ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER
FINCK

Questions résolues. Solution des deux problèmes de statique proposés à la page 296 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 59-68
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__59_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux problèmes de statique proposés à la page 296 du précédent volume ;

Par M. Bobillier, professeur à l'Ecole des arts et métiers de Châlons-sur-Marne,

Et M. Finck, Répétiteur de Mathématiques à l'Ecole régimentaire d'artillerie de Strasbourg.

Tous deux anciens élèves de l'Ecole polytechnique (*).

I. Considérons une chaînette quelconque dont les élémens de même longueur varient de poids suivant une loi quelconque. Soit

(*) Ces deux solutions ne différant l'une de l'autre que par les notations rapportée cette courbe à une horizontale et à une verticale menées dans son plan, par son point le plus bas, prises respectivement pour axes des x et pour axe des y; la première de ces droites sera tangente et l'autre normale à la courbe.

Cette courbe éprouvera à l'origine une tension inconnue que nous pourrons désigner par a.

Considérons un autre point quelconque (x,y) de la courbe, et soit z ce que peserait une unité de longueur de cette courbe si, pour toute la longueur de cette unité, sa densité était la même qu'en ce point.

Si nous désignons par s la longueur de l'arc de la courbe depuis l'origine jusqu'au point (x,y), le poids de cet arc sera $\int z\mathrm{d}s$. Soit t la tension au même point; et représentons, à l'ordinaire, par p le rapport $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, où la tangente tabulaire de l'angle que fait la courbe en (x,y) avec l'axe des x.

On démontre en statique que, lorsqu'une corde pesante est supendue librement, en désignant par P le poids d'une portion quelconque de cette corde, par T et T' les tensions aux extrémités de cette portion, et enfin par α et α' les angles que font respectivement les directions de ces tensions avec l'horizon, on doit avoir la double équation

$$\frac{P}{\operatorname{Sin.}(\alpha+\alpha')}=\frac{T}{\operatorname{Cos.}\alpha'}=\frac{T'}{\operatorname{Cos.}\alpha}\;,$$

appliquant ce principe général à l'arc s, nous aurons ici

$$P=\int z\mathrm{d}s\;,\quad T=a\;,\quad T'=t\;,\quad \alpha=0\;,\quad \operatorname{Tang.}\alpha'=p\;,$$

d'où

---

et par quelques nuances très-légères, nous avons cru devoir les fondre dans une rédaction unique.

J. D. G.

$$\text{Cos.}\alpha=1\ ,\quad \text{Cos}\,\alpha'=\frac{1}{\sqrt{1+\text{tang.}^2\alpha'}}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\ ,\quad \text{Sin.}(\alpha+\alpha')=\text{Sin.}\alpha=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\frac{\sqrt{1+p^2}\int z\text{d}s}{p}=a\sqrt{1+p^2}=t\ ,$$

d'où on tirera les deux équations.

$$a\sqrt{1+p^2}=t\ , \qquad (1)$$

$$ap=\int z\text{d}s\ .$$

Différentiant la seconde et mettant pour ds sa valeur d$x\sqrt{1+p^2}$, il viendra, en divisant ensuite par dx,

$$a\frac{\text{d}p}{\text{d}x}=z\sqrt{1+p^2}\ . \qquad (2)$$

Telles sont les deux équations qui doivent généralement avoir lieu, dans tout problème relatif aux chaînettes sollicitées uniquement par la pesanteur. Il ne s'agit plus, dans chaque cas particulier, que d'exprimer suivant quelle loi on suppose que varie le poids des élémens de la courbe.

II. Pour première application, supposons qu'on exige que, dans tout son cours, la chaînette présente une égale résistance à la rupture; il faudra évidemment pour cela, si du moins on la suppose d'une matière homogène, que, dans tous ses points, sa masse et conséquemment son poids soit proportionnel à la tension qu'elle éprouve. On aura donc ainsi à résoudre le premier des deux problèmes proposés à la page 296 du précédent volume; et, pour y parvenir, il faudra joindre aux équations générales (1) et (2) l'équation

$$t = bz\,, \qquad (3)$$

où b est une constante.

En mettant pour t, dans cette équation, sa valeur tirée de l'équation (1), on aura

$$z = \frac{a}{b}\sqrt{1+p^2}\,; \qquad (4)$$

mettant ensuite cette valeur de z dans l'équation (2), on aura

$$b\frac{dp}{dx} = 1+p^2\,, \qquad (5)$$

c'est-à-dire,

$$dx = b\frac{dp}{1+p^2}\,,$$

ce qui donnera, en intégrant,

$$x = b\text{Arc.}(\text{Tang.}=p)$$

ou, ce qui revient au même,

$$p = \text{Tang.}\frac{x}{b}\,. \qquad (6)$$

Nous n'ajoutons point de constante, parce que x et p doivent être zéro en même temps.

En remettant pour p sa valeur $\frac{dy}{dx}$, cette équation donnera

$$dy = dx\text{Tang.}\frac{x}{b} = b.\frac{d.\frac{x}{b}\text{Sin.}\frac{x}{b}}{\text{Cos.}\frac{x}{b}} = -b.\frac{d.\text{Cos.}\frac{x}{b}}{\text{Cos.}\frac{x}{b}}\,;$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{y}{b}+\text{Log.Cos.}\,\frac{x}{b}=0\,.$$

Ici encore nous n'ajoutons point de constante, pour les mêmes raisons que ci-dessus.

On peut ensuite écrire

$$e^{\frac{y}{b}}\,\text{Cos.}\frac{x}{b}=1\,; \qquad (7)$$

et telle est finalement l'équation de la courbe cherchée.

Géométriquement parlant, cette courbe est composée d'une infinité de parties, alternativement situées au-dessus et au-dessous de l'axe des x, auquel elles sont toutes tangentes, et toutes comprises entre des asymptotes équidistantes, perpendiculaires à cet axe. Mais il est clair que, pour la question qui nous occupe, on ne doit considérer que celle de ces parties qui est symétriquement partagée par l'axe des y, et comprise entre deux asymptotes données par l'équation $x=\pm\frac{\varpi b}{2}$.

En mettant la valeur (6) de p dans la formule (4) on a

$$z=\frac{a}{b}\,\text{Sec.}\,\frac{x}{b}\;, \qquad (8)$$

au moyen de quoi la formule (3) devient

$$t=a\text{Sec.}\frac{x}{b}\;; \qquad (9)$$

telles sont donc la densité et la tension de la chaînette en un quelconque (x,y) de ses points.

De la même formule (6) on tire

$$\mathrm{d}s=\mathrm{d}x\sqrt{1+p^2}=\frac{\mathrm{d}x}{\text{Cos.}\,\frac{x}{b}}\;; \qquad (10)$$

d'où on tire en intégrant

$$s=\frac{b}{2}\,\text{Log.}\,\frac{1+\text{Sin.}\,\frac{x}{b}}{1-\text{Sin.}\,\frac{x}{b}}\;; \qquad (11)$$

ce qui donne la longueur d'un arc de la chaînette depuis le point le plus bas jusqu'au point quelconque (x,y).

En multipliant membre à membre les équations (8) et (10), on a

$$z\mathrm{d}s=\frac{a}{b}\,\frac{\mathrm{d}x}{\text{Cos.}^2\frac{x}{b}}=a.\frac{\mathrm{d}.\frac{x}{b}}{\text{Cos.}^2\frac{x}{b}}\;;$$

donc

$$\int z\mathrm{d}s=a\,\text{Tang.}\,\frac{x}{b}\;. \qquad (12)$$

C'est là le poids de l'arc compris depuis le point le plus bas jusqu'au point quelconque (x,y).

En représentant par r le rayon de courbure au point (x,y) on aura comme l'on sait

$$r=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}}=\frac{\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\right)^3}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}}\;;$$

mais la formule (5) donne

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{b}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\right)^2\;;$$

donc

$$r=b\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\;;$$

c'est-à-dire (10),

$$r=b\,\text{Sec.}\,\frac{x}{b}\;. \qquad (13)$$

En mettant tour-à-tour, dans cette formule, pour Sec. $\frac{x}{b}$ les valeurs données par les équations (8) et (9), il viendra

$$r=\frac{bt}{a}=\frac{b^2z}{a} \; ; \qquad (14)$$

c'est-à-dire qu'en chaque point de la chaînette le rayon de courbure est proportionnel soit à la tension soit au poids de l'élément. On voit aussi qu'au point le plus bas ce rayon est égal à b.

III. Pour deuxième application, supposons une corde élastique et pesante, d'une densité uniforme, tant qu'elle est étendue librement sur un plan horizontal, où elle n'éprouve aucun frottement; mais susceptible, lorsqu'elle est tendue sur ce plan, de s'alonger uniformément et proportionnellement aux tensions qu'elle éprouve; et cherchons quelle courbure elle affectera lorsqu'étant enlevée de dessus ce plan, on la suspendra dans l'espace par ses deux extrémités. C'est le dernier des deux problèmes de statique proposés à la page 296 du précédent volume.

Soit pris pour unité de poids ce que pèse une unité de longueur de cette corde, lorsque, couchée sur le plan horizontal, on ne l'a encore soumise à aucune pression. Si, sur ce même plan, on la soumet à la pression t, chacune de ses unités de longueur primitive devra s'alonger d'une quantité proportionnelle à t qu'on pourra représenter par $\frac{t}{b}$, b étant une constante à déterminer par l'expérience. La longueur primitive 1 deviendra donc alors $1+\frac{t}{b}$, et aura toujours le poids 1; donc une unité de longueur de la corde tendue pèsera $\frac{1}{1+\frac{t}{b}}$ ou $\frac{b}{t+b}$; on aura donc ici

$$z=\frac{b}{t+b} \; ; \qquad (3)$$

et telle sera l'équation qu'il faudra joindre aux équations générales (1) et (2), pour obtenir la solution du problème particulier qui nous occupe.

En portant dans cette équation la valeur de t donnée par l'équation (1), elle deviendra

$$z=\frac{b}{b+a\sqrt{1+p^2}} \,. \qquad (4)$$

Portant ensuite cette dernière valeur de z dans l'équation (2), nous aurons pour l'équation différentielle du second ordre de la courbe cherchée

$$a(b+a\sqrt{1+p^2})\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=b\sqrt{1+p^2}\,. \qquad (5)$$

Si nous pouvons obtenir deux intégrales premières de cette équation, l'élimination de p entre elles conduira à l'équation primitive.

On en tire d'abord

$$b\mathrm{d}x=a\left(b.\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}+a\mathrm{d}p\right)\,; \qquad (6)$$

ce qui donne, en intégrant,

$$bx=a\{ap+b\mathrm{Log.}(p+\sqrt{1+p^2})\}\,,$$

ou encore

$$e^{\frac{bx}{a^2}-p}=(p+\sqrt{1+p^2})^{\frac{b}{a}}\,; \qquad (7)$$

intégrale à laquelle nous n'ajoutons point de constante, parce que x et p doivent être nuls en même temps.

En multipliant la même équation (6) par p et mettant ensuite dans son premier membre $\mathrm{d}y$ pour $p\mathrm{d}x$, elle devient

$$b\mathrm{d}y=a\left(b\frac{p\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}+ap\mathrm{d}p\right)$$

ce qui donne en intégrant, et observant que y et p doivent être nuls en même temps

$$2b(y+a)=a(2b\sqrt{1+p^2}+ap^2)\,. \qquad (8)$$

L'équation de la courbe sera donc le résultat de l'élimination de p entre les équations (7) et (8).

La dernière peut facilement être mise sous cette forme

$$(a\sqrt{1+p^2})^2+2b(a\sqrt{1+p^2})-\{2b(y+a)+a^2\}=0\,;$$

et donne, en considérant $a\sqrt{1+p^2}$ comme l'inconnue,

$$a\sqrt{1+p^2}=-b+\sqrt{2by+(a+b)^2}\,, \qquad (9)$$

de là on tire en quarrant, transposant et extrayant ensuite la racine quarrée des deux membres

$$ap=\sqrt{2b\{y+a+b-\sqrt{2by+(a+b)^2}\}}\,. \qquad (10)$$

En prenant la somme de ces deux équations, on obtient encore

$$a(p+\sqrt{1+p^2})=-b+\sqrt{2by+(a+b)^2}+\sqrt{2b\{y+a+b-\sqrt{2by+(a+b)^2}\}}\,. \quad (11)$$

Il ne s'agira donc plus que de mettre pour p et pour $p+\sqrt{1+p^2}$, dans l'équation (7), leurs valeurs données par les équations (10) et (11).

En mettant pour $a\sqrt{1+p^2}$, dans l'équation (4) sa valeur donnée par l'équation (9), on trouve

$$z=\frac{b}{\sqrt{2by+(a+b)^2}}\,; \qquad (12)$$

mais l'équation (3) donne

$$t=b\,\frac{1-z}{z}\,;$$

en mettant donc, dans cette dernière, pour z sa valeur (12)

$$t=-b+\sqrt{2by+(a+b)^2}\,; \qquad (13)$$

telles sont donc la densité et la tension de la chaînette en un quelconque (x,y) de ses points.

On a

$$\mathrm{d}s=\mathrm{d}x\sqrt{1+p^2}$$

ou en mettant pour $\mathrm{d}x$ sa valeur donnée par l'équation (5)

$$\mathrm{d}s=\frac{a}{b}(b+a\sqrt{1+p^2})\mathrm{d}p\ ; \qquad (14)$$

d'où, en intégrant

$$s=\frac{a}{2b}\{2bp+ap\sqrt{1+p^2}+a\mathrm{Log.}(p+\sqrt{1+p^2})\}\ ; \qquad (15)$$

il ne s'agira donc plus, pour obtenir la longueur de l'arc de courbe compris depuis l'origine jusqu'au point (x,y), que de mettre pour p, dans cette formule, sa valeur tirée de l'équation (10).

En multipliant membre à membre les équations (4) et (14) il vient

$$z\mathrm{d}s=a\mathrm{d}p\ ,$$

d'où, en intégrant et ayant égard à l'équation (10)

$$\int z\mathrm{d}s=ap=\sqrt{2b\{y+a+b-\sqrt{2by+(a+b)^2}\}}\ . \qquad (15)$$

Tel est donc le poids de l'arc de courbe compris depuis le point le plus bas jusqu'au point (x,y).

Enfin, en désignant par r le rayon de courbure, on aura

$$r=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}}\ ,$$

ou bien, en mettant pour $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ sa valeur donnée par l'équation (5),

$$r-\frac{a}{b}(1+p^2)(b+a\sqrt{1+p^2})\ . \qquad (16)$$

Cette formule prouve, en particulier, qu'au point le plus bas le rayon de courbure est $\frac{a}{b}(a+b)$.