ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Géométrie élémentaire. Note sur les caractères d'égalité des angles trièdres

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 252-254
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__252_1>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur les caractères d'égalité des angles trièdres ;

Par un ABONNÉ.

LA démonstration donnée par Simpson des deux principaux cas d'égalité des angles trièdres, démonstration admise dans la plupart des traités élémentaires, est fort simple sans doute ; mais elle présente l'inconvénient de se trouver en défaut dans plusieurs cas. On a cherché, à diverses époques et par des moyens plus ou moins ingénieux, à éluder cette difficulté ; mais ce n'a été constamment qu'en compliquant plus ou moins la démonstration de Simpson. On a lieu d'être surpris que les considérations suivantes, qui sont extrêmement simples ne se soient pas offertes à l'esprit de ceux qui se sont occupés de cette recherche.

La difficulté tient ici à ce que, contrairement à ce qui a lieu pour les triangles, deux angles trièdres peuvent être égaux dans toutes leurs parties sans être pourtant superposables ; car autrement plusieurs de leurs cas d'égalité pourraient aisément se démontrer par la superposition. C'est en particulier le cas de deux angles trièdres *opposés par le sommet*, comme tous les géomètres le savent, et comme il est d'ailleurs facile de s'en assurer.

Mais, de cela même que deux angles trièdres opposés par le sommet sont égaux dans toutes leurs parties, sans être superposables, il s'ensuit qu'en général, *lorsque deux angles trièdres sont égaux dans toutes leurs parties, sans être superposables, chacun d'eux est superposable avec l'opposé au sommet de l'autre*. Or, de cette proposition découle naturellement la marche à suivre pour démontrer, sans aucun embarras, les quatre cas d'égalité des angles trièdres. Nous disons *les quatre cas*, car l'omission d'un seul, dans des élémens, nous semble une négligence intolérable.

On considérera d'abord 1.° deux angles trièdres ayant un angle dièdre égal compris entre deux angles plans égaux, chacun à chacun. Ou bien ces deux angles trièdres seront superposables, auquel cas on les superposera en effet, ou bien ils ne le seront pas, et alors on superposera l'un d'eux avec l'opposé au sommet de l'autre. De l'une ou de l'autre manière, on parviendra à s'assurer que ces angles trièdres sont égaux dans toutes leurs parties. Il est clair qu'on pourrait en user de même pour deux angles trièdres qui auraient 2.° un angle plan égal compris entre deux angles dièdres égaux chacun à chacun.

On démontrera ensuite, à peu près comme on le fait pour les triangles, que si deux angles trièdres ont deux angles plans égaux chacun à chacun, et l'angle dièdre compris inégal, l'angle plan opposé au plus grand angle dièdre sera plus grand que l'angle plan opposé au plus petit; en observant ici de comparer l'un des angles trièdres à l'autre ou à son opposé au sommet, suivant les cas.

On conclura facilement de là 3.° que deux angles trièdres qui ont les trois angles plans égaux chacun à chacun, ont aussi les angles dièdres opposés égaux chacun à chacun; enfin, par la considération de l'angle trièdre supplémentaire ou polaire, on déduira de cette dernière proposition que réciproquement 4.° deux angles trièdres qui ont les trois angles dièdres égaux chacun à chacun, ont aussi les angles plans opposés égaux chacun à chacun. On fera d'ailleurs remarquer que le 1.° et le 2.° se déduisent l'un de l'autre par le même moyen.