre les distances mutuelles de ces points, une relation telle qu'elle donne lieu à une autre relation tout-à-fait semblable entre les sinus des angles dièdres formés par les plans qui interceptent ces distances; en d'autres termes, supposons qu'une transversale rectiligne perce ces plans en des points A, B, C, D, ..., tels que la même relation subsiste encore en remplaçant respectivement les points de la première suite par ceux-ci; les pôles respectifs a', b', c', d', ... ne seront autres que les points où les plans polaires des points a, b, c, d, ... seront percés par la polaire conjuguée de la droite pq. Or, les rayons vecteurs de ces pôles faisant entre eux des angles égaux aux angles dièdres des plans correspondans, il s'ensuit que la relation supposée subsistera encore en y changeant a, b, c, d, ... en a', b', c', d', ..., respectivement.

Donc, *s'il existe une relation de nature projective entre les distances mutuelles de différens points* a, b, c, d, ... *de l'espace, et que* a', b', c', d', ... *soient respectivement les points où une transversale arbitraire perce les plans polaires de ces différens points, relatifs à une sphère quelconque; cette relation subsistera encore lorsqu'on aura accentué toutes les lettres qui désignent les points de l'espace dont il s'agit.*

Ainsi, par exemple, *les plans polaires de quatre points harmoniques forment un système harmonique, et réciproquement;* et il en est de même de quatre droites harmoniques et de leurs polaires conjuguées.

Il est connu que, si a, b, c, d sont les sommets consécutifs d'un quadrilatère gauche, et qu'une surface du second ordre coupe le côté ab en e et f, le côté bc en g et h, le côté cd en i et k, le côté da en l et m, on aura

$$ae.af.bg.bh.ci.ck.dl.dm = be.bf.cg.ch.di.dk.al.am\ ;$$

et, parce que cette relation est de nature projective, on en déduira la suivante :

Soient a, b, c, d les quatre faces d'un angle polyèdre gauche. Soit une surface du second ordre à laquelle soient menés deux plans tangens e et f par l'arête (ab), deux plans tangens g et h par l'arête (bc), deux plans tangens i et k par l'arête (cd), et enfin deux plans tangens l et m par l'arête (da). Si l'on désigne respectivement par a', b', c', d', e', f', g', h', i', k', l' les points où ces douze plans coupent une transversale rectiligne quelconque, on aura

$$a'e'.a'f'.b'g'.b'h'.c'i'.c'k'.d'l'.d'm' = b'e'.b'f'.c'g'.c'h'.d'i'.d'k'.a'l'.a'm'\ .$$

9. Soit r le rayon d'une sphère directrice. Soit d la distance de son centre à un point, une droite ou un plan ; et soit d' la distance du même centre au plan polaire de ce point, à la polaire conjuguée de cette droite ou au pôle de ce plan ; on aura, comme l'on sait, $dd'=r^2$ d'où

$$d=\frac{r^2}{d'}\ ,\qquad d'=\frac{r^2}{d}\ .$$

Par conséquent, s'il existe une relation quelconque entre les distances du centre de la sphère directrice aux sommets, arêtes et faces d'un polyèdre, on obtiendra, en faisant usage de ces formules, la relation correspondante entre les distances du même centre aux faces, arêtes et sommets d'un autre polyèdre, polaire réciproque de celui-là. Ces deux polyèdres auront évidemment un égal nombre d'arêtes, et chacun d'eux aura autant de sommets trièdres, tétraèdres, pentaèdres, ..., que l'autre aura des faces triangulaires, quadrangulaires, pentagonales, ...

En raisonnant ici comme nous l'avons fait ci-dessus (3), on reconnaîtra aisément que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de la sphère directrice sur tous les plans tangens à la polaire réciproque d'une autre sphère, est une sphère décrite sur le grand axe de cette polaire pris pour diamètre. Cette dernière sphère se réduit d'ailleurs au plan tangent au sommet, lorsque la surface polaire est un paraboloïde.

On reconnaît par là que la polaire réciproque d'une sphère, par rapport à une autre sphère directrice, est une surface de révolution du second ordre, ayant pour foyer le centre même de la sphère directrice. Voici, au surplus, un autre moyen de parvenir à cette conclusion.

Lorsqu'une surface cylindrique est circonscrite à une sphère, la ligne de contact est plane et perpendiculaire aux génératrices rectilignes de cette surface. En passant donc de cette sphère à sa polaire réciproque, cette propriété se transformera dans la suivante :

Si un cône circonscrit à la polaire réciproque d'une sphère a son sommet dans le plan polaire de son centre, le plan de la ligne de contact passera par le centre de la sphère directrice et se trouvera perpendiculaire à la droite qui unit ce point au sommet du cône.

Or, le centre de la sphère directrice et le plan polaire du centre de l'autre sphère ne peuvent jouir d'une telle propriété, à l'égard de la polaire réciproque de cette dernière, à moins que ce point et ce plan n'en soient le foyer et le plan directeur.

Donc, *la polaire réciproque d'une sphère*, *par rapport à une autre sphère*, *est une surface de révolution du second ordre*, *qui a* *pour foyer le centre de la sphère directrice et pour plan directeur le plan polaire du centre de l'autre sphère.*

On s'assurera d'ailleurs facilement (3) que cette surface polaire réciproque est un *ellipsoïde*, un *paraboloïde* ou un *hyperboloïde*, suivant que le centre de la sphère directrice est intérieur à l'autre sphère, sur sa surface ou hors d'elle.

10. Cette théorie est susceptible d'un grand nombre d'applications entre lesquelles nous choisirons les suivantes :

On sait que *tous les angles inscrits à une sphère, qui s'appuyent sur un même diamètre sont droits.*

Donc, *si l'on mène deux plans tangens à une surface de révolution du second ordre, par une droite tracée arbitrairement dans son plan directeur ; les deux plans déterminés par le foyer et par les intersections des deux plans tangens avec un autre plan tangent quelconque, seront rectangulaires.*

On sait que *le cône circonscrit à une sphère et celui qui, ayant son centre pour sommet, passe par la ligne de contact du premier, sont deux cônes de révolution ayant pour axe commun la droite qui joint leur sommet, laquelle est perpendiculaire au plan de la ligne de contact.*

Donc, 1.° *toute surface conique qui, ayant son sommet au foyer d'une surface de révolution du second ordre, passe par une section plane quelconque de cette surface de révolution, est elle-même une surface conique de révolution ;* 2.° *la droite qui joint le foyer au pôle du plan de la section, faite dans la surface du second ordre, est l'axe de la surface conique ;* 3.° *enfin cet axe est perpendiculaire au plan déterminé par le foyer et par la commune section du plan directeur et du plan de la section faite dans la surface du second ordre.*

On sait que *le centre d'une sphère, le sommet d'un cône circonscrit et le cercle de contact sont situés sur une même autre sphère.*

Donc, *le plan directeur d'une surface de révolution du second* *ordre, une surface conique circonscrite et le plan de la ligne de contact touchent une autre surface de révolution du second ordre, de même foyer que la première.* On tirerait de là des conséquences analogues à celles qui ont été énoncées (4).

On sait que *le lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les faces sont constamment tangentes à une surface quelconque du second ordre, pourvue d'un centre, est une sphère qui lui est concentrique.*

Donc, *si un angle trièdre tri-rectangle mobile a son sommet en un point fixe, le plan mobile, déterminé par les intersections de ses trois arêtes avec une surface quelconque du second ordre, enveloppera une surface de révolution de même ordre, dont le foyer sera le sommet fixe de l'angle trièdre mobile.*

On sait que *le lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les faces touchent constamment une surface du second ordre dépourvue de centre, est un plan.*

Donc, *si un angle trièdre tri-rectangle mobile a son sommet en un point fixe, pris sur une surface quelconque du second ordre, le plan déterminé par les intersections de ses trois arêtes avec cette surface passera constamment par un même point de la normale qui répond au sommet de l'angle.*

Etc., etc., etc.

11. On voit donc que *les propriétés angulaires et descriptives d'un système de surfaces de révolution du second ordre* confocales *sont réciproques de celles qui appartiennent à un système de sphères, situées arbitrairement dans l'espace.* Conséquemment, tout théorème ou tout problème relatif à de telles sphères a nécessairement son analogue relatif à un pareil nombre de surfaces de révolution confocales du second ordre. Ainsi, par exemple, de ce que les plans cordes communs à trois sphères, prises deux à deux, se coupent tous trois suivant une même droite, et de ce que les plans cordes communs à quatre sphères, prises également deux à deux, con-

courent tous six au même point, il s'ensuit que les surfaces coniques circonscrites à trois surfaces de révolution confocales du second ordre, prises deux à deux, ont leurs trois sommets sur une même droite, et que les surfaces coniques circonscrites à quatre surfaces de révolution confocales du second ordre, prises également deux à deux, ont leurs six sommets situés dans un même plan, aux intersections de quatre droites.

Voici encore deux applications :

Il est manifeste que, *si un angle trièdre mobile et invariable a ses faces respectivement tangentes à trois sphères concentriques, son sommet décrira, dans l'espace, une quatrième sphère, concentrique à ces trois-là, tandis que le plan des trois points de contact enveloppera une cinquième sphère, qui leur sera également concentrique.*

Donc, *lorsque trois surfaces de révolution confocales du second ordre ont le même plan directeur, si un angle trièdre, mobile et invariable quelconque, tourne autour de son sommet, fixé à leur foyer commun, le plan des intersections respectives de ses arêtes avec ces trois surfaces enveloppera une quatrième surface de révolution du second ordre, et le point de concours des plans tangens à ces surfaces en ces trois points en décrira une cinquième. En outre, ces deux dernières auront même foyer et même plan directeur que les trois autres.*

On prouve aisément que *la sphère qui a pour diamètre la distance entre les centres de similitude directe et inverse de deux sphères données est telle que, de chacun des points de sa surface, on voit ces deux sphères sous le même angle.*

Donc, *si un plan se meut dans l'espace, de telle sorte qu'il coupe constamment deux surfaces de révolution confocales du second ordre suivant des courbes qui appartiennent à des cônes de révolution égaux, ayant leur foyer pour sommet commun, ce plan enveloppera une troisième surface de révolution du second ordre, de même foyer que les deux premières.*

Et de là encore,

Si un plan se meut dans l'espace, de manière que ses intersections avec trois surfaces de révolution confocales du second ordre, appartiennent à trois cônes égaux de révolution, ayant leur foyer pour sommet commun, ce plan enveloppera une surface conique du second ordre.

12. Nous croyons devoir déclarer, en terminant, qu'il est fort loin de notre pensée de prétendre nous attribuer la propriété exclusive des divers théorèmes que nous venons de démontrer, et dont il nous eût été facile d'étendre indéfiniment la liste. Nous ne doutons pas que quelques-uns d'entre eux ne soient déjà connus, et il se pourrait même que tous eussent déjà été découverts par d'autres que par nous. Tout ce que nous pouvons affirmer avec certitude, c'est qu'en rédigeant l'article qu'on vient de lire, nous ne nous sommes uniquement aidés que du contenu de la lettre de M. Poncelet déjà citée. C'est sans doute un devoir, lorsqu'on s'aide du travail d'autrui, de citer soigneusement les sources où l'on a puisé, mais on serait évidemment découragé de toutes recherches si, après être parvenu, par ses propres méditations, à quelque résultat que l'on croit nouveau, on était tenu, avant de rien mettre au jour, de lire tout ce qui aurait pu être écrit sur le même sujet.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux premiers problèmes de géométrie proposés à la pag. 124 du présent volume ;

Par M. Vallès, élève ingénieur des ponts et chaussées.

PROBLÈME I. *Dans l'intérieur d'un triangle, on en a construit un autre, à volonté, dont les côtés sont respectivement pa-*

rallèles aux siens, et qui est tourné dans le même sens. *Les côtés du triangle intérieur, prolongés jusqu'au périmètre de l'autre, partagent celui-ci en sept parties. Quelles sont les relations diverses qui existent entre ces parties ?*

Solution. Les sept parties du triangle divisé sont:

1.° Le triangle intérieur que nous désignerons par Δ;

2.° Trois parallélogrammes que nous désignerons par P, P', P'';

3.° Enfin, trois trapèzes, respectivement opposés, que nous désignerons par T, T', T''.

Par celui des trois sommets de Δ qui lui est commun avec P, concevons une parallèle au côté opposé; cette droite divisera respectivement les deux trapèzes T' et T'', en deux parallélogrammes p' et p'', et en deux triangles δ'' et δ', respectivement opposés; de sorte que l'on aura

$$p'+\delta''=T', \qquad p''+\delta'=T''; \qquad (1)$$

mais alors les six parties

$$\begin{matrix} P, & p', & p'', \\ \Delta, & \delta', & \delta'', \end{matrix}$$

se trouvant dans le cas du *théorème II* (pag. 114), on aura, comme alors,

$$P^2=4\delta'\delta'', \qquad p'^2=4\Delta\delta'', \qquad p''^2=4\Delta\delta'; \qquad (2)$$

et il s'agira d'éliminer p', p'', δ', δ'' entre les cinq équations (1) et (2).

En mettant dans les trois dernières les valeurs de δ' et δ'' tirées des deux premières, il vient

$$P^2=4(T'-p')(T''-p''), \qquad (3)$$

$$\left.\begin{matrix} p'^2=4\Delta(T'-p'), \\ p''^2=4\Delta(T''-p''). \end{matrix}\right\} \qquad (4)$$

Des équations (4) on tire facilement

$$p'=2\sqrt{\Delta(\Delta+T')}-2\Delta\ ,$$

$$p''=2\sqrt{\Delta(\Delta+T''')}-2\Delta\ ;$$

et de là

$$T'-p'=2\Delta+T'-2\sqrt{\Delta(\Delta+T')}=(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})^2\ ,$$

$$T''-p''=2\Delta+T''-2\sqrt{\Delta(\Delta+T'')}=(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta})^2\ ;$$

substituant dans l'équation (4) et extrayant la racine quarrée des deux membres, on aura finalement

$$P=2(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta})\ .$$

Mais, comme nous aurions pu raisonner sur P' ou P'', comme nous avons raisonné sur P, il s'ensuit que les relations demandées entre les sept parties du triangle sont les trois suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} P=2(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta})\ , \\ P'=2(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta+T}-\sqrt{\Delta})\ ; \\ P''=2(\sqrt{\Delta+T}-\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})\ . \end{array}\right\}\quad (1)$$

Ces équations donnent les valeurs de P, P', P'', lorsque les autres parties sont connues.

Il est facile d'en déduire d'autres qui donnent les valeurs de T, T', T'', en fonction de P, P', P'' et Δ. En divisant, en effet, par chacune d'elles le produit des deux autres, il vient, en chassant les dénominateurs,

$$P'P''=2P(\sqrt{\Delta+T}-\sqrt{\Delta})^2\ ,$$

$$P''P=2P'(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})^2\ ,$$

$$PP'=2P''(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta})^2\ ;$$

multipliant respectivement celles-ci par $2P$, $2P'$, $2P''$ et extrayant la racine quarrée des deux membres des équations résultantes, on aura

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{2PP'P''}=2P(\sqrt{\Delta+T}-\sqrt{\Delta})\ , \\ \sqrt{2PP'P''}=2P'(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})\ , \\ \sqrt{2PP'P''}=2P''(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta})\ ;\end{array}\right\}\quad(5)$$

d'où, en transposant,

$$2P\sqrt{\Delta+T}=2P\sqrt{\Delta}+\sqrt{2PP'P''}\ ,$$

$$2P'\sqrt{\Delta+T'}=2P'\sqrt{\Delta}+\sqrt{2PP'P''}\ ,$$

$$2P''\sqrt{\Delta+T''}=2P''\sqrt{\Delta}+\sqrt{2PP'P''}\ ;$$

puis, en quarrant de nouveau, réduisant et divisant respectivement par $2P$, $2P'$, $2P''$,

$$\left.\begin{array}{l}2PT=P'P''+2\sqrt{2\Delta PP'P''}\ , \\ 2P'T'=P''P+2\sqrt{2\Delta PP'P''}\ , \\ 2P''T''=PP'+2\sqrt{2\Delta PP'P''}\ ;\end{array}\right\}\quad\text{(II)}$$

équations qui donneront T, T', T'', lorsque tout le reste sera connu.

En prenant la racine quarrée du double du produit des équations (I), on obtient

$$4(\sqrt{\Delta+T}-\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta})=\sqrt{2PP'P''}\ .\quad\text{(III)}$$

En égalant entre eux les seconds membres des équations (5), on obtient cette double équation

$$P(\sqrt{\Delta+T}-\sqrt{\Delta})=P'(\sqrt{\Delta+T'}-\sqrt{\Delta})=P''(\sqrt{\Delta+T''}-\sqrt{\Delta}) \ . \quad \text{(IV)}$$

On obtient enfin, en égalant entre elles les valeurs des radicaux, dans les équations (II),

$$2PT-P'P''=2P'T'-P''P=2P''T''-PP' \ ; \qquad \text{(V)}$$

équations délivrées de Δ.

Si, dans ces divers résultats, on suppose $\Delta=0$, on retombe sur les relations obtenues *théorème III* (pag. 114), comme cela doit être.

PROBLÈME II. Dans l'intérieur d'un tétraèdre, on en a construit un autre dont les faces sont respectivement parallèles aux siennes, et qui est tourné dans le même sens *que lui. Les faces du tétraèdre intérieur, prolongées jusqu'à la surface de l'autre, partagent celui-ci en quinze parties. Quelles sont les relations diverses qui existent entre ces parties ?*

Solution. Les quinze parties du tétraèdre divisé sont :

1.° Le tétraèdre intérieur que nous représenterons par Δ ;

2.° Quatre parallélipipèdes, que nous représenterons par P, P', P'', P''' ;

3.° Quatre troncs de tétraèdres, à bases parallèles, respectivement opposés, que nous représenterons par T, T', T'', T''' ;

4.° Enfin, six troncs de parallélipipède, que nous représenterons respectivement par (pp'), (pp''), (pp'''), $(p''p''')$, $(p'''p')$, $(p'p'')$, suivant les parallélipipèdes entre lesquels ils se trouveront situés.

Par celui des quatre sommets du tétraèdre Δ qui lui est commun avec le parallélipipède P, concevons un plan parallèle à celui de la face opposée ; ce plan divisera respectivement, savoir :

1.° Les troncs de parallélipipèdes (pp'), (pp''), (pp''') en trois parallélipipèdes Π', Π'', Π''', et en trois troncs de prismes quadrangulaires, ayant une arête latérale nulle, que nous désignerons par $(p\varpi')$, $(p\varpi'')$, $(p\varpi''')$;

2.° Les trois troncs de tétraèdres T', T'', T''', en trois tétraèdres δ', δ'', δ''', et en trois troncs de prismes quadrangulaires ayant une arête latérale nulle, que nous représenterons par $(\varpi'\varpi''')$, $(\varpi'''\varpi')$, $(\varpi'\varpi'')$.

En conséquence, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l}\Pi'+(p\varpi')=(pp')\,,\\ \Pi''+(p\varpi'')=(pp'')\,,\\ \Pi'''+(p\varpi''')=(pp''')\,;\end{array}\right\}\ (1)\qquad \left.\begin{array}{l}t'+(\varpi''\varpi''')=T'\,,\\ t''+(\varpi'''\varpi')=T''\,,\\ t'''+(\varpi'\varpi'')=T'''\,.\end{array}\right\}\ (2)$$

Mais alors les quatorze corps

$$P\,,\ \Pi'\,,\ \Pi''\,,\ \Pi'''\,,\quad (p\varpi')\,,\ (p\varpi'')\,,\ (p\varpi''')\,,$$

$$\Delta,\ \delta',\ \delta'',\ \delta''',\quad (\varpi''\varpi''')\,,\ (\varpi'''\varpi')\,,\ (\varpi'\varpi'')\,,$$

se trouvant dans le cas du *théorème V* (pag. 121), on aura, comme alors,

$$\left.\begin{array}{l}(p\varpi')=3(\sqrt[3]{\delta''}+\sqrt[3]{\delta'''})\sqrt[3]{\delta''\delta'''}\,,\\ (p\varpi'')=3(\sqrt[3]{\delta'''}+\sqrt[3]{\delta'})\sqrt[3]{\delta'''\delta'}\,,\\ (p\varpi''')=3(\sqrt[3]{\delta'}+\sqrt[3]{\delta''})\sqrt[3]{\delta'\delta''}\,;\end{array}\right\}\quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l}(\varpi''\varpi''')=3(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta'})\sqrt[3]{\Delta\delta'}\,,\\ (\varpi'''\varpi')=3(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta''})\sqrt[3]{\Delta\delta''}\,,\\ (\varpi'\varpi'')=3(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta'''})\sqrt[3]{\Delta\delta'''}\,;\end{array}\right\}\quad (4)$$

$$P^3=216\delta'\delta''\delta'''\,;\qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Pi'^3&=216\Delta\delta''\delta''' ,\\
\Pi''^3&=216\Delta\delta'''\delta' ,\\
\Pi'''^3&=216\Delta\delta'\delta'' .
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Il s'agira donc d'éliminer, entre ces seize équations, les douze quantités

$$\begin{array}{cccc}
\delta' , & \Pi' , & (p\varpi') , & (\varpi''\varpi''') ,\\
\delta'' , & \Pi'' , & (p\varpi'') , & (\varpi'''\varpi') ,\\
\delta''' , & \Pi''' , & (p\varpi''') , & (\varpi'\varpi'') .
\end{array}$$

En tirant d'abord les valeurs des six dernières des équations (1) et (2), pour les substituer dans les équations (3) et (4), celles-ci deviennent

$$\left.\begin{aligned}
(pp')-\Pi'&=3(\sqrt[3]{\delta''}+\sqrt[3]{\delta'''})\sqrt[3]{\delta''\delta'''} ,\\
(pp'')-\Pi''&=3(\sqrt[3]{\delta'''}+\sqrt[3]{\delta'})\sqrt[3]{\delta'''\delta'} ,\\
(pp''')-\Pi'''&=3(\sqrt[3]{\delta'}+\sqrt[3]{\delta''})\sqrt[3]{\delta'\delta''} ;
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}
T'-\delta'&=3(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta'})\sqrt[3]{\Delta\delta'} ,\\
T''-\delta''&=3(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta''})\sqrt[3]{\Delta\delta''} ,\\
T'''-\delta'''&=3(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta'''})\sqrt[3]{\Delta\delta'''} .
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Les équations (8) peuvent, ensuite, être mises sous cette forme

$$\Delta+T'=(\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta'}) ,$$

$$\Delta+T''=(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta''})^3\,,$$

$$\Delta+T'''=(\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\delta'''})^3\,;$$

puis sous celle-ci

$$\sqrt[3]{\Delta+T'}=\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\Delta\delta'}\,,$$

$$\sqrt[3]{\Delta+T''}=\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\Delta\delta''}\,,$$

$$\sqrt[3]{\Delta+T'''}=\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{\Delta\delta'''}\,;$$

ce qui donne

$$\left.\begin{aligned}\delta'&=(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})^3\,,\\ \delta''&=(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})^3\,,\\ \delta'''&=(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})^3\,.\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

En subtituant ces valeurs dans les équations (7), on en tire

$$\left.\begin{aligned}&\Pi'=(pp')\\ &-3\{(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})+(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})\}(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta}),\\ &\Pi''=(pp'')\\ &-3\{(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})+(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})\}(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta}),\\ &\Pi'''=(pp''')\\ &-3\{(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})+(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})\}(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta}),\end{aligned}\right\}\;10)$$

Ces dernières valeurs et les valeurs (9), substituées dans les équations (5) et (6), donnent finalement

$$P=6\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})\ ,$$

$$(pp')=3(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}+\sqrt[3]{\Delta+T'''})\ ,$$

$$(pp'')=3(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}+\sqrt[3]{\Delta+T'})\ ,$$

$$(pp''')=3(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}+\sqrt[3]{\Delta+T''})\ .$$

Il est clair présentement que, ce que nous avons dit du parallélipipède P, nous aurions pu le dire également des parallélipipèdes P', P'', P''', de sorte que les relations demandées entre les quinze parties du tétraèdre proposé sont les dix suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
P&=6(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})\ ,\\
P'&=6(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})\ ,\\
P''&=6(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})\ ,\\
P'''&=6(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})\ ;
\end{aligned}\right\}\quad\text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned}
(pp')&=3(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}+\sqrt[3]{\Delta+T'''})\,,\\
(pp'')&=3(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}+\sqrt[3]{\Delta+T'})\,,\\
(pp''')&=3(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}+\sqrt[3]{\Delta+T''})\,,\\
(p''p''')&=3(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T}+\sqrt[3]{\Delta+T'})\,,\\
(p'''p')&=3(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T}+\sqrt[3]{\Delta+T''})\,,\\
(p'p'')&=3(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T}+\sqrt[3]{\Delta+T'''})\,.
\end{aligned}\right\}\ \text{(II)}$$

Les équations (1) donnent P, P', P'', P''', en fonction des cinq quantités Δ, T, T', T'', T'''. Il est très-facile d'en déduire d'autres qui donnent T, T', T'', T''', en fonction des cinq quantités Δ, P, P', P'', P'''.

En divisant, en effet, tour à tour, par le quarré de chacune d'elles le produit des trois autres, il vient

$$P'P''P'''=6P^2(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})^3\,,$$

$$P''P'''P=6P'^2(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})^3\,,$$

$$P'''PP'=6P''^2(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})^3\,,$$

$$PP'P''=6P'''^{3}(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})^{3}\ ;$$

multipliant respectivement celles-ci par $36P$, $36P'$, $36P''$, $36P'''$, et, extrayant ensuite la racine quarrée des deux membres des équations résultantes, on aura

$$\left.\begin{array}{l}
\sqrt[3]{36PP'P''P'''}=6P(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})\ , \\
\sqrt[3]{36PP'P''P'''}=6P'(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta}), \\
\sqrt[3]{36PP'P''P'''}=6P''(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})\ , \\
\sqrt[3]{36PP'P''P'''}=6P'''(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})\ ,
\end{array}\right\}\quad(11)$$

d'où, en transposant,

$$\left.\begin{array}{l}
6P\sqrt[3]{\Delta+T}=6P\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{36PP'P''P'''}\ , \\
6P'\sqrt[3]{\Delta+T'}=6P'\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{36PP'P''P'''}\ , \\
6P''\sqrt[3]{\Delta+T''}=6P''\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{36PP'P''P'''}\ , \\
6P'''\sqrt[3]{\Delta+T'''}=6P'''\sqrt[3]{\Delta}+\sqrt[3]{36PP'P''P'''}\ ;
\end{array}\right\}\quad(12)$$

d'où encore en cubant, réduisant et divisant respectivement par $18P$, $18P'$, $18P''$, $18P'''$

$$\left.\begin{array}{l}
12P^2T=2P'P''P'''+\sqrt[3]{36\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}+6P\sqrt[3]{36\Delta^2 PP'P''P'''}\ ,\\[2ex]
12P'^2T'=2P''P'''P+\sqrt[3]{36\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}+6P'\sqrt[3]{36\Delta^2 PP'P''P'''}\ ,\\[2ex]
12P''^2T''=2P'''PP'+\sqrt[3]{36\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}+6P''\sqrt[3]{36\Delta^2 PP'P''P'''}\ ,\\[2ex]
12P'''^2T'''=2PP'P''+\sqrt[3]{36\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}+6P'''\sqrt[3]{36\Delta^2 PP'P''P'''}\ ;
\end{array}\right\}\ \text{(III)}$$

équations qui donneront les valeurs de T, T', T'', T'''.

Au moyen des équations (11) et (12), les équations (II) deviennent facilement

$$\left.\begin{array}{l}
2P''P'''(pp')=PP'(P''+P''')+2\sqrt[3]{6\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}\ ,\\[2ex]
2P'''P'(pp'')=PP''(P'''+P')+2\sqrt[3]{6\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}\ ,\\[2ex]
2P'P''(pp''')=PP'''(P'+P'')+2\sqrt[3]{6\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}\ ,\\[2ex]
2PP'(p''p''')=P''P'''(P+P')+2(\sqrt[3]{6\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}\ ,\\[2ex]
2PP''(p'''p')=P'''P'(P+P'')+2\sqrt[3]{6\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}\ ,\\[2ex]
2PP'''(p'p'')=P'P'''(P+P''')+2\sqrt[3]{6\Delta P^2P'^2P''^2P'''^2}\ ;
\end{array}\right\}\ \text{(IV)}$$

équations délivrées de T, T', T'', T'''.

En prenant la racine cubique de 36 fois le produit des équations (1) on obtient

$$36(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{T'})(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})=\sqrt[3]{36PP'P''P'''}\,. \quad \text{(V)}$$

En égalant entre eux les seconds membres des équations (11), on obtient la triple équation

$$P(\sqrt[3]{\Delta+T}-\sqrt[3]{\Delta})=P'(\sqrt[3]{\Delta+T'}-\sqrt[3]{\Delta})=P''(\sqrt[3]{\Delta+T''}-\sqrt[3]{\Delta})=P'''(\sqrt[3]{\Delta+T'''}-\sqrt[3]{\Delta})\,. \quad \text{(VI)}$$

On tire enfin facilement des équations (IV) la triple équation

$$PP'(p''p''')+P''P'''(pp')=PP''(p'''p')+P'''P'(pp'')=PP'''(p'p'')+P'P''(pp''')\,. \quad \text{(VII)}$$

Toutes ces diverses relations, en y supposant Δ nul, deviennent celles du *théorème V* (pag. 121) ainsi que cela doit être.

Dans tout ce qui précède, nous avons *formellement* supposé que le triangle ou le tétraèdre intérieur étaient tournés dans le *même sens* que le triangle ou le tétraèdre à partager; et c'est qu'en effet, lorsqu'ils sont tournés en *sens inverse*, les formules sont fort compliquées et peu maniables. Bornons-nous donc à une indication sommaire de ce qui arrive dans ce cas.

I. Pour le triangle, les sept parties sont :

1.° Le triangle intérieur Δ;

2.° Trois autres triangles T, T', T'';

3.° Enfin trois pentagones ou troncs de parallélogrammes P, P', P'', respectivement opposés.

Par des considérations analogues à celles que nous avons employées ci-dessus, on trouve, entre ces sept parties, trois équations de la forme

$$\Delta+P=2(\sqrt{T+T''+P'}-\sqrt{T})(\sqrt{T+T'+P''}-\sqrt{T})\,.$$

II. Pour le tétraèdre, les quinze parties sont :

1.° Le tétraèdre intérieur Δ ;

2.° Quatre autres tétraèdres T, T', T'', T''' ;

3.° Quatre troncs de parallélipipèdes, respectivement opposés P, P', P'', P''', à chacun desquels il manque le tétraèdre Δ, pour être un parallélipipède complet ;

4.° Enfin six tétraèdres doublement tronqués, à chacun desquels il manque, pour être un tétraèdre complet, deux des quatre tétraèdres T, T', T'', T''', et qu'en conséquence nous représenterons par (tt'), (tt''), (tt'''), $(t''t''')$, $(t'''t')$, $(t't'')$, suivant les deux tétraèdres qui leur manqueront.

Par des considérations analogues à celles que nous avons employées ci-dessus, on trouve, entre ces quinze parties, d'abord quatre équations de la forme

$$\Delta+P=6\{\sqrt[3]{T+T'+(tt')}-\sqrt[3]{T}\}\{\sqrt[3]{T+T''+(tt'')}-\sqrt[3]{T}\}\{\sqrt[3]{T+T'''+(tt''')}-\sqrt[3]{T}\},$$

puis quatre groupes d'équations de la forme

$$P+(t''t''')=3\{\sqrt[3]{T'+T''+(t't'')}-\sqrt[3]{T'}\}\{\sqrt[3]{T'+T'''+(t't''')}-\sqrt[3]{T'}\}\{\sqrt[3]{T'+T''+(t't'')}+\sqrt[3]{T'+T'''+(t't''')}\},$$

$$P+(t'''t')=3\{\sqrt[3]{T''+T'''+(t''t''')}-\sqrt[3]{T''}\}\{\sqrt[3]{T''+T'+(t''t')}-\sqrt[3]{T''}\}\{\sqrt[3]{T''+T'''(t''t''')}+\sqrt[3]{T''+T'+(t''t')}\},$$

$$P+(t't'')=3\{\sqrt[3]{T'''+T'(t'''t')}-\sqrt[3]{T'''}\}\{\sqrt[3]{T'''+T''+(t'''t'')}-\sqrt[3]{T'''}\}\{\sqrt[3]{T'''+T'+(t'''t')}+\sqrt[3]{T'''+T''+(t'''t'')}\};$$

mais il est clair que ces douze dernières doivent être réductibles à six seulement (*).

(*) Au moment où ceci s'imprimait, nous avons reçu de M. Noël, professeur à Luxembourg, une solution qui rentre exactement dans celle-là.

J. D. G.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'analyse.

Des variables x_1, x_2, x_3, ... x_m, étant liées entre elles par $n<m$ équations

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_m)=0\,,$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_m)=0\,,$$

$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_m)=0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,$$

$$\varphi_n(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_m)=0\,;$$

comment peut-on déterminer ces variables de manière à ce qu'elles satisfassent à l'une des conditions suivantes :

1.° Que la moindre d'entre elles soit la plus grande possible ;

2.° Que la plus grande d'entre elles soit la moindre possible ;

3.° Que l'excès de la plus grande sur la plus petite soit le plus grand ou le moindre possible ?

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Problèmes et théorèmes sur les polygones et sur les polyèdres;

Par M. A. Timmermans, professeur de physique à l'Athenée de Tournay.

1. *Problème I. Construire, sur le plan d'un triangle, une droite telle que la somme des distances de chacun de ses points aux trois côtés du triangle soit constante?*

Solution. Soit ABC (fig. 1) le triangle dont il s'agit. Soit porté un quelconque AB des côtés sur les deux autres AC et BC de A en D et de B en E; la droite indéfinie DE sera la droite demandée.

Démonstration. Soit P un quelconque des points de DE, compris entre D et E, duquel soient abaissées sur les côtés AB, AC, BC, les perpendiculaires PF, PG, PH, et soient menées en outre les droites PA èt PB; ces droites diviseront le quadrilatère ADEB en trois triangles DPA, APB, BPE, ayant, par construction, des bases égales DA, AB, BE et pour hauteurs respectives les perpendiculaires PG, PF, PH; on aura donc l'aire du quadrilatère en multipliant la moitié de l'une AB de ces bases par la somme PG+PF+PH des trois perpendiculaires; cette somme est donc égale au double de l'aire du quadrilatère divisé par AB; elle est donc indépendante de la situation du point P sur DE, entre D et E; cette somme est donc constante.

2. *Remarque I.* Si le point P était pris sur l'un ou sur l'autre des deux prolongemens de CD hors du triangle, les mêmes choses auraient encore lieu, pourvu qu'on prît, avec des signes con-

traires, les perpendiculaires qui tomberaient de différens côtés du périmètre de ce triangle.

3. *Remarque II.* Nous avons tacitement supposé que le côté AB était le plus petit des trois. Si le contraire arrivait, l'un ou l'autre des deux points D et E ou même tous les deux se trouveraient sur les prolongemens de AC et BC hors du triangle. La droite DE pourrait donc être tout-à-fait extérieure à ce triangle ; mais elle n'en jouirait pas moins de la propriété annoncée, pourvu que l'on prît toujours les trois distances avec des signes convenables.

4. *Remarque III.* Si l'un des deux côtés AC et BC était égal à AB, c'est-à-dire, si le triangle était isocèle, la droite DE se confondrait avec le côté restant ; et, si le triangle était équilatéral, toute droite menée par le point C résoudrait le problème ; et, comme tout point du plan du triangle peut être supposé appartenir à une telle droite, il en résulte ce théorème connu : *La somme algébrique des distances de chacun des points du plan d'un triangle équilatéral à ses trois côtés est une quantité constante.* Il est visible d'ailleurs que cette quantité constante n'est autre que la hauteur du triangle ; puisque c'est à elle seule que se réduit la somme des trois distances, lorsque le point que l'on considère est l'un des sommets.

5. *PROBLEME II. Construire, dans l'espace, un plan tel que la somme des distances de chacun de ses points aux quatre faces d'un tétraèdre soit constante?*

Solution. Soit ABCD (fig. 2) le tétraèdre dont il s'agit. Si, sur les trois arêtes DA, DB, DC, on détermine des points E, F, G tels qu'en menant les droites EF, FG, GE, les quadrilatères AEFB, BFGC, CGEA soient tous trois équivalens au triangle ABC ; le plan indéfini, déterminé par les trois points E, F, G résoudra le problème (*).

(*) La détermination des trois points E, F, G est facile. En représentant respectivement par a, b, c, d les aires des faces du tétraèdre opposées aux sommets A, B, C, D, et posant, pour abréger, *Démonstration.* Considérons, en effet, un quelconque P des points de l'intérieur du triangle EFG comme le sommet commun de quatre pyramides, l'une triangulaire, ayant pour base ABC, et les trois autres quadrangulaires, ayant pour bases respectives les quadrilatères AEFB, BFGC, CGEA; ces pyramides auront, par construction, des bases équivalentes et leurs hauteurs seront les distances du point P aux quatre faces du tétraèdre. De plus, elles composeront, par leur ensemble, le tronc de tétraèdre ayant pour ses deux bases ABC et EFG. Il suffira donc, pour avoir le volume de ce tronc, de multiplier le tiers de l'aire de l'une des bases; de ABC, par exemple, par la somme des quatre hauteurs, c'est-à-dire, par la somme des distances du point P aux quatre faces du tétraèdre; donc cette somme est égale au triple du volume du tronc divisé par l'aire du triangle ABC; elle est donc indépendante de la situation du point P, dans l'intérieur du triangle EFG; cette somme est donc constante.

6. *Remarque I.* Si le point P était pris sur le prolongement du plan du triangle EFG hors du tétraèdre, les mêmes choses auraient encore lieu, pourvu que l'on prît, avec des signes contraires, les perpendiculaires qui tomberaient de différens côtés de la surface de ce tétraèdre.

7. *Remarque II.* Nous avons tacitement supposé que la face ABC était la plus petite des quatre. Si le contraire arrivait, un ou plusieurs des trois points E, F, G, ou même tous les trois se trouveraient sur les prolongemens de AD, BD, CD hors du tétraèdre.

$$\lambda=\sqrt[3]{\frac{(a-d)(b-d)(c-d)}{abc}},$$

on trouvera facilement

$$DE=DA.\frac{\lambda a}{a-d}\,,\quad DF=DB.\frac{\lambda b}{b-d}\,,\quad DG=DC.\frac{\lambda c}{c-d}\,.$$

Le plan EFG pourrait donc être tout-à-fait extérieur à ce tétraèdre, mais il n'en jouirait pas moins de la propriété annoncée, pourvu que l'on prît toujours les quatre distances avec des signes convenables.

8. *Remarque III.* Si deux des faces ADB, BDC, CDA du tétraèdre étaient égales à la face ABC, c'est-à-dire, si le tétraèdre était isocèle, le plan EFG se confondrait avec la face restante; et, si le tétraèdre était régulier, tout plan conduit par le sommet D résoudrait le problème; et, comme tout point de l'espace peut être supposé appartenir à un tel plan, il en résulte ce théorème connu: *La somme algébrique des distances de chacun des points de l'espace aux plans des quatre faces d'un tétraèdre régulier est une quantité constante.* Il est visible d'ailleurs que cette quantité constante n'est autre que la hauteur du tétraèdre, puisque c'est à elle seule que se réduit la somme des quatre distances, lorsque le point de l'espace que l'on considère est un des sommets.

9. *THÉORÈME I. Toute parallèle à une droite tracée sur le plan d'un triangle, de manière que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux trois côtés du triangle est une quantité constante, jouit également de cette propriété; et elle en jouit exclusivement entre toutes les droites qui peuvent être tracées dans le plan de ce triangle.*

Démonstration. Soit DE (fig. 3) une droite tracée sur le plan d'un triangle ABC, de manière qu'on ait, comme ci-dessus, AD$=$BE$=$AB; et soit D′E′ une parallèle quelconque à DE, coupant les côtés AC et BC, respectivement, en D′ et E′. Soit P′ un quelconque des points de D′E′, compris entre les points D′ et E′, et soit menées P′A et P′B, P′D et P′E.

L'aire du quadrilatère ADEB est indépendante de la situation du point P′ entre D′ et E′, et il en est de même de l'aire du triangle DP′E, il en sera donc de même de l'excès de la première surface sur la seconde. Or, cet excès est la somme des aires des trois triangles DP′A, AP′B, BP′E, laquelle a pour expression $\frac{1}{2}$AB, multiplié par la somme des distances du point P′ aux trois côtés du triangle ABC; donc ce produit est indépendant de la situation du point P′ sur D′E′; puis donc que son premier facteur $\frac{1}{2}$AB est constant, l'autre doit l'être également.

Si, au contraire, D′E′ n'était pas parallèle à DE, l'aire du triangle DP′E, dont la base DE serait constante, tandis que sa hauteur varierait avec la situation du point P′, serait variable; le produit de $\frac{1}{2}$AB par la somme des distances du point P′ aux trois côtés du triangle ABC serait donc aussi variable; et, puisque son premier facteur $\frac{1}{2}$AB est constant, c'est l'autre qui varierait alors.

10. *Remarque.* Bien que nous ayons supposé que la droite D′E′ était comprise entre DE et le côté AB, et que le point P′ était entre les points D′ et E′, il serait facile de modifier la démonstration de manière à la rendre propre à toute autre situation de cette parallèle et du point P′ sur D′E′; pourvu qu'on eût constamment égard aux signes des distances.

11. *THÉORÈME II. Tout plan parallèle à un plan tel que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux quatre faces d'un tétraèdre est constante, jouit égalemeut de cette propriété; et il en jouit exclusivement entre tous les plans que l'on peut concevoir dans l'espace.*

Démonstration. Soit EFG (fig. 4) un plan coupant le tétraèdre ABCD, de telle sorte qu'on ait, comme ci-dessus, *surf.*AEFB=*surf.*BFGC=*surf.*CGEA=*surf.*ABC; et soit E′F′G′ un plan parallèle quelconque à celui-là, coupant les arêtes AD, BD, CD, respectivement en E′, F′, G′. Soit P′ un point situé d'une manière quelconque, dans l'intérieur du triangle E′F′G′; et soient menées P′A, P′B et P′C, P′E, P′F et P′G.

Le volume du tronc de tétraèdre dont les deux bases sont ABC et EFG est indépendant de la situation du point P′ sur le plan E′F′G′; et il en est de même du volume du tétraèdre dont la base est en EFG et le sommet en P′; il en sera donc de même de l'excès du premier de ces deux volumes sur le second. Or, cet excès est la somme des volumes de quatre pyramides, l'une triangulaire, ayant pour base ABC, et les trois autres quadrangulaires, ayant pour bases AEFB, BFGC, CGEA ; ces pyramides ayant toutes leur sommet commun en P′ ; laquelle somme de volumes a pour expression $\frac{1}{2}$*surf.*ABC, multiplié par la somme des distances du point P′ aux quatre faces du tétraèdre ; donc ce produit est indépendant de la situation du point P′, dans l'intérieur du triangle E′F′G′ ; puis donc que son premier facteur $\frac{1}{3}$*surf.*ABC est constant, l'autre doit l'être également.

Si, au contraire, le plan E′F′G′ n'était pas parallèle au plan EFG, le volume du tétraèdre P′EFG, dont la base EFG serait constante, tandis que sa hauteur varierait avec la situation du point P′, serait variable ; le produit de $\frac{1}{3}$*surf.*ABC par la somme des distances du point P′ aux quatre faces du tétraèdre ABCD serait donc aussi variable ; et, puisque son premier facteur $\frac{1}{3}$*surf.*ABC est constant, c'est l'autre qui varierait alors.

12. *Remarque.* Bien que nous ayons supposé que le plan E′F′G′ était compris entre le plan EFG et la face ABC, et que le point P′ était intérieur au triangle E′F′G′, il serait facile de modifier la démonstration de manière à la rendre propre à toute autre situation de ce plan parallèle ainsi que du point P′, par rapport au triangle E′F′G′, pourvu qu'on eût constamment égard aux signes des distances.

13. *PROBLÈME III. Construire, sur le plan d'un triangle, une droite telle que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux trois côtés du triangle soit nulle ?*

Solution. Si l'on divise, par une droite, le supplément de l'un des angles du triangle en deux parties égales, la somme algébrique des distances de chacun des points de cette droite aux deux côtés de cet angle sera nulle ; de sorte que la somme algébrique des distances de chacun de ces points aux trois côtés du triangle sera simplement égale à la distance de ce même point au troisième côté. Donc le point où cette même droite rencontre le troisième côté du triangle sera tel que la somme algébrique de ses distances aux trois côtés du triangle sera nulle. Ce sera donc là un des points de la droite cherchée. Or, on peut construire trois pareils points sur le plan du triangle; ainsi la droite cherchée sera entièrement déterminée.

Et de là résulte ce théorème :

14. *THÉORÈME III. Les points, où les trois côtés d'un triangle sont coupés par les droites qui divisent en deux parties égales les supplémens des angles respectivement opposés, appartiennent tous trois à une même droite, telle que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux trois côtés du triangle est nulle.*

15. *Remarque.* Lorsque le triangle est équilatéral, cette droite passe à l'infini.

16. *PROBLÈME IV. Construire dans l'espace un plan tel que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux quatre faces d'un tétraèdre soit nulle ?*

Solution. Si, par l'un quelconque des arêtes du tétraèdre, on conduit un plan qui divise en deux parties égales le supplément de l'angle dièdre auquel cette arête appartient, la somme algébrique des distances de chacun des points de ce plan aux deux faces de l'angle dièdre sera évidemment nulle; de sorte que la somme des distances de chacun des points de ce plan aux quatre faces du tétraèdre sera simplement égale à la somme des distances du même point aux deux faces restantes du tétraèdre. Si l'on en fait de même pour l'angle dièdre auquel appartient l'arête opposée, on obtiendra un second plan tel que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux quatre faces du tétraèdre sera simplement égale à la somme des distances du même point aux deux premières faces de ce tétraèdre; donc, la somme algébrique des distances de chacun des points de l'intersection de ces deux plans aux quatre faces du tétraèdre sera nulle; et, par conséquent, cette intersection sera située dans le plan cherché. Or, le tétraèdre offre trois pareilles droites; ainsi le plan cherché sera entièrement déterminé.

Et de là résulte ce théorème:

17. *THÉORÈME IV. Les droites, suivant lesquelles se coupent les plans qui divisent en deux parties égales les supplémens des angles dièdres opposés d'un tétraèdre, appartiennent toutes trois à un même plan, tel que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux quatre faces du tétraèdre est nulle.*

18. *Remarque.* Lorsque le tétraèdre est régulier, ce plan passe à l'infini.

La géométrie analytique offre un moyen facile de confirmer tout ce qui précède, et de l'étendre à des polygones d'un nombre quelconque de côtés et à des polyèdres d'un nombre quelconque de faces.

19. Soient en premier lieu C, C', C'', ... tant de droites qu'on voudra, tracées sur un même plan et considérées comme les côtés consécutifs d'un polygone. Rapportons toutes ces droites à deux axes rectangulaires tracés arbitrairement sur leur plan. Soient α, α', α'', ... les angles que font leurs directions avec l'axe des y, β, β', β'', ... les angles que forment ces directions avec l'axe des x et p, p', p'', ... les longueurs des perpendiculaires abaissées de l'origine sur ces mêmes directions. Si l'on représente en outre par P, P', P'', ... les perpendiculaires abaissées sur ces mêmes droites de l'un quelconque (x, y) des points de leur plan, on aura, comme l'on sait,

$$P = x\mathrm{Cos}.\alpha + y\mathrm{Cos}\,\beta - p\ ,$$

$$P' = x\mathrm{Cos}.\alpha' + y\mathrm{Cos}\,\beta' - p'\ ,$$

$$P'' = x\mathrm{Cos}.\alpha'' + y\mathrm{Cos}\,\beta'' - p''\ .$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si donc on veut que la somme $P+P'+P''+\ldots\ldots$ soit égale à une constante k, il faudra qu'on ait

$$(\mathrm{Cos}.\alpha+\mathrm{Cos}.\alpha'+\mathrm{Cos}.\alpha''+\ldots.)x+(\mathrm{Cos}.\beta+\mathrm{Cos}.\beta'+\mathrm{Cos}.\beta''+\ldots)y=(p+p'+p''+\ldots+k)\ ; \quad (1)$$

équation d'une ligne droite, laquelle ne fait que se mouvoir parallèlement à elle-même, lorsqu'on fait simplement varier la longueur constante k. Ainsi,

20. *THÉORÈME V. Le lieu des points du plan d'un polygone quelconque dont la somme algébrique des distances à ses côtés est constante, est une droite dont la direction est indépendante de la grandeur de cette somme.*

21. *Remarque I.* Si le polygone, supposé fermé, avait tous ses côtés égaux, on aurait (*Annales*, tom. XV, pag. 310),

$$\text{Cos}.\alpha+\text{Cos}.\alpha'+\text{Cos}.\alpha''+.....=0\ ,$$

$$\text{Cos}.\beta+\text{Cos}.\beta'+\text{Cos}\,\beta''+......=0\ ;$$

l'équation (1) serait donc absurde, à moins que k ne fût donné de manière à satisfaire à la condition

$$p+p'+p''+.....+k=0\ ;$$

auquel cas tous les points du plan de ce polygone rempliraient la condition demandée.

22. *Remarque II.* Le même calcul prouve que le lieu des points d'un plan dont la somme des distances aux deux côtés d'un angle est constante, est aussi une ligne droite.

23. Soient, en second lieu, F, F', F'', ... tant de plans qu'on voudra, donnés dans l'espace, et considérés comme les faces consécutives d'un polyèdre. Rapportons tous ces plans à trois axes rectangulaires, conduits arbitrairement par un quelconque des points de l'espace. Soient alors α, α', α'', ... les angles que font leurs directions avec le plan des yz ; β, β', β'', ... les angles que font leurs directions avec le plan des zx ; γ, γ', γ'', ... les angles que font leurs directions avec le plan des xy ; et p, p', p'', ... les longueurs des perpendiculaires abaissées de l'origine sur ces mêmes directions. Si l'on représente en outre par P, P', P'', ... les per-

pendiculaires abaissées sur ces mêmes plans de l'un quelconque (x, y, z) des points de l'espace, on aura, comme l'on sait,

$$P = x\text{Cos.}\alpha + y\text{Cos.}\beta + z\text{Cos.}\gamma - p\ ,$$

$$P' = x\text{Cos.}\alpha' + y\text{Cos.}\beta' + z\text{Cos.}\gamma' - p'\ ,$$

$$P'' = x\text{Cos.}\alpha'' + y\text{Cos.}\beta'' + z\text{Cos.}\gamma'' - p''\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si donc on veut que la somme $P+P'+P''+\ldots\ldots.$ soit égale à une constante k, il faudra qu'on ait

$$(\text{Cos.}\alpha+\text{Cos.}\alpha'+\text{Cos.}\alpha''+\ldots)x+(\text{Cos.}\beta+\text{Cos.}\beta'+\text{Cos.}\beta''+\ldots)y+(\text{Cos.}\gamma+\text{Cos.}\gamma'$$

$$+\text{Cos.}\gamma''+\ldots.)z=(p+p'+p''+\ldots\ldots.+k)\ . \qquad (2)$$

Equation d'un plan, lequel ne fait que se mouvoir parallèlement à lui-même, lorsqu'on fait simplement varier la longueur constante k. Ainsi,

24. *THÉORÈME VI. Le lieu des points de l'espace dont la somme algébrique des distances aux faces d'un polyèdre quelconque est constante, est un plan dont la direction est indépendante de la grandeur de cette somme.*

25. *Remarque I.* Si le polyèdre, supposé fermé, avait toutes ses faces équivalentes, on aurait (*Annales*, tom. XV, pag. 344),

$$\text{Cos.}\alpha+\text{Cos.}\alpha'+\text{Cos.}\alpha''+\ldots\ldots=0\ ,$$

$$\text{Cos.}\beta+\text{Cos.}\beta'+\text{Cos.}\beta''+\ldots\ldots=0\ ,$$

$$\text{Cos.}\gamma+\text{Cos.}\gamma'+\text{Cos.}\gamma''+\ldots\ldots=0\ ;$$

l'équation (2) serait donc absurde, à moins que k ne fût donné de manière à satisfaire à la condition

$$p+p'+p''+\dots\dots\dots+k=0 \;;$$

auquel cas tous les points de l'espace rempliraient la condition demandée.

26. *Remarque II.* Le même calcul prouve que le lieu des points de l'espace dont la somme des distances, soit aux deux faces d'un angle dièdre, soit aux faces d'un angle polyèdre quelconque, est également un plan.

Au moyen de tout ce qui précède, rien n'est plus facile que de résoudre les problèmes suivans :

27. *PROBLÈME V. Construire, sur le plan d'un polygone, une droite telle que la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux côtés du polygone soit nulle ?*

Solution. Nous avons déjà résolu ce problème pour le triangle (14).

S'il s'agit d'un quadrilatère, en construisant cette droite pour le triangle formé par trois quelconques de ses côtés, le point où elle coupera le quatrième sera un des points de la droite cherchée. En prenant donc, tour-à-tour, pour quatrième côté, chacun des côtés du quadrilatère, on obtiendra ainsi quatre points de la droite cherchée.

S'agit-il d'un pentagone ; en construisant cette droite, comme il vient d'être dit, pour le quadrilatère formé par quatre quelconques de ses côtés, le point où elle coupera le cinquième sera un des points de la droite demandée. En prenant donc, tour-à-tour, pour cinquième côté chacun des côtés du pentagone, on obtiendra cinq points de la droite cherchée.

On ramenera ainsi successivement le problème relatif à chaque polygone au problème relatif au polygone qui aura un côté de moins.

28. *PROBLÈME VI. Construire dans l'espace un plan tel que*

la somme algébrique des distances de chacun de ses points aux faces d'un polyèdre soit nulle?

Solution. Nous avons déjà résolu le problème pour le tétraèdre (17).

S'il s'agit d'un pentaèdre; en construisant ce plan pour le tétraèdre formé par quatre quelconques de ses faces, la droite, suivant laquelle ce plan coupera la cinquième, appartiendra au plan cherché. En prenant donc tour-à-tour pour cinquième plan chacune des faces du pentaèdre, on obtiendra ainsi cinq droites appartenant au plan cherché.

S'agit-il d'un hexaèdre; en construisant ce plan, comme il vient d'être dit pour le pentaèdre formé par cinq quelconques de ses faces, la droite, suivant laquelle ce plan coupera la sixième face, appartiendra au plan demandé. En prenant donc, tour-à-tour, pour sixième face chacune des faces de l'hexaèdre, on obtiendra six droites appartenant au plan cherché.

On ramenera ainsi successivement le problème relatif à chaque polyèdre au problème relatif au polyèdre qui aura une face de moins.

30. *PROBLÈME VII. Construire, sur le plan de tant de droites qu'on voudra, une droite telle que la somme algébrique des distances de chacun de ses points à toutes celles-là soit égale à une longueur donnée?*

On suppose qu'on a fixé à l'avance le côté positif et le côté négatif de chacune des droites données.

Solution. S'il n'y a qu'une seule droite donnée, la droite cherchée sera une parallèle menée à celle-là du côté positif, et à la distance donnée.

S'il y a deux droites données, on menera la droite cherchée pour l'une d'elles seulement, comme il vient d'être dit; son intersection avec l'autre sera un des points de la droite demandée. En prenant donc, tour-à-tour, pour seconde droite, chacune des deux droites données, on obtiendra deux points de la droite demandée.

S'il y a trois droites données, on construira la droite cherchée pour deux d'entre elles seulement, comme il vient d'être dit; son intersection avec la troisième sera un des points de la droite demandée. En prenant donc, tour-à-tour, pour troisième droite chacune des droites données, on obtiendra trois points de la droite demandée.

On ramenera ainsi successivement le problème relatif à un nombre de droites quelconque au problème relatif à un nombre de droites moindre d'une unité.

31. *PROBLÈME VIII. Construire, dans l'espace, un plan tel que la somme algébrique des distances de chacun de ses points à tant de plans donnés qu'on voudra, soit égale à une longueur donnée?*

On suppose qu'on a fixé à l'avance le côté positif et le côté négatif de chacun des plans donnés.

Solution. S'il n'y a qu'un seul plan donné, le plan cherché sera un plan conduit parallèlement à celui-là du côté positif et à la distance donnée.

S'il y a deux plans donnés, on conduira le plan cherché, pour l'un d'eux seulement, comme il vient d'être dit; son intersection avec l'autre sera une droite appartenant au plan demandé. En prenant donc, tour-à-tour, pour second plan chacun des deux plans donnés, on obtiendra deux droites appartenant au plan demandé.

S'il y a trois plans donnés, on construira le plan cherché pour deux quelconques d'entre eux, comme il vient d'être dit; son intersection avec le troisième appartiendra au plan demandé. En prenant donc, tour-à-tour, pour troisième plan chacun des plans donnés, on obtiendra trois droites appartenant au plan demandé.

On ramenera ainsi successivement le problème relatif à un nombre de plans quelconque au problème relatif à un nombre de plans moindre d'une unité.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Recherche de quelques lieux géométriques, dans l'espace;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Problème I. *Quel est le lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les arêtes touchent constamment une surface du second ordre?*

Solution. Supposons, en premier lieu, que cette surface soit un ellipsoïde donné par l'équation

$$b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2\ ; \qquad (1)$$

en désignant par (α, β, γ) le sommet de l'angle trièdre, on passera, des trois diamètres principaux auxquels l'ellipsoïde est rapporté, aux trois arêtes de cet angle trièdre, considérées comme axes des coordonnées, au moyen des formules connues

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha+pt+qu+rv\ , \\ y=\beta+p't+q'u+r'v\ , \\ z=\gamma+p''t+q''u+r''v\ ; \end{array}\right\} \qquad (2)$$

dans lesquelles les neuf coefficiens qui représentent les inclinaisons des nouveaux axes sur les anciens seront liés, comme l'on sait, par les six équations

$$\left.\begin{aligned} p^2+p'^2+p''^2&=1\ ,\\ q^2+q'^2+q''^2&=1\ ,\\ r^2+r'^2+r''^2&=1\ ;\end{aligned}\right\}(3)\qquad \left.\begin{aligned} qr+q'r'+q''r''&=0\ ,\\ rp+r'p'+r''p''&=0\ ,\\ pq+p'q'+p''q''&=0\ ;\end{aligned}\right\}(4)$$

ou, ce qui revient au même, par celles-ci

$$\left.\begin{aligned} p^2+q^2+r^2&=1\ ,\\ p'^2+q'^2+r'^2&=1\ ,\\ p''^2+q''^2+r''^2&=1\ ,\end{aligned}\right\}(5)\qquad \left.\begin{aligned} p'p''+q'q''+r'r''&=0\ ,\\ p''p+q''q+r''r&=0\ ,\\ pp'+qq'+rr'&=0\ .\end{aligned}\right\}(6)$$

On aura, en substituant,

$$\left.\begin{aligned} &b^2c^2(\alpha+pt+qu+rv)^2\\ &+c^2a^2(\beta+p't+q'u+r'v)^2\\ &+a^2b^2(\gamma+p''t+q''u+r''v)^2\end{aligned}\right\}=a^2b^2c^2\ .$$

En développant les puissances et posant, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} b^2c^2p^2+c^2a^2p'^2+a^2b^2p''^2&=A\ ,\\ b^2c^2q^2+c^2a^2q'^2+a^2b^2q''^2&=B\ ,\\ b^2c^2r^2+c^2a^2r'^2+ab^2r''^2&=C\ ;\end{aligned}\right\}(7)\qquad \left.\begin{aligned} b^2c^2qr+c^2a^2q'r'+a^2b^2q''r''&=D\ ,\\ b^2c^2rp+c^2a^2r'p'+a^2b^2r''p''&=E\ ,\\ b^2c^2pq+c^2a^2p'q'+a^2b^2p''q''&=F\ :\end{aligned}\right\}(8)$$

$$\left.\begin{aligned} b^2c^2\alpha p+c^2a^2\beta p'+a^2b^2\gamma p''&=G\ ,\\ b^2c^2\alpha q+c^2a^2\beta q'+a^2b^2\gamma q''&=H\ ,\\ b^2c^2\alpha r+c^2a^2\beta r'+a^2b^2\gamma r''&=K\ ,\end{aligned}\right\}(9)$$

$$b^2c^2\alpha^2+c^2a^2\beta^2+a^2b^2\gamma^2-a^2b^2c^2=L\ ;\qquad(10)$$

on aura

$$At^2+Bu^2+Cv^2+2Duv+2Evt+2Ftu+2Gt+2Hu+2Kv+L=0\,. \qquad (11)$$

Pour déterminer les points où l'ellipsoïde rencontre les nouveaux axes, c'est-à-dire, les arêtes de l'angle trièdre mobile, il faudra faire tour-à-tour, dans l'équation (11), deux des trois coordonnées égales à zéro, ce qui donnera

$$At^2+2Gt+L=0\,,\qquad Bu^2+2Hu+L=0\,,\qquad Cv^2+2Kv+L=0\,.$$

Si donc on veut que ces trois arêtes soient tangentes à l'ellipsoïde, il faudra exprimer que ces trois équations ont leurs racines égales ; ce qui donnera

$$G^2-AL=0\,,\qquad H^2-BL=0\,,\qquad K^2-CL=0\,;$$

d'où, en ajoutant

$$G^2+H^2+K^2=L(A+B+C)\,. \qquad (12)$$

Or, les équations (9) donnent, en ayant égard aux équations (5) et (6),

$$G^2+H^2+K^2=b^4c^4\alpha^2+c^4a^4\beta^2+a^4b^4\gamma^2\,;$$

les équations (7) donnent ensuite, en ayant égard aux équations (5),

$$A+B+C=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\,.$$

Substituant donc ces valeurs et celle de L, donnée par l'équation (10), dans l'équation (12), cette dernière deviendra, toutes réductions faites, en y changeant respectivement α, β, γ en x, y, z

$$(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\,; \qquad (13)$$

c'est l'équation du lieu du sommet de l'angle trièdre mobile qui, comme l'on voit, est un ellipsoïde dont le centre et les diamètres principaux coïncident avec le centre et les diamètres principaux de l'ellipsoïde proposé.

Soit s le double de l'aire du triangle dont les sommets sont les extrémités positives des trois diamètres principaux de l'ellipsoïde proposé ; les carrés des trois côtés de ce triangle seront évidemment b^2+c^2, c^2+a^2, a^2+b^2. Soient g, h, k les hauteurs correspondantes à ces côtés, pris respectivement pour bases, on aura

$$g^2(b^2+c^2)=S^2 \;, \qquad h^2(c^2+a^2)=S^2 \;, \qquad k^2(a^2+b^2)=S^2 \;.$$

Les doubles des projections de l'aire de ce triangle, sur les trois plans coordonnés, seront respectivement bc, ca, ab ; d'où on conclura, en vertu d'un théorème connu,

$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=S^2 \;.$$

Substituant donc dans l'équation (13), et divisant par S^2, elle deviendra

$$\left(\frac{x}{g}\right)^2+\left(\frac{y}{h}\right)^2+\left(\frac{z}{k}\right)^2=1 \;;$$

ce qui prouve que les demi-diamètres principaux de l'ellipsoïde, lieu du sommet de l'angle trièdre mobile, ne sont autre chose que les trois hauteurs du triangle dont il vient d'être question.

Si l'ellipsoïde proposé est de révolution, ce triangle sera isocèle ; deux de ses hauteurs seront donc égales ; l'ellipsoïde, lieu des sommets de l'angle trièdre mobile, aura donc deux de ses trois diamètres principaux égaux entre eux ; ce sera donc aussi un ellipsoïde de révolution.

Si l'ellipsoïde proposé devient une sphère, le triangle en question deviendra équilatéral, et, par suite, la surface cherchée sera également sphérique.

Si l'un des axes de l'ellipsoïde proposé devient infini, c'est-à-dire, si cet ellipsoïde devient un cylindre elliptique, une des hauteurs du triangle deviendra infinie, tandis que les deux autres, toujours finies, deviendront égales; la surface cherchée sera donc, dans ce cas, un cylindre de révolution; d'où l'on pourrait conclure, s'il en était besoin, que le lieu du sommet d'un angle droit mobile sur un plan, constamment circonscrit à une ellipse, est la circonférence d'un cercle.

Si enfin deux des axes de l'ellipsoïde devenaient infinis, c'est-à-dire, si cet ellipsoïde devenait un cylindre parabolique; les trois hauteurs du triangle deviendraient également infinies; de sorte que la surface demandée serait plane. On pourrait conclure de là, s'il était nécessaire, que le lieu du sommet d'un angle droit mobile sur un plan, constamment circonscrit à une parabole, est une ligne droite.

Supposons présentement que la surface donnée du second ordre soit un hyperboloïde à une nappe, ayant pour équation

$$b^2c^2x^2+c^2a^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2 \; ; \qquad (14)$$

cette équation pouvant être déduite de l'équation (1), par le simple changement de c^2 en $-c^2$, on déduira de l'équation (13), par un pareil changement, l'équation de la surface demandée qui répond à ce cas. Cette équation sera donc

$$(b^2-c^2)x^2+(a^2-c^2)y^2+(a^2+b^2)z^2=a^2b^2-c^2(a^2+b^2) \; . \qquad (15)$$

Cela posé, a et b étant supposés inégaux, si l'on a

$$a^2b^2>c^2(a^2+b^2) \; ,$$

il en résultera

$$b^2-c^2>\frac{b^2c^2}{a^2} \; , \qquad a^2-c^2>\frac{a^2c^2}{b^2} \; ,$$

b^2-c^2, a^2-c^2 et le second membre seront tous trois positifs; de sorte que la surface cherchée sera un ellipsoïde.

Si l'on a

$$a^2b^2=c^2(a^2+b^2) \ ,$$

on en conclura

$$b^2-c^2=\frac{b^2c^2}{a^2} \ , \qquad a^2-c^2=\frac{a^2c^2}{b^2} \ ;$$

au moyen de quoi l'équation (15) deviendra

$$b^4c^4x^2+c^4a^4y^2+a^4b^4z^2=0 \ ;$$

de sorte qu'alors le lieu cherché se réduira à un point ou au centre de l'hyperboloïde.

Si l'on a enfin

$$a^2b^2<c^2(a^2+b^2) \ ,$$

d'où résultera

$$b^2-c^2<\frac{b^2c^2}{a^2} \ , \qquad a^2-c^2<\frac{a^2c^2}{b^2} \ ,$$

b^2-c^2 et a^2-c^2 pourront être indistinctement positifs, nuls ou négatifs.

Soit alors $a>b$; c pourra être moindre que b, ou égal à b, ou compris entre a et b, ou égal à a, ou enfin plus grand que a.

Si l'on a $c<b$ et conséquemment $c<a$, l'équation (15) sera absurde, c'est-à-dire, qu'aucun angle trièdre tri-rectangle ne pourra remplir la condition exigée.

Si l'on a $c=b$, et par suite $c<a$, l'équation (15) sera encore absurde, car elle deviendra

$$(a^2-b^2)y^2+(a^2+b^2)z^2+b^4=0 \ .$$

Si l'on a $c>b$ et $c<a$, l'équation (15) pourra être écrite ainsi

$$(c^2-b^2)x^2-(a^2-c^2)y^2-(a^2+b^2)z^2=c^2(a^2+b^2)-a^2b^2 \;;$$

elle exprimera alors une hyperboloïde à deux nappes.

Si l'on a enfin $c=a$ et par suite $c>b$, l'équation (15) pourra être écrite ainsi

$$(a^2-b^2)x^2-(a^2+b^2)z^2=a^4 \;;$$

elle exprimera un cylindre hyperbolique.

Si l'on a $c>a$ et par suite $c>b$, l'équation (15) pourra être écrite ainsi

$$(c^2-b^2)x^2+(c^2-a^2)y^2-(a^2+b^2)z^2=c^2(a^2+b^2)-a^2b^2,$$

qui exprimera une autre hyperboloïde à une nappe.

Posons, dans l'équation (14), $a=mc$, $b=nc$, elle deviendra, en divisant par c^4, et en posant ensuite $c=0$,

$$n^2x^2+m^2y^2-m^2n^2z^2=0 \;; \qquad (16)$$

équation d'une surface conique du second ordre. En faisant les mêmes transformations dans l'équation (15), elle deviendra

$$(n^2-1)x^2+(m^2-1)y^2+(m^2+n^2)z^2=0 \;; \qquad (17)$$

équation d'une autre surface conique du second ordre dont le sommet et les axes coïncident avec le sommet et les axes de la première, et qui sera alors le lieu cherché ; ce qui revient encore à dire que le lieu de l'arête d'un angle droit dièdre mobile, dont les faces sont constamment tangentes à une même surface conique du second ordre, est une autre surface conique.

En retranchant l'équation (17) de l'équation (16), il vient

$$x^2+y^2=(m^2+n^2+m^2n^2)z^2 \;;$$

équation d'une surface conique de révolution qui passe par les intersections des deux autres et a le même axe qu'elles ; ce qui prouve que ces intersections sont également inclinées sur l'axe commun. On voit, au surplus, par la forme de l'équation (17), que le lieu cherché n'est possible qu'autant que l'un au moins des deux nombres m et n est moindre que l'unité, c'est-à-dire, lorsque le plus petit des angles que font les génératrices du cône proposé avec son axe est moindre qu'un demi-angle droit. Si ce plus petit angle était demi-droit, le lieu cherché se réduirait à deux plans passant par le sommet du cône proposé.

Il est d'ailleurs évident que, si les surfaces données (14) et (16) sont des surfaces de révolution, les lieux cherchés (15) et (17) seront aussi des surfaces de révolution. En particulier, la dernière se réduit à un plan, lorsque l'angle générateur du cône est demi-droit.

Supposons, en troisième lieu, que la surface donnée soit une hyperboloïde à deux nappes, ayant pour équation

$$a^2b^2z^2-b^2c^2x^2-a^2c^2y^2=a^2b^2c^2 \; ; \qquad (18)$$

comme elle pourra être déduite de (1), en y changeant respectivement a^2 et b^2 en $-a^2$ et $-b^2$, on déduira de l'équation (13), par un pareil changement, celle du lieu cherché, laquelle sera ainsi

$$(b^2-c^2)x^2+(a^2-c^2)y^2+(a^2+b^2)z^2=c^2(a^2+b^2)-a^2b^2 \, . \quad (19)$$

En raisonnant sur cette équation, comme nous l'avons fait sur l'équation (15), dont elle ne diffère que par le signe du second membre, on verra aisément 1.° que, si l'on a $a^2b^2>c^2(a^2+b^2)$, elle n'exprimera absolument rien ; 2.° que, si l'on a $a^2b^2=c^2(a^2+b^2)$, elle exprimera uniquement le centre de l'hyperboloïde proposée ; 3.° enfin, que, si l'on a $a^2b^2<c^2(a^2+b^2)$, elle exprimera un ellipsoïde, si c est plus petit que la moindre des deux longueurs a et b, un cylindre elliptique, si c est égal à la moindre de ces deux

longueurs, une hyperboloïde à une nappe, si c est compris entre ces deux longueurs, un cylindre hyperbolique, si c est égal à la plus grande, enfin une nouvelle hyperboloïde à deux nappes, si c est plus grand que la plus grande.

Il est aisé de voir d'ailleurs que, si la surface (18) est de révolution, la surface (19) le sera aussi. Si, en outre, on a $c=a=b$, c'est-à-dire, si la surface proposée est engendrée par la révolution d'une hyperbole équilatère autour de son axe transverse, le lieu cherché se réduira à deux plans parallèles, lesquels ne seront autre chose que les plans polaires des deux foyers.

Passons enfin au cas où la surface proposée est dépourvue de centre et, pour cela, transportons l'origine d'abord au sommet négatif situé sur l'axe des z, ce qui se réduira à changer z en $z-c$, dans les équations (1) et (14), lesquelles deviendront ainsi

$$b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2(z-c)^2=a^2b^2c^2 ,$$

$$(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)(z-c)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2 .$$

Posant ensuite

$$a^2=gc , \qquad b^2=hc ,$$

ces équations deviendront, en réduisant,

$$c(hx^2+gy^2-2ghz)+ghz^2=0 ,$$

$$c\{x^2+y^2-2(g+h)z-gh\}+\{hx^2+gy^2+(g+h)z^2\}=0 ;$$

supposant alors $c=\infty$, il viendra

$$hx^2+gy^2=2ghz , \qquad (20)$$

$$+y^2=2(g+h)z+gh . \qquad (21)$$

La première de ces équations est celle de la surface proposée ; la seconde est celle du lieu du sommet de l'angle trièdre tri-rectangle mobile dont les trois arêtes touchent constamment cette surface.

L'équation (20) appartient à une paraboloïde elliptique ou à une paraboloïde hyperbolique, suivant que g et h sont des mêmes signes ou de signes contraires. Dans l'un comme dans l'autre cas, l'équation (20) appartient à une paraboloïde de révolution, dont le paramètre est la somme ou la différence des paramètres des sections principales de la surface proposée.

On peut, d'après ce qui précède, établir le théorème suivant, sur lequel nous reviendrons plus loin :

THÉORÈME I. Lorsqu'un angle trièdre tri-rectangle se meut, dans l'espace, de telle sorte que ses trois arêtes sont constamment tangentes à une même surface fixe ; 1.° *si cette surface est un ellipsoïde, le sommet de l'angle trièdre décrira un autre ellipsoïde, dont le centre et les axes coïncideront avec ceux du premier ;* 2.° *si cette surface est une sphère, l'autre sera également une sphère qui lui sera concentrique ;* 3.° *si un angle droit trièdre mobile a ses faces constamment tangentes à une surface conique du second ordre, son arête décrira une autre surface conique du second ordre dont le sommet, l'axe et les plans principaux coïncideront avec le sommet, l'axe et les plans principaux de la première ;* 4.° *enfin, si les trois arêtes d'un angle trièdre tri-rectangle mobile sont constamment tangentes à une hyperboloïde de révolution à deux nappes, engendrée par une hyperbole équilatère, tournant autour de son axe transverse, le sommet de cet angle trièdre décrira les plans polaires des foyers de l'hyperboloïde.*

PROBLÈME II. Quel est le lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile dont les arêtes s'appuient constamment sur une courbe plane du second ordre ?

Solution. Soit d'abord cette courbe une ellipse située dans le plan des xy et donnée par les deux équations

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ , \qquad z=0\ ; \qquad (22)$$

en y substituant les formules (2), dans lesquelles α, β, γ seront toujours, comme alors, les coordonnées du sommet de l'angle, elles deviendront

$$\left.\begin{array}{c} b^2(\alpha+pt+qu+rv)^2+a^2(\beta+p't+q'u+r'v)^2=a^2b^2\ , \\ \gamma+p''t+q''u+r''v=0\ . \end{array}\right\} \quad (23)$$

Pour que cette courbe rencontre l'axe des t, qui est ici une des arêtes de l'angle trièdre tri-rectangle, il faut qu'en faisant u et v égaux à zéro, dans ses équations, les équations résultantes

$$b^2(\alpha+pt)^2+a^2(\beta+p't)^2=a^2b^2\ , \qquad \gamma+p''t=0\ ,$$

admettent une même valeur de t, de sorte que t puisse être éliminé entre elles. Exécutant donc l'élimination, et formant les équations analogues, relatives à u et v, on aura

$$b^2(p''\alpha-p\gamma)^2+a^2(p''\beta-p'\gamma)^2=p''^2a^2b^2\ ,$$

$$b^2(q''\alpha-q\gamma)^2+a^2(q''\beta-q'\gamma)^2=q''^2a^2b^2\ ,$$

$$b^2(r''\alpha-r\gamma)^2+a^2(r''\beta-r'\gamma)^2=r''^2a^2b^2\ .$$

En prenant la somme de ces équations, et ayant égard aux équations (5) et (6), il viendra, en changeant respectivement α, β, γ en x, y, z,

$$b^2x^2+a^2y^2+(a^2+b^2)z^2=a^2b^2\ . \qquad (24)$$

Telle est donc l'équation de la surface demandée. C'est, comme l'on voit, un ellipsoïde qui a pour deux de ses axes les deux axes mêmes de l'ellipse proposée, et dont le demi-troisième axe est $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Son troisième axe est évidemment plus petit que chacun des deux autres, car on a

$$a^2-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^4}{a^2+b^2}\ ,\qquad b^2-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{b^4}{a^2+b^2}\ ;$$

quantités essentiellement positives. Ce demi-axe est égal à la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur la corde qui en joint deux sommets consécutifs. On voit par là que, lors même que cette ellipse devient un cercle, l'ellipsoïde ne devient point une sphère, mais seulement un sphéroïde aplati.

Supposons, en second lieu, que la courbe donnée du second ordre, toujours située dans le plan des xy, soit une hyperbole ayant pour équations

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2\ ,\qquad z=0\ ;\qquad (25)$$

comme ces équations se déduisent des équations (22) en y changeant simplement $+b^2$ en $-b^2$, l'équation de la surface cherchée se déduira alors d'un pareil changement fait dans l'équation (24), qui deviendra ainsi

$$b^2x^2-a^2y^2-(a^2-b^2)z^2=a^2b^2\ ;\qquad (26)$$

c'est l'équation d'une hyperboloïde à deux nappes ou à une nappe unique, suivant que a est plus grand ou plus petit que b; c'est-à-dire, suivant que l'axe transverse de l'hyperbole proposée est le plus grand ou le plus petit des deux. Dans l'un et dans l'autre cas, l'hyperbole proposée est toujours une des sections principales de cette surface. Dans le cas particulier où l'hyperbole proposée est équilatère, la surface cherchée est un cylindre hyperbolique dont la section perpendiculaire à ses élémens rectilignes est cette hyperbole elle-même.

Si, dans les équations (25) et (26), on fait $b=ma$, elles deviendront

$$m^2x^2-y^2=m^2a^2\ ,\qquad m^2x^2-y^2-(1-m^2)z^2=m^2a^2\ ;$$

puis, en supposant $a=0$,

$$(y-mx)(y+mx)=0\ ,\qquad m^2x^2-y^2-(1-m^2)z^2=0\ .$$

On voit par là que, si l'hyperbole proposée se réduit au système de deux droites qui se coupent, la surface cherchée se réduira à une surface conique du second ordre; ce qui revient encore à dire que l'arête d'un angle droit dièdre mobile, dont les faces passent constamment par deux droites qui se coupent, décrit dans l'espace une surface conique du second ordre; théorème déjà démontré par M. Hachette qui a démontré, en outre, que les plans des deux séries de sections circulaires qu'on peut faire dans cette surface conique sont respectivement perpendiculaires aux deux droites.

Si, dans les équations (22) et (24), on change x en $(x-a)$, ce qui revient à transporter l'origine au sommet négatif du grand axe de l'ellipse, elles deviendront

$$b^2x^2+a^2y^2=2ab^2x\ ,\qquad b^2x^2+a^2y^2+(a^2+b^2)z^2=2ab^2x\ .$$

Posant ensuite $b^2=ka$, et simplifiant, on aura

$$a(y^2-2kx)+kx^2=0\ ,$$

$$a(y^2+z^2-2kx)+k^2(x^2+y^2)=0\ ;$$

puis, en supposant a infini,

$$y^2=2kx\ ,\qquad y^2+z^2=2kx\ ;$$

d'où résulte ce curieux théorème : Le lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les côtés s'appuyent constamment sur une parabole donnée, est la surface engendrée par la révolution de cette même parabole autour de son grand axe.

On peut, d'après ce qui précède, établir le théorème suivant, sur lequel nous reviendrons plus loin :

THÉORÈME II. Lorsqu'un angle trièdre tri-rectangle se meut dans l'espace, de telle sorte que ses trois arêtes s'appuyent constamment sur une même courbe plane ; 1.° si cette courbe est une ellipse, le lieu du sommet de l'angle trièdre sera un ellipsoïde, dont cette ellipse sera la plus grande section principale ; 2.° si la courbe est une hyperbole équilatère, ce lieu sera un cylindre hyperbolique qui aura pour base cette hyperbole elle-même ; 3.° enfin, si la courbe est une parabole, ce lieu sera une paraboloïde de révolution, dont cette même parabole sera un méridien.

PROBLÈME III. Quel est le lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les faces touchent constamment le périmètre d'une courbe plane du second ordre ?

Solution. Conservons toutes les notations du précèdent problème, et faisons $v=0$ dans les équations (23) ; elles deviendront

$$b^2(\alpha+pt+qu)^2+a^2(\beta+p't+q'u)^2=a^2b^2\ ,$$

$$\gamma+p''t+q''u=0\ ;$$

ces deux équations feront connaître les coordonnées du point où l'ellipse donnée perce le plan des tu ; on aura donc la coordonnée t de ce point, en éliminant u entre elles, ce qui conduit à l'équation

$$b^2\{q''\alpha-q\gamma+(pq''-qp'')t\}^2+a^2\{q''\beta-q'\gamma+(p'q''-q'p'')t\}^2=q''^2a^2b^2 \;;$$

c'est-à-dire, en développant et ordonnant,

$$\left.\begin{array}{c}\{b^2(pq''-qp'')^2+a^2(p'q''-q'p'')^2\}t^2\\ +2\{b^2(pq''-qp'')(q''\alpha-q\gamma)+a^2(p'q''-q'p'')(q''\beta-q'\gamma)\}t\\ +\{b^2(q''\alpha-q\gamma)^2+a^2(q''\beta-q'\gamma)^2-q''^2a^2b^2\}\end{array}\right\}=0\,,$$

si donc l'on veut exprimer que l'ellipse est tangente au plan des tu, il faudra exprimer que cette équation a ses deux racines égales, ce qui donnera

$$\begin{array}{c}\{b^2(pq''-qp'')(q''\alpha-q\gamma)+a^2(p'q''-q'p'')(q''\beta-q'\gamma)\}^2\\ -\{b^2(pq''-qp'')^2+a^2(p'q''-q'p'')^2\}\{b^2(q''\alpha-q\gamma)^2+a^2(q''\beta-q'\gamma)^2-p''^2a^2b^2\}=0\,;\end{array}$$

En développant cette équation, réduisant, ordonnant l'un des deux membres par rapport à α, β, γ, et l'autre par rapport à a et b, et formant ensuite ses analogues relatives au contact de l'ellipse avec les plans des uv et des vt, on aura

$$\{(p'q''-q'p'')\alpha+(p''q-q''p)\beta+(pq'-qp')\gamma\}^2=(p'q''-q'p'')^2a^2+(p''q-q''p)b^2\,,$$

$$\{(q'r''-r'q'')\alpha+(q''r-r''q)\beta+(qr'-rq')\gamma\}^2=(q'r''-r'q'')^2a^2+(q''r-r''q)b^2\,,$$

$$\{(r'p''-p'r'')\alpha+(r''p-p''r)\beta+(rp'-pr')\gamma\}^2=(r'p''-p'r'')^2a^2+(r''p-p''r)b^2\;;$$

faisant la somme de ces équations, en ayant égard aux équations (5) et (6), il viendra, toutes réductions faites, et en changeant respectivement α, β, γ en x, y, z,

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2\,, \qquad (27)$$

Telle est donc l'équation du lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile dont les faces touchent constamment une ellipse ayant pour équation

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\,, \qquad (28)$$

On voit que ce lieu est une sphère concentrique à l'ellipse, ayan pour rayon la corde qui joint deux sommets consécutifs de cette ellipse.

Si l'on remplace l'ellipse par une hyperbole ayant pour équation

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2\,;$$

l'équation du lieu cherché sera

$$x^2+y^2+z^2=a^2-b^2\,;$$

ce sera donc encore une sphère concentrique à l'hyperbole proposée, mais dont le rayon sera $\sqrt{a^2-b^2}$; de sorte que, si l'hyperbole est équilatère, le lieu demandé se réduira à son centre; et que, si son axe transverse est le plus petit des deux, il sera impossible que la courbe soit touchée à la fois par les trois faces d'un angle trièdre tri-rectangle.

Si, dans les équations (27) et (28), on change x en $x-a$, elles deviendront

$$x^2+y^2+z^2=2ax+b^2\ , \qquad b^2x^2+a^2y^2=2ab^2x\ ;$$

puis, en faisant $b=ka$,

$$x^2+y^2+z^2=a(2x+k)\ , \qquad a(y^2-2kx)+kx^2=0\ ;$$

et enfin, en supposant a infini,

$$2x+k=0\ , \qquad y^2=2kx\ ;$$

c'est-à-dire que, quand la courbe donnée est une parabole, le lieu cherché est le plan perpendiculaire au sien, conduit par sa directrice.

On peut, d'après ce qui précède, établir le théorème suivant:

THÉORÈME III. Lorsqu'un angle trièdre tri-rectangle se meut dans l'espace, de telle sorte que ses trois faces touchent constamment une même ligne fixe du second ordre, son sommet décrit une sphère concentrique à la courbe; laquelle peut d'ailleurs se réduire à un point ou un plan, ou même être imaginaire.

Nous n'avons rien dit du lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les faces sont constamment tangentes à une surface fixe du second ordre, parce qu'il est bien connu que ce lieu est une sphère concentrique à la surface dont il s'agit. Ce théorème, qui est du à Monge et dont M. Poisson a donné une démonstration fort élégante dans la *Correspondance sur l'Ecole polytechnique* (tom. I, pag. 240), pourrait également se démontrer par les procédés qui précèdent. Il est exactement, par rapport au dernier qui vient d'être démontré, ce qu'est le *théorème I*, par rapport au *théorème II*.

En établissant ces trois théorèmes, nous avons eu principalement en vue d'en déduire, à l'aide des principes exposés dans un autre article, et que nous déclarons de nouveau nous avoir été suggéré par la lecture de la lettre de M. Poncelet (tom. XVII, pag. 265), d'autres théorèmes peut-être moins remarquables en eux-mêmes que par la manière dont on y est conduit. Afin de mieux faire saisir la correspondance entre les premiers et ceux-ci, nous emploîrons le même numérotage, en prévenant que la surface directrice est constamment une sphère au centre de laquelle nous supposerons quelquefois une situation spéciale.

THÉORÈME I. Un angle trièdre tri-rectangle mobile, ayant son sommet fixé en un point quelconque de l'espace, 1.° *si les trois faces de cet angle trièdre, dans leur mouvement, coupent constamment une surface fixe quelconque du second ordre, le plan mobile qui s'appuyera sur les trois sections touchera constamment une autre surface fixe du second ordre;* 2.° *si la surface fixe du second ordre que coupent les trois faces de l'angle trièdre est une surface de révolution dont son sommet soit un foyer, l'autre surface du second ordre sera aussi une surface de révolution ayant même foyer et même plan directeur que la première; et il en sera encore de même pour un angle trièdre mobile quelconque, de forme invariable;* 3.° *toutes celles des cordes inscrites à une ligne du second ordre qui sont vues sous un angle droit, d'un même point quelconque de l'espace, enveloppent une autre ligne du second ordre; et on peut inscrire au quadrilatère formé par les quatre tangentes communes à ces deux courbes une troisième ligne du second ordre qui, vue du même point, paraîtra un cercle* (*); 4.° *enfin, si, à une distance du centre d'une sphère égale au côté du carré inscrit à son grand cercle, on place le sommet fixe d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, les deux séries de plans mobiles qui*

(*) Cette partie du théorème est une extension d'un théorème de M. Frégier (*Correspondance sur l'Ecole polytechnique*, tom. III, pag. 394).

toucheront à la fois les sections circulaires faites dans la sphère par les trois faces de l'angle trièdre, passeront l'une et l'autre par un même point fixe, et le centre de la sphère sera un de ces deux points.

THÉORÈME II. *Un angle trièdre tri-rectangle mobile, ayant son sommet fixé en un point quelconque de l'espace ;* 1.° *si, dans le mouvement de cet angle trièdre, ses faces coupent constamment un cône ou un cylindre, le plan mobile qui s'appuyera constamment sur les trois sections enveloppera une surface du second ordre inscrite à ce cône ou à ce cylindre ;* 2.° *si les faces de l'angle trièdre tri-rectangle coupent, dans leur mouvement, un cylindre de révolution, et si, en même temps, le sommet de cet angle trièdre est fixé à une distance de l'axe du cylindre égale au côté du carré inscrit à sa section circulaire, le plan mobile qui s'appuyera sur les trois sections touchera constamment la section circulaire dont le plan passera par le sommet de l'angle trièdre ;* 3.° *enfin, si le sommet de l'angle trièdre tri-rectangle mobile est fixé en un des points de la surface du cylindre, le plan mobile qui s'appuyera constamment sur les trois sections enveloppera une sphère inscrite au cylindre.*

THÉORÈME III. *Un angle trièdre tri-rectangle mobile, ayant son sommet fixé en un point quelconque de l'espace, si, dans son mouvement, ses arêtes percent continuellement une surface conique ou cylindrique du second ordre, le plan mobile déterminé par les trois intersections enveloppera une surface de révolution du second ordre qui aura pour foyer le sommet fixe de l'angle trièdre. Dans le cas particulier où ce sommet sera sur la surface conique ou cylindrique, le plan mobile passera constamment par un même point fixe.*

QUESTIONS RÉSOLUES.

Note sur le problème de géométrie proposé à la pag. 87 du présent volume ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

On a proposé, à la page 56 du présent volume, de construire un tétraèdre ayant ses six arêtes respectivement parallèles à six droites données.

Un tétraèdre quelconque étant donné; si, par un même point de l'espace, on conduit des droites indéfinies respectivement parallèles à ses arêtes, ces droites offriront $\frac{6.5.4}{1.2.3}$ ou 20 systèmes de trois droites issues d'un même point. De ces 20 systèmes, 16 seulement détermineront des angles trièdres, tandis que chacun des quatre autres sera composé de trois droites dans un même plan, parallèle au plan de l'une des faces du tétraèdre donné.

Présentement, six droites, non comprises deux à deux dans un même plan, étant données dans l'espace, si l'on peut construire un tétraèdre ayant ses arêtes respectivement parallèles à ses six droites, il résulte de ce qui précède qu'il faudra qu'en leur menant des parallèles, par un même point de l'espace, ces parallèles offrent quatre systèmes de trois droites comprises dans un même plan; ce qui pourra fort bien ne pas arriver; donc, généralement parlant, *il est impossible de construire un tétraèdre dont les arêtes soient respectivement parallèles à six droites données, non situées deux à deux dans un même plan.*

Démonstration d'un théorème de géométrie énoncé à la pag. 156 du présent volume ;

Par M. Lenthéric, professeur au Collége royal de Montpellier, et M. Timmermans, professeur à l'Athénée de Tournay.

Théorème. *Deux tétraèdres sont équivalens lorsque les deux mêmes droites indéfinies, non situées dans un même plan, contiennent, à la fois, deux arêtes opposées de l'un et deux arêtes opposées de l'autre, et qu'en outre le rectangle de ces deux arêtes, dans le second, est équivalent au rectangle de leurs correspondantes dans le premier.*

Ce théorème est un corollaire manifeste du suivant qui, en conséquence, est le seul qu'il soit nécessaire de démontrer.

Théorème. Le volume d'un tétraèdre a pour expression le sixième du produit des longueurs de deux arêtes opposées quelconques, de la longueur de leur perpendiculaire commune, et du sinus tabulaire de l'angle qu'elles forment entre elles.

Démonstration. Soit ABCD (fig. 5) un tétraèdre, et soit EF la perpendiculaire commune à ses deux arêtes opposées AB et CD. Il s'agit de prouver que le volume de ce tétraèdre a pour expression

$$\frac{1}{6}\text{AB}\times\text{CD}\times\text{EF}\times Sin.(\text{AB},\text{CD})\,.$$

Pour y parvenir achevons le parallélogramme dont la face CDB est la moitié et dont BC est la diagonale; et soit G son quatrième sommet. Sur BA, BD, BG, comme arêtes d'un même angle, construisons un parallélipipède. Soit K le sommet de ce parallélipipède opposé à B; et soient H et L ses sommets respectivement opposés à G et D.

Puisque EF est perpendiculaire commune aux deux droites AB et CD, cette droite sera aussi une perpendiculaire commune aux plans parallèles AG et CH qui contiennent ces deux arêtes, et sera conséquemment la hauteur du parallélipipède si l'on prend AG pour sa base. L'aire de cette base aura d'ailleurs pour expression $AB \times BG \times Sin.ABG$ ou parce que BG est égal et parallèle à CD, l'aire de cette base sera $AB \times CD \times Sin.(AB, CD)$; de sorte que le volume du parallélipipède sera exprimé par

$$AB \times CD \times EF \times Sin.(AB, CR);$$

mais si l'on prend BH pour base du parallélipipède et ABD comme celle du tétraèdre, ce tétraèdre se trouvera avoir même hauteur que le parallélipipède et une base moitié de la sienne. Son volume n'est donc que le sixième de celui du parallélipipède; ce volume doit donc avoir pour expression

$$\frac{1}{6} AB \times CD \times EF \times Sin.(AB, CD)$$

comme on l'avait annoncé.

QUESTIONS PROPOSÉES.

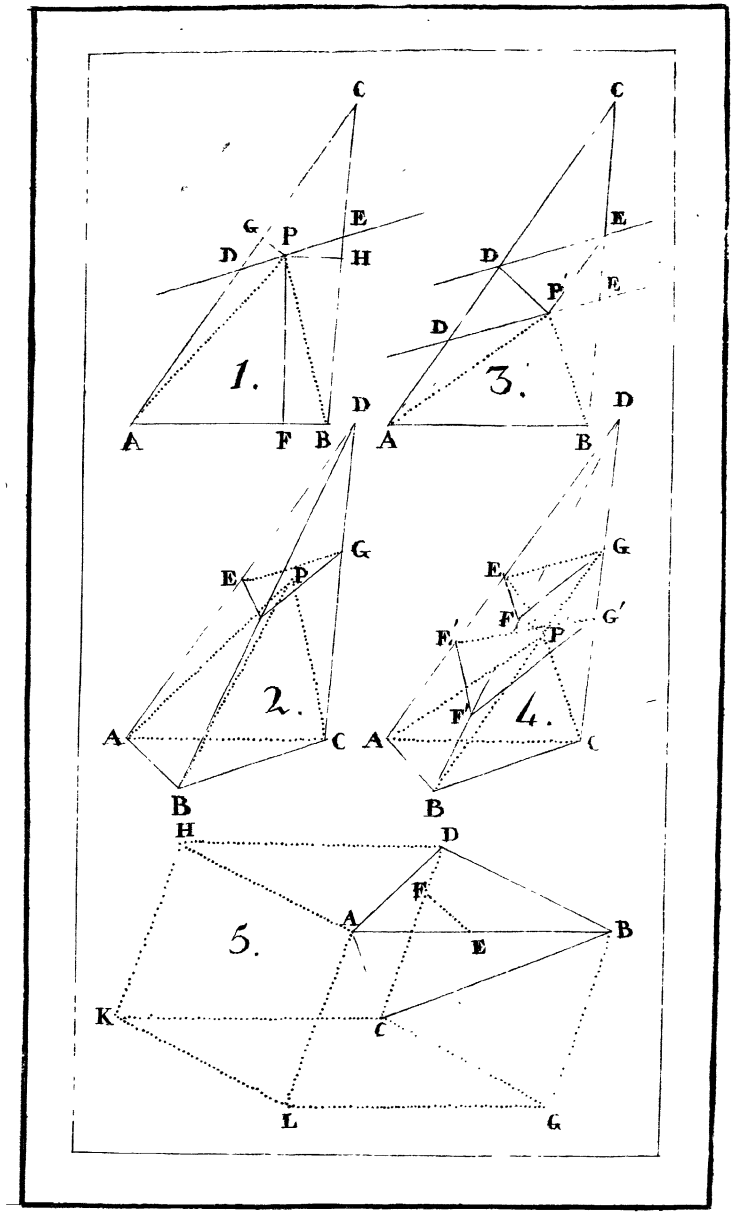
Problèmes de géométrie.

I. ETANT donnés, dans un quadrilatère, la longueur de l'une des deux diagonales et les angles qu'elle forme avec les deux côtés qui partent de l'une de ses extrémités, construire le quadrilatère de telle sorte qu'il soit équivalent à un carré donné, et qu'en outre son périmètre soit le moindre possible?

Construire ce même quadrilatère de manière seulement que la somme des deux côtés qui concourent à l'autre extrémité de la diagonale donnée soit la moindre possible?

II. Quel est, dans l'espace, le lieu de toutes les droites qui, menées par le sommet d'un angle trièdre fixe donné, font, avec ses faces, trois angles dont la somme algébrique est constante?

III. Décrire une sphère qui touche à la fois quatre droites données?



I. D. G. fecit

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Recherche sur les lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

§. I.

Propriétés des lignes courbes.

Dans tout ce qui va suivre, nous adopterons les définitions suivantes :

1. Une courbe sera dite du $m.^{ieme}$ degré, lorsqu'elle pourra couper une même droite en m points.

2. La *courbe polaire d'un point*, par rapport à une directrice du $m.^{ieme}$ degré, sera la courbe du $(m-1)^{ieme}$ degré qui contiendra les points de contact de toutes les tangentes à celle-là issues de ce point (*).

1. Une courbe sera dite de $m.^{ieme}$ classe, lorsqu'on pourra lui mener m tangentes d'un même point.

2. La *courbe polaire d'une droite*, par rapport à une directrice de $m.^{ieme}$ classe, sera la courbe de $(m-1)^{ieme}$ classe que toucheront les tangentes menées à celle-là par tous ses points d'intersection avec cette droite (*).

(*) Voy. *Annales*, tom. XVI, pag. 315 et 319, et tom. XVII, pag. 91 et 93.

3. Les *points polaires d'une droite* seront les $(m-1)^2$ points communs aux courbes polaires de tous les points de cette droite (*).

3. Les *droites polaires d'un point* seront les $(m-1)^2$ tangentes communes aux courbes polaires de toutes les droites qui passent par ce point (*).

Cela posé, considérons deux lignes du $m.^{ieme}$ degré ayant respectivement pour équations

$$M=0\ , \qquad M'=0\ ;$$

en désignant par α une indéterminée, l'équation

$$M+\alpha M'=0 \qquad (1)$$

appartiendra à une troisième courbe, aussi du $m.^{ieme}$ degré, passant par les m^2 points d'intersection des deux premières, quel que soit α.

Différentiant cette dernière, et remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par a, l'équation résultante

$$\frac{dM}{dx}+a\frac{dM}{dy}+\alpha\left\{\frac{dM'}{dx}+a\frac{dM'}{dy}\right\}=0\ , \qquad (2)$$

sera celle de la courbe du $(m-1)^{ieme}$ degré qui contiendra les points de contact de toutes les tangentes menées à la courbe (1) parallèlement à la droite fixe ayant pour équation

$$y=ax\ .$$

Or, cette équation est évidemment vérifiée, quelle que soit la valeur attribuée à l'indéterminée α, en posant les deux suivantes :

(*) Voy. la pag. 153 du présent volume.

$$\frac{dM}{dx}+a\frac{dM}{dy}=0\,,\qquad \frac{dM'}{dx}+a\frac{dM'}{dy}=0\,,\qquad (3)$$

qui correspondent à deux courbes invariables du $(m-1)^{ieme}$ degré, et dont le système appartient à $(m-1)^2$ points fixes ; d'où il suit que *les courbes polaires d'un point situé à l'infini, relatives à tant de courbes qu'on voudra du* m.^{ieme} *degré, passant par les* m^2 *mêmes points fixes, passent toutes par les* (m—1)^2 *mêmes points, également fixes.*

Si l'on fait varier la direction de la droite $y=ax$, ces $(m-1)^2$ points décriront une courbe dont on obtiendra l'équation en éliminant la variable a entre les équations (3) ; ce qui donnera celle-ci :

$$\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM'}{dy}-\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dM'}{dx}=0\,,\qquad (4)$$

laquelle est évidemment du $[2(m-1)]^{ieme}$ dégré. Ainsi, *les* (m—1)^2 *points communs aux courbes polaires d'un point situé à l'infini, relatives à tant de courbes qu'on voudra du* m.^{ieme} *degré, passant par les* m^2 *mêmes points fixes, décrivent une courbe du* [2(m—1)]^{ieme} *degré, lorsque ce point décrit une droite également située à l'infini.*

En mettant l'équation (2) sous la forme

$$\frac{dM}{dx}+\alpha\frac{dM'}{dx}+a\left\{\frac{dM}{dy}+\alpha\frac{dM'}{dy}\right\}=0\,,\qquad (5)$$

on voit, sur-le-champ, que les points polaires d'une droite située à l'infini, relatifs à la courbe (1), sont donnés par le système d'équations

$$\frac{dM}{dx}+\alpha\frac{dM'}{dx}=0\,,\qquad \frac{dM}{dy}+\alpha\frac{dM'}{dy}=0\,;\qquad (6)$$

on aura donc l'équation de la courbe décrite par les points polaires lorsqu'on fait varier α, en éliminant cette indéterminée entre les deux équations (6) ; ce qui conduira de nouveau à l'équation (4). Ainsi, *les points polaires d'une droite située à l'infini, relatifs à toutes les courbes du* m.$^{\text{ieme}}$ *degré qui passent par les* m^2 *mêmes points fixes, sont tous situés sur la même courbe du* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *degré dont il vient d'être question.*

En généralisant ces trois propositions, à l'aide de la théorie des projections, et en déduisant en outre de chaque proposition, ainsi généralisée, sa correlative, au moyen de la théorie des polaires réciproques, on obtiendra les théorèmes suivans :

THÉORÈME I. Tant de courbes du m.$^{\text{ieme}}$ *degré qu'on voudra, passant toutes par les* m^2 *mêmes points fixes ;* 1.° *les courbes polaires d'un point quelconque, relatives à toutes ces courbes, passeront toutes par les* $(m-1)^2$ *mêmes points également fixes ;* 2.° *si ce point parcourt une droite, ces* $(m-1)^2$ *points, décriront une courbe du* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *degré ;* 3.° *enfin, les points polaires de cette droite seront situés sur cette même courbe du* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *degré.*

THÉORÈME I. Tant de courbes de m.$^{\text{ieme}}$ *classe qu'on voudra, ayant toutes les* m^2 *mêmes tangentes fixes ;* 1.° *les courbes polaires d'une droite quelconque, relatives à toutes ces courbes, auront toutes les* $(m-1)^2$ *mêmes tangentes fixes ;* 2.° *si cette droite tourne autour de l'un de ses points, ces* $(m-1)^2$ *tangentes envelopperont une courbe de* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *classe ;* 3.° *enfin, les droites polaires de ce point toucheront toutes cette même courbe de* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *classe.*

Dans la supposition particulière de $m=2$, on déduira de ces théorèmes les corollaires suivans :

Corollaire. Tant de lignes du second ordre qu'on voudra étant circonscrites à un même quadrilatère ; 1.° les polaires d'un point quelconque, relatives à toutes ces

Corollaire. Tant de lignes du second ordre qu'on voudra étant inscrites à un même quadrilatère ; 1.° les pôles d'une droite quelconque, relatifs à toutes ces courbes, ap-courbes, se coupent toutes en un même point fixe; 2.° si le pôle commun à toutes ces courbes parcourt une droite, le point de concours de toutes ses polaires parcourra un ligne du second ordre; 3.° enfin, cette dernière courbe contiendra les pôles de la droite parcourue par le pôle commun (*).

partiendront à une même droite fixe; 2.° si la polaire commune à toutes ces courbes tourne autour de l'un de ses points, la droite, lieu des pôles, enveloppera une ligne du second ordre; 3.° enfin, cette dernière courbe sera touchée par toutes les polaires du point autour duquel la polaire aura tourné (*).

§. II.

Propriétés des surfaces courbes.

Dans tout ce qui va suivre, nous adopterons les définitions suivantes :

1. Une surface sera dite du

1. Une surface sera dite du

(*) Si l'on suppose, dans ces corollaires, que soit le point, soit la droite, passe à l'infini, on en déduira les propositions suivantes :

1.° *Les conjugués des diamètres parallèles dans les lignes du second ordre circonscrites à un même quadrilatère concourent en un même point.* Cette proposition parait due à M. Lamé (*Annales*, tom. VII, pag. 233).

2.° *En faisant varier la direction commune des diamètres parallèles, leur point de concours décrira une nouvelle ligne du second ordre, lieu des centres de toutes les autres* (Voy. la pag 106 du présent volume).

3.° *Les centres de toutes les lignes du second ordre inscrites à un même quadrilatère appartiennent à une même droite.* Cette proposition est de Newton (*Annales*, tom. XII, pag. 109, et tom. XIV, pag. 309).

4.° Les conjugués des diamètres parallèles de ces mêmes lignes, du second ordre, enveloppent une autre ligne du même ordre.

On pourrait, au surplus, généraliser ces dernières propositions et les étendre à des courbes de tous les degrés et de toutes classes, en appelant *points centraux* de ces sortes de lignes, les pôles d'une droite située à l'infini, et *droites diamètrales* les polaires d'un point également situé à l'infini.

$m.^{ieme}$ degré, lorsqu'elle pourra couper une même droite en m points.

2. La *surface polaire d'un point*, par rapport à une surface directrice du $m.^{ieme}$ degré, sera la surface du $(m-1)^{ieme}$ degré qui contiendra les lignes de contact de la surface conique circonscrite à celle-là qui a son sommet en ce point.

3. Les *points polaires d'un plan* seront les $(m-1)^3$ points communs aux surfaces polaires des différens points de ce plan (*).

4. Enfin, la *courbe polaire d'une droite* sera la courbe à double courbure suivant laquelle se couperont les surfaces polaires des divers points de cette droite (**).

Il résulte de ces définitions:

1.° Que la surface polaire d'un point contient les pôles de tous les plans menés par ce point, ainsi que les courbes polaires de toutes les droites conduites par le même point.

2.° Que la courbe polaire d'une droite renferme les pôles de tous

$m.^{ieme}$ classe, lorsqu'on pourra par une même droite lui conduire m plans tangens.

2. La *surface polaire d'un plan*, par rapport à une surface directrice de $m.^{ieme}$ classe, sera la surface de $(m-1)^{ieme}$ classe inscrite à la surface développable qui touche celle-là suivant ses lignes d'intersection avec ce plan.

3. Les *plans polaires d'un point* seront les $(m-1)^3$ plans tangens communs aux surfaces polaires des différens plans conduits par ce point (*).

4. Enfin, la *surface développable polaire d'une droite* sera l'enveloppe des surfaces polaires de tous les plans conduits par cette droite (**).

1.° Que la surface polaire d'un plan touche les plans polaires de tous les points de ce plan, ainsi que les surfaces développables polaires de toutes les droites tracées sur ce plan.

2.° Que la surface développable polaire d'une droite touche

(*) Voy. le *théorème II* de la pag. 153 du présent volume.

(**) Voy. encore le même théorème.

les plans que l'on peut conduire par cette droite.

3.° Que les courbes polaires de plusieurs droites situées dans un même plan passent toutes par les pôles de ce plan.

les plans polaires de tous les points de cette droite.

3.° Que les surfaces développables polaires de plusieurs droites qui concourent en un même point touchent toutes les plans polaires de ce point.

Cela posé, considérons d'abord deux surfaces du $m.^{ieme}$ degré, données par les équations

$$M=0\ , \qquad M'=0\ ;$$

en désignant toujours par α une constante arbitraire, l'équation

$$M+\alpha M'=0 \qquad (1)$$

appartiendra à une nouvelle surface du même degré, contenant, quel que soit α, les intersections des deux premières.

En différentiant celle-ci et remplaçant respectivement par a et b les coefficiens $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$, l'équation résultante

$$a\frac{dM}{dx}+b\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}+\alpha\left\{a\frac{dM'}{dx}+b\frac{dM'}{dy}+\frac{dM'}{dz}\right\}=0\ , \quad (2)$$

du $(m-1)^{ieme}$ degré seulement, appartiendra à la surface qui contient les courbes à double courbure, lieu des points où la surface (1) est touchée par toutes ses tangentes parallèles à la droite fixe donnée par les deux équations $x=az$ et $y=bz$; c'est-à-dire, en d'autres termes, que cette surface (2) contiendra les lignes de contact de la surface (1) avec la surface cylindrique dont toutes les arêtes ou élémens rectilignes seraient parallèles à cette droite fixe.

Or, cette surface (1), quelle que soit la constante α, contient les intersections des deux surfaces du $(m-1)^{ieme}$ degré

$$a\frac{dM}{dx}+b\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}=0\,, \qquad a\frac{dM'}{dx}+b\frac{dM'}{dy}+\frac{dM'}{dz}=0\,; \qquad (3)$$

donc, *les surfaces polaires d'un point situé à l'infini, relatives à tant de surfaces qu'on voudra du* m.^{ieme} *degré, se coupant suivant les mêmes courbes à double courbure, se coupent toutes aussi suivant les mêmes courbes à double courbure, intersections de deux surfaces du* $(m-1)^{ieme}$ *degré.*

Supposons que, la quantité a restant constante, on fasse varier l'autre b; la courbe à double courbure dont il s'agit engendrera une surface courbe dont on aura l'équation en éliminant b entre les deux équations (3), ce qui donnera

$$a\left\{\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM'}{dy}-\frac{dM'}{dx}\cdot\frac{dM}{dy}\right\}+\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dM'}{dy}-\frac{dM'}{dz}\cdot\frac{dM}{dy}=0\,. \quad (4)$$

Ainsi *les courbes à double courbure suivant lesquelles diverses surfaces du* m.^{ieme} *degré, ayant les mêmes intersections, sont coupées par les surfaces polaires des points d'une droite située à l'infini, appartiennent toutes à une surface unique du* $[2(m-1)]^{ieme}$ *degré.*

Si, au lieu de faire varier b, on fait varier a, l'équation (4) sera remplacée par celle-ci

$$b\left\{\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dM'}{dx}-\frac{dM'}{dy}\cdot\frac{dM}{dx}\right\}+\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dM'}{dx}-\frac{dM'}{dz}\cdot\frac{dM}{dx}=0 \quad (5)$$

qui conduirait à des conclusions analogues. Or, il est facile de voir que les équations (4) et (5), quels que soient d'ailleurs a et b, sont satisfaites par les trois suivantes, ne comptant que pour deux seulement,

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM'}{dy}-\frac{dM'}{dx}\cdot\frac{dM}{dy}=0\,, \\
\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dM'}{dz}-\frac{dM'}{dy}\cdot\frac{dM}{dz}=0\,, \\
\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dM'}{dx}-\frac{dM'}{dz}\cdot\frac{dM}{dx}=0\,;
\end{array}\right\} \quad (6)$$

lesquelles conséquemment appartiennent à une courbe fixe à double courbure, intersection de deux surfaces du $[2(m-1)]^{ieme}$ degré; donc, *la surface du* $[2(m-1)]^{ieme}$ *degré, dont il vient d'être question ci-dessus, passe constamment par une même courbe fixe, à double courbure, lorsqu'on fait mouvoir la droite située à l'infini dans un plan également situé à l'infini.*

En mettant l'équation (2) sous la forme

$$a\left\{\frac{dM}{dx}+\alpha\frac{dM'}{dx}\right\}+b\left\{\frac{dM}{dy}+\alpha\frac{dM'}{dy}\right\}+\frac{dM}{dz}+\alpha\frac{dM'}{dz}=0\,, \quad (7)$$

on voit de suite que la courbe polaire de la droite située à l'infini, dans le plan $x=az$, a pour ses équations

$$\left.\begin{array}{l}
a\left\{\frac{dM}{dx}+\alpha\frac{dM'}{dx}\right\}+\frac{dM}{dz}+\alpha\frac{dM'}{dz}=0\,, \\
\frac{dM}{dy}+\alpha\frac{dM'}{dy}=0\,.
\end{array}\right\} \quad (8)$$

Si l'on suppose donc que α soit variable, on obtiendra l'équation de la surface engendrée par cette courbe, en éliminant α entre ces deux équations, ce qui conduira de nouveau à l'équation (4). Ainsi, *les courbes polaires de la droite dont il s'agit sont situées* *sur la surface du* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *degré dont il a été question ci-dessus.*

On conçoit également que les pôles d'un plan situé à l'infini, relatifs à la surface (1), sont donnés par les trois équations

$$\frac{dM}{dx}+\alpha\frac{dM'}{dx}=0\,,\quad \frac{dM}{dy}+\alpha\frac{dM'}{dy}=0\,,\quad \frac{dM}{dz}+\alpha\frac{dM'}{dz}=0\,;\quad (9)$$

or, par l'élimination de α entre elles, on retombe de nouveau sur les équations (6); donc, *les pôles d'un plan situé à l'infini, relatifs à plusieurs surfaces du* m.$^{\text{ieme}}$ *degré, ayant les mêmes intersections, se trouvent sur la courbe à double courbure, intersection des surfaces du* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *degré dont il a été question ci-dessus.*

En généralisant ces diverses propositions, au moyen de la théorie des projections, et en leur joignant celles que la théorie des polaires réciproques permet ensuite d'en déduire, on obtiendra les théorèmes suivans:

THÉORÈME II. Tant de surfaces du m.$^{\text{ieme}}$ *degré qu'on voudra se coupant toutes suivant les mêmes courbes à double courbure,* 1.° *les surfaces polaires d'un point quelconque de l'espace, relatives à toutes celles-là, se coupent toutes suivant une même courbe à double courbure;* 2.° *si ce point parcourt une droite, la courbe à double courbure engendrera, dans son mouvement, une surface du* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *degré;* 3.° *les courbes polaires de cette droite seront situées sur cette même surface du*

THÉORÈME II. Tant de surfaces de m.$^{\text{ieme}}$ *classe qu'on voudra, étant toutes inscrites à une même surface développable,* 1.° *les surfaces polaires d'un plan quelconque, relatives à toutes celles-là, sont toutes inscrites à une autre surface développable;* 2.° *si ce plan tourne autour d'une droite, cette dernière surface développable sera mue de manière à envelopper constamment une surface fixe de* $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ *classe;* 3.° *les surfaces développables polaires de cette droite seront toutes circons-*

$[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ degré; 4.° si cette droite décrit un plan, les surfaces correspondantes du $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ degré se couperont toutes suivant une même courbe à double courbure; 5.° enfin, cette courbe à double courbure contiendra les points polaires du plan décrit par cette droite.

crites à cette même surface de $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ classe; 4.° si cette droite tourne autour de l'un de ses points, les surfaces correspondantes de $[2(m-1)]^{\text{ieme}}$ classe, seront toutes circonscrites à une même surface développable; 5.° enfin, cette surface développable touchera tous les plans polaires du point autour duquel cette droite aura tourné.

Dans la supposition particulière de $m=2$, on déduira de ces théorèmes les corollaires suivans :

Corollaire. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra, se coupant suivant les mêmes courbes planes ou à double courbure; 1.° les plans polaires d'un point quelconque de l'espace, relatifs à toutes ces surfaces se couperont tous suivant la même droite; 2.° si ce point parcourt une droite, l'intersection des plans polaires engendrera, dans son mouvement, une surface gauche ou développable du second ordre; 3.° les polaires conjuguées de cette droite seront toutes situées sur cette surface; 4.° si cette droite décrit un plan, les surfaces gauches ou développables du second ordre correspondantes se couperont toutes suivant une même courbe à double

Corollaire. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra, étant inscrites à une même surface développable; 1.° les pôles d'un plan quelconque, relatifs à toutes ces surfaces, sont tous situés sur une même droite; 2.° si ce plan tourne autour d'une droite, la droite, lieu des pôles, engendrera dans son mouvement, une surface gauche ou développable du second ordre; 3.° les polaires conjuguées de cette droite seront toutes situées sur cette surface; 4.° si cette droite tourne autour d'un de ses points, les surfaces gauches ou développables du second ordre correspondantes envelopperont toutes une même surface développable; 5.° enfin, cette surface décourbure; 5.° enfin, cette courbe contiendra les pôles de ce plan (*).

veloppable touchera tous les plans polaires de ce point (*).

Considérons présentement trois surfaces du $m.^{ieme}$ degré, données respectivement par les trois équations

$$M=0\ ,\qquad M'=0\ ,\qquad M''=0\ .$$

Si l'on désigne par α et β deux constantes indéterminées, l'équation

$$M+\alpha M'+\beta M''=0\ , \qquad (1)$$

appartiendra à une quatrième surface du $m.^{ieme}$ degré, passant par les m^3 points d'intersection des trois premières, quels que soient α et β.

(*) Si l'on suppose, dans ces corollaires, que soit le point, soit la droite soit le plan passent à l'infini, on en déduira les propositions suivantes:

I. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra ayant les mêmes courbes d'intersection; 1.° les plans diamétraux conjugués à leurs diamètres parallèles se coupent tous suivant une même droite; 2.° si l'on fait varier la direction commune des diamètres parallèles, de manière à leur faire décrire un système de plans diamétraux parallèles, cette droite décrira une surface du second ordre; 3.° les diamètres conjugués de ces plans diamétraux parallèles seront situés sur cette surface; 4.° si l'on fait varier la direction commune de ce système de plans diamétraux parallèles, les surfaces du second ordre, lieux de leurs diamètres conjugués, se couperont toutes suivant une même courbe à double courbure; 5.° enfin, cette courbe sera le lieu des centres des surfaces initiales.

II. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra étant inscrites à une même surface développable; 1.° leurs centres sont tous situés sur une même droite; 2.° leurs diamètres conjugués à des plans diamétraux parallèles sont situés tous sur une même surface du second ordre; 3.° leurs plans diamétraux conjugués à des diamètres parallèles enveloppent une surface développable circonscrite à deux surfaces du second ordre.

Différentiant cette équation, en remplaçant respectivement les coefficiens différentiels $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ par a et b, l'équation résultante

$$a\frac{dM}{dx}+b\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}+\alpha\left\{a\frac{dM'}{dx}+b\frac{dM'}{dy}+\frac{dM'}{dz}\right\}+\beta\left\{a\frac{dM''}{dx}+b\frac{dM''}{dy}+\frac{dM''}{dz}\right\}=0\,, \quad (2)$$

représentera la surface du $(m-1)^{ième}$ degré, lieu de la ligne de contact de la surface (1) avec la surface cylindrique circonscrite ayant ses élémens rectilignes parallèles à la droite fixe donnée par les deux équations $x=az$ et $y=bz$.

Or, quelles que soient les valeurs assignées aux deux constantes indéterminées α et β, cette surface contient évidemment les $(m-1)^3$ points d'intersection des surfaces données par les trois équations

$$\left.\begin{aligned} a\frac{dM}{dx}+b\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}&=0\,, \\ a\frac{dM'}{dx}+b\frac{dM'}{dy}+\frac{dM'}{dz}&=0\,, \\ a\frac{dM''}{dx}+b\frac{dM''}{dy}+\frac{dM''}{dz}&=0\,. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Donc, *les surfaces polaires d'un point situé à l'infini, relatives à tant de surfaces qu'on voudra du* m.^{ième} *degré, passant toutes les* m^3 *mêmes points fixes, passent elles-mêmes par les* (m$-$1)^3 *mêmes points fixes.*

Si l'on imagine que a reste constante et que b varie, ces $(m-1)^3$ points décriront une courbe dont on obtiendra les équations en éliminant b entre les équations (3), ce qui donnera

$$\left.\begin{aligned} a\left\{\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM'}{dy}-\frac{dM'}{dx}\cdot\frac{dM}{dy}\right\}+\left\{\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dM'}{dy}-\frac{dM'}{dz}\cdot\frac{dM}{dy}\right\}&=0\,; \\ a\left\{\frac{dM'}{dx}\cdot\frac{dM''}{dy}-\frac{dM''}{dx}\cdot\frac{dM'}{dy}\right\}+\left\{\frac{dM'}{dz}\cdot\frac{dM''}{dy}-\frac{dM''}{dz}\cdot\frac{dM'}{dy}\right\}&=0\,, \\ a\left\{\frac{dM''}{dx}\cdot\frac{dM}{dy}-\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM''}{dy}\right\}+\left\{\frac{dM''}{dz}\cdot\frac{dM}{dy}-\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dM''}{dy}\right\}&=0\,; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

équations du $[2(m-1)]^{ieme}$ degré qui ne doivent compter que pour deux seulement. Ainsi, *lorsqu'un point situé à l'infini décrit une droite également située à l'infini*, *les* $(m-1)^3$ *points communs aux surfaces polaires de ce point relatives à toutes les surfaces de* m.^{ieme} *degré*, *qui passent toutes par les* m^3 *mêmes points fixes*, *engendrent*, *dans leur mouvement*, *une courbe à double courbure*, *intersection de deux surfaces du* $[2(m-1)]^{ieme}$ *degré.*

Imaginons que a soit aussi variable, et éliminons cette quantité entre deux des équations (4); ce qui revient, au surplus, à éliminer a et b entre les équations (3), nous aurons ainsi

$$\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM'}{dy}\cdot\frac{dM''}{dz}-\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM'}{dz}\cdot\frac{dM''}{dy}+\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dM'}{dx}\cdot\frac{dM''}{dy}$$
$$-\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dM'}{dx}\cdot\frac{dM''}{dz}+\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dM'}{dz}\cdot\frac{dM''}{dx}-\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dM'}{dy}\cdot\frac{dM''}{dx}=0\,; \quad (5)$$

équation du $[3(m-1)]^{ieme}$ degré. Ainsi, *lorsqu'une droite située à l'infini décrit un plan également situé à l'infini*, *la courbe à double courbure*, *intersection de deux surfaces du* $[2(m-1)]^{ieme}$ *degré*, *lieu des points communs aux surfaces polaires des divers points de cette droite*, *relatives à toutes les surfaces du* m.^{ieme} *degré qui passent par les* m^3 *mêmes points fixes*, *engendre*, *dans son mouvement*, *une surface du* $[3(m-1)]^{ieme}$ *degré.*

En écrivant l'équation (2) sous la forme

$$a\left\{\frac{dM}{dx}+\alpha\frac{dM'}{dx}+\beta\frac{dM''}{dx}\right\}+b\left\{\frac{dM}{dy}+\alpha\frac{dM'}{dy}+\beta\frac{dM''}{dy}\right\}+\frac{dM}{dz}+\alpha\frac{dM'}{dz}+\beta\frac{dM''}{dz}=0\,; \quad (6)$$

on voit de suite que la courbe polaire de la droite située à l'infini, dans le plan $x=az$, par rapport à la surface (1) a pour ses équations

$$\left.\begin{aligned}a\left\{\frac{dM}{dx}+\alpha\frac{dM'}{dx}+\beta\frac{dM''}{dx}\right\}+\frac{dM}{dz}+\alpha\frac{dM'}{dz}+\beta\frac{dM''}{dz}=0\,,\\ \frac{dM}{dy}+\alpha\frac{dM'}{dy}+\beta\frac{dM''}{dy}=0\,;\end{aligned}\right\}(7)$$

chassant la variable α, l'équation résultante

$$a\left[\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dM'}{dy}-\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dM'}{dx}\right]+\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dM'}{dy}-\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dM'}{dz}-\beta$$

$$\left\{a\left[\frac{dM'}{dx}\cdot\frac{dM''}{dy}-\frac{dM'}{dy}\cdot\frac{dM''}{dx}\right]+\frac{dM'}{dz}\cdot\frac{dM''}{dy}-\frac{dM'}{dy}\cdot\frac{dM''}{dz}\right\}=0\ ,$$

représentera une surface qui contiendra cette courbe polaire ; mais il est visible que cette surface contiendra aussi la courbe à double courbure (4). Donc, cette courbe polaire et la courbe 4) se coupent en $2(m-1)^3$ points. Ainsi, *les courbes polaires de la droite située à l'infini dont il a été question ci-dessus coupent individuellement en* 2 m$-1)^3$ *points la courbe à double courbure dont il est question à l'endroit cité.*

Enfin, l'équation (2) fait voir que les points polaires d'un plan situé à l'infini, relatifs à la directrice (1), sont déterminés par les trois équations

$$\frac{dM}{dx}+\alpha\frac{dM'}{dx}+\beta\frac{dM''}{dx}=0\ ,$$

$$\frac{dM}{dy}+\alpha\frac{dM'}{dy}+\beta\frac{dM''}{dy}=0\ ,$$

$$\frac{dM}{dz}+\alpha\frac{dM'}{dz}+\beta\frac{dM''}{dz}=0\ ;$$

mais, en éliminant α et β entre elles, on retombe de nouveau sur l'équation (5) ; donc, *les points polaires d'un plan situé à l'infini sont tous situés sur la surface du* $[3(\text{m}-1)]^{\text{ieme}}$ *degré dont il a été question ci-dessus.*

En généralisant ces résultats, par la théorie des projections, et en les doublant par la théorie des polaires réciproques, on obtiendra les théorèmes suivans :

THÉORÈME III. Tant de surfaces du m.$^{\text{ieme}}$ *degré qu'on voudra passant toutes par les* m^3 *mêmes points fixes ;* 1.° *les surfaces polaires de l'un quelcon-*

THÉORÈME III. Tant de surfaces de m.$^{\text{ieme}}$ *classe qu'on voudra ayant toutes les* m^3 *mêmes plans tangens fixes ;* 1.° *les surfaces polaires d'un plan quel-*

que des points de l'espace, relatives à toutes celles-là, passeront toutes par les $(m-1)^3$ *mêmes points également fixes ;* 2.° *si ce point parcourt une droite, les* $(m-1)^3$ *points, devenus mobiles, décriront dans l'espace une courbe à double courbure, intersection de deux surfaces du* $[2(m-1)]^{ieme}$ *degré ;* 3.° *les courbes polaires de cette droite coupent individuellement cette courbe à double courbure en* $2(m-1)^3$ *points ;* 4.° *si cette droite décrit un plan, la courbe à double courbure décrira dans l'espace une surface du* $[3(m-1)]^{ieme}$ *degré ;* 5.° *enfin, les points polaires de ce plan seront tous situés sur cette dernière surface.*

conque, relatives à toutes celles-là, toucheront toutes les $(m-1)^3$ *mêmes plans également fixes ;* 2.° *si ce plan tourne autour d'une droite, les* $(m-1)^3$ *plans, devenus mobiles, envelopperont une surface développable, circonscrite à deux surfaces de* $[2(m-1)]^{ieme}$ *classe ;* 3.° *les surfaces développables polaires de cette droite ont individuellement* $2(m-1)^3$ *plans tangens communs avec cette surface ;* 4.° *si cette droite tourne autour d'un de ses points, la surface développable enveloppera dans l'espace une surface de* $[3(m-1)]^{ieme}$ *classe ;* 5.° *enfin, les plans polaires de ce point toucheront tous cette dernière surface.*

Dans la supposition particulière de $m=2$, on déduira de ces théorèmes les corollaires suivans :

Corollaire. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra étant circonscrites à un même corps octogone ; 1.° les plans polaires de l'un quelconque des points de l'espace, relatifs à toutes ces surfaces, passeront tous par le même point fixe ; 2.° si ce point parcourt une droite, le point fixe devenu mobile décrira, dans l'espace, une courbe à double courbure,

Corollaire. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra étant inscrites à un même corps octaèdre ; 1.° les pôles d'un plan quelconque, relatifs à toutes ces surfaces, seront tous situés sur une même droite fixe ; 2.° si ce plan tourne autour d'une droite, la droite fixe devenue mobile décrira, dans l'espace, une surface développable, circonscrite à deux intersection de deux surfaces du second ordre ; 3.° les polaires conjuguées de cette droite couperont individuellement cette courbe à double courbure en deux points ; 4.° si cette droite décrit un plan, la courbe à double courbure décrira dans l'espace une surface du troisième degré ; 5.° enfin, les pôles de ce plan seront tous situés sur cette dernière surface (*).

surfaces du second ordre ; 3.° les polaires conjuguées de cette droite seront telles que, par chacune d'elles, on pourra conduire deux plans tangens à cette surface développable ; 4.° si cette droite tourne autour de l'un de ses points, la surface développable enveloppera une surface de troisième classe ; 5.° enfin, les plans polaires de ce point seront tous tangens à cette dernière surface (*).

GÉOMÉTRIE PURE.

Théorèmes sur les sections coniques confocales ;

Par M. Chasles, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

Au Rédacteur des Annales.

Monsieur,

Ce n'est seulement qu'hier au soir que votre numéro de janvier m'est parvenu. J'ai parcouru le mémoire de M. Bobillier avec

(*) Si l'on suppose, dans ces corollaires, que soit le point, soit la droite, soit le point passe à l'infini, on en déduira les propositions suivantes :

I. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra étant circonscrites à un même corps octogone, 1.° leurs plans diamétraux conjugués à des diamètres parallèles concourront en un même point ; 2.° si l'on fait varier la direction commune des diamètres parallèles, de telle sorte qu'ils décrivent un système de plans diamétraux parallèles, ce point décrira une courbe à double courbure, intersection de deux surfaces du second ordre ; 3.° cette courbe sera rencontrée en deux points par tous les diamètres dont ces plans d'autant plus d'empressement que, comme j'ai eu l'honneur de vous le dire à mon passage à Montpellier, je m'étais aussi occupé, et il y a même fort long-temps, de la transformation des surfaces en d'autres surfaces, au moyen d'une surface auxiliaire du second ordre, c'est-à-dire, des *surfaces polaires*, comme les a appelées M. Poncelet, dans son ouvrage si remarquable sur les propriétés projectives des figures. J'avais été conduit à ces recherches en m'occupant d'un travail bien étranger aux surfaces du second ordre. Je me suis souvent servi de la transformation polaire; mais c'est surtout pour la transformation des relations métriques que je l'ai trouvée utile; car, dans beaucoup d'autres questions, telles par exemple que celle de la transformation des surfaces qui ont la même intersection en surfaces inscrites à une même développable, il est une infinité d'autres manières de parvenir au but. Mais je dois dire que l'examen spécial du cas où l'on prend une sphère pour surface auxiliaire avait été étranger à mes recherches, et ne m'a été inspiré que par la lecture de l'analyse du mémoire présenté à l'Institut par M. Poncelet en 1824 (*Annales*, tom. XVII, pag. 265). C'est cette lecture qui m'a fait reprendre des recherches géométriques interrompues depuis bien des années. J'ai pensé que M. Poncelet avait dû employer une sphère pour surface auxiliaire; et, en effet, ce moyen qui s'est présenté aussi à la pensée de M. Bobillier m'a conduit à un grand nombre de résultats curieux. Je me hâte de consigner ici ceux de ces résultats qui sont relatifs à la

---

diamétraux parallèles seront les conjugués; 4.° si l'on change la direction commune de ces plans diamétraux parallèles, la courbe à double courbure décrira une surface du troisième degré; 5.° enfin, cette surface sera le lieu des centres de toutes les surfaces initiales.

II. Tant de surfaces du second ordre qu'on voudra étant inscrites à un même corps octoèdre, 1.° leurs centres sont situés sur une même droite; 2.° leurs plans diamétraux conjugués à des diamètres parallèles touchent tous une seule et même surface de troisième classe.

géométrie plane et à l'égard desquels M. Bobillier ne s'est pas rencontré avec moi. J'en omettrai la démonstration, toujours facile à établir au moyen de la théorie des polaires réciproques, et j'appelerai *cercle directeur* le cercle par rapport auquel on prend les pôles et polaires des droites et des points donnés.

1. Je dois commencer par énoncer un principe dont il ne se trouve aucun indice ni dans la lettre citée de M. Poncelet, ni dans le mémoire de M. Bobillier, et qui cependant est d'une application indispensable dans les recherches dont il est question ici, c'est le suivant :

Le centre de la polaire réciproque Σ *d'une surface* S *du second ordre, relative à une surface directrice* D, *n'est autre que le pôle relatif à* D *du plan polaire du centre de* D, *pris par rapport à* S, *considérée comme surface directrice.*

2. Voici un autre principe qui n'est guère moins utile que celui qui précède :

Six points en involution sur une droite ont, pour plans polaires réciproques, six plans se coupant suivant une même droite et coupant une transversale rectiligne quelconque en six points qui sont eux-mêmes en involution (*).

Il en est de même pour quatre points en proportion harmonique.

3. Quelques lignes de calcul font voir que,

Si trois surfaces du second ordre ont les mêmes courbes d'intersection, elles couperont toute transversale rectiligne en six points qui seront en involution ;

Donc, *si trois surfaces du second ordre sont inscrites à une même surface développable de cet ordre, et que, par une droite prise arbitrairement, on leur mène trois couples de plans tangens, ces plans couperont toute transversale rectiligne en six points qui seront en involution.*

(*) Voy., pour la définition des involutions, la pag. 181 du XVII.e volume du présent recueil.

4. Je passe, Monsieur, à l'objet principal de cette lettre, qui est de faire une application spéciale de la théorie des polaires réciproques aux propriétés des coniques confocales.

Une des plus caractéristiques de ces propriétés, c'est que les deux rayons vecteurs d'un même point font des angles égaux avec la tangente en ce point; ce qui revient encore à dire que les rayons vecteurs, menés d'un même foyer aux points de contact de deux tangentes parallèles, font des angles respectivement égaux avec ces tangentes. C'est cette propriété qui va nous faire découvrir la nature de la polaire réciproque d'un cercle relative à un autre cercle.

La courbe polaire P d'un cercle C, relative à un cercle directeur D, aura son centre (1) sur la droite qui joint les centres des deux cercles C et D; et cette droite sera un diamètre principal de P, puisque tout est égal de part et d'autre.

Deux tangentes au cercle C ont pour pôles deux points de sa polaire P, et les tangentes à cette courbe en ces points ont pour pôles les deux points de contact sur C. La corde qui joint ces deux points a pour pôle l'intersection des deux tangentes à P. Les trois rayons menés du centre de D, aux deux points de contact sur P et au point de coucours des tangentes en ces points sont perpendiculaires sur les deux tangentes à C et sur la corde de contact; or, cette corde fait des angles égaux avec les deux tangentes; le troisième rayon fait donc aussi des angles égaux avec les deux autres. La polaire réciproque P d'un cercle C jouit donc de cette propriété que, si, par le centre du cercle directeur D, on mène des rayons vecteurs à deux de ses points, et un troisième au point de concours des tangentes en ces deux points, ce dernier fera des angles égaux avec les deux autres. Donc, si les deux tangentes sont parallèles, le troisième rayon leur sera parallèle, et fera des angles égaux avec les rayons menés aux points de contact; donc, si deux tangentes à la polaire P de C sont parallèles, les rayons menés du centre du cercle directeur D aux points de contact feront des angles égaux avec les deux tangentes; or, c'est là la propriété caractéristique d'une conique ; donc enfin *la polaire réciproque d'un cercle, par rapport à un autre cercle, est une conique qui a pour foyer le centre du cercle directeur.*

5. Toutes les fois que le centre du cercle directeur D sera extérieur au cercle C, on pourra par ce centre lui mener deux tangentes dont les pôles, situés à l'infini, seront des points de la polaire réciproque D, qui sera ainsi une hyperbole.

Si le centre du cercle directeur D est sur la circonférence du cercle C, le centre de la polaire P sera (1) situé à l'infini; cette polaire sera donc une parabole.

Si donc le centre de D est intérieur à C, la polaire P sera une ellipse; car elle n'aura aucun point à l'infini.

Venons présentement aux applications.

6. Le sommet d'un angle constant et mobile, dont les côtés passent constamment par deux points fixes, décrit un arc de cercle ;

Donc, *si un angle de grandeur invariable tourne autour de son sommet dans le plan de deux droites fixes, la droite qui joindra les points d'intersection respectifs de ses côtés avec ces deux droites enveloppera une conique qui aura pour foyer le sommet fixe de l'angle mobile.*

7. Les normales à un cercle concourent toutes en un même point ;

Donc, *la tangente à une conique et la droite menée par le foyer, perpendiculairement au rayon vecteur qui passe par le point de contact, concourent en un point dont le lieu est une ligne droite.*

On reconnaît ici la directrice de la courbe ; de sorte que la directrice de la polaire réciproque P d'un cercle C, relative au cercle directeur D, est la polaire du centre C, du moins en prenant pour foyer le centre de D.

8. Deux cercles n'ont que deux intersections, extrémités d'une corde commune, perpendiculaire à la droite qui joint leurs centres ;

Donc, *deux coniques qui ont un foyer commun ne sauraient avoir que deux tangentes communes réelles. Les droites menées du foyer commun au point de concours des deux tangentes et au point de* *concours des deux directrices sont perpendiculaires l'une à l'autre.*

9. Tous les cercles tangens à la fois à deux cercles donnés ont leurs centres sur deux coniques ;

Donc, *quand deux coniques ont un foyer commun, les directrices de toutes les coniques tangentes à ces deux-là, et de même foyer qu'elles, enveloppent deux autres coniques.*

On transporte facilement, aux coniques qui ont un foyer commun toutes les propriétés des cercles qui se touchent, la description d'un cercle qui en touche à la fois trois autres donnés, etc., etc.

10 Si plusieurs cercles ont une corde commune, leurs centres seront en ligne droite ; et, si on leur circonscrit des angles ayant leurs sommets au même point, les cordes de contact concourront en un autre point;

Donc, *si plusieurs coniques de même foyer sont inscrites à un même angle, leurs directrices relatives à ce foyer concourront en un même point ; et si on les coupe toutes par une transversale rectiligne, les pôles de cette transversale, relatifs à ces coniques, seront en ligne droite ; d'où il suit que les centres des coniques seront aussi en ligne droite.*

11. Si l'on mène à deux cercles quatre tangentes parallèles, les droites qui joindront les points de contact sur l'un aux points de contact sur l'autre passeront par leurs deux centres de similitude ;

Donc, *deux coniques ayant un foyer commun, si on leur mène quatre tangentes par leurs points d'intersection avec un même rayon vecteur mobile, les tangentes à la première rencontreront les tangentes à la seconde en des points dont le lieu géométrique sera le système de deux droites.*

Cette proposition n'est qu'un cas particulier d'une belle propriété du système de deux coniques qu'on peut démontrer directement.

12. Lorsque deux cercles ne se coupent pas, il existe, sur la droite qui joint leurs centres, deux points qui jouissent de ces deux propriétés remarquables, savoir : 1.° qu'une même droite est à la fois polaire de ces deux points par rapport aux deux cercles; 2.° que,

si l'on mène une tangente commune aux deux cercles, les droites menées de l'un ou de l'autre de ces deux points aux deux points de contact seront perpendiculaires l'une à l'autre.

En faisant la transformation polaire de manière que l'un des deux points dont il s'agit soit le centre du cercle directeur, on obtiendra ce théorème connu :

Deux coniques de même foyer se coupent orthogonalement.

13. Les droites qui divisent les angles d'un triangle en deux parties égales concourent toutes trois en un même point, centre du cercle inscrit ;

Donc, *un triangle étant arbitrairement inscrit à une conique, et des rayons vecteurs étant menés du foyer à ses trois sommets, les droites qui divisent, en deux parties égales, les angles des rayons vecteurs rencontrent respectivement ces trois mêmes côtés en trois points qui appartiendront à la directrice.*

Voilà donc un moyen très-simple de construire la directrice d'une conique, lorsqu'on connaît son foyer et trois points de son périmètre.

14. La comparaison des triangles, dans la figure que nécessite cette construction, prouve d'ailleurs que les perpendiculaires abaissées des points de la courbe sur la directrice sont proportionnelles aux rayons vecteurs de ces points ;

Donc, *les distances des points d'une conique à sa directrice sont proportionnelles aux distances des mêmes points à son foyer.*

15. Lorsque la conique a deux foyers, elle a aussi deux directrices, et les distances des points de la courbe à la seconde directrice doivent être encore dans le même rapport avec les distances des mêmes points au deuxième foyer, puisque tout est symétrique de part et d'autre du centre ; donc la somme ou la différence des rayons vecteurs menés d'un même point de la courbe aux deux foyers doit être égale à la distance entre les deux directrices multipliées par une constante ;

Donc, *dans une conique à deux foyers, la somme ou la diffé-*

rence des rayons vecteurs des divers points de la courbe doit être une quantité constante.

16. Les perpendiculaires élevées sur les milieux des trois côtés d'un triangle concourent en un même point, centre du cercle circonscrit;

Donc, *pour inscrire à un triangle une conique qui ait un foyer en un point donné sur son plan, on menera de ce point un rayon vecteur à l'un des sommets du triangle. On construira une quatrième harmonique à ce rayon vecteur et aux deux côtés qui comprennent ce sommet, laquelle sera coupée par la perpendiculaire menée au rayon vecteur, par le foyer, en un point de la directrice; on pourra, par de semblables constructions, construire deux autres points de cette directrice, et dès lors le problème pourra être réputé résolu.*

17. Les centres de quatre cercles qui touchent respectivement trois à trois les côtés d'un quadrilatère sont sur une même circonférence;

Donc, *si quatre coniques du même foyer sont telles que chacune d'elles passe par trois des quatre sommets d'un même quadrilatère, leurs quatre directrices toucheront une cinquième conique de même foyer que les quatre autres.*

18. Les tangentes menées à plusieurs cercles concentriques, d'un même point de leur plan, ont leurs points de contact sur un même cercle passant par le centre commun des autres et par le point dont il s'agit;

Donc, *si l'on coupe, par une transversale quelconque, tant de coniques qu'on voudra de même foyer et de même directrice, et qu'on mène des tangentes à ces courbes, par les points où elles coupent cette transversale, toutes ces tangentes envelopperont une nouvelle conique, de même foyer que les premières, touchant à la fois la transversale et la directrice commune.*

Etc., etc., etc.

Nice, le 18 janvier 1828.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Mémoire sur les propriétés des systèmes de sections coniques, situées dans un même plan;

Par M. CHASLES, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

M. PONCELET paraît être le premier qui ait publié des recherches sur les propriétés du systèmes de deux coniques quelconques, situées d'une manière quelconque dans un même plan; propriétés fort remarquables, comme on peut le prévoir d'après celles du système de deux cercles. Je m'étais occupé, lorsque j'étais encore à l'école polytechnique, c'est à-dire dès 1813, de l'étude des coniques semblables et semblablement situées. J'en ai dit quelques mots dans la *Correspondance* de M. Hachette (tom. III, pag. 326), où j'ai fait voir que leurs propriétés sont tout-à-fait analogues à celles des cercles.

En m'occupant postérieurement des applications de la théorie des polaires réciproques, j'ai reconnu que cette théorie offrait un moyen très-facile de traiter les questions relatives au système de deux coniques quelconques, situées dans un même plan, en les ramenant, par une méthode générale, à des coniques semblables et semblablement situées.

Exposer cette méthode, et en faire connaître les principales applications, tel est l'objet que je me propose dans ce qu'on va lire. Elle est différente de celle de M. Poncelet, bien que j'y emploie la théorie des polaires réciproques, qui offre un des points les plus remarquables de son bel ouvrage. Je prie d'ailleurs M. Poncelet de m'excuser si, me rencontrant avec lui dans quelques résultats, je néglige de le faire remarquer. Mon excuse est que, me trouvant ici momentanément et seulement depuis peu de jours, je n'ai sous la main aucune des ressources qui me seraient nécessaires pour remplir envers lui un devoir de justice et de convenance, auquel je me garderais bien de me soustraire dans des circonstances plus favorables.

§. I.

Considérations préliminaires.

1. On a tellement étudié, dans ces derniers temps, les propriétés de deux ou d'un plus grand nombre de cercles tracés sur un même plan, qu'on peut aujourd'hui considérer ces propriétés comme généralement connues des géomètres; elles se trouvent d'ailleurs développées avec beaucoup de détail dans un mémoire de M. Gaultier, de Tours, faisant partie du XVI.e cahier du *Journal de l'Ecole polytechnique*, ainsi que dans plusieurs endroits des *Annales de Mathématiques* (*). Il doit donc suffire à notre but de rappeler ici sommairement celles d'entre elles sur lesquelles nous aurons le plus fréquemment besoin de nous appuyer.

2. Deux cercles étant tracés sur un même plan, si on leur mène quatre tangentes parallèles de direction arbitraire, les points de contact de ces tangentes seront les quatre sommets d'un quadrilatère dont deux côtés opposés seront des diamètres des deux cercles, tandis que le point de concours des deux autres côtés opposés, ainsi que celui des diagonales seront deux points fixes, indépendans de la direction commune des tangentes; ces points se-

---

(*) Voy. notamment tom. XIII, pag. 193, et tom. XVII, pag. 285.

ront les points de concours des deux couples de tangentes communes, tant extérieures qu'intérieures aux deux cercles, si ces deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre Ces mêmes points sont, ce qu'on appelle, les *centres de similitude* des deux cercles; d'où l'on voit que, pour que le point de concours de deux tangentes communes soit un centre de similitude, il est nécessaire que les cercles soient inscrits tous deux dans l'un des quatre angles formés par ces tangentes, ou que l'un d'eux étant inscrit dans l'un de ces angles, l'autre le soit dans son opposé au sommet.

3 Si, par l'un ou l'autre des deux centres de similitude de deux cercles on leur mène une sécante commune mobile, les quatre tangentes menées aux deux cercles en leurs points d'intersection avec cette sécante, formeront un parallélogramme, dont deux sommets opposés, qui seront les pôles de la sécante relatifs aux deux cercles, seront en ligne droite avec le centre de similitude dont il s'agit, et décriront les polaires de ce centre, relatives aux deux cercles, tandis que les deux autres sommets opposés du parallélogramme, décriront une droite fixe, indépendante du centre de similitude qu'on aura choisi, laquelle sera la corde commune aux deux cercles, lorsque ceux-ci se couperont. Cette droite est ce qu'on appelle *l'axe radical* des deux cercles.

4. Si, par un point mobile sur l'axe radical de deux cercles on leur mène quatre tangentes, leurs points de contact seront les quatre sommets d'un quadrilatère dont deux côtés opposés, seront les polaires du point mobile, relatives aux deux cercles, tandis que les deux autres côtés opposés du quadrilatère iront concourir en l'un des centres de similitude, et les deux diagonales à l'autre.

5. Les polaires des deux centres de similitude de deux cercles, prises par rapport à ces cercles, sont ce qu'on appelle leurs *polaires de similitude*, et il y en a deux pour chaque cercle. Ce sont quatre droites parallèles entre elles et à l'axe radical, par rapport auquel elles sont symétriquement situées; de manière que la distance

entre les deux polaires relatives à l'un des cercles se trouve être égale à la distance entre les deux polaires relatives à l'autre.

6. Trois cercles, situés dans un même plan, ont deux à deux trois axes radicaux concourant en un même point qu'on appelle leur *centre radical*, et six centres de similitude distribués trois à trois aux intersections de quatre droites qu'on appelle leurs *axes de similitude.*

7. Nous pourrions démontrer directement, d'une manière purement géométrique, à l'aide de la doctrine des projections stéréographiques, que ces diverses propriétés du système de deux et trois cercles appartiennent généralement au système de deux coniques quelconques, semblables et semblablement disposées; mais, pour ne point étendre ces préliminaires outre mesure, nous regarderons cette vérité comme admise; elle est évidente, au surplus, pour des ellipses semblables et semblablement disposées, qui peuvent toujours être projetées orthogonalement suivant des cercles.

8. Pour éviter les périphrases, nous dirons à l'avenir de deux coniques tracées dans un même plan, qu'elles sont *homothétiques*, pour exprimer qu'elles sont à la fois semblables et semblablement disposées; nous abandonnerons d'ailleurs très-volontiers cet adjectif, si l'on nous en offre un autre plus convenable.

9. Deux coniques homothétiques ont donc, comme deux cercles, deux centres de similitude points de concours soit de deux côtés opposés soit des deux diagonales d'un quadrilatère dont les sommets sont les points de contact des quatre tangentes parallèles de direction arbitraire, lesquels sont aussi les points de concours, toujours réels, de leurs tangentes communes, réelles ou imaginaires; en ne prenant toutefois, pour tangentes d'une même couple, que celles qui touchent les deux courbes de la même manière. Elles ont aussi deux couples de polaires de similitude toutes parallèles, tellement situées que la distance entre celles qui appartiennent à l'une des deux courbes est égale à la distance entre celles qui appartiennent à l'autre; elles ont enfin un axe radical, lieu de deux

sommets opposés du parallélogramme variable dont les côtés sont des tangentes à quatre points des deux courbes en ligne droite avec l'un quelconque de leurs deux centres de similitude. Cet axe radical, parallèle aux deux couples de polaires de similitude, et également distant des unes et des autres, est la droite, toujours réelle, qui contient les deux points d'intersection, réels ou imaginaires des deux courbes.

10. On sait qu'en général deux coniques, situées dans un même plan, ont quatre points d'intersection, réels ou imaginaires; mais lorsque deux coniques sont homothétiques, deux de ces quatre points passent à l'infini, de sorte qu'il n'en reste au plus que deux d'accessibles, réels ou imaginaires. Cela se voit évidemment pour deux hyperboles; et le calcul l'indique également pour deux ellipses. Il est aisé de voir que, réciproquement, deux coniques dont deux des quatre points d'intersection sont situés à l'infini, sont par cela même deux coniques homothétiques.

§. II.

Exposition de la méthode.

11. Considérons deux coniques quelconques, tracées sur un même plan, et concevons que l'on construise la figure polaire réciproque de leur système, relative à une conique directrice quelconque, ayant son centre au point de concours de deux tangentes communes, tellement choisies d'ailleurs que les deux courbes soient l'une et l'autre inscrites dans l'un des angles formés par ces tangentes, ou que l'une de ces courbes soit inscrite dans l'un de ces angles et l'autre dans son opposé au sommet. La polaire réciproque sera, comme l'on sait, le système de deux autres coniques dont tous les points seront les pôles des tangentes aux deux premières, tandis que les points de contact auront, à l'inverse, pour polaires les tangentes aux différens points des deux dernières.

Les intersections des deux proposées auront donc pour polaires les tangentes communes à leurs polaires réciproques, dont les intersections seront, à l'inverse, les pôles des tangentes communes aux deux premières.

Or, deux de ces tangentes communes, passant par le centre de la conique directrice, doivent avoir leurs pôles à l'infini; donc, des quatre intersections des coniques polaires réciproques des proposées doivent être situées à l'infini, d'où il résulte que ces polaires sont homothétiques. On a donc ce théorème fondamental :

12. *Deux coniques quelconques, situées d'une manière quelconque dans un même plan, et rapportées à une conique directrice ayant son centre au point de concours de deux tangentes communes aux deux courbes, ont pour polaires réciproques deux coniques homothétiques.*

Mais il ne faut pas perdre de vue, dans l'application de ce théorème (2, 9), que les deux tangentes communes doivent être choisies de telle sorte que les deux coniques soient inscrites dans le même angle, ou l'une dans un angle et l'autre dans son opposé au sommet.

13. Or, il peut ici se présenter trois cas : 1.° Si les deux courbes sont extérieures l'une à l'autre, elles auront quatre tangentes communes et deux seulement de leurs six points d'intersection pourront être pris pour centres de la conique directrice; 2.° si les deux courbes se coupent en deux points, elles n'auront que deux tangentes communes, et conséquemment aucune difficulté n'aura lieu; 3.° enfin, si les deux courbes se coupent en quatre points, elles auront de nouveau quatre tangentes communes; mais alors chacun de leur six points de concours pourra être pris pour centre de la conique directrice.

14. Si l'on prenait pour centre de la conique directrice le point de concours de deux tangentes telles que les deux courbes se trouvassent inscrites dans deux angles consécutifs, leurs polaires réciproques ne seraient plus des coniques homothétiques, mais deux

hyperboles qui, ayant leurs asymptotes respectivement parallèles, auraient bien, à la vérité, deux intersections à l'infini, mais qui, lors même qu'elles seraient équilatères, et conséquemment semblables, ne seraient pas semblablement disposées; les angles des asymptotes qui contiendraient les courbes n'étant pas alors de même direction.

15. On voit donc que *le système de deux coniques quelconques, situées comme on le voudra dans un même plan, est toujours polaire conjugué du système de deux coniques homothétiques, situées dans ce plan.* Cette considération va nous conduire rapidement à la découverte des propriétés les plus remarquables du système de deux coniques quelconques. Pour plus de clarté et de brièveté, nous appellerons *système primitif*, le système de ces coniques, et *système transformé* le système des coniques homothétiques dont il est le polaire réciproque.

§. III.

Propriétés de deux coniques quelconques.

16. Soient menées aux deux courbes du système transformé, quatre tangentes parallèles de direction arbitraire; leurs points de contact seront (9) les sommets d'un quadrilatère, dont deux côtés opposés concourront à l'un des centres de similitude, tandis que ses deux diagonales concourront à l'autre. Le polaire réciproque de ce quadrilatère, dans le système primitif, sera un autre quadrilatère dont les côtés seront quatre tangentes aux deux courbes ayant leurs points de contact aux pôles des quatre tangentes parallèles du système transformé, et les deux couples de sommets opposés de ce quadrilatère devront être constamment sur deux droites fixes polaires des deux centres de similitude du système transformé. D'un autre côté, les quatre tangentes du système transformé étant parallèles, leurs pôles, points de contact des côtés du quadrilatère pri-

mitif doivent être en ligne droite avec le centre de la conique directrice, point de concours de deux tangentes communes aux courbes de ce système ; on a donc, dabord, immédiatement, puis par la théorie des polaires réciproques, les deux théorèmes que voici :

17. *Si une droite mobile, sur le plan de deux coniques quelconques, tourne autour du point de concours de deux tangentes communes à ces courbes, de manière à les couper en quatre points ; les tangentes aux quatre points d'intersection seront telles que les quatre points de concours des tangentes à l'une des courbes avec les tangentes à l'autre, décriront le système de deux droites fixes ; lesquelles seront des cordes communes, si les deux courbes se coupent.*

17. *Si un point mobile, sur le plan de deux coniques quelconques, parcourt une corde commune à ces courbes, de manière à pouvoir être le point de départ de quatre tangentes ; les points de contact de ces quatre tangentes seront tels que les quatre droites qui joindront les points de contact sur l'une des courbes avec les points de contact sur l'autre, concourront en deux points fixes ; lesquels seront les points de concours des tangentes communes, si les deux courbes ne se coupent pas.*

18. Dans le cas où les deux courbes du système primitif ont quatre tangentes communes, si au point de concours des tangentes d'une même paire on substitue le point de concours des tangentes de l'autre paire, on retrouvera encore les deux mêmes droites fixes. En effet, ce deuxième point de concours est le pôle de la corde commune aux deux courbes du système transformé ; et l'on sait (4) que les quatre points de contact des tangentes issues d'un point de cette corde commune, sont les sommets d'un quadrilatère dont deux côtés opposés concourrent en l'un des centres de similitude et les deux diagonales à l'autre ; d'où il suit que les polaires de ces points de contact, dans le système primitif, lesquelles ne sont autre chose que les tangentes menées aux deux courbes, aux quatre points où elles sont coupées par la droite issue du

point de concours des tangentes communes, doivent se couper deux à deux sur les deux droites fixes, polaires des centres de similitude du système transformé.

On verra pareillement, à l'aide de la théorie des polaires réciproques, que, dans le cas où les deux courbes se coupent en quatre points, soit qu'on prenne pour corde commune celle qui joint deux quelconques de ces points, ou qu'on prenne au contraire celle qui joint les deux autres, l'application du second des théorèmes (17) conduira toujours aux deux mêmes points fixes.

Ces droites fixes qui, lorsque deux courbes se coupent, en sont des cordes communes, ont été appelées par M. Poncelet, dans le cas contraire, des cordes communes *idéales*, ce qui pourrait faire penser qu'alors ces droites disparaissent, tandis qu'elles ont une existence réelle dans tous les cas, et qu'il n'y a alors d'imaginaires que les intersections des deux courbes. D'un autre côté, la dénomination d'*axes radicaux* ne saurait convenir ici où il n'est plus question de cercles. En conséquence, en attendant qu'on ait trouvé pour ces droites, qui jouent un rôle très-important dans la théorie des sections coniques, une dénomination plus convenable, je les appelerai des *axes de symptose*, à raison de leurs propriétés relatives aux tangentes issues de leurs différens points. Quant au point de concours des tangentes communes, choisies comme il a été expliqué ci-dessus (2, 9, 14), comme la dénomination de centre de similitude ne saurait leur convenir, lorsqu'il s'agit de coniques quelconques, ou même de coniques semblables qui ne seraient pas semblablement disposées, nous continuerons à les appeler, avec M. Poncelet, des *centres d'homologie*. Le centre d'homologie, dans le système primitif, est donc le pôle de l'axe radical du système transformé, tandis que ses axes de symptose sont les polaires des deux centres de similitude de ce second système.

Au moyen de ces dénominations, nos deux théorèmes (17) peuvent être énoncés plus brièvement comme il suit :

19. *Tous les quadrilatères dont* 19. *Tous les quadrilatères qui*

les côtés touchent deux coniques aux quatre points où elles sont coupées par une droite menée arbitrairement par leur centre d'homologie ont leurs quatre sommets sur les deux axes de symptose de ces deux courbes, pourvu qu'on ne prenne, pour aucun sommet, le point de concours de deux tangentes à la même courbe.

ont leurs sommets aux quatre points de contact de deux coniques avec leurs tangentes issues d'un même point de leur axe de symptose ont leur quatre côtés concourant aux deux centres d'homologie de ces deux courbes, pourvu qu'on ne prenne, pour aucun côté, une droite contenant les deux points de contact d'une même courbe.

20. M. Poncelet a discuté très-clairement l'existence des centres d'homologie et des axes de symptose, et nous ne saurions mieux faire que de renvoyer, sur ce sujet, à son *Traité des propriétés projectives*. On y verra que, quand deux coniques se coupent en quatre points, elles ont, comme nous l'avons déjà vu (13), six centres d'homologie, qui sont les six intersections deux à deux de leurs quatre tangentes communes, et six axes de symptose, qui sont les six droites qui joignent deux à deux leurs quatre points d'intersection. On peut alors appeler *centres d'homologie conjugués* deux centres d'homologie qui n'appartiennent pas à une même tangente, et *axes de symptose conjugués*, ceux qui ne concourrent pas en un même point commun aux deux courbes.

Dans tous les autres cas, où les deux courbes ne se coupent pas ou bien n'ont que deux points d'intersection, il n'y a que deux axes de symptose et deux centres d'homologie seulement; et ces droites et ces points ont toujours une existence réelle. La raison analytique de ce fait est que les trois systèmes d'axes de symptose conjugués, ainsi que les trois systèmes de centres d'homologie conjugués, sont donnés par une même équation du troisième degré qui a nécessairement une racine réelle, au moins; mais qui n'en a qu'une seule de réelle lorsqu'elles ne le sont pas toutes les trois.

On sait (3, 4) que, dans le système transformé, toute droite qui contient l'un des centres de similitude, a ses pôles relatifs aux deux courbes en ligne droite avec ce même centre, et que tout point situé sur l'axe radical a le point de concours de ses polaires relatives aux deux courbes sur ce même axe. En repassant donc au système primitif, on aura ces deux théorèmes :

21. *Les polaires de tout point situé sur l'un des axes de symptose de deux coniques, prises relativement à ces courbes, vont concourir sur ce même axe.*

21. *Les pôles de toute droite qui passe par l'un des centres d'homologie de deux coniques, pris relativement à ces courbes, sont en ligne droite avec ce même centre.*

Or, comme l'on sait, avec la règle seulement, construire la polaire d'un point donné ou le pôle d'une droite donnée, par rapport à uue conique quelconque, il s'ensuit qu'avec la règle seulement, on peut résoudre ces deux problèmes.

22. *Etant donné un seul des points d'un axe de symptose de deux coniques, construire un autre point de cet axe, et par suite cet axe lui-même ?*

22. *Etant donnée une seule des droites qui contiennent un centre d'homologie de deux coniques, construire une autre droite qui le contienne également, et par suite ce centre lui-même ?*

23. L'axe de symptose étant ainsi construit, on en pourra conclure (19) les deux centres d'homologie correspondans, et ensuite, au moyen de l'un d'eux, l'axe de symptose conjugué.

Ainsi, pour déterminer deux axes de symptose conjugués, il suffit simplement de connaître un des points de la direction de l'un d'eux.

23. Le centre d'homologie étant ainsi construit, on en pourra conclure (19) les deux axes de symptose correspondans, et ensuite, au moyen de l'un d'eux, le centre d'homologie conjugué.

Ainsi, pour déterminer deux centres d'homologie conjugués, il suffit simplement de connaître une droite qui passe par l'un d'eux.

Il faut pourtant excepter le cas où le point donné serait un point commun aux deux courbes, car alors la construction se trouverait en défaut.

Il faut pourtant excepter le cas où la droite donnée serait une tangente commune aux deux courbes, car alors la construction serait en défaut.

La raison analytique de ce fait, est qu'alors le point donné ou la droite donnée se trouvant appartenir à la fois aux trois couples d'axes de symptose ou de centres d'homologie conjugués, le problème doit alors s'élever au troisième degré, et n'être plus dès lors résoluble avec la ligne droite et le cercle. Le cas où, au contraire, le problème se résout par les élémens, doit répondre à quelque circonstance particulière dans les équations du troisième degré.

24. Les axes de symptose de deux coniques, sont des lignes fort importantes, puisqu'elles font connaître les points d'intersection des deux courbes, et que ces points d'intersection donnent la solution de tout problème déterminé qui admet plus de deux solutions sans en admettre plus de quatre, lors même qu'un tel problème est étranger à la géométrie. On aurait donc beaucoup étendu le domaine de la géométrie, si l'on parvenait à construire, par la ligne droite et le cercle, les axes de symptose de deux coniques; on saurait alors résoudre les problèmes qui admettent trois et quatre solutions, comme on sait résoudre ceux qui n'en admettent que deux.

25. Algébriquement parlant, chacun des trois systèmes d'axes de symptose est une conique qui passe par les quatre points d'intersection, réels ou imaginaires, des deux courbes proposées. On pourra donc les déterminer comme il suit: Soient $M=0$, $M'=0$ les équations des deux courbes; l'équation commune à toutes coniques passant par les quatre mêmes points sera $M+\lambda M'=0$; et il s'agira de déterminer λ de telle sorte que le premier membre de cette dernière équation se décompose en deux facteurs rationnels du premier dégré, ce qui conduira à une équation du troisième degré

en λ. Les trois systèmes d'axes de symptose de deux coniques faisant ainsi partie des coniques qu'on peut faire passer par les points d'intersection de ces deux là, ces systèmes d'axes doivent jouir des propriétés communes à toutes ces courbes.

Avant d'aller plus loin, faisons remarquer quelques relations harmoniques qui existent entre deux axes de symptose conjugués et les deux centres d'homologie correspondans, relations qu'il peut être utile de connaître.

On sait que, dans deux coniques homothétiques (9), l'axe radical est également distant des deux polaires de similitude qui répondent à un même centre; il en résulte ces deux théorèmes :

26. *Les pôles de l'un des axes de symptose de deux coniques quelconques, pris par rapport à ces courbes, divisent harmoniquement la droite qui joint les deux centres d'homologie relatifs à cet axe.*

26. *Les polaires de l'un des centres d'homologie de deux coniques quelconques, prises par rapport à ces courbes, forment un faisceau harmonique avec les deux axes de symptose relatifs à cet axe.*

Ces deux propositions serviront à résoudre la question suivante :

27. *Etant donnés un axe de symptose et un centre d'homologie, déterminer l'axe de symptose et le centre d'homologie conjugués ?*

Nous ne nous sommes occupés, dans ce qui précède, que de la propriété principale du système de deux coniques, laquelle consiste dans l'existence des axes de symptose et des centres d'homologie; mais il en est d'autres moins importantes qui se rattachent à celles-là, et qu'on déduira également de la considération des coniques homothétiques.

Par exemple, de ce que les centres de figure et les centres de similitude de deux coniques homothétiques sont quatre points en ligne droite, il en résultera les propositions suivantes :

28. *Les polaires relatives à deux coniques de deux centres d'homologie conjugués l'un à l'autre et les deux axes de symptose qui leur répondent, sont quatre droites qui concourent en un même point.*

28. *Les pôles relatifs à deux coniques de deux axes de symptose conjugués l'un à l'autre et les deux centres d'homologie qui leur répondent, sont quatre points qui appartiennent à une même droite.*

Pareillement, de ce qu'un point situé à l'infini, sur l'axe radical de deux coniques homothétiques a pour polaires dans les deux courbes, la droite qui joint leurs centres de similitude, il en résultera les propositions suivantes qui n'en font proprement qu'une seule :

29. *La droite qui joint des centres d'homologie conjugués de deux coniques a pour pôle commun, dans les deux courbes, le point de concours des axes de symptose conjugués correspondant à ces deux centres*

29. *Le point de concours des axes de symptose conjugués de deux coniques a pour polaire commune, dans les deux courbes, la droite qui joint les centres d'homologie conjugués correspondant à ces deux axes.*

30. Si donc on construit deux triangles dont l'un ait pour ses sommets les points de concours des trois couples d'axes de symptose conjugués de deux coniques, et dont l'autre ait pour côtés les droites qui joignent leurs trois couples de centres d'homologie conjugués, les sommets du premier triangle seront, pour l'une et l'autre conique, les pôles communs respectifs des côtés correspondans du second, lesquels seront à l'inverse, pour ces deux courbes, les polaires communes respectives des sommets correspondans du premier. Ces deux triangles pourront quelquefois se réduire à un point et une droite, mais ils pourront aussi avoir une existence effective, dans le cas même où les deux coniques n'auront qu'un seul système d'axes de symptose et un seul système de centres d'homologie.

§. IV.

Propriétés des séries de coniques qui ont un centre d'homologie ou un axe de symptose commun.

31. Occupons-nous présentement des séries de coniques qui ont un centre d'homologie commun ou un axe de symptose commun. Il nous suffira de nous occuper ici des séries de coniques de la première de ces deux sortes ; tout ce qui concerne les autres pourra être déduit de ce que nous aurons dit de celles-là, à l'aide de la théorie des polaires réciproques.

En prenant le centre d'homologie commun pour centre de la conique directrice, toutes les polaires réciproques de ces courbes seront des coniques homothétiques; leurs propriétés dépendront d'ailleurs des conditions particulières auxquelles elles se trouveront assujetties; et, avec les modifications convenables, ces propriétés seront transportables aux coniques proposées.

Par exemple, on sait (6) que les cordes communes à trois coniques homothétiques prises deux à deux concourent toutes trois en un même point; d'où on conclura les propositions suivantes :

32. *Si trois coniques ont un centre d'homologie commun, les centres d'homologie conjugués à celui-là, dans les trois courbes, appartiendront à une même droite.*

32. *Si trois coniques ont un axe de symptose commun, les axes de symptose conjugués à celui-là, dans les trois courbes, concourront en un même point.*

De ce que trois coniques homothétiques ont (6), prises deux à deux, six centres de similitude, distribués trois à trois aux intersections de quatre droites, il en résultera ce qui suit :

33. *Si trois coniques ont un centre d'homologie commun, leurs*

33. *Si trois coniques ont un axe de symptose commun, leurs six*

six axes de symptose conjugués, relatifs à ce centre, passeront trois à trois par les quatre mêmes points.

centres d'homologie conjugués, relatifs à cet axe, seront distribués trois à trois aux intersections de quatre droites.

On sait que si, du centre radical de trois coniques homothétiques, on mène des tangentes à ces courbes, leurs six points de contact appartiendront à une quatrième conique qui leur sera homothétique, et qui aura ce point pour centre. De là résulte ce qui suit :

34. *Si trois coniques ont un centre d'homologie commun, la transversale qui contiendra leurs trois centres d'homologie conjugués à celui-là, les coupera en six points dont les tangentes envelopperont une quatrième conique qui aura pour centre d'homologie, avec chacune des trois autres, le centre d'homologie commun. La transversale sera la polaire de ce centre, relativement à cette quatrième conique, considérée comme directrice.*

34. *Si trois coniques ont un axe de symptôse commun, et que, du point de concours des trois axes de symptose conjugués à celui-là, on mène des tangentes à ces courbes, leurs six points de contact appartiendront à une quatrième conique qui aura pour axe de symptose avec chacune des trois autres l'axe de symptose commun. Le point de concours des tangentes sera le pôle de cet axe, relativement à cette quatrième conique considérée comme directrice.*

35. Quand deux coniques se touchent, il est manifeste que leur point de contact est un de leurs centres d'homologie, et que leur tangente commune en ce point est un de leurs axes de symptose. En appliquant cette remarque aux précédens théorèmes, on en obtiendra de nouveaux qui correspondront aux théorèmes sur le contact des courbes homothétiques. En voici quelques exemples.

Deux coniques étant homothétiques, toutes les coniques qui leur sont tangentes et homothétiques ont leurs centres sur deux autres coniques, et leurs centres de similitude avec l'une et l'autre des deux proposées sont aussi sur deux autres coniques. De là résultent les conséquences suivantes :

36. *Si tant de coniques qu'on voudra sont toutes tangentes à deux coniques données, et ont pour centre d'homologie avec elles un des centres d'homologie de ces deux courbes, toutes les polaires de ce centre, dans cette suite de coniques, envelopperont deux nouvelles coniques ; et les axes de symptose de ces mêmes coniques avec l'une et l'autre des deux proposées envelopperont encore deux autres coniques.*

36. *Si tant de coniques qu'on voudra sont toutes tangentes à deux coniques données, et ont pour axe de symptose avec elles un des axes de symptose de ces deux courbes, tous les pôles de cet axe, dans cette suite de conique, seront situés sur deux nouvelles coniques ; et les centres d'homologie de ces mêmes coniques avec l'une et l'autre des deux proposées seront encore situés sur deux autres coniques.*

On sait (*Annales*, tom. XVII, pag. 309) que les droites qui joignent le centre radical de trois coniques homothétiques aux pôles de l'un quelconque de leurs axes de similitude, pris tour à tour par rapport à chacune d'elles, les coupent aux points de contact avec elles de deux autres coniques qui leur sont homothétiques. Il n'en faut pas davantage pour résoudre les deux problèmes suivans :

37. *PROBLÈME. Etant données trois coniques qui ont un centre commun d'homologie, décrire une quatrième conique qui, les touchant toutes trois, ait avec elles ce même centre d'homologie commun ?*

37. *PROBLÈME. Etant données trois coniques qui ont un axe de symptose commun, décrire une quatrième conique qui, les touchant toutes trois, ait avec elles ce même axe de symptose commun ?*

Solution. Déterminez (32) la

Solution. Déterminez (32) le

transversale qui contient les conjugués, relatifs aux trois courbes du centre d'homologie commun; déterminez aussi (33) les quatre points de concours des six axes de symptose, conjugués deux à deux, relatifs à ce centre commun; les polaires relatives aux trois courbes de l'un quelconque de ces quatre points de concours couperont la transversale en trois points tels que, si de chacun d'eux on mène deux tangentes à la conique correspondante, les points de contact seront les six points où elles seront touchées par deux des coniques qui résolvent le problème.

En opérant tour à tour sur les quatre points de concours des six axes de symptose, comme nous venons de le prescrire pour l'un d'eux, on obtiendra les huit solutions dont le problème est susceptible.

point de concours des conjugués, relatifs aux trois courbes, de l'axe de symptose commun; déterminez aussi (33) les quatre droites qui contiennent les six centres d'homologie, conjugués deux à deux, relatifs à cet axe commun; en joignant, par trois droites, le point de concours des trois axes de symptose aux polaires de l'une quelconque des quatre droites relatives aux trois courbes; ces trois droites les couperont respectivemement aux six points où elles seront touchées par deux des coniques qui résolvent le problème.

En opérant tour à tour sur les quatre droites qui contiennent les six centres d'homologie, comme nous venons de le prescrire pour l'une d'elles, on obtiendra les huit solutions dont le problème est susceptible.

§. V.

Propriétés des systèmes de coniques qui satisfont à quatre conditions.

38. Occupons-nous présentement de la recherche des principales propriétés d'un système de coniques qui satisfont à quatre condi-

tions données, telles que de passer par des points ou de toucher des droites données. Nous avons ici cinq cas à considérer; mais, à l'aide de la théorie des polaires réciproques, il nous suffira de nous occuper des deux premiers et de la moitié des considérations relatives au troisième, pour pouvoir immédiatement en déduire tout le reste.

Considérons d'abord le cas où toutes les coniques touchent quatre droites données Remarquons en premier lieu que, si tant de coniques homothétiques qu'on voudra, ont deux points communs, leurs polaires réciproques seront toutes tangentes aux deux mêmes droites, polaires de ces deux points; mais elles ont, d'autre part, pour centre d'homologie commun, le centre de la conique directrice; elles auront donc deux centres d'homologie communs, ou, en d'autres termes, elles seront inscrites à un même quadrilatère.

Or, quand des coniques homothétiques passent toutes par les deux mêmes points,

1.° Leurs centres de figure sont en ligne droite.

2.° Leurs centres de similitude sont sur cette droite.

3.° Si on leur circonscrit des angles ayant le sommet commun, leurs cordes de contact concourront en un même point; en outre, la droite qui joindra ce dernier point au sommet commun sera divisée en deux parties égales par la corde commune à toutes les coniques; enfin, cette droite sera divisée harmoniquement par chacune de ces courbes.

4.° Enfin, si on les coupe par une transversale, les pôles de cette droite, relatifs à toutes ces courbes, appartiendront à une nouvelle conique.

On conclut de là ces deux théorèmes:

39. *THÉORÈME. Si tant de coniques qu'on voudra sont ins-*

39. *THÉORÈME. Si tant de coniques qu'on voudra sont cir-*

crites à un même quadrilatère ; 1.° les polaires de chaque centre d'homologie de ces courbes concourront en un même point ; 2.° les axes de symptose de ces courbes, relatifs à ce centre, passeront par ce même point ; 3.° si l'on tire une transversale droite arbitraire, ses pôles, dans toutes les coniques, appartiendront à une même droite ; en outre, cette droite et la transversale diviseront harmoniquement la distance entre deux centres d'homologie conjugués, et formeront un faisceau harmonique avec les tangentes menées à l'une quelconque de ces courbes par leur point d'intersection ; 4.° enfin, si l'on fait d'un point arbitraire le sommet commun d'une suite d'angles circonscrits à ces courbes, les cordes de contact envelopperont toutes une même conique.

On peut ajouter encore que, *si, par le sommet commun des angles circonscrits, on fait passer une transversale droite mobile, la droite, lieu de ses pôles relatifs à toutes ces courbes, enveloppera cette même dernière conique.*

conscrites à un même quadrilatère ; 1.° les pôles de chaque axe de symptose de ces courbes appartiendront à une même droite ; 2.° les centres d'homologie de ces courbes, relatifs à cet axe, seront sur cette même droite ; 3.° si d'un même point arbitraire, comme sommet, on circonscrit des angles à toutes ces coniques, leurs cordes de contact concourront toutes en un même point ; en outre, les droites menées du point de concours de deux axes de symptose conjugués à ce point et au sommet commun formeront, avec ces axes, un faisceau harmonique, et la droite qui joindra ces deux mêmes points sera coupée harmoniquement par toutes les courbes ; 4.° enfin, si l'on mène une transversale arbitraire, ses pôles relatifs à toutes ces courbes appartiendront à une même conique.

On peut ajouter encore que, *si un point se meut sur la transversale, le point de concours des polaires de ce point relatives à toutes ces courbes décrira cette même dernière conique.*

Si, dans le système de coniques homothétiques, on prend pour sommet commun des angles circonscrits, le centre même de la conique directrice, les cordes de contact auront, pour pôles relatifs à cette conique directrice, les centres des coniques inscrites au quadrilatère ; et alors la troisième partie du théorème deviendra cette proposition connue de Newton :

40. *Les centres de toutes les coniques qui ont deux centres d'homologie communs appartiennent à une même droite qui passe par le milieu de celle qui joint ces deux centres d'homologie.*

On parvient encore à cette proposition, en supposant, dans la troisième partie du théorème, que la transversale passe à l'infini.

La troisième partie de l'un et de l'autre théorèmes contient implicitement une propriété assez remarquable du système de quatre droites ou de celui de quatre points, qui paraît n'avoir point encore été signalée ; voici en quoi elle consiste :

41. *Six points étant distribués trois à trois aux intersections de quatre droites, et ceux qui n'appartiennent pas à la même droite étant joints deux à deux par trois droites ; toute transversale coupera ces dernières en trois points tels que leurs quatrièmes harmoniques appartiendront toutes trois à une même droite. En outre cette dernière droite et la transversale formeront un faisceau harmonique avec les droites qui iront de leur point de concours aux deux extrémités de l'une quelconque de nos trois droites.*

41. *Six droites passant trois à trois par quatre points donnés, et celles qui ne passent pas par le même point concourant deux à deux en trois autres points ; si de chacun de ces points on mène trois droites à un même point quelconque de leur plan, les quatrièmes harmoniques de ces droites concourront toutes trois en un même point. En outre, la droite qui joindra ce dernier point au premier sera coupée harmoniquement par les deux droites qui passent par l'un quelconque de nos trois points.*

Si, dans le premier de ces deux théorèmes, on suppose que la transversale passe à l'infini, on obtiendra ce théorème connu :

42. *Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet appartiennent tous trois à une même droite.*

Il est facile de voir que, si plusieurs coniques homothétiques passent par les deux mêmes points, et qu'on les coupe toutes par une autre conique qui leur soit homothétique, les cordes d'intersection passeront par un même point et auront leurs pôles respectifs, relatifs à ces coniques, sur une même nouvelle conique. On conclut de là ces deux théorèmes :

43. *Tant de coniques qu'on voudra étant inscrites à un quadrilatère, si on les coupe toutes par une autre conique, tangente à deux des côtés de ce quadrilatère, et qu'on détermine les points de concours des deux autres tangentes communes à cette dernière conique et à chacune des premières ; 1.° tous ces points de concours appartiendront à une même droite ; 2.° leurs polaires respectives, relatives aux coniques proposées, envelopperont toutes une nouvelle conique.*

43. *Tant de coniques qu'on voudra étant circonscrites à un même quadrilatère, si on les coupe toutes par une autre conique, passant par deux des sommets de ce quadrilatère, et qu'on mène des droites par les deux autres points communs à cette dernière conique et à chacune des premières; 1.° toutes ces cordes communes concourront en un même point ; 2.° leurs pôles respectifs, relatifs aux coniques proposées, appartiendront tous à une nouvelle conique.*

On pourrait déduire de nouveau de ces deux derniers théorèmes la quatrième partie de ceux que nous avons énoncé plus haut (39) ; mais cela nous entraînerait dans des détails de peu d'intérêt.

Enfin, si plusieurs coniques homothétiques passent par les deux mêmes points, et qu'on les coupe par deux autres coniques qui leur soient homothétiques, les cordes communes à ces deux dernières coniques et à chacune des autres se couperont en un point qui sera sur la corde d'intersection de ces deux dernières, et les polaires des points ainsi déterminés, respectivement relatifs à ces coniques, envelopperont une même nouvelle conique. De là résultent ces deux théorèmes :

44. *Tant de coniques qu'on voudra étant inscrites à un même quadrilatère, si l'on trace deux autres coniques qui soient tangentes à deux des côtés de ce quadrilatère, et qu'on détermine le point de concours des deux autres tangentes communes à chacune de ces deux dernières et à toutes les autres, en joignant ensuite deux à deux par des droites les points de concours correspondans ; 1.° ces droites concourront toutes en un même point fixe, point de concours des tangentes communes aux deux dernières coniques ; 2.° leurs pôles respectifs, dans les premières coniques, appartiendront tous à une même conique.*

44. *Tant de coniques qu'on voudra étant circonscrites à un même quadrilatère, si l'on trace deux autres coniques qui passent par deux des sommets de ce quadrilatère et qu'on joigne par des droites les deux autres points communs à chacune de ces deux dernières et à toutes les autres, en prolongeant ensuite deux à deux jusqu'à leurs points de concours les droites correspondantes ; 1.° ces points appartiendront tous à une même droite fixe, corde commune aux deux dernières coniques ; 2.° leurs polaires respectives, dans les premières coniques, envelopperont toutes une même conique.*

Passons maintenant à la considération des coniques tangentes à trois droites et passant par un point donné. Pour cela, considérons des coniques homothétiques toutes tangentes à une même droite et passant par un même point. On verra facilement ;

1.° Que le lieu de leurs centres est une conique.

2.° Que les pôles d'une même droite quelconque relatifs à ces courbes appartiennent à une autre conique.

3.° Que les polaires d'un même point quelconque relatives à ces courbes enveloppent une troisième conique.

De là résulteront ces deux théorèmes :

45. *THÉORÈME. Si tant de coniques qu'on voudra sont tangentes aux trois mêmes droites et passent par un même point ;* 1.° *les droites qui joignent deux à deux les points de contact de ces courbes avec deux quelconques des trois tangentes communes enveloppent une conique ;* 2.° *les pôles d'une transversale quelconque, relatifs à toutes ces coniques, appartiennent tous à une autre conique ;* 3.° *enfin, les polaires d'un point quelconque, relatives à ces mêmes coniques, enveloppent une troisième conique.*

45. *THÉORÈME. Si tant de coniques qu'on voudra passent par les trois mêmes points et touchent une même droite ;* 1.° *les points de concours deux à deux des tangentes à ces courbes par deux quelconques des trois points communs appartiennent tous à une conique ;* 2.° *les polaires d'un même point quelconque, relatives à toutes ces coniques, enveloppent une autre conique ;* 3.° *enfin, les pôles d'une transversale quelconque, relatifs à ces mêmes coniques, enveloppent une troisième conique.*

Considérons enfin une série de coniques touchant deux droites données et passant par deux points donnés. Il nous suffira, pour cela, de rechercher les propriétés d'une série de coniques homothétiques toutes inscrites à un même angle. Or, il est facile de voir qu'alors:

1.° Les cordes de contact de ces courbes avec les côtés de l'angle sont toutes parallèles.

2.° Les cordes d'intersection de ces coniques deux à deux sont aussi parallèles entre elles et aux cordes de contact.

3.° Enfin les polaires d'un même point, relatives à ces courbes, enveloppent une conique.

De là résulte ce double théorème :

46. *THÉORÈME. Si tant de coniques qu'on voudra touchent toutes les deux mêmes droites et passent toutes par les deux mêmes points ;*

1.° *Les sommets des angles circonscrits dont la corde de contact sera la corde commune, appartiendront à une même droite;*

2.° *Les tangentes communes à ces courbes, deux à deux, iront concourir sur cette droite ;*

3.° *Enfin, les pôles d'une même droite quelconque, relatifs à ces courbes, appartiendront à une même conique.*

1.° *Les cordes de contact de l'angle circonscrit commun concourront toutes en un même point ;*

2.° *Les cordes communes à ces courbes, deux à deux, passeront toutes par ce point ;*

3.° *Enfin, les polaires d'un point quelconque, relatives à ces courbes, envelopperont une même conique.*

Dans un prochain article, nous examinerons ce que deviennent ces divers théorèmes, lorsque quelques-unes des coniques qu'on y considère se réduisent à des droites ou à des points.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème sur le quadrilatère complet ;

Proposé à démontrer par M. J. Steiner, géomètre, de Berlin (*).

Quatre droites A, B, C, D, se coupant deux à deux en six points, et se trouvant conséquemment comprises dans un même plan.

1.° Ces quatre droites, prises trois à trois, forment quatre triangles tels que les cercles circonscrits passent tous quatre par un même point P.

2.° Les centres α, β, γ, δ, de ces quatre cercles se trouvent, avec le point P, à la circonférence d'un cinquième cercle.

(*) Bien que nous nous soyons abstenus jusqu'ici de désigner les auteurs des nombreuses questions proposées dans nos livraisons, nous sentons toutefois que, lorsque ces questions consistent dans des théorèmes de quelque importance, ce peut être alors un acte de justice ou tout au moins de convenance.

Nous saisirons donc, avec plaisir, cette occasion de déclarer que l'élégant théorème démontré par M. Lenthéric, à la page 366 de notre XVII.^e volume, nous a été indiqué par M. W. H. Talbot, de la Société philosophique de Cambridge.

3.° Les pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur les directions de A, B, C, D, appartiennent tous quatre à une même droite R, et cette propriété appartient exclusivement au point P.

4.° Les points de concours des perpendiculaires abaissées des sommets sur les directions des côtés opposés, dans les quatre triangles (1.°) appartiennent à une même droite R′.

5.° Les droites R et R′ sont parallèles, et la droite R passe par le milieu de la perpendiculaire abaissée du point P sur R′.

6.° Les milieux des diagonales du quadrilatère complet formé par les quatre droites A, B, C, D, appartiennent tous trois à une même droite R″ (*Newton*).

7.° La droite R″ est perpendiculaire commune aux deux droites R, R′.

8.° Pour chacun des quatre triangles (1.°) il y a un cercle inscrit et trois cercles exinscrits, ce qui fait en tout *seize* cercles; dont les centres sont quatre à quatre sur une circonférence, de manière à donner naissance à *huit* nouveaux cercles.

9.° Ces huit nouveaux cercles se partagent en deux groupes tels que chacun des quatre cercles de l'un de ces groupes, coupe orthogonalement tous les cercles de l'autre groupe; on en conclut que les centres des cercles des deux groupes sont sur deux droites perpendiculaires l'une à l'autre.

10.° Enfin ces deux dernières droites se coupent au point P, mentionné ci-dessus.

Autres théorèmes de géométrie.

(Par le même).

I. Si l'on décrit trois cercles A, B, C, de manière que chacun d'eux touche un des côtés d'un triangle et les prolongemens des deux autres, et si l'on décrit ensuite trois autres cercles A′, B′,

C', de manière que chaucun d'eux touche deux des trois premiers extérieurement et le troisième intérieurement, ces trois derniers se couperont en un même point P, et les droites qui joindront ce point P aux centres des trois premiers seront respectivement perpendiculaires aux trois côtés du triangle.

II. Si l'on décrit quatre sphères A, B, C, D, de manière que chacune d'elles touche une des faces d'un tétraèdre et les prolongemens des trois autres, et si l'on décrit ensuite quatre autres sphères A', B', C', D', de manière que chacune d'elles touche trois des quatre premières extérieurement et la quatrième intérieurement, ces quatre dernières se couperont en un même point P, et les droites qui joindront ce point P aux centres des quatre premières seront respectivement perpendiculaires aux quatre faces du tétraèdre.

GÉOMÉTRIE PURE.

Mémoire sur les projections stéréographiques, et sur les coniques homothétiques;

Par M. Chasles, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

J'ai avancé, dans un précédent mémoire (pag. 277), que les propriétés des coniques semblables et semblablement disposées dans un même plan étaient tout-à-fait analogues à celles d'un système de cercles. Je me propose, dans ce qu'on va lire, de justifier cette assertion. J'en prendrai occasion de donner quelques développemens sur les projections stéréographiques dont l'emploi peut être d'un très-utile secours dans la géométrie. Ce sujet a déjà été traité, d'une manière fort élégante, par M. Dandelin, dans la *Correspondance mathématique et physique* du royaumes des Pays-Bas (*Annales*, tom. XVI, pag. 322); mais M. Dandelin n'a considéré uniquement que les projections stéréographiques des cercles de la sphère, tandis que ce qu'on lit dans la *Correspondance sur l'Ecole polytechnique* (tom. III, pag. 16, 1814), et le contenu de ma lettre à M. Hachette, insérée dans sa *Géométrie à trois dimensions* (1817), prouve que depuis long-temps j'ai envisagé la question d'un manière beaucoup plus générale, en considérant les projections stéréographiques des sections planes, faites dans une surface quelconque du second ordre.

1. Soient C, C′ deux sections planes faites dans une surface du

second ordre. On sait que, par ces deux sections, on peut toujours faire passer deux surfaces coniques S, S′, qu'on peut aussi circonscrire à cette surface deux autres surfaces coniques Σ, Σ′ qui la touchent respectivement suivant les courbes C, C′, et que les sommets de ces quatre cônes appartiennent à une même droite, polaire conjuguée de l'intersection des plans des courbes C, C′.

On sait de plus que si, par le sommet de l'un des deux cônes S, S′ et par l'intersection des deux plans C, C′, on conduit un plan, ce plan aura pour polaire, dans ce même cône, la droite qui contient les quatre sommets, c'est-à-dire, en d'autres termes, que toutes les sections faites dans ce cône, parallèlement à ce plan, auront leurs centres sur cette droite.

Il est évident, en outre, que toutes les sections faites dans la surface du second ordre et dans l'un et l'autre des deux cônes S, S′, parallèlement au plan de l'une ou de l'autre des courbes C, C′ seront semblables à cette courbe et seront disposées de la même manière qu'elle; d'où il résulte qu'elles seront aussi semblables et semblablement disposées entre elles.

Ces choses ainsi entendues, supposons que l'une des courbes C, C′, la courbe C′, par exemple, se réduise à un point P, ou, en d'autres termes, que son plan devienne un plan tangent en P à la surface du second ordre, il n'y aura plus alors qu'un seul S des deux cônes S, S′, lequel aura dès lors son sommet en ce même point P; et tout plan parallèle au plan tangent en P, qui représente, dans ce cas particulier, le plan de la courbe C′, coupera encore le cône S et la surface du second ordre suivant deux courbes semblables et semblablement disposées.

Présentement, le plan qui passait par le sommet du cône S′ et par la commune section des deux courbes C, C étant devenu le plan tangent lui-même, et la droite polaire de ce plan, par rapport au cône S, qui contenait les quatre sommets, étant devenue celle qui joint le point P au sommet du cône circonscrit Σ, suivant la courbe C, ce sera actuellement cette dernière droite qui contiendra les centres de toutes les sections faites dans le cône S, parallèlement au plan tangent en P. On a donc ce théorème qu'on peut regarder comme fondamental.

2. *THÉORÈME. L'œil étant placé en un quelconque des points d'une surface du second ordre, et le plan du tableau étant parallèle au plan tangent à cette surface en ce point ;*

1.° *Toutes les courbes planes, tracées sur la surface du second ordre dont il s'agit, se projeteront sur le tableau suivant des courbes semblables et semblablement situées, tant entre elles que par rapport à l'intersection de la surface du second ordre avec le plan du tableau ;*

2.° *Les projections de ces diverses courbes, sur le plan du tableau, auront respectivement pour centres les projections, sur ce tableau, des sommets des cônes circonscrits à la surface du second ordre suivant ces mêmes courbes.*

J'avais publié la première partie de ce théorème en l'endroit cité de la *Correspondance*, et je donnai, dans l'ouvrage de M. Hachette, une démonstration analytique de la seconde, parce que cette démonstration convenait mieux à la destination qui lui était affectée.

3. Si l'on prend pour le sommet commun des cônes de projection, lieu de l'œil, l'une des extrémités de l'un des deux diamètres, lieux des centres des sections circulaires de la surface du second ordre dont il s'agit, les projections de toutes les courbes planes tracées à volonté sur cette surface, seront des cercles, comme dans la sphère, et les centres de ces cercles seront les projections des sommets des cônes circonscrits à cette surface suivant les courbes projetées.

Cette dernière propriété peut trouver une utile application dans le tracé des cartes géographiques ou uranographiques, parce qu'elle offre un moyen fort simple de déterminer les centres des cercles que l'on doit y tracer. Tout se réduit alors, en effet, à déterminer le sommet d'un cône circonscrit à la sphère suivant un cercle donné, et l'on sait que ce sommet se trouve sur le prolongement du rayon perpendiculaire au plan du cercle de contact, à une distance du centre de la sphère, troisième proportionnelle à la distance de ce centre au plan du cercle et au rayon de cette même sphère.

4. On sait qu'il existe, pour la sphère, une autre propriété bien précieuse aussi, dans le tracé des cartes, laquelle consiste en ce que *les projections stéréographiques de deux cercles se coupent sous le même angle que ces cercles eux-mêmes ;* mais cette propriété cesse d'avoir lieu pour une surface quelconque du second ordre ; ou, pour mieux dire, il n'y a, pour une telle surface, que trois directions de la corde commune pour lesquelles elle puisse avoir lieu. Elle tient, en effet, pour la sphère, comme l'a fait voir M. Dandelin à l'endroit cité, à ce que deux cercles qui se coupent sur une telle surface se coupent sous le même angle, en leurs deux intersections, attendu qu'en conduisant un plan diamétral perpendiculaire à la corde commune, tout se trouve égal de part et d'autre de ce plan. Mais, dans une surface quelconque du second ordre, le plan diamétral conjugué à la corde commune à deux sections planes étant mené, les tangentes aux deux courbes concourront bien deux à deux sur ce plan, également distant des sommets des deux angles ; mais les angles de ces tangentes ne seront égaux, pour toutes sections planes passant par les deux mêmes points, qu'autant que la corde qui les joindra sera perpendiculaire à son plan diamétral conjugué, c'est-à-dire, qu'autant que la corde commune sera parallèle à l'un des diamètres principaux, et que l'œil sera placé en un point du périmètre de la section principale qui contient les deux autres.

Dans tout ce qui va suivre, nous continuerons d'appeler coniques *homothétiques* des coniques semblables et semblablement disposées dans un même plan.

5. *THÉORÈME. Réciproquement, des coniques homothétiques étant tracées dans un même plan, en tel nombre qu'on voudra, on pourra toujours les considérer comme les projections stéréographiques d'autant de courbes planes tracées sur une même surface du second ordre ; et leurs centres seront alors les projections des sommets*

des cônes circonscrits à cette surface suivant ces mêmes courbes.

Démonstration. Soient, pour le prouver, C', C'', C''', ... les coniques homothétiques dont il s'agit. Sur leur plan, soit tracée arbitrairement une nouvelle conique C, qui leur soit homothétique, et par laquelle soit fait passer, aussi arbitrairement une surface S du second ordre; en conduisant un plan tangent à cette surface, parallèle à celui des coniques données C', C'', C''', ... son point de contact P sera celui où il faudra placer l'œil pour que ces coniques soient les projections stéréographiques d'une suite de courbes planes tracées sur cette surface.

En effet, par le point P et par trois des points du périmètre de l'une quelconque C' de ces coniques, soient menées trois droites; ces droites perceront la surface S en trois points qui appartiendront à une section plane de cette surface, dont la projection stéréographique sera, par ce qui précède (2), une conique homothétique avec C, et conséquemment avec C', dont le centre sera la projection stéréographique du sommet du cône circonscrit à S suivant cette section plane. Mais cette conique homothétique avec C' aura trois points communs avec elle; elle ne sera donc autre chose que C' elle-même, puisque deux coniques homothétiques ne sauraient se couper en plus de deux points.

Il suit de là, en particulier, que *tant de cercles qu'on voudra, tracés sur un même plan, peuvent toujours être considérés comme les projections stéréographiques d'un pareil nombre de sections planes faites dans une surface du second ordre, et leurs centres comme les projections stéréographiques des sommets des cônes circonscrits à cette surface, suivant ces mêmes sections planes* (*).

(*) Ce principe paraît ne pas être inconnu aux géomètres allemands. M. Plucker l'invoque formellement, à la pag. 47 du présent volume, et M. Steiner s'en appuye également dans le mémoire dont nous avons donné un extrait à la pag. 285 de notre XVII.e volume, pour transporter ses constructions planes sur des surfaces quelconques, du second ordre.

J. D. G.

6. Considérons les projections stéréographiques S, S' de deux courbes planes Σ, Σ', tracées arbitrairement sur une surface U du second ordre. Par les deux courbes Σ, Σ' on peut faire passer deux cônes C, *c*; les projections de leurs sommets seront évidemment les points de concours des tangentes communes aux deux coniques homothétiques S et S', si des tangentes communes peuvent leur être menées. Dans tous les cas, ce seront leurs deux *centres de similitude*, que nous désignerons par O et *o*.

Une arête quelconque de l'un des cônes C, *c* rencontre les deux courbes Σ, Σ' en deux points pour lesquels les tangentes à ces courbes sont toutes deux situées dans le plan tangent mené au cône par cette même arête; ces tangentes, quelle que soit d'ailleurs l'arête que l'on considère sur le cône, se coupent donc en un point de l'intersection des plans des deux courbes Σ, Σ'; la projection de l'arête du cône passe par le centre de similitude O ou *o* des deux coniques homothétiques S, S'; et les tangentes aux deux courbes Σ, Σ se projètent suivant des tangentes à S, S' aux points où elles sont coupées par la projection de l'arête du cône; ces deux dernières tangentes doivent donc concourir sur une droite fixe, projection de la commune section des plans de Σ, Σ', corde commune à S, S', si elles se coupent, et, dans tous les cas, leur *axe radical* ou *axe de symptose*.

7. Ainsi, *une sécante commune étant menée arbitrairement à deux coniques homothétiques, par l'un ou l'autre de leurs deux centres de similitude, les tangentes menées aux deux courbes, aux points non homologues où elles sont coupées par cette sécante, concourent constamment sur une même droite fixe, axe de symptose de deux courbes.*

Nous disons par deux points d'intersection non homologues, parce qu'autrement les tangentes seraient parallèles et ne seraient pas les projections des tangentes aux courbes Σ, Σ'.

Soient toujours O, *o* les deux centres de similitude directe et inverse des deux courbes homothétiques S, S'.

Deux arêtes du cône C rencontrent la courbe Σ en deux points a, b et la courbe Σ' en deux points a', b', et les droites ab, $a'b'$ se rencontrent en un point de la commune section des plans de Σ, Σ', puisqu'elles sont toutes deux dans un même plan qui est celui des deux arêtes. Les deux tangentes à Σ, aux points a, b, se rencontrent en un premier point et les deux tangentes à Σ', aux points a', b', se rencontrent en un second point ; ces deux points seront sur une droite qui passera par le sommet du cône C, car elle sera l'intersection des plans tangens à ce cône suivant les deux arêtes dont il s'agit.

En faisant donc la projection, on obtiendra ce théorème :

8. *Si, par un des deux centres de similitude de deux coniques homothétiques, on conduit deux transversales rectilignes, telles que chacune d'elles coupe chaque courbe en deux points ;*

1.° *La droite qui joindra deux des quatre points d'intersection des deux transversales avec l'une des courbes, et la droite qui joindra les deux points d'intersection non homologues avec l'autre courbe iront concourir en un point de l'axe de symptose des deux courbes ;*

2.° *Le point de concours des tangentes menées à la première courbe par les deux premiers points, et le point de concours des tangentes menées à la seconde par les deux derniers, sont en ligne droite avec le centre de similitude d'où émanent les deux transversales.*

La réciproque de cette proposition sera également facile à établir.

L'axe de symptose de S, S' est, comme on le voit, la projection de la commune section des plans Σ, Σ' ; c'est donc la corde commune lorsque les deux coniques se coupent.

Si, par un quelconque des points de l'axe de symptose des deux courbes S, S', on leur mène quatre tangentes, ces tangentes seront les projections des quatre tangentes menées aux deux courbes Σ, Σ' par un même point de l'intersection de leurs plans, lesquelles tangentes sont, deux à deux, dans l'un des deux plans tangens menés par le même point aux deux cônes C, c ; en outre ce point sera le sommet d'une surface conique circonscrite à U, contenant les quatre tangentes, et par suite les quatre points de contact.

9. Donc, *si, par l'un quelconque des points de l'axe de symptose de deux coniques homothétiques, on mène quatre tangentes à ces courbes ;*

1.° *Deux points de contact, pris sur les deux courbes, seront toujours en ligne droite avec l'un des centres de similitude ;*

2.° *Par les quatre points de contact on pourra faire passer une conique homothétique avec les deux proposées, et cette dernière aura son centre sur l'axe de symptose des deux autres, au point de départ des quatre tangentes.*

Si l'on décrit une suite de coniques qui soient, par rapport aux deux proposées, dans le même cas que celle que nous venons de considérer en particulier, elles seront les projections des lignes de contact d'une suite de surfaces coniques circonscrites à U, ayant toutes leurs sommets à l'intersection des plans de Σ, Σ' ; et les plans de ces lignes de contact se couperont tous évidemment suivant la droite qui joindra les sommets P, p des deux cônes C, c.

10. Donc, *toutes les coniques homothétiques aux deux proposées, passant respectivement par les quatre points de contact des tangentes issues de divers points de leur axe de symptose, auront pour axe de symptose commun la droite qui contient les centres de similitude de ces deux-là.*

Si le point de départ des quatre tangentes est le point où l'axe de symptose des deux courbes coupe une de leurs tangentes communes, la conique homothétique passera par les deux points de contact de cette tangente commune ; mais, parce que le centre de cette troisième conique se trouve en ce même point d'intersection, ces deux points de contact se trouveront aux extrémités d'un même diamètre.

11. Donc, *l'axe de symptose de deux coniques homothétiques*

est également distant des polaires, relatives aux deux courbes d'un même centre de similitude.

Considérons présentement, sur la surface U, trois courbes planes Σ, Σ', Σ''; leurs plans se couperont deux à deux suivant trois droites concourant en un même point. Si de ce point on mène des tangentes aux trois courbes, les six points de contact seront sur la ligne de contact du cône circonscrit qui aurait son sommet en ce point.

12. Donc, *les axes de symptose de trois coniques homothétiques, prises deux à deux, concourent tous trois en un même point,*

Et si, de ce point, on mène des tangentes aux trois courbes; les six points de contact seront sur une conique qui leur sera homothétique, et qui aura ce même point pour centre.

Soient C, c les deux cônes qui passent par Σ' et Σ''; soient C′ c' les deux cônes qui passent par Σ'' et Σ; et soient enfin C″, c'' les deux cônes qui passent par Σ et Σ'; on sait que les sommets de ces six cônes sont distribués trois à trois sur quatre droites.

13. Donc (6), *les six centres de similitude de trois coniques homothétiques, prises tour à tour deux à deux, sont distribués trois à trois aux intersections de quatre droites.*

En d'autres termes, ces points sont les six sommets d'un quadrilatère complet; or, on sait que, dans un tel quadrilatère, les milieux des trois diagonales sont en ligne droite; donc, le milieu de la distance entre les centres de similitude de S′ et S″, le milieu de l'intervalle entre les centres de similitude de S″ et S, et enfin le milieu de l'intervalle entre les centres de similitude de S et S′, sont trois points qui appartiennent à une même droite.

Si l'on mène un plan tangent arbitraire à l'un des deux cônes C, c, il coupera la surface U suivant une courbe tangente à la fois à Σ' et Σ''; les points de contact seront sur une arête de ce cône, et le sommet du cône circonscrit à la surface U, suivant cette courbe, sera sur l'une des deux courbes planes d'intersection des surfaces coniques circonscrites à U, suivant les courbes Σ' et Σ''.

14. Donc, *deux coniques étant homothétiques, si tant de coniques homothétiques avec elles qu'on voudra les touchent toutes deux;*

1.° *Les deux points de contact seront en ligne droite avec l'un des deux centres de similitude des deux proposées;*

2.° *Les centres de toutes ces coniques seront sur deux nouvelles coniques.*

La première partie de cette proposition résulte aussi fort simplement (13) de ce que les deux points de contact sont des centres de similitude.

Par chacune des quatre droites aux intersections desquelles se trouvent situés les sommets des six cônes C, c, C', c', C'', c'' on peut mener aux trois cônes qui y ont leurs sommets deux plans tangens communs, lesquels couperont la surface U suivant deux courbes tangentes, à la fois, aux trois courbes Σ, Σ', Σ''; d'où il résulte que sur la surface U on peut, généralement parlant, tracer huit courbes planes telles que chacune d'elles touche à la fois les trois courbes Σ, Σ', Σ''.

Parmi ces huit courbes, considérons, en particulier, celles que déterminent les deux plans tangens conduits par la droite qui contient les sommets des trois cônes C, C', C''; l'une de ces courbes touche les courbes Σ', Σ'' en deux points qui sont sur une même arête du cône C, et l'autre touche les deux mêmes courbes en deux points qui sont sur une autre arête de ce cône, d'où il suit que les quatre points de contact sont sur deux droites qui se coupent, et conséquemment dans un même plan, et que, par suite, la droite qui joint les deux points de contact sur Σ' et celle qui joint les deux points de contact sur Σ'' doivent se rencontrer en un même point de l'intersection des plans de ces deux courbes. Par une raison semblable, la droite qui joindra les deux points de contact sur Σ devra rencontrer les deux autres, et, comme elle n'est pas dans le même plan avec elles, elles devront concourir toutes trois au point de concours des plans des trois courbes Σ, Σ', Σ''.

Les tangentes à la courbe Σ, aux points où les deux courbes en question la touchent, devant être dans les plans de ces deux dernières, et toutes deux dans le plan de cette courbe Σ, doivent concourir en un point de l'intersection des deux plans, c'est-à-dire, en un point de la droite qui contient les sommets des trois cônes C, C', C'', et on n'en peut dire autant pour chacune des deux autres courbes Σ', Σ''.

15. Donc, 1.° *trois coniques homothétiques étant tracées dans un même plan, il existe, généralement parlant, huit coniques homothétiques avec elles qui les touchent toutes trois;*

2.° *Ces huit coniques auront deux à deux pour axe de symptose l'un des quatre axes de similitude des trois proposées;*

3.° *La droite qui joindra les points de contact de ces deux coniques avec chacune des trois proposées passera par le point de concours des axes de symptose de ces trois proposées;*

4.° *Enfin, les tangentes en ces deux points de contact iront concourir en un point de l'axe de similitude, axe de symptose des deux coniques touchantes.*

Il résulte de cette dernière proposition que la droite qui joindra les deux points de contact avec l'une des deux proposées contiendra le pôle de l'un des quatre axes de similitude, et, comme elle doit en outre passer par le *centre radical*, point de concours des trois axes de symptose, elle se trouvera complètement déterminée.

16. Lors donc que, trois coniques homothétiques étant tracées dans un même plan, on demandera d'en décrire un quatrième qui, leur étant homothétique, les touche toutes trois, on construira d'abord le centre radical ou *centre de symptose*, et les quatre axes de similitude des trois proposées; alors, en joignant le centre de symptose aux pôles de l'un des axes de similitude relatifs aux proposées par trois droites, ces droites les couperont respectivement aux six points de contact de deux des courbes résolvant le problème. En répétant donc cette construction pour chacun des qua-

tre axes de similitude, on obtiendra les huit solutions dont ce problème est susceptible (*).

Il pourrait se faire que, pour tout ou partie des quatre axes de similitude, les droites qui doivent déterminer les points de contact sur les trois proposées ne les rencontrassent pas toutes trois; alors le nombre des solutions s'en trouverait d'autant réduit, et, si cette circonstance avait lieu pour les quatre axes de similitude, le problème serait tout à fait impossible.

D'après la remarque qui a été faite ci-dessus (11), on peut remplacer ce procédé par celui qui suit, lequel évite la construction des axes de symptose.

17. Trois coniques homothétiques S, S', S'' étant données, pour déterminer en quels points l'une d'elles, S'' par exemple, doit être touchée par deux des huit coniques homothétiques avec celles qui les touchent toutes trois, on déterminera l'un des centres O de similitude de S' et S'', et un des centres O' de similitude de S et S''; les polaires de O et O', relatives à S'', se couperont en un point; les polaires de O relatives à S' et de O' relatives à S se couperont en un autre point, et la droite qui joindra ces deux points coupera S'' aux deux points de contact cherchés (**).

18. Rien ne sera plus aisé que de modifier ces constructions de

(*) En supposant que les trois coniques données sont des cercles, on obtiendra une nouvelle démonstration de la construction indiquée tom. XVII, pag. 309, laquelle, comme l'on voit, n'est qu'un cas particulier de celle-là.
J. D. G.

(**) C'est sous cette forme que nous avions présenté la construction relative à trois cercles, dans les *Mémoires de Turin*, pour 1814, où nous avions déjà observé qu'elle était applicable à des ellipses homothétiques; si nous avons introduit postérieurement (*Annales*, tom. VII, pag. 289) l'emploi du centre radical, c'est uniquement pour pouvoir rendre la construction applicable à trois cercles tracés sur une sphère.
J. D. G.

manière à les rendre propres au cas où quelqu'une des trois coniques données deviendrait une droite ou un point ; il suffira seulement de se rappeler les propositions suivantes, faciles à justifier ;

1.° *Les deux centres de similitude d'une conique et d'un point se confondent en un seul qui est ce point lui-même ; leur axe de symptose est une parallèle à la polaire de ce point, relative à la conique également distante de cette polaire et du point dont il s'agit ;*

2.° *Les deux centres de similitude d'une conique et d'une droite sont aux deux extrémités du diamètre de la conique conjugué à la droite ; leur axe de symptose est la droite elle-même ;*

3.° *Les centres de similitude de deux points sont deux harmoniques quelconques de ces deux points ; leur axe de symptose est la perpendiculaire sur le milieu de la droite qui les joint ;*

4.° *Les deux centres de similitude de deux droites parallèles se confondent en un seul situé à l'infini ; leur axe de symptose est une droite parallèle à leur direction et également distante de l'une et de l'autre.*

A ces principes il faudra joindra encore les suivans :

1.° *Le pôle d'une droite, par rapport à un point directeur, est ce point lui-même ; la polaire d'un point, par rapport à un point directeur, est une droite arbitraire menée par ce dernier point ;*

2.° *La polaire d'un point, par rapport à une droite directrice, est cette droite elle-même ; le pôle, par rapport à cette même directrice d'une droite qui lui est parallèle, est un quelconque des points de la directrice.*

A l'aide de ces diverses remarques on résoudra, pour les coniques homothétiques (17, 18), les dix problèmes que Viète, dans son *Appolonius Gallus*, s'est proposé de résoudre par rapport au cercle ; avec cette différence qu'au lieu de ramener tour à tour, comme le fait Viète, les plus difficiles aux plus faciles, on obtiendra une solution directe pour chacun d'eux.

En employant ensuite la considération des polaires réciproques, comme nous l'avons fait dans notre précédent mémoire, c'est-à-dire, en prenant le centre d'homologie pour centre de la conique directrice, on transportera ces constructions à des coniques quelconques ; puis, par cette même théorie des polaires réciproques, employée ensuite comme on le fait ordinairement, on parviendra à doubler ces problèmes et leurs solutions. On obtiendra ainsi, par exemple, la solution des problèmes suivans :

PROBLÈME. Étant données une conique et deux tangentes à cette courbe, décrire une autre conique qui, touchant celle-là et ses deux tangentes, satisfasse en outre à deux autres conditions, prises parmi les suivantes ; savoir :

De passer par deux points donnés ;

De toucher deux droites données ;

De passer par un point donné et de toucher une droite donnée ?

PROBLÈME. Étant donnés une conique et deux points de cette courbe, décrire une autre conique, tangente à celle-là, qui la coupe en ces deux points, et qui satisfasse en outre à deux autres conditions, prises parmi les suivantes ; savoir :

De toucher deux droites données ;

De passer par deux points donnés ;

De toucher une droite donnée et de passer par un point donné ?

Soient tant de sections planes Σ, Σ', Σ'', ... à la surface U qu'on voudra, faites par des plans qui se coupent suivant une même droite D ; si, par un point pris arbitrairement sur cette droite, on leur mène des tangentes, les points de contact seront tous sur une conique dont le plan, quel que soit le point de départ des tangentes sur la droite D, passera par une droite fixe polaire conjuguée de cette droite D et lieu des sommets des surfaces coniques circonscrites à U, suivant les courbes Σ, Σ', Σ'', ...

19. Donc, *si plusieurs coniques homothétiques ont un même axe de symptose, et que, de l'un quelconque des point de cet axe on leur mène des tangentes, tous les points de contact de ces tangen-*

tes appartiendront à une même conique homothétique aux proposées et ayant pour centre le point de départ des tangentes.

Si l'on varie, sur l'axe de symptose, le point de départ des tangentes, les points de contact appartiendront à une série de coniques homothétiques entre elles et aux premières, ayant pour axe de symptose commun la droite qui contiendra les centres des premières.

Si la droite D ne perce pas la surface U, sa polaire la percera nécessairement en deux points, et ces points, qui seront les points de contact de cette surface avec les plans tangens, conduits par la droite D, pourront être considérés comme deux courbes infiniment petites comprises dans la série Σ, Σ', Σ'', ...

20. Donc, *si plusieurs coniques homothétiques ont un même axe de symptose sans se couper, les coniques, lieux des points de contact des tangentes émanées des divers points de leur axe de symptose, passeront toutes par les deux mêmes points fixes, et pourront être considérées comme deux coniques de la première série, réduites à des points.*

Chacun de ces points jouit de cette propriété que ses polaires, relatives aux coniques de la première série, se confondent toutes en une même droite passant par l'autre point fixe.

En effet, l'axe de symptose de l'un de ces points et de l'une quelconque de ces coniques est (11) à égale distance de ce point et de sa polaire relative à cette conique ; or, cet axe de symptose est le même de quelque manière qu'on choisisse la conique, puisque toutes les coniques de la série ont par hypothèse un même axe de symptose ; en outre, le second de ces deux points fait partie de cette série, et la polaire du premier, par rapport à ce second point, doit passer par ce point lui-même ; donc, chacun de ces deux points a même polaire dans toutes ces courbes, et cette polaire passe par l'autre point.

21. Ces deux points jouissent encore de cette propriété que *les droites menées de l'un d'eux aux deux points de contact d'une*

tangente commune à deux des coniques de la première série, sont parallèles à deux diamètres conjugués de ces coniques, car nous savons (11) que l'axe de symptose de ces deux coniques coupe la tangente commune en un point également distant des deux points de contact, lequel point sera par conséquent le centre d'une conique homothétique aux proposées, passant par les deux points de contact et en outre par les deux points fixes; ces deux points de contact seront donc les extrémités d'un diamètre de la courbe, d'où il suit que les droites menées de l'un quelconque des points de la courbe, et conséquemment de l'un quelconque de nos deux points fixes, aux deux points de contact, seront parallèles à deux diamètres conjugués de cette courbe; elles seront donc également parallèles à deux diamètres conjugués des deux autres qui lui sont homothétiques.

En particulier, si les coniques sont des cercles, ces deux droites devront être perpendiculaires l'une à l'autre, comme nous l'avons déjà remarqué page 274 (n.° 12).

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

La méthode de recherche que nous allons faire connaître est susceptible d'applications nombreuses et variées que nous nous proposons de publier successivement. Nous choisirons, pour le présent, celles de ces applications qui, par leur simplicité, nous semblent les plus propres à en bien faire saisir l'esprit.

§. I.

Soient A, B, C trois fonctions linéaires indépendantes quelconques, en x et y; l'équation

$$ABC=0 \qquad (1)$$

sera celle d'un triangle dont les côtés, les angles et les sommets respectivement opposés à ces côtés auront pour équations

$$A=0\,, \qquad B=0\,, \qquad C=0\,, \qquad (2)$$

$$BC=0\,, \qquad CA=0\,, \qquad AB=0\,, \qquad (3)$$

$$\left\{\begin{matrix} B=0\,, \\ C=0\,, \end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} C=0\,, \\ A=0\,, \end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} A=0\,; \\ B=0\,. \end{matrix}\right. \qquad (4)$$

Soient a, b, c trois constantes indéterminées, entre toutes ou partie desquelles on peut d'ailleurs supposer une relation non homogène quelconque; l'équation du second degré

$$aBC+bCA+cAB=0 \qquad (5)$$

sera visiblement l'équation commune à toutes les lignes du second ordre circonscrites à ce triangle.

Si l'on combine tour à tour l'équation (4) avec les trois suivantes

$$bC+cB=0\,, \qquad cA+aC=0\,, \qquad aB+bA=0\,, \qquad (6)$$

qui sont évidemment celles de trois droites passant respectivement par les sommets (B, C), (C, A), (A, B) du triangle, elles la réduiront respectivement aux équations (3) qui sont celles des angles de ce triangle ; d'où il suit que les droites (6) rencontrent la courbe (5) aux mêmes points où elles coupent respectivement les angles du triangle (1) ; or, elles ne coupent ces angles qu'en un seul point, puisqu'elles passent respectivement par leurs sommets ; donc chacune de ces droites (6) n'a qu'un point commun avec la courbe (5) ; donc enfin ces droites (6) sont des tangentes menées à la courbe (5) par les sommets du triangle (1), et dont l'ensemble forme conséquemment un triangle circonscrit ayant pour équation

$$(bC+cB)(cA+aC)(aB+bA)=0\,. \qquad (7)$$

Les intersections des côtés de ce dernier triangle avec leurs opposés respectifs dans le premier seront données par les trois couples d'équations

$$\left.\begin{array}{ll} bC+cB=0\,, & A=0\,; \\ cA+bA=0\,, & B=0\,; \\ aB+bA=0\,, & C=0\,. \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Toute droite qui passera par le premier de ces points aura une équation de la forme

$$m(bC+cB)+nA=0\,, \qquad \text{ou} \qquad nA+mcB+mbC=0\,:$$

or, en posant $m=a$ et $n=bc$, cette équation devient

$$bcA+caB+abC=0\,; \qquad (9)$$

qui est symétrique en A, B, C, a, b, c; donc la droite qu'elle exprime passe aussi par les deux autres points qui se trouvent ainsi en ligne droite avec celui-là.

Les équations (6), prises deux à deux, appartiennent aux sommets du triangle (7) ; d'où il suit qu'en éliminant entre ces équations, prises ainsi deux à deux, la lettre qui leur est commune, les équations résultantes appartiendront à de nouvelles droites passant par ces sommets ; or, ces équations sont

$$cB-bC=0\ ,\qquad aC-cA=0\ ,\qquad bA-aB=0\ ;\qquad (10)$$

dont chacune est comportée par les deux autres, et qui appartiennent conséquemment à trois droites concourant en un même point ; mais ces droites passent aussi par les sommets du triangle (1) respectivement opposés à ceux du triangle (7) ; on a donc ce double théorème :

THÉORÈME. Deux triangles étant l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même ligne du second ordre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit ;

Les points de concours des côtés de l'inscrit avec leurs opposés respectifs dans le circonscrit appartiennent tous trois à une même droite.	*Les droites qui joignent les sommets du circonscrit avec leurs opposés respectifs dans l'inscrit concourent toutes trois en un même point.*

Il est presque superflu d'observer que ce point et cette droite sont pôle et polaire l'un de l'autre, par rapport à la courbe dont il s'agit, considérée comme directrice.

En modifiant un peu la forme des résultats que nous venons d'obtenir, on peut en présenter le résumé de la manière suivante qui les rend très-faciles à retenir :

Un triangle étant donné par l'équation

$$ABC=0\ ,$$

dans laquelle A, B, C sont des fonctions linéaires quelconques en x et y, l'équation commune à toutes les lignes du second ordre circonscrites est

$$\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}=0\ ,$$

dans laquelle a, b, c sont dés constantes indéterminées ; le triangle circonscrit à cette courbe, ayant ses points de contact aux sommets de l'inscrit, a pour équation

$$\left(\frac{B}{b}+\frac{C}{c}\right)\left(\frac{C}{c}+\frac{A}{a}\right)\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{b}\right)=0\ ;$$

les points de concours des côtés de l'inscrit avec leurs opposés respectifs dans le circonscrit appartiennent tous trois à une même droite, donnée par l'équation

$$\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}=0\ ;$$

enfin, les droites qui joignent les sommets du circonscrit à leurs opposés respectifs dans l'inscrit concourent toutes trois en un même point donné par la double équation

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}\ .$$

Soient posés

$$bC+cB=A'\ ,\quad cA+aC=B'\ ,\quad aB+bA=C'\ ;$$

on en tirera

$$A=\frac{bB'+cC'-aA'}{2bc}\ ;\quad B=\frac{cC'+aA'-bB'}{2ca}\ ,\quad C=\frac{aA'+bB'-cC'}{2ab}\ ;$$

substituant ces valeurs dans les équations (1, 5, 7, 9, 10), et supprimant ensuite les accens devenus pour lors inutiles, on parviendra aux conclusions suivantes.

Un triangle étant donné par l'équation

$$ABC=0\ ,$$

l'équation commune à toutes les lignes du second ordre inscrites est

$$a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2-2bcBC-2caCA-2abAB=0\ ;$$

le triangle inscrit ayant ses sommets aux points de contact du circonscrit a pour équation

$$(bB+cC-aA)(cC+aA-bB)(aA+bB-cC)=0\ ;$$

la droite qui contiendra les trois points d'intersection des côtés du circonscrit avec leurs opposés respectifs dans l'inscrit a pour équation

$$aA+bB+cC=0\ ;$$

enfin, le point de concours des trois droites qui joignent les sommets de l'inscrit à leurs opposés respectifs dans le circonscrit est donné par la double équation

$$aA=bB=cC\ .$$

Supposons présentement que les trois fonctions A, B, C de x et de y, au lieu d'être linéaires soient d'un même degré ou d'une même classe, et convenons d'appeler triangle du $m.^{ieme}$ degré ou de $m.^{ieme}$ classe le système de trois courbes de ce degré ou de cette classe; dès lors le théorème que nous venons d'établir, combiné avec le principe des polaires réciproques, en fournira deux autres, très-généraux, sur les systèmes de trois courbes de même degré ou de même classe que l'indigence de la langue, qui n'a pas été créée pour des considérations si générales, se refuse, pour ainsi dire, à énoncer.

§. II.

Supposons présentement que A, B, C soient des fonctions linéaires en x, y, z; alors l'équation

$$ABC=0$$

sera celle d'un angle trièdre dont les faces, les angles dièdres respectivement opposés et les arêtes de ces angles trièdres seront donnés par les équations

$$A=0\,,\qquad B=0\,,\qquad C=0\,,$$

$$BC=0\,,\qquad CA=0\,,\qquad AB=0\,,$$

$$\left\{\begin{array}{l}B=0\,,\\ C=0\,;\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}C=0\,,\\ A=0\,;\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}A=0\,,\\ B=0\,;\end{array}\right.$$

l'équation commune à toutes les surfaces coniques du second ordre circonscrites sera

$$aBC+bCA+cAB=0\,.$$

Si l'on circonscrit à l'une de ces surfaces coniques un nouvel angle trièdre, de telle sorte que ses lignes de contact avec la surface conique soient les arêtes de l'inscrit, cet angle trièdre aura pour équation

$$(cB+bC)(aC+cA)(bA+aB)=0\,;$$

les trois droites, suivant lesquelles les faces de l'angle trièdre inscrit couperont celles du circonscrit, seront situées dans un même plan ayant pour équation

$$bcA+caB+abC=0$$

enfin, les trois plans conduits par les arêtes du circonscrit et par leurs opposées respectives dans l'inscrit se couperont suivant une même droite donnée par la double équation

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c} \quad .$$

On aura donc ce double théorème :

THÉORÈME. Deux angles trièdres étant l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même surface conique du second ordre, de telle sorte que les arêtes de l'inscrit soient les lignes de contact du circonscrit ;

Les droites suivant lesquelles les faces de l'inscrit coupent leurs opposées respectives dans le circonscrit sont toutes trois dans un même plan.

Les plans conduits par les arêtes du circonscrit et par leurs opposées respectives dans l'inscrit passent tous trois par la même droite.

Il est clair que cette droite et ce plan sont polaires l'un de l'autre, par rapport à la surface conique, considérée comme directrice.

Si l'on suppose que le centre commun de la surface conique et des deux angles trièdres soit le centre d'une sphère, on obtiendra, pour des figures construites sur une surface sphérique, un théorème analogue à celui que nous venons d'établir.

En supposant toujours que l'équation

$$ABC=0$$

est celle d'un angle trièdre, l'équation commune à toutes les surfaces du second ordre inscrites sera

$$a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2-2bcBC-2caCA-2abAB=0 \ ;$$

l'angle trièdre inscrit ayant pour ses arêtes les lignes de contact du circonscrit aura pour équation

$$(bB+cC-aA)(cC+aA-bB)(bB+cC-aA)=0 \;;$$

le plan des trois droites suivant lesquelles les faces du circonscrit coupent leurs opposées respectives dans l'inscrit aura pour équation

$$aA+bB+cC=0 \;;$$

enfin, la droite suivant laquelle se couperont les trois plans conduits par les arêtes de l'inscrit et par leurs opposées respectives dans le circonscrit sera donnée par la double équation

$$aA=bB=cC \;.$$

Si l'on suppose que les fonctions A, B, C, de x, y, z sont d'un même degré quelconque, supérieur au premier, on obtiendra, sans aucun nouveau calcul, des théorèmes très-généraux sur le système de trois surfaces d'un même dégré ou d'une même classe, situées d'une manière quelconque dans l'espace.

§. III.

Soient présentement A, B, C, D quatre fonctions linéaires indépendantes quelconques en x, y, z; l'équation

$$ABCD=0 \qquad (1)$$

sera celle d'un tétraèdre quelconque dont les faces, les angles trièdres respectivement opposés et les sommets correspondans seront donnés par les équations

$$A=0\,,\qquad B=0\,,\qquad C=0\,,\qquad D=0\,; \qquad (2)$$

$$BCD=0\,,\qquad CAD=0\,,\qquad ABD=0\,,\qquad ABC=0\,, \qquad (3)$$

$$\left\{\begin{array}{l} B=0\ , \\ C=0\ , \\ D=0\ ; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} C=0\ , \\ A=0\ , \\ D=0\ , \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} A=0\ , \\ B=0\ , \\ D=0\ ; \end{array}\right. \quad \left.\left\{\begin{array}{l} A=0\ , \\ B=0\ , \\ C=0\ . \end{array}\right.\right\} \quad (4)$$

Quant aux trois couples d'angles dièdres respectivement opposés elles seront données par les équations

$$\left.\begin{array}{lll} BC=0\ , & CA=0\ , & AB=0\ , \\ AD=0\ , & BD=0\ , & CD=0\ ; \end{array}\right\} \quad (5)$$

et les arêtes qui leur appartiennent le seront par celles-ci :

$$\left.\begin{array}{lll} \left\{\begin{array}{l} B=0\ , \\ C=0\ , \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} C=0\ , \\ A=0\ , \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} A=0\ , \\ B=0\ , \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} A=0\ , \\ D=0\ , \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} B=0\ , \\ D=0\ , \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} C=0\ , \\ D=0\ . \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Si a, b, c, α, β, γ sont six constantes arbitraires qu'on peut d'ailleurs supposer liées, en tout ou en partie, par une relation quelconque, non homogène, l'équation du second degré

$$aBC+bCA+cAB+\alpha AD+\beta BD+\gamma CD=0\ , \quad (7)$$

sera visiblement l'équation commune à toutes les surfaces du second ordre circonscrites au tétraèdre (1) ; car son premier membre est la seule fonction du second degré en x, y, z qui puisse s'évanouir en y supposant nulles, trois quelconques des quantités A, B, C, D.

Si, avec cette équation, on combine tour à tour les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} bC+cB+\alpha D=0\ , \\ cA+aC+\beta D=0\ , \\ aB+bA+\gamma D=0\ , \\ \alpha A+\beta B+\gamma C=0\ , \end{array}\right\} \quad (8)$$

qui sont celles de quatre plans passant respectivement par les sommets (4) du tétraèdre (1) ; elles la réduiront respectivement aux quatre suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} aBC+\beta BD+\gamma CD=0\ , \\ bCA+\gamma CD+\alpha AD=0\ , \\ cAB+\alpha AD+\beta BD=0\ , \\ aBC+bCA+cAB=0\ ; \end{array}\right\} \quad (9)$$

d'où il résulte que, dans la recherche des intersections des plans (8) avec la surface (7), il revient au même de substituer à cette surface celles des surfaces (9) qui correspondent respectivement aux plans (8) ; or, il est aisé (§. II.) de reconnaître les surfaces (9) pour des surfaces coniques respectivement circonscrites aux angles trièdres (3), lesquelles ne sauraient conséquemment avoir de commun, avec ceux des plans (8) qui leur correspondent respectivement, qu'un point ou le système de deux droites ; donc, les plans (8) n'ont pareillement de commun avec la surface (7) qu'un point ou le système de deux droites ; donc enfin ces plans (8) sont les plans tangens menés à cette surface par les sommets (4) du tétraèdre (1) ; ils forment donc, par leur ensemble, un tétraèdre circonscrit dont les points de contact sont les sommets de l'inscrit ; tétraèdre dont l'équation est conséquemment

$$(bC+cB+\alpha D)(cA+aC+\beta D)(aB+bA+\gamma D)(\alpha A+\beta B+\gamma C)=0. \quad (10)$$

Les faces du tétraèdre circonscrit coupent leurs opposées respectives dans l'inscrit, suivant des droites données par les couples d'équations

$$\left.\begin{array}{ll} bC+cB+\alpha D=0\,, & A=0\,, \\ cA+aC+\beta D=0\,, & B=0\,, \\ aB+bA+\gamma D=0\,, & C=0\,, \\ \alpha A+\beta B+\gamma C=0\,, & D=0\,. \end{array}\right\} \quad (11)$$

Pour que l'une quelconque des trois premières droites soit dans le même plan avec la dernière, il faut qu'en éléminant entre leurs quatre équations les trois coordonnées x, y, z, ou, ce qui revient au même, les trois rapports $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, on parvienne à une équation identique; or, on obtient ainsi les trois équations

$$\beta b=\gamma c\,, \qquad \gamma c=\alpha a\,, \qquad \alpha a=\beta b\,, \qquad (12)$$

qui peuvent fort bien ne point avoir lieu ; donc, généralement parlant, deux de ces quatre droites ne sont pas situées dans un même plan, à plus forte raison donc n'y sont-elles pas toutes quatre ; d'où il résulte que la première partie du théorème proposé à démontrer à la pag. 18 du présent volume n'est pas généralement vraie.

De ce que chacune des équations (12) est comportée par les deux autres, on peut conclure que, si parmi les quatre droites (11), il s'en trouve deux dont chacune soit en particulier dans un même plan avec l'une des deux droites restantes, ces deux droites restantes seront aussi elles-mêmes dans un même plan qui d'ailleurs sera, généralement parlant, différent du plan des deux autres.

Si l'on cherche les conditions nécessaires pour que les trois premières droites (11) soient deux à deux dans un même plan, on retombera de nouveau sur les équations (12); d'où l'on est fondé à conclure que, toutes les fois que deux quelconques des quatre droites (11) sont dans un même plan, les deux droites restantes sont aussi dans un même plan qui, en général, peut être différent du premier.

Mais on voit en même temps que, si l'on avait la double équation

$$\alpha a=\beta b=\gamma c\ , \qquad (13)$$

les quatre droites (11) seraient toutes alors comprises dans un seul et même plan.

En représentant chacun de ces trois produits par k^2, on aura

$$\alpha=\frac{k^2}{a}\ ,\qquad \beta=\frac{k^2}{b}\ ,\qquad \gamma=\frac{k^2}{c}\ .$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (7), elle deviendra

$$ABC\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}\right)+k^2D\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}\right)=0\ ; \qquad (14)$$

telle est donc la forme particulière que doit prendre l'équation commune aux surfaces du second ordre circonscrites au tétraèdre (1), pour qu'en leur circonscrivant un autre tétraèdre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit, les intersections des faces respectivement opposées dans les deux tétraèdres soient toutes quatre comprises dans un même plan. Quant à l'équation de ce plan, on trouvera facilement qu'elle est

$$bcA+caB+abC+k^2D=0\ . \qquad (15)$$

Trois quelconques des quatre droites (11) déterminant une surface gauche du second ordre, cherchons quelle condition serait nécessaire pour que cette surface gauche contînt également la quatrième.

En cherchant l'équation de la surface du second ordre engendrée par une droite mobile sur les trois premières droites (11), considérées comme directrices fixes, on obtient

$$\left.\begin{array}{r}\alpha\beta\gamma D^2+\alpha(\beta b+\gamma c)A\\ +\beta(\gamma c+\alpha a)B\\ +\gamma(\alpha a+\beta b)C\end{array}\right| D+(\alpha A+\beta B+\gamma C)(bcA+caB+abC)=0\,; \quad (16)$$

équation que l'on peut d'ailleurs s'assurer directement être satisfaite par chacune des trois premières équations (11), en particulier : or, il est manifeste qu'elle l'est aussi par la quatrième ; donc, la surface gauche du second ordre, déterminée par trois quelconques des quatre droites (11), contient aussi la quatrième, de telle sorte que ces quatre droites se trouvent dans le cas de celles dont il a été question à la pag. 182 du présent volume, lorsque le problème traité en cet endroit devient indéterminé.

Les sommets du tétraèdre circonscrit (10) sont donnés par les équations (8) de ses faces prises tour à tour trois à trois, ou par toute combinaison qu'on voudra faire entre les trois équations de chacun de ces quatre groupes ; d'où il suit que si, entre les trois équations de chacun de ses quatre mêmes groupes, on élimine la lettre qui leur est commune, les quatre doubles équations qu'on obtiendra appartiendront à un nombre égal de droites passant respectivement par les sommets du tétraèdre circonscrit ; or, ces quatre couples sont

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Pour le sommet opposé à } BCD, & \dfrac{\beta B+\gamma C}{\alpha}=\dfrac{aB+\gamma D}{b}=\dfrac{aC+\beta D}{c}\,,\\[2ex] \text{Pour le sommet opposé à } CAD, & \dfrac{\gamma C+\alpha A}{\beta}=\dfrac{bC+\alpha D}{c}=\dfrac{bA+\gamma D}{a}\,,\\[2ex] \text{Pour le sommet opposé à } ABD, & \dfrac{\alpha A+\beta B}{\gamma}=\dfrac{cA+\beta D}{a}=\dfrac{cB+\alpha D}{b}\,,\\[2ex] \text{Pour le sommet opposé à } ABC, & \dfrac{bC+cB}{\alpha}=\dfrac{cA+aC}{\beta}=\dfrac{aB+bA}{\gamma}\,;\end{array}\right\} \quad (17)$$

or, ces équations sont respectivement satisfaites par celles (4) des quatre sommets du tétraèdre inscrit (1); donc ce sont celles des quatre droites qui joignent les sommets du circonscrit à leurs opposés respectifs dans l'inscrit.

Pour que l'une quelconque des trois premières droites (17) rencontre la dernière, il faut qu'en éliminant, entre leurs quatre équations, les trois coordonnées x, y, z, ou ce qui revient au même, les trois rapports $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, on parvienne ainsi à une équation identique; or, on obtient ainsi, tour à tour, les trois équations

$$\beta b = \gamma c\,, \qquad \gamma c = \alpha a\,, \qquad \alpha a = \beta b\,, \qquad (12)$$

déjà obtenues ci-dessus, et qui peuvent fort bien ne pas avoir lieu; donc, généralement parlant, aucune des trois premières droites (17) ne rencontre la quatrième; et, à plus forte raison, ne concourent-elles pas toutes quatre en un même point. La seconde partie du théorème de la pag. 18, n'est donc par plus vraie que la première. On voit en même que deux des droites (17) concourront ou ne concourront pas en un même point, suivant que deux des droites (11) seront ou ne seront pas dans un même plan.

De ce que chacune des équations (12) est comportée par les deux autres, on en doit conclure que, si parmi les quatre droites (17), il s'en trouve deux dont chacune en particulier rencontre l'une des deux restantes, ces deux dernières se rencontreront aussi en un point qui sera, en géneral, différent du point de rencontre des deux premières.

Si l'on cherche les conditions nécessaires pour que deux des trois premières droites (17) concourent en un même point, on retombera de nouveau sur les équations (12); d'où l'on est fondé à conclure qu'en général, toutes les fois que deux de nos quatre droites concourent en un même point, les deux restantes concourront aussi en un même point qui pourra être d'ailleurs différent du premier; on voit au surplus qu'il en arrivera ainsi toutes les fois que deux des quatre droites (11), étant dans un même plan, les deux restantes seront aussi dans un même plan.

Mais on voit, en même temps, que, si l'on avait la double équation

$$\alpha a=\beta b=\gamma c\;, \qquad (13)$$

les quatre droites concourraient dès lors en un seul et même point. C'est le cas où les quatre droites (11) sont dans un même plan, et où l'équation (7) prend la forme (14). En représentant, comme alors, par k^2 chacun des produits (13), le point de concours de nos quatre droites (17) sera donné par la triple équation

$$bcA=caB=abC=k^2D\;. \qquad (18)$$

Trois quelconques des quatre droites (17) déterminent une surface gauche du second ordre, et l'on peut se proposer de connaître dans quel cas la quatrième droite se trouvera aussi sur cette surface. En cherchant, par exemple, l'équation de la surface gauche déterminée par les trois premières, on trouve

$$\left.\begin{array}{l}(\beta b-\gamma c)(\beta b+\gamma c-\alpha a)(aBC+\alpha AD)\\ +(\gamma c-\alpha a)(\gamma c+\alpha a-\beta b)(bCA+\beta BD)\\ +(\alpha a-\beta b)(\alpha a+\beta b-\gamma c)(cAB+\gamma CD)\end{array}\right\}=0\;; \qquad (19)$$

or, il est facile de s'assurer que cette équation est aussi satisfaite par la dernière des doubles équations (17), ce qu'atteste d'ailleurs la symétrie qu'on y remarque, d'où l'on doit conclure que les quatre droites (17), comme les quatre droites (11), appartiennent généralement à une seule et même surface gauche du second ordre. On a donc ce théorème :

THÉORÈME. Si deux tétraèdres sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même surface quelconque du second ordre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact *des faces du circonscrit, les faces respectivement opposées des deux tétraèdres se couperont suivant quatre droites, et leurs sommets respectivement opposés détermineront quatre autres droites.*

Or, 1.° *les droites de chaque groupe appartiendront généralement, toutes quatre, à une seule et même surface gauche du second ordre ;*

2.° *Si la surface gauche du second ordre qui contient les quatre premières droites se réduit au système de deux plans, l'un de ces plans contiendra deux de ces droites, tandis que l'autre contiendra les deux restantes, et alors deux des quatre dernières droites concourront en un même point, et les deux autres en un autre point ;*

3.° *Si enfin la surface gauche du second ordre qui contient les quatre premières droites se réduit à un plan unique, la surface gauche du second ordre qui contiendra les quatre dernières se réduira à une surface conique, au sommet de laquelle elles concourront toutes* (*).

(*) Par une lettre en date du 19 janvier dernier, M. Steiner nous mande de Berlin qu'il est parvenu, de son côté, à un théorème tout à fait pareil à celui-là, dont il ne nous indique pas d'ailleurs la démonstration : mais, de quelque poids que puisse être, en cette matière, l'assertion d'un géomètre aussi distingué, quelque irréprochable que paraisse, sous tous les rapports, l'élégante et lumineuse analyse de M. Bobillier, et quelque confiance enfin que puisse inspirer l'accord presque simultané sur une même question (la lettre de M. Bobillier porte la date du 24 janvier) de deux géométres séparés l'un de l'autre par un intervalle de plusieurs centaines de lieues, et qui ne paraissent avoir jamais eu entre eux aucune relation directe, nous ne devons pas négliger d'observer qu'il s'élève, contre le théorème auquel ils sont parvenus, une objection assez grave que nous nous bornerons à exposer, en laissant à de plus habiles que nous le soin de la résoudre.

1.° Soient, dans l'espace, quatre droites indéfinies, non comprises deux à deux dans un même plan, mais d'ailleurs quelconques. Par ces droites faisons passer quatre plans, de manière à former un tétraèdre t. Par ces mêmes droites, et par les sommets du tétraèdre opposés respectivement aux fa-

Il est d'ailleurs aisé de voir qu'en prenant pour surface directrice la surface du second ordre à laquelle les deux tétraèdres sont inscrit et circonscrit, 1.° les quatre droites de chaque groupe sont les polaires conjuguées respectives des quatre droites de l'autre groupe ; 2.° lorsque les quatre droites du premier groupe sont dans deux plans, les deux points où concourent deux à deux les quatre droites de l'autre groupe sont les pôles respectifs de ces deux plans, et la droite qui les joint la polaire conjuguée de l'intersection de ces deux mêmes plans ; 3.° enfin, lorsque les droites du premier

---

ces dans les plans desquelles elles se trouvent situées, faisons passer quatre nouveaux plans, ceux-ci formeront un nouveau tétraèdre T, circonscrit au premier, et nos quatre droites arbitraires seront celles suivant lesquelles se couperont les faces respectivement opposées des deux tétraèdres.

2.° Soient encore, dans l'espace, quatre droites indéfinies, non comprises deux à deux dans un même plan, mais toujours quelconques. Sur ces droites soient pris quatre points, de manière à pouvoir en faire les sommets d'un tétraèdre T. Soient considérés les points où ces quatre droites percent respectivement les plans des faces opposées aux sommets par lesquels elles passent, comme les sommets d'un nouveau tétraèdre t, inscrit au premier, nos quatre droites arbitraires seront celles qui joindront les sommets respectivement opposés des deux tétraèdres.

3.° Il paraîtrait donc établi par là qu'on peut toujours concevoir deux tétraèdres circonscrits l'un à l'autre, soit de manière que les plans des faces respectivement opposées se coupent suivant quatre droites tout à fait arbitraires, soit que les droites qui joindront les sommets respectivement opposés soient quatre droites tout à fait arbitraires. En particulier, on peut choisir, soit les quatre premières droites, soit les quatre dernières, de telle sorte qu'elles n'appartiennent pas toutes quatre à une même surface gauche du second ordre.

4.° Cela posé, on sait que, pour déterminer une surface du second ordre, il faut *neuf* conditions distinctes ; d'où il suit que, non seulement il est toujours possible de concevoir une surface du second ordre qui touche quatre plans donnés en quatre points donnés, mais même qu'il en existe une infinité qui satisfont toutes à ces conditions, puisqu'elles n'équivalent qu'à *huit* seulement.

5.° On pourra donc, dans nos deux cas ci-dessus, circonscrire au tétraègroupe sont comprises toutes quatre dans un seul et même plan, le pôle de ce plan est le point où concourent les quatre droites du second groupe.

Si l'on pose

$$bC+cB+\alpha D=A'\ ,$$
$$cA+aC+\beta D=B'\ ,$$
$$aB+bA+\gamma D=C'\ ,$$
$$\alpha A+\beta B+\gamma C=D'\ ;$$

en faisant, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l}\beta b+\gamma c-\alpha a=p\ ,\\ \gamma c+\alpha a-\beta b=q\ ,\\ \alpha a+\beta b-\gamma c=r\ ,\end{array}\right\}\quad \text{d'où}\quad \left\{\begin{array}{l}2\alpha a=q+r\ ,\\ 2\beta b=r+p\ ,\\ 2\gamma c=p+q\ ;\end{array}\right\}$$

on en tirera,

$$A=\frac{rb(p+q)B'+qc(r+p)C'-a(r+p)(p+q)A'+2pabcD'}{2bc(pq+qr+rp)}\ ,$$

$$B=\frac{pc(q+r)C'+ra(p+q)A'-b(p+q)(q+r)B'+2qabcD'}{2ca(pq+qr+rp)}\ ,$$

---

dre t une infinité de surfaces du second ordre qui soient en même temps inscrites à T; d'où il paraîtrait résulter que deux tétraèdres t et T étant l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même surface du second ordre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact des faces du circonscrit, il peut fort bien arriver, contrairement au théorème, que soit l'intersection des plans des faces respectivement opposées, soit les droites qui joignent les sommets respectivement opposés, soient quatre droites tout à fait arbitraires, non assujetties conséquemment à se trouver sur une seule et même surface gauche du second ordre.

J. D. G.

$$C=\frac{qa(r+p)A'+pb(q+r)B'-c(q+r)(r+p)C'+2rabcD'}{2ab(pq+qr+rp)},$$

$$D=\frac{paA'+qbB'+rcC'-2abcD'}{2(pq+qr+rp)}.$$

En substituant ces valeurs dans les formules ci-dessus, et supprimant ensuite les accens, devenus dès lors inutiles, on obtiendra des formules relatives au cas où ce serait le tétraèdre circonscrit, et non l'inscrit, qui serait donné par l'équation

$$ABCD=0\,.$$

Si, au lieu de supposer que les quatre fonctions A, B, C, D sont linéaires, on les supposait d'un même degré quelconque, on obtiendrait, sans aucun nouveau calcul, des théorèmes très-généraux sur le système de quatre surfaces du même degré ou de même classe, situées d'une manière quelconque dans l'espace.

QUESTIONS PROPOSÉES.

*Théorèmes sur l'*Hexagramum mysticum ;

Proposés à démontrer par M. J. Steiner, de Berlin.

Six points, pris arbitrairement sur le périmètre d'une conique quelconque, sont les sommets de *soixante* hexagones inscrits et les points de contact de *soixante* hexagones circonscrits (Carnot, *Géométrie de position*), lesquels jouissent des propriétés suivantes :

1.° Dans chacun des hexagones inscrits, les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent tous trois à une même droite D (*Pascal*), de sorte qu'on obtient ainsi soixante droites D;

2.° Ces soixante droites D concourent, trois à trois, en un même point p, de sorte qu'on obtient ainsi vingt points p;

3.° Ces vingt points p appartiennent, quatre à quatre, à une même droite δ, de sorte qu'on obtient ainsi cinq droites δ;

4.° Ces cinq droites δ concourent en un même point ϖ';

1.° Dans chacun des hexagones circonscrits, les droites qui joignent les sommets opposés concourent toutes trois en un même point P (*Brianchon*), de sorte qu'on obtient ainsi soixante points P;

2.° Ces soixante points P appartiennent, trois à trois, à une même droite d; de sorte qu'on obtient ainsi vingt droites d;

3.° Ces vingt droites d concourent, quatre à quatre, en un même point ϖ, de sorte qu'on obtient ainsi cinq points ϖ;

4.° Ces cinq points ϖ appartiennent à une même droite δ';

5.° Les soixante points P sont les pôles respectifs des soixante droites D;

6.° Les vingt points p sont les pôles respectifs des vingt droites d;

7.° Les cinq points ϖ sont les pôles respectifs des cinq droites δ;

8.° Enfin, le point ϖ' est le pôle de la droite δ'.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Note sur la longueur du pendule simple, et sur l'intensité de la gravité terrestre;

Par M. George Bidone, professeur à l'Université et membre de l'Académie royale des sciences de Turin.

Lorsque, de la longueur du pendule simple, déterminée directement pour un endroit situé à une certaine hauteur au-dessus du niveau de la mer, on déduit la longueur qu'aurait ce même pendule placé au niveau de la mer, on suppose que la masse, qui fait osciller le pendule placé au niveau de la mer, est la même que celle qui fait osciller ce pendule placé à l'endroit de l'observation, et l'on ne fait, par conséquent, d'autre correction que celle qui est due à la moindre distance au centre d'action du globe terrestre.

Effectivement, Laplace a fait voir que les plateaux élevés au-dessus du niveau de la mer n'exercent aucune action sensible sur l'intensité de la gravité et sur le pendule, à l'exception du cas où ils sont très-inclinés et où leur centre d'action se trouve fort près du lieu de l'observation.

Mais, outre l'action des plateaux, quelle qu'elle soit, il en est une autre à laquelle il ne paraît pas qu'on ait eu égard jusqu'ici. A la vérité, elle est toujours fort petite; mais, puisque cette action existe réellement, et que d'ailleurs on a cherché, dans ces derniers temps, à apporter toute la précision et l'exactitude possibles dans la détermination de la longueur du pendule, à raison des grandes questions que cette détermination sert à résoudre, il n'est pas inutile de la considérer et d'en apprécier la grandeur et l'influence.

1. On sait, par la théorie de l'attraction, que la gravité d'un point matériel, placé à la surface de la terre supposée sphérique, et au niveau de la mer, ne dépend pas de la masse de l'atmosphère, supposée également sphérique, dont la surface de la terre est enveloppée. Mais si l'on considère un point matériel, situé à une hauteur h au-dessus du niveau de la mer, l'intensité de la gravité terrestre sur ce point dépendra à la fois de la masse de la terre et de la masse de toute la couche atmosphérique dont l'épaisseur est h.

Soient donc A un point situé au niveau de la mer, et B un autre point élevé à la hauteur h au-dessus de ce niveau, et placé sur le prolongement du rayon terrestre R qui passe par le point A. Soient M la masse de la terre, en n'y comprenant pas celle de son atmosphère, et m la masse de la couche sphérique d'air qui a pour épaisseur la distance h du point A au point B. Soient enfin g la gravité et l la longueur du pendule simple en A, et soient g' et l' la gravité et la longueur du pendule simple en B, on aura

$$(1) \qquad g=g'\left(1+\frac{h}{R}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\frac{m}{M}},$$

$$(2) \qquad l=l'\left(1+\frac{h}{R}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\frac{m}{M}}.$$

Si, dans ces équations, on néglige les termes $\frac{h^2}{R^2}$, $\frac{m}{M}$, elles deviennent

$$g=g'\left(1+\frac{2h}{R}\right),$$

$$l=l'\left(1+\frac{2h}{R}\right);$$

et ce sont celles, en effet, dont on se sert pour réduire, au niveau de la mer, l'intensité de la gravité et la longueur du pendule, observées à la hauteur h au-dessus de ce niveau.

2. Evaluons la grandeur du terme $\frac{m}{M}$ provenant de l'attraction de la courbe sphérique d'air comprise entre les rayons R et $R+h$. Pour cela, soit Δ la densité moyenne du globe terrestre, nous aurons

$$M=\frac{4}{3}\varpi\Delta R^3:$$

Soit μ la masse de toute l'atmosphère terrestre et ω l'épaisseur d'une couche sphérique de matière de même densité Δ que celle de la terre, et équivalente à la masse μ de l'atmosphère; le centre de cette couche étant le même que celui de la terre, et ses rayons étant R et $R+\omega$, nous aurons

$$M+\mu=\frac{4}{3}\varpi\Delta(R+\omega)^3.$$

En divisant cette équation par la précédente, et en négligeant les puissances de $\frac{\omega}{R}$ supérieures à la première, il vient

$$\frac{\mu}{M}=\frac{3\omega}{R}.$$

Présentement, la densité de l'eau étant prise pour unité, on a trouvé pour Δ ces deux valeurs, savoir:

$$\Delta=4,5, \qquad \Delta=5,5 .$$

En prenant donc $0^m,76$ pour la hauteur du mercure dans le baromètre, au niveau de la mer, $13,598$ pour la densité du mercure, $R=6366198^m$, on aura, par la première valeur de Δ,

$$\omega=(0,76)\frac{13.598}{4,5}=2^m,30 ,$$

$$\mu=(0,0000001084)M ;$$

et par l'autre valeur de Δ

$$\omega=(0,76)\frac{13,598}{5,5}=1^m,88 ,$$

$$\mu=(0,000000886)M .$$

La valeur moyenne de μ est donc

$$\mu=(0,000001)M ;$$

c'est-à-dire, que la masse de l'atmosphère terrestre est, à très-peu près, la millionième partie de la masse de la terre. D'après cela, chaque millimètre de mercure dans le baromètre correspond à une couche d'air dont la masse est

$$(0,0000000001316)M .$$

Par conséquent, si le baromètre, à la station B, est plus bas de n millimètres qu'au point A où il est supposé à 760 millimètres, la masse m de la couche sphérique d'air dont $AB=h$ est l'épaisseur, sera

$$m=(0,0000000001316)nM .$$

3. On peut maintenant évaluer l'influence du terme $\frac{m}{M}$, dans les équations (1) et (2), d'après les observations faites à diverses hauteurs h. Prenons, pour premier exemple, les expériences faites à l'équateur par Bouguer, au niveau de la mer, à Quito et sur le Pichincha. Il a trouvé la hauteur du mercure dans le baromètre

Au niveau de la mer	$337^{\text{lig.}} = 760^{\text{mm}},27$,
A Quito.	$241 = 543,70$,
Sur le Pichincha . . .	$191 = 430,90$.

De plus, les stations faites à Quito et sur le Pichincha étaient élevées au-dessus du niveau de la mer de 2857 mètres et de 4744 mètres, respectivement. D'après ces données, et, en prenant pour rayon de l'équateur $R' = 6376984$ mètres, on a, pour la station faite sur le Pichincha,

$$\frac{2h}{R'} = 0{,}001487851\ ,$$

$$\frac{h^2}{R'^2} = 0{,}000000553\ ,$$

$$\frac{m}{M} = 0{,}000000433\ ;$$

d'où

$$\frac{m}{M} = (0{,}78)\,\frac{h^2}{R'^2}\ .$$

Pour la station faite à Quito, on a

$$\frac{2h}{R'} = 0{,}00089603\ ;$$

$$\frac{h^2}{R'^2}=0{,}000000201\ ,$$

$$\frac{m}{M}=0{,}000000285\ ;$$

d'où

$$\frac{m}{M}=(1{,}42)\ \frac{h^2}{R'^2}\ .$$

Prenons pour deuxième exemple les expériences faites à Clermont en Auvergne, par MM. Biot et Mathieu, pour y déterminer la longueur du pendule décimal (*Base du système métrique*, tom. IV, pag. 515). Ils ont trouvé pour cette longueur

$$l'=0^{m},7416106\ ,$$

à laquelle ils ont ajouté la quantité

$$\frac{2hl'}{R}=0{,}000094585\ ,$$

pour la correction due à la hauteur de cette station au-dessus du niveau de la mer. On a donc ici

$$\frac{2h}{R}=0{,}000127405\ ,$$

$$\frac{h^2}{R^2}=0{,}000000004\ .$$

Pour avoir la valeur de $\frac{m}{M}$ qui convient à cette station dont on n'a pas rapporté les observations barométriques, mais seulement la haûteur au-dessus du niveau de la mer, conclue par M. Ramond de 406 mètres; je remarque que cette hauteur coïncide avec celle de Genève, qui est 407 mètres. Or, à Genève, la hauteur moyenne du mercure dans le baromètre est de $726^{mm},7$, tandis qu'au niveau de la mer et à la même température, la hauteur du mercure dans le baromètre est de $762^{mm},9$; la différence $36^{m},2^{m}$ sera donc celle que j'adopterai pour la station de Clermont en Auvergne. Avec cette valeur, on trouve

$$\frac{m}{M}=0{,}000000048 ,$$

$$\frac{m}{M}=12.\frac{h^2}{R^2} .$$

Prenons enfin, pour troisième exemple, les expériences faites à Formentera, par MM. Biot, Arago et Chaix (*Base du système métrique*, tom IV, pag. 485) Ils ont trouvé, par l'observation directe, la hauteur du mercure dans le baromètre, au niveau de la mer de $769^{mm},19$, et à la station de $751^{mm},10$; de sorte que la différence est ici $18^{mm},09$. Pareillement, ils ont trouvé, pour la longueur du pendule simple décimal, avant la petite correction qu'ils ont faites depuis, à cause de la règle de fer dont ils se sont servis dans ces expériences,

$$l'=0^{m},7412625 .$$

Pour réduire cette longueur au niveau de la mer, ils y ont ajouté la quantité

$$\frac{2l'h}{R}=0^{m},0000466 ;$$

on a donc ici

$$\frac{2h}{R}=0{,}0000629 ,$$

$$\frac{h^2}{R^2}=0{,}0000000000986\ ,$$

$$\frac{m}{M}=0{,}00000000023806\ ;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{m}{M}=24.\frac{h^2}{R^2}\ .$$

4. Par ces exemples, on voit d'abord que, lorsque la station est fort élevée au-dessus du niveau de la mer, la valeur du terme $\frac{m}{M}$ est sensiblement du même ordre que celle du terme $\frac{h^2}{R^2}$; mais, dans les stations moins élevées, la valeur de ce terme peut devenir beaucoup plus grande que celle du terme $\frac{h^2}{R^2}$. On voit encore que les termes

$$\frac{m^2}{M^2}\ ,\qquad \frac{2hm}{RM}\ ,\qquad \frac{h^2m}{R^2M}\ ,$$

sont en général très-petits, par rapport aux termes

$$\frac{m}{M}\ ,\qquad \frac{2h}{R}\ ,\qquad \frac{h^2}{R^2}\ ;$$

par conséquent, les équations (1) et (2) peuvent se réduire aux suivantes :

$$(3)\qquad g=g'\left(1+\frac{2h}{R}+\frac{h^2}{R^2}-\frac{m}{M}\right),$$

$$(4)\qquad l=l'\left(1+\frac{2h}{R}+\frac{h^2}{R^2}-\frac{m}{M}\right).$$

Les valeurs de $\frac{h^2}{R^2} - \frac{m}{M}$ seront

Sur le Pichincha. . . . . . $+0{,}000000120$,

A Quito . . . . $-0{,}000000084$,

A Clermont en Auvergne . $-0{,}000000044$,

A Formentera . . . . $-0{,}000000023$;

d'où on peut conclure qu'il est une hauteur au-dessus du niveau de la mer, entre la hauteur de la station faite sur le Pichincha et la hauteur de la station faite à Quito, pour laquelle $\frac{h^2}{R^2} - \frac{m}{M}$ est nulle ; que, pour des hauteurs plus grandes que celle-là, cette quantité est positive, mais qu'elle est négative pour des hauteurs moindre ; ce qui est le cas des hauteurs auxquelles ont été faites la plupart des expériences sur la longueur du pendule.

Mais pour voir plus clairement la marche de la quantité $\frac{h^2}{R^2} - \frac{m}{M}$, nommons δ la densité moyenne de la couche sphérique d'air dont l'épaisseur est h ; nous aurons, en négligeant le terme $\frac{h^3}{R^3}$,

$$\frac{m}{M} = \frac{\delta}{\Delta}\left(\frac{3h}{R} + \frac{3h^2}{R^2}\right),$$

et, par suite, en négligeant encore le terme $\frac{3\delta}{\Delta}$ vis-à-vis de l'unité,

$$(5) \qquad \frac{h^2}{R^2} - \frac{m}{M} = \frac{h^2}{R^2} - \frac{3\delta}{\Delta} \cdot \frac{h}{R} \; ;$$

La densité δ est une fonction de h dont la forme nous est jusqu'à présent inconnue ; mais, malgré cela on voit que, dans la question actuelle, on a

$$\frac{h^2}{R^2}-\frac{m}{M}=0, \quad \text{pour } h=0 \quad \text{ou pour } h=\frac{3\delta}{\Delta}.R\,.$$

Ainsi la quantité $\frac{h^2}{R^2}-\frac{m}{M}$ a une valeur maximum comprise entre les deux valeurs précédentes de h, donnée par l'équation

$$\frac{2h}{R^2}-\frac{3\delta}{\Delta.R}-\frac{3h}{\Delta.R}\cdot\left(\frac{d\delta}{dh}\right)=0\,.$$

En mettant dans les équations (3) et (4) la valeur de $\frac{h^2}{R^2}-\frac{m}{M}$, donnée par l'équation (5), elles deviendront

$$(6)\qquad g=g'\left(1+\frac{2h}{R}+\frac{h^2}{R^2}-\frac{3\delta}{\Delta}\cdot\frac{h}{R}\right),$$

$$(7)\qquad l=l'\left(1+\frac{2h}{R}+\frac{h^2}{R^2}-\frac{3\delta}{\Delta}\cdot\frac{h}{R}\right).$$

Ces équations donnent la réduction de la gravité et de la longueur du pendule au niveau de la mer, lorsqu'on a égard à l'attraction de la couche sphérique d'air comprise entre le niveau de la mer et le lieu de l'observation.

Les exemples précédens, bien que subordonnés à l'hypothèse de la terre sphérique et à la valeur adoptée de la densité Δ, suffisent pour donner une idée de l'influence exercée sur la longueur du pendule, réduite au niveau de la mer, par l'attraction de la masse m de la couche d'atmosphère terrestre entre deux sphères concentriques, dont l'une a pour rayon la distance du centre de la terre à la surface des mers, tandis que le rayon de l'autre est cette même distance augmentée de la hauteur de la station au-dessus du niveau de la mer.

5. Il suit encore de ces considérations que, dans un même lieu situé à la hauteur h au-dessus du niveau de la mer, la partie m de la masse $M+m$ qui fait osciller le pendule, est variable sui-

vant les variations du baromètre ; de sorte qu'en toute rigueur l'intensité de la gravité, dans un lieu qui n'est pas au niveau de la mer, n'est pas constante, mais qu'elle éprouve des petites variations, en plus ou en moins, qui dépendent des variations de densité de la couche d'air comprise entre ce lieu et le niveau de la mer.

6. On voit aussi que, si l'on avait une suite d'observations directe sur l'intensité de la pesanteur, les unes faites au niveau de la mer et les autres à des hauteurs connues au-dessus de ce niveau, et exactes jusqu'au neuvième chiffre, on pourrait en conclure la valeur du rapport $\frac{m}{M}$, et, par conséquent, la valeur de la densité moyenne Δ de la terre, d'après une formule facile à trouver, par ce qui précède, et qui a été déjà donnée à la pag. 360 du tom. X.e des *Annales*, dans un mémoire dont le présent écrit n'est qu'une conséquence et une extension.

7. Je terminerai cette note par quelques remarques sur le même sujet. Si la masse μ de toute l'atmosphère terrestre était concentrée dans le sphéroïde même qu'elle enveloppe, la gravité terrestre qui, pour les latitudes moyennes, a pour valeur

$$g=9^{m},8087952\ ,$$

deviendrait

$$G=\frac{M+\mu}{M}.g=9^{m},8088050\ ;$$

Par conséquent, lorsqu'on compare la gravité g, considérée à la surface de la terre, à la gravité g' exercée par cette planète sur un point matériel situé au-delà de l'atmosphère terrestre, et à la distance H de la surface de la terre, on a

$$g'=g\left(\frac{M+\mu}{M}\right)\frac{R^2}{(R+H)^2}=G.\frac{R^2}{(R+H)^2}\ ;$$

c'est-à-dire, que pour avoir la gravité g', il faut employer la valeur de G, et non celle de g.

8. Lorsque, par les phénomènes astronomiques, on détermine les masses des planètes, ou, pour mieux dire, les rapports que ces masses ont entre elles, on comprend nécessairement dans ces masses celles des atmosphères dont ces planètes peuvent être enveloppées. Or, il résulte de ce qui précède que la connaissance de ces masses totales ne suffit pas pour déterminer l'intensité de la gravité, *à la surface* de ces planètes; car, cette intensité ne dépend point des masses des atmosphères. Il faut, pour la déterminer, connaître séparément les masses des planètes et celles de leurs atmosphères, ou du moins leur rapport qui peut être fort différent d'une planète à l'autre, et beaucoup plus considérable que celui qui existe entre la masse du sphéroïde terrestre et celle de son atmosphère.

Turin, le 12 avril 1828.

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Démonstration de la Règle de Descartes, *d'après M. Gauss;*

Par M. GERGONNE.

LA démonstration de la *règle de Descartes*, sur les signes des racines des équations, donnée par Segner, et adoptée par la plupart des auteurs de traités élémentaires, ne laisse sans doute rien à désirer du côté de la rigueur, mais elle est d'une exposition assez pénible, de sorte qu'on ne parvient pas, sans quelque peine, à la faire bien comprendre aux commençans. En outre, la manière dont on en brusque la conclusion, dans les traités d'analyse, semblerait la rendre inexacte ou du moins incomplète. A la vérité les professeurs habiles savent fort bien suppléer en cet endroit au laconisme des auteurs; mais, malheureusement les professeurs ne sont pas tous habiles, et d'ailleurs les personnes qui s'instruisent dans les livres, sans le secours d'aucun maître, ne sauraient guère suppléer d'elles-mêmes aux omissions qu'elles y rencontrent.

Dans la dernière livraison du Journal allemand de M. Crelle (tom. III, pag. 1.re), M. Gauss a donné une démonstration nouvelle du théorème de Descartes, qui n'est sujette à aucun de ces inconvéniens; c'est, pour le fond, cette démonstration que nous nous proposons de reproduire ici, en n'y faisant que quelques changemens légers qui nous ont paru propres à rendre l'exposition plus claire et plus briève encore. Nous croyons faire en cela une chose d'autant plus agréable à MM. les Professeurs de nos écoles, que la démonstration de la règle de Descartes fait actuellement partie du programme des connaissances exigées des aspirans à l'Ecole polytechnique.

Soit une équation en x d'un degré quelconque dont toutes les racines soient supposées connues. Soit fait le produit des facteurs binomes qui répondent tant aux racines imaginaires de cette équation qu'à ses racines négatives, et soit représenté ce produit par X. Soient en outre $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les racines positives de cette équation; l'équation sera conséquemment

$$X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots=0\,. \qquad (1)$$

Soit ordonné le produit X suivant les puissances descendantes de x. Soit alors Mx^m son premier terme que nous pouvons toujours supposer positif. Soit $-Nx^n$ son premier terme négatif; soit $+Px^p$

le premier terme positif qui se présente à la suite de celui-là; soit $-Qx^q$ le premier terme négatif qui le suit, et ainsi du reste. Soit $\pm Ux^u$ le premier des termes consécutifs qui ont tous le même signe jusqu'au dernier inclusivement; et soit $\pm V$ ce dernier terme, on aura ainsi

$$X=Mx^m+\ldots-Nx^n-\ldots+Px^p+\ldots-Qx^q-\ldots\pm Ux^u\pm\ldots\pm V; \quad (2)$$

M, N, P, Q, ... U, V étant des nombres positifs quelconques, et m, n, p, q, ... u des nombres entiers continuellement décroissans.

Si l'on multiplie le polynome X par $x-\alpha$, et qu'on ordonne le produit par rapport à x, le premier terme du produit sera Mx^{m+1}. Il est manifeste, en outre, que le terme en x^{n+1} sera négatif, que le terme en x^{p+1} sera positif, que le terme en x^{q+1} sera négatif, et ainsi de suite. Quant au terme en x^{u+1}, son signe sera le même que celui du terme en x^u dans X, et le dernier terme sera $\mp\alpha V$; de sorte qu'on aura

$$X(x-\alpha)=Mx^{m+1}\ldots-N'x^{n+1}\ldots+P'x^{p+1}\ldots-Q'x^{q+1}\ldots\pm U'x^{u+1}\ldots\mp\alpha V; \quad (3)$$

N', P', Q', ... U' étant des nombres positifs quelconques.

Quant aux termes intermédiaires, sous entendus, leurs signes dépendront, dans chaque cas particulier, de la valeur numérique des coefficiens; mais, quels qu'ils soient, on voit que, tandis que parvenu au terme $-Nx^n$ de (2), on avait rencontré une seule variation; on en aura rencontré une au moins, quand on sera parvenu au terme $-N'x^{n+1}$ de (3); que, tandis que parvenu au terme $+Px^p$ de (2), on avait rencontré deux variations; on en aura rencontré deux au moins, quand on sera parvenu au terme $+P'x^{p+1}$ de (3); que, tandis que parvenu au terme $-Qx^q$ de (2), on avait rencontré trois variations; on en aura rencontré trois au moins, quand on sera parvenu au terme $-Q'x^{q+1}$ de (3), et ainsi de suite; de sorte que, parvenus au terme $\pm U'x^{u+1}$ de (3), on aura rencontré autant de variations au moins qu'on en avait rencontré dans (2), lorsqu'on était parvenu au terme $\pm Ux^n$; mais comme le signe du dernier terme $\mp \alpha V$ de (3) est contraire à celui du terme $\pm U'x^{n+1}$, tandis que le signe du dernier terme $\pm V$ de (2) est semblable à celui du terme $\pm Ux^n$, il s'ensuit que, finalement, parvenu au dernier terme de (3), on aura rencontré tout au moins une variation de plus qu'on n'en avait rencontré dans (2) lorsqu'on était parvenu à son dernier terme, c'est-à-dire, en d'autres termes, que dans $X(x-\alpha)$ il y a tout au moins une variation de plus qu'il ne s'en trouve dans X.

Par une raison tout à fait semblable, il y aura tout au moins dans $X(x-\alpha)(x-\beta)$ une variation de plus qu'on n'en rencontre dans $X(x-\alpha)$, et par suite deux de plus que n'en offre X; il y aura de même dans $X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ tout au moins une variation de plus qu'il ne s'en trouve dans $X(x-\alpha)(x-\beta)$, et, par suite, tout au moins trois de plus que n'en renferme X, et ainsi de suite; de sorte que, finalement, le premier membre de la proposée (1) devra offrir au moins autant de variations que cette équation a de racines positives.

Si la proposée n'avait ni racines négatives ni racines imaginaires, cela reviendrait à supposer $X=1$, et la proposition à laquelle nous venons de parvenir subsisterait dans toute sa force.

Soit présentement une équation en x, de degré quelconque, ayant aussi ou du moins pouvant avoir des racines négatives et des racines imaginaires. Supposons cette équation complète ou du moins rendue telle, si elle ne l'est pas, par la restitution des termes qui manquent, affectés du coefficient zéro, auquel on pourra donner d'ailleurs quel signe on voudra.

Soit ensuite changé, dans cette équation, les signes de tous les termes de rangs pairs, il en résultera une transformée qui, d'après ce qui précède, aura au moins autant de variations que de racines positives; mais les racines de cette équation transformée ne sont autre chose que celle de la proposée prise en signes contraires; donc on pourra dire aussi que cette transformée aura au moins autant de variations que la proposée aura de racines négatives. D'un autre côté, il est visible qu'à chaque variation de la transformée, répondra une permanence dans la proposée, et *vice versâ*; de telle sorte que le nombre des permanences de la proposée sera précisément égal au nombre des variations de la transformée, d'où il suit que la proposée devra offrir au moins autant de permanences de signes qu'elle aura de racines négatives.

En rapprochant cette proposition de celle qui a été démontrée en premier lieu, on aura donc ce théorème :

THÉORÈME. Une équation ne saurait avoir plus de racines positives qu'elle n'offre de variations, ni plus de racines négatives qu'elle n'offre de permanences de signes.

Supposons présentement que les racines de la proposée soient toutes réelles, et soient r le nombre de ses racines positives et r' le nombre de ses racines négatives; soient de plus s le nombre de ses variations et s' le nombre de ses permanences de signes; on aura

$$r+r'=s+s' \; ; \qquad (4)$$

et, d'après ce qui vient d'être démontré, on ne pourra admettre ni $r>s$ ni $r'>s'$; les seules hypothèses admissibles seront donc

$$r=s \,, \qquad r'=s' \,,$$

$$r<s \,, \qquad r'<s' \,,$$

or, il n'y a que les deux de la première ligne dont la combinaison puisse vérifier l'équation (4); d'où il suit qu'elles seront seules conformes à la vérité. On a donc cet autre théorème :

THÉORÈME. Lorsque les racines d'une équation sont toutes réelles, le nombre de ses racines positives est précisément égal au nombre de ses variations, et le nombre de ses racines négatives égal au nombre de ses permanences de signes.

Supposons présentement que l'équation ne soit pas complète; des termes consécutifs pourront manquer en plusieurs endroits, et ces termes consécutifs pourront être en nombre pair en quelques endroits, et nombre impair en d'autres ; en outre, les séries de termes consécutifs manquant, pourront manquer tantôt entre des termes effectifs de mêmes signes et tantôt entre des termes effectifs de signes contraires.

Cela posé, soit α le nombre des séries de termes consécutifs manquant en nombre pair, entre deux termes effectifs de même signe, et soient a_1, a_2, a_3, ... a_α, les nombres de termes dont se composent ces diverses séries ;

Soit β le nombre des séries de termes consécutifs manquant, en nombre impair, entre deux termes effectifs de même signe, et soient b_1, b_2, b_3, ... b_β, les nombres de termes dont se composent ces diverses séries ;

Soit γ le nombre des séries de termes consécutifs manquant, en nombre pair, entre deux termes effectifs de signes contraires, et soient c_1, c_2, c_3, ... c_γ, les nombres de termes dont se composent ces diverses séries.

Soit enfin δ le nombre des séries de termes consécutifs manquant, en nombre impair, entre deux termes effectifs de signes contraires, et soient d_1, d_2, d_3, ... d_δ, les nombres de termes dont se composent ces diverses séries.

Soient en outre V et P les nombres de variations et de permanences qu'offrent les diverses séries de termes effectifs et consécutifs de l'équation que nous supposons du m.ième degré.

En considérant qu'en général k termes manquant consécutivement, font manquer $k+1$ tant variations que permanences, on aura

$$m=V+P+\left\{\begin{array}{l} \alpha+a_1+a_2+a_3+........+a_\alpha \\ +\beta+b_1+b_2+b_3+.........+b_\beta \\ +\gamma+c_1+c_2+c_3+..........+c_\gamma \\ +\delta+d_1+d_2+d_3+........+d_\delta \end{array}\right\} \quad (5)$$

Si nous restituons les termes qui manquent, affectés du coefficient zéro, en donnant à ce coefficient, dans chacun d'eux, le signe qui peut rendre le nombre des variations le moindre possible, il est visible que le nombre total de ces variations sera seulement

$$V+\gamma+\delta\ ;$$

et telle sera aussi conséquemment la limite que le nombre des racines réelles positives ne pourra dépasser.

Si, au contraire, nous restituons les termes qui manquent, affectés du coefficient zéro, en donnant à ce coefficient, dans chacun d'eux, le signe qui peut rendre le nombre des permanences le moindre possible, il est visible que le nombre total de ces permanences sera seulement

$$P+\alpha+\delta\ ;$$

et telle sera aussi conséquemment la limite que le nombre des racines réelles négatives ne pourra dépasser.

Le nombre total des racines réelles, tant positives que négatives de la proposée sera donc, au plus,

$$V+P+\alpha+\gamma+2\delta\ ;$$

le nombre de ses racines imaginaires sera donc au moins

$$m-V-P-\alpha-\gamma-2\delta\ ,$$

ou bien, en mettant pour $m-V-P$ sa valeur donnée par l'équation (5),

$$\left\{\begin{array}{r}a_1+a_2+a_3+\dots\dots+a_\alpha\\+b_1+b_2+b_3+\dots\dots+b_\beta\\+c_1+c_2+c_3+\dots\dots+c_\gamma\\+d_1+d_2+d_3+\dots\dots+d_\delta\end{array}\right\}+(\beta-\delta)\ ,$$

ce qui donne ce théorème :

THÉORÈME. Le nombre des racines imaginaires d'une équation incomplète est au moins égal au nombre des termes dont elle est dépourvue, augmenté de l'excès du nombre des séries de nombres impairs de termes consécutifs manquant, entre deux termes effectifs de même signe, sur le nombre des séries de nombres impairs de termes consécutifs manquant, entre deux termes effectifs, de signes contraires.

On trouvera, à la pag. 382 du XVI.e vol. du présent recueil et à la pag. 68 de celui-ci, quelques autres conséquences de la règle de Descartes.

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Démonstration nouvelle de quelques propriétés des lignes du second ordre;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Nous nous proposons, dans ce qu'on va lire, d'appliquer la méthode de recherche dont nous avons déjà fait l'essai dans un précédent article (pag. 320), à la démonstration de quelques propriétés connues des lignes du second ordre. C'est en examinant, en effet, comment cette méthode conduit à la découverte des vérités déjà connues, qu'on pourra juger de ce qu'on peut en espérer dans la recherche des vérités bien plus nombreuses et plus importantes qui restent encore à découvrir.

1. Soient A, B, A', B' quatre fonctions linéaires quelconques en x et y, et soient $A=0$, $B=0$, les équations des deux côtés

d'un même angle d'un quadrilatère simple ; soient $A'=0$, $B'=0$, les équations des côtés respectivement opposés. Convenons, pour abréger, de représenter simplement par A, B, A', B' les côtés consécutifs, et par (A, B), (B, A'), (A', B'), (B', A) les sommets consécutifs.

En représentant par a et b deux constantes indéterminées, dont une peut même être choisie d'une manière tout à fait arbitraire, l'équation du second degré

$$aAA'+bBB'=0\,, \qquad (1)$$

sera visiblement l'équation commune à toutes les lignes du second ordre circonscrites au quadrilatère dont il s'agit ; car elle sera satisfaite, quels que soient a et b, par les quatre systèmes d'équations du premier degré qui donnent les sommets, et il est de plus évident que cette équation (1) est la seule équation du second degré qui puisse satisfaire à cette condition.

2. Supposons, pour un moment, que le quadrilatère soit inscriptible au cercle ; l'équation du cercle circonscrit ne pourra être que de la forme

$$\alpha AA'+\beta BB'=0\,. \qquad (2)$$

Supposons, en outre, que l'on ait choisi pour les axes des coordonnées, sur lesquels nous n'avons point encore statué, les deux droites rectangulaires qui divisent en deux parties égales les quatre angles formés par les deux côtés opposés A et A', il est manifeste que, dans cette hypothèse, le produit AA' ne renfermera pas de terme en xy ; mais l'équation (2) d'un cercle, rapporté à des axes rectangulaires, ne doit point renfermer de terme de cette sorte ; donc, il ne se trouvera pas non plus dans le produit BB' ; donc, l'équation (1) de la conique, rapportée aux mêmes axes, ne renfermera pas non plus le terme en xy ; donc enfin les axes des coordonnées seront respectivement parallèles à ses diamètres principaux. On a donc ce théorème :

3. *THÉORÈME. Un cercle tracé sur le plan d'une conique coupant cette courbe en quatre points ; si l'on joint ces quatre points deux à deux par deux cordes, les droites qui diviseront en deux parties égales les quatre angles formés par ces deux cordes, seront respectivement parallèles aux diamètres principaux de la courbe.*

Il est clair que si deux angles ont un côté commun, et que les droites qui les divisent en deux parties égales soient parallèles, ces angles seront égaux et correspondans, et que conséquemment leurs côtés, non communs, seront aussi parallèles ; on peut donc, de ce théorème, conclure le suivant :

4. *THÉORÈME. Si tant de cercles qu'on voudra, coupant une même conique aux deux mêmes points, la coupent en outre en deux autres points, les cordes qui, dans ces différens cercles, joindront ces deux autres points d'intersection seront toutes parallèles entre elles.*

Si l'on conçoit que les deux points communs à tous ces cercles et à la courbe se rapprochent continuellemment, jusqu'à se confondre, ce dernier théorème se changera dans le suivant :

5. *THÉORÈME. Si tant de cercles qu'on voudra touchent tous une même conique au même point et la coupent en outre en deux autres points ; les cordes qui, dans ces différens cercles, joindront leurs deux intersections avec la courbe, seront toutes parallèles entre elles.*

C'est de ce dernier théorème que M. Plucker a déduit (*Annales*, tom. XVII, pag. 71) la construction du cercle osculateur d'une conique en un quelconque de ses points. Il n'est, comme l'on voit, qu'un cas particulier du précédent.

6. Retournons à notre équation (1), dans laquelle nous supposerons présentement la courbe rapportée à deux axes quelconques. Si nous voulons obtenir les intersections de cette courbe avec l'axe des x, il faudra faire, dans cette équation, $y=0$. Supposons qu'alors

les fonctions A, B, A', B' prennent respectivement la forme $px+g$, $qx+h$, $p'x+g'$, $q'x+h'$; cette équation deviendra ainsi

$$a(px+g)(p'x+g')+b(qx+h)(q'x+h')=0 \;;$$

c'est-à-dire,

$$(pp'a+qq'b)x^2+\{(pg'+p'g)a+(qh'+q'h)b\}x+(gg'a+hh'b)=0 \;;$$

ou, pour abréger,

$$(Pa+Qb)x^2+(Ra+Sb)x+(Ta+Ub)=0 \;;$$

d'où il suit qu'en représentant par m et μ les distances des deux intersections à l'origine, on aura

$$m+\mu=-\frac{Ra+Sb}{Pa+Qb}\,, \qquad m\mu=+\frac{Ta+Ub}{Pa+Qb}\,.$$

Pour deux autres coniques circonscrites au même quadrilatère, et données par les équations

$$a'AA'+b'BB'=0\,, \qquad a''AA'+b''BB'=0\,,$$

on aura semblablement

$$m'+\mu'=-\frac{Ra'+Sb'}{Pa'+Qb'}\,, \qquad m'\mu'=+\frac{Ta'+Ub'}{Pa'+Qb'}\;;$$

$$m''+\mu''=-\frac{Ra''+Sb''}{Pa''+Qb''}\,, \qquad m''\mu''=+\frac{Ta''+Ub''}{Pa''+Qb''}\;;$$

d'où

$$m'\mu'-m''\mu''=-\frac{(PU-QT)(a'b''-b'a'')}{(Pa'+Qb')(Pa''+Qb'')}$$

et par suite

$$(m+\mu)(m'\mu'-m''\mu'')=\frac{PU-QT}{(Pa+Qb)(Pa'+Qb')(Pa''+Qb'')}(Ra+Sb)(a'b''-b'a'')\ ;$$

ou, pour abréger,

$$(m+\mu)(m'\mu'-m''\mu'')=V(Ra+Sb)(a'b''-b'a'')\ ,$$

on trouvera de même

$$(m'+\mu')(m''\mu''-m\mu)=V(Ra'+Sb')(a''b-b''a)\ ,$$

$$(m''+\mu'')(m\mu-m'\mu')=V(Ra''+Sb'')(ab'-ba')\ ;$$

d'où on conclura, sur-le-champ,

$$(m+\mu)(m'\mu'-m''\mu'')+(m'+\mu')(m''\mu''-m\mu)+(m''+\mu'')(m\mu-m'\mu')=0\ ;$$

équation qui exprime (*Annales*, tom. XVII, pag. 183) que les six points d'intersection sont en involution. En remarquant donc que l'axe des x est ici une transversale quelconque, et en invoquant le principe des polaires réciproques, on aura ces deux théorèmes :

7\. *THÉORÈME. Trois coniques circonscrites à un même quadrilatère coupent toute droite en six points qui forment une involution* (*).

7\. *THÉORÈME. Les six tangentes menées d'un même point quelconque à trois coniques inscrites à un même quadrilatère forment un faisceau en involution.*

On peut prendre pour une des coniques le système de deux côtés opposés du quadrilatère, ou bien on peut prendre pour deux des coniques les deux systèmes de côtés opposés. On peut enfin pren-

(*) C'est l'élégant théorème de M. Sturm (*Annales*, tom. XVII, pag. 182).
J. D. G.

die pour les trois coniques les deux systèmes des côtés opposés avec les deux diagonales; de là, et par la théorie des polaires réciproques, on conclura les théorèmes suivans :

8. *THÉORÈME. Toute droite est coupée par deux coniques qui se coupent en quatre points et par les deux cordes qui joignent ces quatre points deux à deux en six points qui forment une involution.*

8. *THÉORÈME. Les quatre tangentes menées d'un même point quelconque à deux coniques et les deux droites menées du même point aux points de concours de leurs deux paires de tangentes communes, forment un faisceau en involution.*

9 *THÉORÈME. Les six points d'intersection des quatre côtés d'un quadrilatère et d'une conique qui lui est circonscrite avec une droite quelconque, forment une involution* (*).

9. *THÉORÈME. Les droites menées d'un même point quelconque aux quatre sommets d'un quadrilatère et les deux tangentes menées du même point à une conique inscrite, forment un faisceau en involution.*

10. *THÉORÈME. Les six droites que déterminent quatre points d'un même plan coupent toute transversale en six points qui forment une involution.*

10. *THÉORÈME. Les droites menées d'un même point quelconque d'un plan aux six points que déterminent quatre droites tracées sur ce plan, forment un faisceau en involution* (**).

(*) C'est le théorème de Desargues (*Annales*, tom XVII, pag. 181).

(**) Ce théorème et celui qui le précède se trouvent consignés dans un mémoire manuscrit de M. Sturm, dont nous avons publié deux extraits dans notre XVII.e volume, et que son étendue ne nous a pas permis de publier en entier ; mais l'auteur, qui n'a pas songé à les déduire de son théorème général ou de celui de Desargues, en donne des démonstrations directes.

J. D. G.

On ne doit pas perdre de vue, dans tout ceci, que si deux des six points ou deux dès six droites, non conjugués l'un à l'autre, se confondent accidentellement avec leurs conjugués respectifs, auquel cas le nombre des points ou des droites se réduira à quatre seulement, on aura alors une section ou un faisceau harmonique.

11. Reprenons l'équation

$$aAA'+bBB'=0\ , \qquad (1)$$

que l'on peut considérer généralement comme l'équation commune à toutes les coniques passant par les quatre mêmes points donnés par les systèmes d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} A=0\ , \\ B=0\ ; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} A'=0\ , \\ B'=0\ ; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} A=0\ , \\ B'=0\ ; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} A'=0\ , \\ B=0\ ; \end{array}\right.$$

il est visible que l'on satisfera aussi à l'équation (1) quels que soient γ et γ', par chacun des deux systèmes d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma A+bB=0\ , \\ \gamma B'+aA'=0\ ; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \gamma' A+bB'=0\ , \\ \gamma' B+aA'=0\ ; \end{array}\right.$$

puisque l'élimination, soit de γ entre les deux premières, soit de γ' entre les deux autres, fait retomber sur l'équation (1). Donc les deux premières, ainsi que les deux dernières appartiennent à deux droites qui se coupent sur la courbe ; mais les deux premières appartiennent respectivement à deux droites qui passent par les points $(A,\ B)$, $(A',\ B')$, tandis que les deux dernières appartiennent à deux droites qui passent respectivement par les points $(A,\ B')$, $(A',\ B)$; donc les deux premières sont celles de deux cordes menées de l'un quelconque des points de la courbe aux deux points (A, B), (A', B'), tandis que les deux dernières sont celles de deux cordes menées d'un autre point également quelconque de la courbe aux deux points (A, B'), (A', B).

On peut donc considérer ces quatre cordes, et les deux côtés opposés A, A' du quadrilatère, comme les côtés d'un hexagone quelconque inscrit, et alors les couples de côtés respectivement opposés de cet hexagone seront donnés par les couples d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} A=0\ , \\ A'=0\ , \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \gamma A+bB=0\ , \\ aA'+\gamma'B=0\ , \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} aA'+\gamma B'=0\ , \\ \lambda' A+bB'=0\ , \end{array}\right.$$

lesquelles détermineront aussi conséquemment les points de concours de ces couples de côtés opposés; or, il est visible que l'équation

$$\gamma\gamma' A-abA'=0\ ,$$

est également satisfaite par chacune de ces couples en particulier; donc, cette dernière équation est celle d'une droite qui contient les points de concours des directions des côtés opposés. De là, et par la théorie des polaires réciproque, on conclura ces deux théorèmes si connus et si féconds en belles conséquences :

12. *THÉORÈME. Dans tout hexagone inscrit à une conique, les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent tous trois à une même droite.*

12. *THÉORÈME. Dans tout hexagone circonscrit à une conique, les droites qui joignent les sommets opposés concourent toutes trois en un même point.*

On ne doit pas perdre de vue, dans l'application de ces théorèmes, que les six mêmes points, pris sur une ligne du second ordre, peuvent être les sommets de *soixante* hexagones inscrits, et que les six mêmes tangentes à cette courbe peuvent être les côtés de *soixante* hexagones circonscrits, et que les deux théorèmes que nous venons de démontrer ont lieu également pour tous. Faute de cette attention, on pourrait prendre pour théorème nouveau, relatif à l'un de ces hexagones, un de nos théorèmes appliqué à un autre et transporté ensuite à celui-là ; tels seraient, par exemple, ces deux-ci :

Dans tout hexagone inscrit à une conique, le point de concours de deux côtés qui ne sont ni consécutifs ni opposés, le point de concours de leurs opposés respectifs et le point de concours des droites qui joignent les deux couples de sommets opposés qui déterminent les deux côtés restans, appartiennent tous trois à une même droite.

Dans tout hexagone circonscrit à une conique, la droite qui joint deux sommets qui ne sont ni consécutifs ni opposés, la droite qui joint leurs opposés respectifs et la droite qui joint les points de concours des deux couples de côtés opposés, qui déterminent les deux sommets restans, concourent toutes trois en un même point.

13. Si l'on suppose que les fonctions linéaires A, A', B, B' sont en x, y, z, on obtiendra, sans aucun nouveau calcul relativement aux angles tétraèdres gauches inscrits et aux quadrilatères gauches circonscrits à une surface réglée du second ordre, des théorèmes analogues à ceux que nous venons d'établir.

14. Si l'on suppose ensuite que ces fonctions, soit en x et y, soit x, y, z, au lieu d'être linéaires sont d'un même degré quelconque, supérieur au premier, on obtiendra des théorèmes généraux, soit sur le système de quatre courbes du même degré ou de même classe, comprises dans un même plan, soit sur le système de quatre surfaces du même degré ou de même classe, situées du manière quelconque dans l'espace.

GÉOMETRIE DES LIGNES ET SURFACES COURBES.

Démonstration de deux théorèmes ;

Par un ABONNÉ.

L'ÉQUATION en coordonnées rectangulaires de toute ligne du second ordre, pourvue d'un centre, est réductible à la forme

$$Ax^2+By^2=C\ , \qquad (1)$$

dans laquelle A, B, C représentent non seulement les valeurs absolues, mais encore les signes des coefficiens.

Si l'on veut passer du système primitif à un autre système rectangulaire de même origine, il faudra poser

$$x=\alpha t+\beta u\ , \qquad y=\alpha' t+\beta' u\ , \qquad (2)$$

ce qui donnera, en substituant,

$$A(\alpha t+\beta u)^2+B(\alpha' t+\beta' u)^2=C\ . \qquad (3)$$

Pour trouver les longueurs a et b des segmens des axes des t et des u interceptés par la courbe, à partir de l'origine, il faudra faire, tour à tour, dans cette équation, $t=a$, $u=0$ et $u=b$, $t=0$, ce qui donnera, pour déterminer a et b, les équations

$$(A\alpha^2+B\alpha'^2)a^2=C\ , \qquad (A\beta^2+B\beta'^2)b^2=C\ ,$$

d'où on tirera

$$\frac{1}{a^2}=\frac{A\alpha^2+B\alpha'^2}{C}\ ,\qquad \frac{1}{b^2}=\frac{A\beta^2+B\beta'^2}{C}$$

et par suite

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{A(\alpha^2+\beta^2)+B(\alpha'^2+\beta'^2)}{C}\ ;$$

mais, il est connu que

$$\alpha^2+\beta^2=1\ ,\qquad \alpha'^2+\beta'^2=1\ ;$$

donc, on aura simplement

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{A+B}{C}\ ;$$

et de là ce théorème :

THÉORÈME I. Dans toutes les lignes du second ordre qui ont un centre, la somme des quarrés des inverses de deux demi-diamètres perpendiculaires l'un à l'autre est une quantité constante.

L'équation, en coordonnées rectangulaires, de toute surface du second ordre pourvue d'un centre, est réductible à la forme

$$Ax^2+By^2+Cz^2=D\ , \qquad (1)$$

dans laquelle A, B, C, D représentent non seulement les valeurs absolues, mais encore les signes des coefficiens.

Si l'on veut passer du système primitif à un autre système rectangulaire de même origine, il faudra poser

$$x=\alpha t+\beta u+\gamma v\ ,\quad y=\alpha' t+\beta' u+\gamma' v\ ,\quad z=\alpha'' t+\beta'' u+\gamma'' v\ ; \qquad (2)$$

ce qui donnera, en substituant,

$$A(\alpha t+\beta u+\gamma v)^2+B(\alpha' t+\beta' u+\gamma' v)^2+C(\alpha'' t+\beta'' u+\gamma'' v)^2=D\ . \qquad (3)$$

Pour trouver les longueurs des segmens a, b, c des axes des t, des u et des v interceptés par la courbe, à partir de l'origine, il faudra faire tour à tour, dans cette équation, $t=a$ et $u=v=0$, $u=b$ et $v=t=0$, $v=c$ et $t=u=0$, ce qui donnera pour déterminer a, b, c les équations

$$(A\alpha^2+B\alpha'^2+C\alpha''^2)a^2=D\ ,$$

$$(A\beta^2+B\beta'^2+C\beta''^2)b^2=D\ ,$$

$$(A\gamma^2+B\gamma'^2+C\gamma''^2)c^2=D\ ;$$

d'où on tirera

$$\frac{1}{a^2}=\frac{A\alpha^2+B\alpha'^2+C\alpha''^2}{D}\ ,$$

$$\frac{1}{b^2}=\frac{A\beta^2+B\beta'^2+C\beta''^2}{D}\ ,$$

$$\frac{1}{c^2}=\frac{A\gamma^2+B\gamma'^2+C\gamma''^2}{D}\ ;$$

et par suite

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{A(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+B(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)+C(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)}{D}\ ;$$

mais il est connu que

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\ ,\qquad \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1\ ,\qquad \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1\ ;$$

donc, on aura simplement

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{A+B+C}{D}\ ;$$

et de là ce théoreme :

THÉORÈME II. Dans toute surface du second ordre pourvue d'un centre, la somme des carrés des inverses de trois demi-diamètres dirigés suivant les trois arêtes d'un angle trièdre tri-rectangle, est une quantité constante.

D'après l'élégante théorie des indicatrices de M. Charles Dupin (*Annales*, tom. IX, pag. 179), on sait qu'il y a mêmes relations entre les rayons de courbure des diverses sections faites à une surface courbe, suivant une même normale, qu'entre les carrés des demi-diamètres d'une ligne du second ordre pourvue d'un centre On pourra donc conclure du *Théorème I*, le théorème suivant dû à M. Ampère.

Un angle droit dièdre étant assujetti à avoir son arête dirigée suivant la normale en un point fixe d'une surface courbe, quelle que soit d'ailleurs la position de cet angle dièdre autour de cette normale, la somme des inverses des rayons de courbure des sections, déterminées par ses deux faces, pris avec leurs signes, sera une quantité constante.

Le *Théorème II* conduirait à une proposition analogue, relativement à la géométrie de l'étendue hétérogène, signalée par M. Gergonne (*Annales*, tom. XVII, pag. 136), géométrie pour laquelle il existe un théorème qui correspond exactement à celui de M Dupin.

STATIQUE.

Démonstration d'un théorème de M. Chasles;

Par M. Gergonne.

Soient, suivant les notations reçues (x',y',z'), (x'',y'',z''), (x''',y''',z'''), ... des points de l'espace invariablement liés entre eux, mais libres d'ailleurs de toute gêne étrangère, auxquels soient appliquées, dans des directions quelconques, des forces P', P'', P''', ..., dont les composantes parallèles aux axes supposés rectangulaires soient respectivement (X',Y',Z'), (X'',Y'',Z''), (X''',Y''',Z'''), ...

Soient, en outre (t,u,v), (t',u',v'), deux points de l'espace invariablement liés aux premiers, auxquels soient appliqués des forces Q, Q', dont les composantes parallèles aux axes soient respectivement (T,U,V), (T',U',V').

Pour que le système de ces deux dernières forces puisse remplacer, comme équivalent, le système de toutes les autres, il faudra qu'on ait, comme l'on sait,

$$\left.\begin{aligned} T+T'&=\Sigma(X')\,, \\ U+U'&=\Sigma(Y')\,, \\ V+V'&=\Sigma(Z')\,; \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned} Tu+T'u'&=\Sigma(X'y')\ , \\ Uv+U'v'&=\Sigma(Y'z')\ , \\ Vt+V't'&=\Sigma(Z'x')\ ; \end{aligned}\right\}(2) \qquad \left.\begin{aligned} Tv+T'v'&=\Sigma(X'z')\ , \\ Ut+U't'&=\Sigma(Y'x')\ , \\ Vu+V'u'&=\Sigma(Z'y')\ ; \end{aligned}\right\}(3)$$

d'où l'on voit que le problème se présente sous une forme indéterminée, puisqu'il n'offre que *neuf* équations seulement pour déterminer *douze* inconnues. Mais on sait qu'un problème, dans lequel le nombre des inconnues surpasse le nombre des équations, est quelquefois impossible; nous avons donc besoin de prouver que celui qui nous occupe n'est point dans ce cas.

Des équations (2) et (3) on tire

$$\left.\begin{aligned} t&=\frac{V'\Sigma(Y'x')-U'\Sigma(Z'x')}{UV'-VU'}\ , \\ u&=\frac{T'\Sigma(Z'y')-V'\Sigma(X'y')}{VT'-TV'}\ , \\ v&=\frac{U'\Sigma(X'z')-T'\Sigma(Y'z')}{TU'-UT'}\ ; \end{aligned}\right\}(4) \qquad \left.\begin{aligned} t'&=-\frac{V\Sigma(Y'x')-U\Sigma(Z'x')}{UV'-VU'}\ , \\ u'&=-\frac{T\Sigma(Z'y')-V\Sigma(X'y')}{VT'-TV'}\ , \\ v'&=-\frac{U\Sigma(X'z')-T\Sigma(Y'z')}{TU'-UT'}\ ; \end{aligned}\right\}(5)$$

or, il résulte de la forme de ces valeurs que, pourvu qu'on n'ait aucune des équations comprises dans la double égalité

$$\frac{T}{T'}=\frac{U}{U'}=\frac{V}{V'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{T'}{T}=\frac{U'}{U}=\frac{V'}{V}\ ,$$

aucune d'elles ne sera infinie. Mais cette double égalité peut encore être écrite comme il suit:

$$\frac{T}{T'}+1=\frac{U}{U'}+1=\frac{V}{V'}+1 \quad \text{ou} \quad \frac{T'}{T}+1=\frac{U'}{U}+1=\frac{V'}{V}+1$$

c'est-à-dire,

$$\frac{T+T'}{T'}=\frac{U+U'}{U'}=\frac{V+V'}{V'} \quad \text{ou} \quad \frac{T+T'}{T}=\frac{U+U'}{U}=\frac{V+V'}{V}$$

ou enfin (1)

$$\frac{\Sigma(X')}{T'}=\frac{\Sigma(Y')}{U'}=\frac{\Sigma(Z')}{V'} \quad \text{ou} \quad \frac{\Sigma(X')}{T}=\frac{\Sigma(Y')}{U}=\frac{\Sigma(Z')}{V} \;;$$

donc, pourvu que l'on choisisse soit les trois composantes T, U, V, soit les trois composantes T', U', V', de telle sorte qu'elles ne soient pas proportionnelles à $\Sigma(X')$, $\Sigma(Y')$, $\Sigma(Z')$, ce qu'on peut toujours faire d'une infinité de manières différentes, aucune des valeurs (4) et (5) ne sera infinie; de manière que le système proposé peut, en effet, d'une infinité de manières différentes, être remplacé par deux forces.

Cela posé, les équations des directions des deux forces Q, Q' sont respectivement

$$\frac{x-t}{T}=\frac{y-u}{U}=\frac{z-v}{V}\;, \qquad \frac{x-t'}{T'}=\frac{y-u'}{U'}=\frac{z-v'}{V'}\;;$$

d'après quoi, si l'on représente par p la longueur de la perpendiculaire commune à ces deux forces, et par θ l'angle qu'elles forment, on trouvera facilement

$$p=\frac{(UV'-VU')(t-t')+(VT'-TV')(u-u')+(TU'-UT')(v-v')}{\sqrt{(UV'-VU')^2+(VT'-TV')^2+(TU'-UT')^2}}\ ,$$

$$\text{Sin}.\theta=\frac{\sqrt{(UV'-VU')^2+(VT'-TV')^2+(TU'-UT')^2}}{\sqrt{(T^2+U^2+V^2)(T'^2+U'^2+V'^2)}}\ ,$$

on a d'ailleurs

$$QQ'=\sqrt{(T^2+U^2+V^2)(T'^2+U'^2+V'^2)}\ ,$$

donc

$$pQQ'\text{Sin}.\theta=(UV'-VU')(t-t')+(VT'-TV')(u-u')+(TU'-UT')(v-v')\ ;$$

or, les équations (4) et (5) donnent, en ayant égard aux équations (1),

$$(UV'-VU')(t-t')=\Sigma(Y')\Sigma(Z'x')-\Sigma(Z')\Sigma(Y'x')\ ,$$

$$(VT'-TV')(u-u')=\Sigma(Z')\Sigma(X'y')-\Sigma(X')\Sigma(Z'y')\ ,$$

$$(TU'-UT')(v-v')=\Sigma(X')\Sigma(Y'z')-\Sigma(Y')\Sigma(X'z')\ ;$$

en substituant donc il viendra

$$pQQ'\text{Sin}.\theta=\Sigma(X')\{\Sigma(Y'z')-\Sigma(Z'y')\}+\Sigma(Y')\{\Sigma(Z'x')-\Sigma(X'z')\}$$
$$+\Sigma(Z')\{\Sigma(X'y')-\Sigma(Y'x')\}\ ;$$

or, le second membre de cette dernière équation est constant, puisqu'il ne se compose que des données du problème ; donc, le premier doit l'être également ; or, ce premier membre est (pag. 250) le sextuple du volume d'un tétraèdre dont deux arêtes opposées seraient les droites qui représentent les forces Q et Q' tant en intensité qu'en direction ; donc le volume de ce tétraèdre est constant, quelles que soient les deux résultantes Q et Q' ; on a donc cet élégant théorème :

THÉORÈME. Des forces, en nombre quelconque, appliquées dans des directions quelconques à des points invariablement liés entre eux, mais libres d'ailleurs de toute gêne étrangère, peuvent d'une infinité de manières différentes être remplacées par le système de deux forces. Dans tous les systèmes de deux forces qui peuvent leur être substitués, comme équivalens, le tétraèdre construit sur les droites qui représentent les deux résultantes, tant en intensité qu'en direction, considérées comme arêtes opposées, a un volume constant.

Peut-être pourrait-on parvenir à ce théorème sans aucun calcul, par la considération des couples ; mais pour cela il faudrait chercher, au risque de ne pas trouver, tandis que nous étions assurés à l'avance que, si le théorème était vrai, notre analyse nous y conduirait inévitablement. Nous ne voyons pas d'ailleurs ce que le calcul, et surtout un calcul où l'on n'a, pour ainsi dire, que la peine d'écrire, pourrait avoir de si désagréable, pour qu'on apportât un si grand soin à l'éviter.

Il faudrait bien se garder de renverser ce théorème et de croire que, si deux tétraèdres sont équivalens, des forces représentées en intensité et en direction par deux arêtes opposées de l'un, pourront être remplacées par deux autres forces, représentées en intensité et en direction par deux arêtes opposées de l'autre. On ne saurait même se permettre de remplacer des forces représentées en intensité et en direction par deux arêtes opposées d'un tétraèdre, par des forces représentées en intensité et en direction par deux autres arêtes opposées de ce même tétraèdre ; on prouve très-simplement, par des considérations purement géométriques, qu'il faudrait encore joindre à ces dernières deux forces appliquées aux deux extrémités de l'une des deux arêtes restantes parallèles à son opposée, de directions contraires, et représentées en intensité par cette arête opposée.

Nous remarquerons encore qu'il n'est pas exact de dire, comme on a coutume de le faire, que l'équation

$$\Sigma(X')\{\Sigma(Y'z')-\Sigma(Z'y')\}+\Sigma(Y')\{\Sigma(Z'x')-\Sigma(X'z')\}+\Sigma(Z')\{\Sigma(X'y')-\Sigma(Y'x')\}=0$$

exprime que le système a une résultante unique ; cette équation exprime proprement que le volume du tétraèdre, dont deux arêtes opposées représentent les deux résultantes en intensité et en direction, est nul, et que, conséquemment, ces deux résultantes sont dans un même plan où elles pourraient fort bien former un couple. Pour que le système ait une résultante unique qui ne soit pas nulle, il faut que cette équation ait lieu sans qu'on ait à la fois

$$\Sigma(X')=0\,,\qquad \Sigma(Y')=0\,,\qquad \Sigma(Z')=0\,.$$

Nous aurions pu déduire de notre analyse les conditions d'équilibre dans un système libre, de forme invariable, mais cela eût été moins simple que ce que nous avons donné à la pag. 14 de notre IX.e volume où nous avons été assez heureux pour parvenir directement, sans calcul, et de la manière la plus symétrique, aux six équations d'équilibre dans l'espace, sans même être obligés de supposer connues les conditions d'équilibre des forces situées dans un même plan.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de géométrie ;

Proposés à démontrer par M. J. STEINER, géomètre, de Berlin.

I. SOIENT deux cercles C, c, non concentriques, donnés sur un même plan, et que, pour fixer les idées, nous supposons d'abord intérieurs l'un à l'autre.

Soient tracés une suite de cercles O_1, O_2, O_3, O_4, ... le premier assujetti seulement à être inscrit dans l'espace que laissent entre eux les deux cercles C, c et chacun des autres assujetti non seulement à être inscrit dans cet espace, mais encore à toucher celui qui le précède immédiatement dans la série.

En poursuivant la construction de cette série de cercles, ou bien elle se prolongera indéfiniment, en donnant sans cesse des cercles différens de ceux qui auront déjà été tracés, ou bien au contraire, après avoir fait n fois le tour de l'espace compris entre les deux cercles donnés, C, c, on parviendra à un dernier cercle O_m qui se trouvera tangent au premier O_1, de sorte que la série se terminera à ce dernier cercle.

On propose d'abord de démontrer que cette circonstance est indépendante de la situation du premier cercle O_1 de la série, et qu'elle ne dépend uniquement que des grandeur et situation respectives des deux cercles donnés C, c; c'est-à-dire, que, suivant les grandeur et situation de ces deux cercles, la série sera finie ou illimitée, quel que soit le cercle O_1.

On propose en outre de démontrer que, quand la série est limitée, en représentant respectivement par R, r les rayons des deux cercles C, c, et par d la distance entre leurs centres, on doit avoir cette équation remarquable

$$(R-r)^2-4rR.\text{Tang.}^2\frac{n}{m}\varpi=d^2 .$$

Si les deux cercles donnés sont l'un hors de l'autre, l'équation sera

$$(R+r)^2+4rR.\text{Tang}^2\frac{n}{m}\varpi=d^2 . \qquad (*)$$

(*) Voici un théorème beaucoup plus simple qui doit également être vrai.

Soient deux cercles C, c, non concentriques, tracés dans un même plan et que, pour fixer les idées, nous supposons intérieurs l'un à l'autre.

Soient A_1, A_2, A_3, A_4, ... une suite de cordes de C tangentes à c, la première étant arbitraire et chacune des suivantes étant assujetties à avoir une extrémité commune avec celle qui la précède immédiatement.

Ou bien le nombre de ces cordes sera illimité, ou bien, après avoir fait n fois le tour de l'espace compris entre les deux cercles C, c, on parviendra à une dernière corde A_m qui se terminera au point de départ de la première A_1; de sorte que les m cordes formeront un polygone étoilé, inscrit à C et circonscrit à c.

Il s'agirait d'abord de prouver que ces circonstances ne dépendent aucunement de la situation de la première corde A_1, mais uniquement des rayons R, r des deux cercles et de la distance d entre leurs centres.

Il s'agirait en outre d'assigner, dans le dernier cas, le rapport qui doit exister entre les grandeurs m, n, R, r, d.

Il a déjà été établi (*Annales*, tom. I, pag. 149, tom. III, pag. 346 et tom. XIV, pag. 54) que, dans le cas de $m=3$ et $n=1$, cette relation est

$$R^2\mp 2rR=d^2 .$$

On peut aussi se proposer le même théorème pour deux cercles tracés sur la surface d'une sphère, et il a été démontré (*Annales*, tom. XIV, pag. 59) que, dans le cas de $m=3$ et $n=1$, on doit avoir

$$\{\text{Sin.}(R+r)+\text{Sin.}(R-r)\}\{3\text{Sin.}(R\mp r)-\text{Sin.}(R\pm r)\}=4\text{Sin.}^2d .$$

J. D. G.

Les mêmes choses ont lieu pour des cercles tracés sur la surface d'une sphère ; l'équation est alors

$$\text{Cos.}(R\mp r)\pm2\text{Sin.}r\text{Sin.}R\text{Tang.}^2\frac{n}{m}\varpi=\text{Cos}\,d\ .$$

II. Soient deux sphères S, s, non concentriques, que, pour fixer les idées, nous supposons d'abord intérieures l'une à l'autre ; et soit inscrite arbitrairement une troisième sphère Σ dans l'intervalle qui les sépare.

Soit ensuite décrite une suite de sphères O_1, O_2, O_3, O_4 .... dont la première O_1 soit simplement assujettie à toucher à la fois les trois sphères S, s, Σ ; tandis que chacune des autres sera assujettie non seulement à toucher ces trois mêmes sphères, mais encore à toucher celle qui la précède immédiatement dans la série.

Ou bien la série de ces sphères se prolongera indéfiniment, ou bien, après n révolutions autour de la sphère s, on rencontrera une dernière sphère O_m, touchant la première O_1, et il s'agirait d'abord de prouver que ces circonstances ne dépendent aucunement ni de la situation arbitraire de la sphère Σ, ni de la situation également arbitraire de la première sphère O_1 de la série ; mais uniquement des rayons R, r des deux sphères données S et s, et de la distance d entre leurs centres.

Il s'agirait de prouver, en outre, qu'on aura, dans le dernier cas,

$$(R\pm r)^2\mp16r\text{Sin.}^2\frac{n}{m}\varpi=d^2\ ;$$

les signes inférieurs répondant au cas où les sphères données S, s sont extérieures l'une à l'autre.

FIN DU TOME DIX-HUITIÈME.

TABLE

Des matières contenues dans le XVIII.e volume des Annales.

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

ARITHMÉTIQUE APPLIQUÉE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

GÉOMÉTRIE DES COURBES ET SURFACES.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

MÉTÉOROLOGIE.

OPTIQUE.

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

POLÉMIQUE MATHÉMATIQUE.

STATIQUE.

TRIGONOMÉTRIE.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et les* questions résolues.

Tome XVII, pag. 83.	Problème I, résolu,	tome XVIII, pages 182—184.
pag. 255	Théorèmes I, II, III, IV.	25—28.
pag. 284	Problème I.	100—111.
pag. 316	Problème.	——
pag. 348	Problèmes I, II.	98—100, 172—175.
pag. 380.	Problème.	83—87.
Tom. XVIII, pag. 28	Problème.	——
	Théorème.	111—113
pag. 56	Problèmes. I, II, III, IV.	175—182.
	Théorème.	331—335.
pag. 87	Problème de statique.	——
	Problème I, de géométrie.	249—250.
	Problèmes II, III, IV.	——
	Théorème.	——
pag. 124	Problèmes I, II.	202—216.
	Problèmes III, IV.	——
pag. 154	Problème	——
	Théorème.	250—252

ERRATA

Pour le dix-huitième volume des Annales.

PAGE 15, ligne 6 — $y-y'$; *lisez* : $y+y'$.
Pag. 23, ligne 17 — $m-n+1$; *lisez* : $m+n-1$.
Pag. 25, ligne 7 — i_p ; *lisez* : p.
Pag. 29, au titre — PLUKER ; *lisez* : PLUCKER.
Pag. 71, à la fin du 1.er alinéa — ajoutez en note :

Cela revient à dire que,

$$rx^n+sx^{n-1}+tx^{n-2}$$

étant trois termes consécutifs d'une équation du $m.^{ieme}$ degré, l'équation aura nécessairement des racines imaginaires, si l'on a

$$(m-1)(n-1)s^2<mnrt\ .$$

Pag. 143, dernière ligne de la 1.re note — tenu ; *lisez* : cru tenu.
Pag. 152, ligne 8, en remontant — omettre ; *lisez* : émettre.
Pag. 156, ligne 2, en remontant — tétraèdre ; *lisez* : tétraèdre $ABCD$.
Pag. 121, ligne 9, en remontant — mettez une virgule après le mot *point*.
Pag. 123, lignes 3 et 4, en remontant — T, T', T'', T''' ; *lisez* : P, P', P'', P'''.
Pag. 182, ligne 4 — *présent* ; lisez ; *précédent*.
Pag. 204, après la valeur de P' — mettez une virgule au lieu du point et virgule. Au même endroit, après l'accolade — (1) ; *lisez* : (I).
Pag. 239, ligne 8 — (20) ; *lisez* : (21).
Pag. 274, à la fin — remplacez le 1.° par ce qui suit :

1.° Que chacun de ces deux points a, dans les deux courbes, la même polaire, laquelle passe par l'autre point.

Pag. 275, ligne 7 — *même foyer* ; lisez : *mêmes foyers*.
Pag. 283, ligne 9 — *conjugué* ; lisez ; *réciproque*.

Pag. 284, à la fin du n.° 17, colonne de droite — *si les deux courbes ne se coupent pas ;* lisez : *aux deux courbes.*

Pag. 286, ligne 4, colonne de gauche — *leur centre ;* lisez ; *un de leurs centres.*
Colonne de droite — *de leur axe* ; lisez : *d'un de leurs axes,*

Pag. 290, colonne de gauche, ligne 6 et colonne de droite, ligne 5 — *quatre ;* lisez : *six.*

Pag. 292, dernière ligne — et ; *lisez* : ou.

Pag. 293, aux deux colonnes, ligne 13 — *et ;* lisez : *ou.*

Pag. 294, colonne de droite, ligne 10 — polaire ; *lisez* ; pôle.
ligne 12 — relative ; *lisez* : relatif.

Pag. 305, ligne 9 du texte — royaumes ; *lisez* : royaume.

Pag. 333, ligne 7 — chacune des trois premières équations ; *lisez* : chacun des trois premiers systèmes d'équations.

Pag. 336, — supprimez la note.

N. B. L'une des planches portant le numéro II, doit porter le numéro III.