ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER

Questions résolues. Solution de l'un des deux problèmes de géométrie énoncés à la page 232 du XVI.e volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 335-338
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__335_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution de l'un des deux problèmes de Géométrie énoncés à la page 232 du XVI.e volume des Annales ;

Par M. Bobillier, professeur de Mathématiques à l'Ecole royale des arts et métiers de Châlons-sur-Marne.

Problème. *On a construit, sur deux des faces d'un angle dièdre, deux triangles tels que les points de concours des directions de leurs côtés correspondans sont situés tous trois sur l'arête de l'angle dièdre et conséquemment en ligne droite; d'où il résulte que, quelle que soit d'ailleurs l'ouverture de cet angle, les droites qui joignent les sommets correspondans des deux triangles concourent toutes trois en un même point. On suppose que, l'une des faces de l'angle dièdre restant fixe dans l'espace ainsi que son arête, son autre face tourne sur cette arête, comme sur une charnière, en entraînant avec elle le point dont il s'agit, et l'on demande quelle ligne ce point décrira dans l'espace?*

Solution. En ne considérant uniquement que deux côtés correspondans des deux triangles, on peut réduire le problème à cet énoncé plus simple.

Sur l'une des faces d'un angle dièdre, on a pris arbitrairement deux points A, A', en ligne droite avec un point P de son arête. Sur son autre face, on a pris aussi arbitrairement deux points B, B', en ligne droite avec ce même point P ; d'où il résulte que, quelle que soit l'ouverture de l'angle dièdre, les quatre points A, A', B, B', sont constamment dans un même plan contenant le point P, et que conséquemment les droites AB et $A'B'$ concourent constamment en un point C''.

On suppose que, la face de l'angle dièdre qui contient les points A et A', ainsi que son arête demeurant fixes, son autre face tourne sur cette arête, comme sur une charnière, et on demande quelle ligne le point C'' décrira dans ce mouvement ?

Des points B et B', soient abaissées sur l'arête de l'angle dièdre les perpendiculaires BC et $B'C'$. Soient menées les droites AC et $A'C'$, concourant en B'' ; et soit enfin menée $B''C''$.

Les points mobiles B, B' décrivent évidemment dans le mouvement deux cercles ayant respectivement pour centres les points C et C' et pour rayons CB et $C'B'$; de sorte que ces cercles, dont les plans sont parallèles et tous deux perpendiculaires à l'arête de l'angle dièdre, ont cette arête pour axe commun.

Les droites mobiles AB et $A'B'$, qui passent constamment par les points fixes A et A' et par les points mobiles B et B' des circonférences des deux cercles, sont les génératrices des deux surfaces coniques du second ordre, dont les sommets sont en A et A' et dont ces deux circonférences sont des sections respectives ; et comme le point mobile C'' est à la fois sur ces deux génératrices AB et $A'B'$, il s'ensuit que ce point décrit dans l'espace la commune section de ces deux surfaces coniques. Il ne s'agit donc plus que d'assigner la nature de cette section.

Les deux triangles variables ABC et $A'B'C'$ sont tels que les droites AA', BB', CC', qui joignent leurs sommets correspondans concourent en un même point fixe P ; d'où il suit que les points de concours A'', B'', C'', de leurs côtés correspondans BC et $B'C'$, CA et $C'A'$, AB et $A'B'$, doivent appartenir à une même droite ; mais les deux côtés

BC et B′C′, sont parallèles ou concourent à l'infini ; d'où il suit que le point A″, de concours des trois droites BC, B′C′, B″C″, doit être infiniment éloigné, ou, en d'autres termes, que la droite mobile B″C″ doit être constamment parallèle aux deux autres droites mobiles BC et B′C′ et, comme elles, constamment perpendiculaire à l'arête CC′ de l'angle dièdre ; puis donc que cette droite mobile passe constamment par le point fixe B″, elle doit être constamment dans le plan conduit par ce point fixe B″ perpendiculairement à cette arête ; le point C″ de cette droite doit donc être aussi constamment dans ce plan.

Mais nous avons vu que ce point mobile C″ décrivait dans l'espace l'intersection des deux surfaces coniques ; cette intersection est donc une courbe plane dont le plan est perpendiculaire à l'arête de l'angle dièdre ; ou plutôt l'intersection de ces deux surfaces, lieu du point mobile C″ n'est autre que l'intersection de l'une ou de l'autre avec le plan conduit par le point B″, perpendiculairement à l'arête de l'angle dièdre.

Or, il est connu que, dans une surface conique du second ordre, toute section plane parallèle à une section circulaire est également une section circulaire, et qu'en outre les centres des deux cercles sont en ligne droite avec le sommet ; puis donc que le plan de la commune section des deux surfaces coniques est parallèle à ceux des sections circulaires dont les centres sont C et C′ et les rayons CB et CB′, il s'ensuit que cette commune section, lieu du point mobile C″, est un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'arête CC′ de l'angle dièdre. En outre, son centre devant être à la fois sur AC et sur A′C′, ce centre ne sera autre chose que le point B″ de concours de ces deux droites.

Quant au rayon de ce cercle, on le déterminera facilement en cherchant la situation du point C″, de sa circonférence, pour le cas particulier où la face mobile de l'angle dièdre est rabattue sur sa face fixe.

On démontrera d'une manière semblable que le point *c* d'intersection des droites AB′ et A′B, décrit aussi dans l'espace une circonférence dont le centre est à l'intersection b des deux droites AC′ et A′C, et dont le plan est, comme celui de la première, perpendiculaire à l'arête de l'angle dièdre.