ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

L. F. MAGNUS

Géométrie transcendante. Démonstration de quelques théorèmes sur les enveloppes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 80-91
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__80_1>

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Démonstration de quelques théorèmes sur les enveloppes ;

Par M. L. F. Magnus.

L'enveloppe des cordes qui retranchent d'un cercle des segmens égaux, est évidemment un autre cercle, concentrique au premier et touchant ces cordes à leur milieu. On sait aussi que l'enveloppe des cordes qui retranchent des segmens équivalens d'une section conique quelconque, touche également ces cordes à leur milieu ; mais cette propriété n'est pas particulière à ces sortes de courbes, et nous allons faire voir qu'elle est générale pour toutes les courbes planes quelles qu'elles soient. Nous démontrerons ensuite quelques autres propositions analogues que le lecteur ne trouvera peut-être pas dépourvues d'intérêt.

§ I.

Pour éviter les répétitions, nous allons, avant d'entrer en matière, établir quelques formules et convenir de quelques locutions qui nous seront utiles pour parvenir à notre but.

Soit

$$y=\varphi(x)$$

l'équation d'une courbe plane quelconque, rapportée à des axes rectangulaires. Soient en outre (α, β), (α', β') deux points déterminés quelconques de cette courbe; de telle sorte qu'on ait

$$\beta=\varphi(\alpha)\ ,\qquad \beta'=\varphi(\alpha')\ ;$$

l'équation de la corde qui joindra ces deux points sera

$$(\alpha'-\alpha)(y-\beta)-(\beta'-\beta)(x-\alpha)=\gamma=0\ .$$

En supposant qu'il existe, entre α et α', une relation donnée par l'équation

$$U=0\ ,$$

l'équation de l'enveloppe de toutes les cordes $\gamma=0$ sera le résultat de l'élimination des cinq quantités α, β, α', β', $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ entre les six équations

$$\beta=\varphi(\alpha)\ ,\qquad \beta'=\varphi(\alpha')\ ,$$

$$(\alpha'-\alpha)(y-\beta)-(\beta'-\beta)(x-\alpha)=\gamma=0\ ,$$

$$\left[(y-\beta)-(x-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\frac{d\alpha'}{d\alpha}-\left[(y-\beta')-(x-\alpha')\frac{d\beta}{d\alpha}\right]=\frac{d\gamma}{d\alpha}=0\ ,$$

$$U=0\ ,\qquad \left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)\frac{d\alpha'}{d\alpha}+\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)=\frac{dU}{d\alpha}=0\ .$$

Mais, si l'on ne veut trouver que le point de contact de l'une des cordes contenues dans $\gamma=0$ avec l'enveloppe, il suffira d'éliminer $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ entre les deux équations

$$\frac{d\gamma}{d\alpha}=0\ ,\qquad \frac{dU}{d\alpha}=0\ ;$$

ce qui donnera l'équation

$$\left[(y-\beta)-(x-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\left[(y-\beta')-(x-\alpha')\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)=V=0\ ;$$

et de déterminer ensuite les valeurs de x et de y qui satisfont aux deux équations

$$\gamma=0\ ,\qquad V=0\ ;$$

ce qui revient à déterminer le point d'intersection des lignes exprimées par ces mêmes équations. Or, comme la première est la corde elle-même, il suffira de construire l'autre, que l'on voit être également une droite, laquelle coupera conséquemment la corde au point cherché; ce qui prouve, en premier lieu, que jamais l'enveloppe ne saurait toucher une corde en plusieurs points.

Or l'équation $V=0$ est satisfaite, quelle que puisse être la relation $U=0$, en posant à la fois

$$(y-\beta)=\frac{d\beta'}{d\alpha'}(x-\alpha)\ ,\quad (l)\qquad (y-\alpha')=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha')\ ,\quad (l')\ ;$$

donc l'équation $V=0$ est celle d'une droite qui joint le point cherché au point d'intersection des deux droites (l, l'), point qu'à l'avenir nous désignerons par (s).

Quant aux droites (l, l'), on voit que chacune d'elles est une parallèle menée à l'une des extrémités de la corde $\gamma=0$, à la tangente à l'autre extrémité de cette corde. A l'avenir nous appellerons *triangle sur la corde* le triangle formé par γ avec les deux droites (l, l') ; le point (s) de concours de ces droites en sera dit le *sommet*, et ces droites en seront les côtés. Ce triangle, joint au triangle formé par la corde et les tangentes à ses deux extrémités, forme un parallélogramme dont γ est une diagonale.

§. II.

Supposons que les aires des segmens retranchés de la courbe $y=0$, soient constantes et équivalentes à un quarré donné c^2; et posons

$$\int_{\alpha'}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x=A' \;, \qquad \int_{\alpha}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x=A \;;$$

nous aurons

$$A'-A-\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)(\beta'+\beta)-c^2=U=0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\alpha'}\right)=\frac{\mathrm{d}A'}{\mathrm{d}\alpha'}-\tfrac{1}{2}(\beta'+\beta)-\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}=\tfrac{1}{2}\left[(\beta'-\beta)-(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\right],$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\alpha}\right)=-\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha}+\tfrac{1}{2}(\beta'+\beta)-\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}=\tfrac{1}{2}\left[(\beta'-\beta)-(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right].$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $V=0$, elle deviendra.

$$\left[(y-\beta)-(x-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\right]\left[(\beta'-\beta)-(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right]+\left[(y-\beta')-(x-\alpha')\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right]\left[(\beta'-\beta)-(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\right]=V=0\;;$$

et on voit aisément qu'elle sera satisfaite par les valeurs de x et y qui satisferont aux deux équations

$$(y-\beta)-(x-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}-(\beta'-\beta)-(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}=0\;,$$

$$(y-\beta')-(x-\alpha')\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}+(\beta'-\beta)-(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}=0\;.$$

lesquelles se réduisent simplement à

$$(y-\beta')=\frac{d\beta'}{d\alpha'}(x-\alpha')\;, \qquad (y-\beta)=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha)\;,$$

qu'on reconnaît pour les équations des tangentes aux deux extrémités de la corde $y=0$. La droite $V=0$, que nous savons déjà passer par le point (s), passe donc aussi, dans le cas présent, par le point de concours des deux tangentes; elle est donc la deuxième diagonale du parallélogramme dont il a été question ci-dessus; elle coupe donc la première $y=0$ en son milieu, et conséquemment ce milieu sera le point de contact de la corde $y=0$ avec l'enveloppe de toutes les cordes qui retranchent de la courbe des segmens équivalens. On a donc ce théorème général :

L'enveloppe des cordes qui retranchent d'une courbe plane quelconque des segmens équivalens, touche chacune de ces cordes en son milieu (*).

(*) Ce théorème pourrait aussi être assez simplement démontré comme il suit :

Considérons deux cordes consécutives quelconques MN et M'N' se coupant en O ; ce point O sera le point de contact de l'enveloppe avec la corde MN ; et, à cause de la petitesse des arcs MM', NN', les secteurs MOM', MON' pourront être considérés comme des triangles rectilignes, lesquels, par l'état de la question, devront être équivalens. Mais, parce que ces triangles ont en O un angle égal, leurs aires sont proportionnelles aux produits des côtés qui comprennent cet angle, de sorte qu'on doit avoir

$$OM.OM'=ON.ON'\;.$$

Soient posés

$$OM'=OM+\mu\;, \qquad ON'=ON+\nu\;,$$

μ et ν pouvant être indistinctement positifs ou négatifs ; il viendra, en substituant,

§. III.

Supposons, en second lieu, que les arcs de la courbe

$$y=\varphi(x)$$

sous-tendus par la corde mobile $y=0$ doivent être tous d'une même longueur donnée c; et posons

$$\int_{\alpha'}^{0}\mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=A' \ ; \quad \int_{\alpha}^{0}\mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=A \ ;$$

nous aurons

$$A'-A-c=U=0 \ ;$$

d'où

$$\overline{OM}^2+\mu.OM=\overline{ON}^2+\nu.ON \ ;$$

mais il est clair que μ et ν doivent s'évanouir en même temps; donc, on doit simplement avoir

$$\overline{OM}^2=\overline{ON}^2 \quad \text{d'où} \quad OM=ON \ ;$$

On voit même qu'il est nullement nécessaire pour cela que la courbe proposée soit assujettie à la loi de continuité.

Ce théorème se lie d'ailleurs fort bien avec le suivant, démontré par M. Dupin, pour une surface continue ou discontinue, dans ses *Applications de géométrie*, (pag. 32).

L'enveloppe des plans cordes qui détachent des segmens équivalens d'une surface courbe quelconque, touche chacun de ces plans cordes au centre de gravité de son aire.

J. D. G.

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\alpha'}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\right)^2}\,, \qquad \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\alpha}\right)=-\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2}\,;$$

en conséquence, l'équation V sera ici

$$y=\frac{\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\right)^2}-\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2}}$$

$$x-\frac{\left(\beta-\alpha\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2}-\left(\beta'-\alpha'\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2}}\,.$$

or, comme cette droite doit passer par le point (s) de concours des deux droites (l', l), il s'ensuit qu'en désignant par a et b les coordonnées de ce point, l'équation $V=0$ pourra prendre la forme

$$y-b=\frac{\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\right)^2}-\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2}}\,(x-a)\,.$$

Dans la même hypothèse, les équations des deux droites (l', l) prennent la forme

$$y-b=\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}(x-a)\,, \qquad y-b=\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}(x-a)\,,$$

et dès lors on reconnaît la première pour l'équation de la droite qui divise en deux parties égales l'angle des droites (l', l), de sorte qu'on a ce théorème :

L'enveloppe des cordes qui sous-tendent des arcs de même longueur d'une courbe plane quelconque, touche chacune de ces cordes au point où elle est coupée en raison inverse des longueurs des tangentes à ses deux extrémités ; ou, en d'autres termes, le point de contact de l'enveloppe avec chaque corde et le point où sa direction est rencontrée par la droite qui divise en deux parties égales l'angle des tangentes à ses deux extrémités, sont des points symétriquement situés par rapport au milieu de cette corde.

§. IV.

Supposons encore que, dans la courbe

$$y=\varphi(x)\ ,$$

les cordes $\gamma=0$ doivent toutes être d'une même longueur donnée c, nous aurons

$$(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2-c^2=U=0\ ;$$

d'où

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\alpha'}\right)=+2\left[(\alpha'-\alpha)+(\beta'-\beta)\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\right],\quad \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\alpha}\right)=-2\left[(\alpha'-\alpha)+(\beta'-\beta)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right];$$

en conséquence l'équation $V=0$ deviendra

$$(\beta'-\beta)\left\{y-\frac{\left(\beta'\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}-\beta\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right)+(\alpha'-\alpha)\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}}{\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}-\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}}\right\}+(\alpha'-\alpha)\left\{x-\frac{\left(\alpha\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}-\alpha'\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\right)+(\beta'-\beta)}{\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}\alpha'}-\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}}\right\}=0\ ;$$

or l'équation de la corde $\gamma=0$, étant

$$(\alpha'-\alpha)(y-\beta)-(\beta'-\beta)(x-\alpha)=\gamma=0\ ,$$

il est visible que ces deux droites sont perpendiculaires l'une à l'autre. La droite $V=0$, que nous savons déjà passer, dans tous les cas, par le point de concours des droites (l', l), est donc en outre, dans le cas présent, perpendiculaire sur la corde $y=0$; de sorte qu'on a ce théorème :

L'enveloppe des cordes égales, dans une courbe plane quelconque, touche chacune de ces cordes en un point autant distant de chacune de ses extrémités que le pied de la perpendiculaire abaissée sur sa direction du point de concours des tangentes à ses deux extrémités est distant de son autre extrémité ; ou, en d'autres termes, le point de contact de l'enveloppe avec chaque corde et le pied de la perpendiculaire abaissée sur sa direction du point de concours des tangentes à ses deux extrémités, sont deux points symétriquement situés par rapport au milieu de cette corde (*).

§. V.

Supposons enfin que, dans la courbe

$$y=\varphi(x)$$

l'angle que font les tangentes aux extrémités de la corde $y=0$, doit être constant, de manière que sa tangente soit une quantité donnée c ; nous aurons alors

(*) Le problème de l'enveloppe des cordes égales a été proposé à la page 36 du VIII.e volume du présent recueil ; et, bien qu'on l'ait restreint aux sections coniques seulement, il n'en a été donné aucune solution ; non pourtant qu'il soit difficile à mettre en équation ; mais parce qu'il exige des éliminations extrêmement laborieuses. Il serait curieux de voir si le théorème que donne ici M. Magnus ne pourrait pas en faciliter la solution.

Au surplus l'enveloppe dont il s'agit ayant, en général, comme les caustiques, des points de rebroussement plus ou moins nombreux, peut-être se trouverait-on mieux de chercher d'abord l'équation de la trajectoire orthogonale des cordes égales ; l'enveloppe en serait alors la développée.

J. D. G.

$$\frac{\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}-\dfrac{d\beta}{d\alpha}}{1+\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}\cdot\dfrac{d\beta}{d\alpha}}-c=U=0\ ,$$

d'où

$$\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)=\frac{\left[1+\left(\dfrac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right]\dfrac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}}{\left(1+\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}\cdot\dfrac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}\ ,\qquad \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)=-\frac{\left[1+\left(\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2\right]\dfrac{d^2\beta}{d\alpha^2}}{\left(1+\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}\cdot\dfrac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}\ .$$

Or, en désignant par m l'angle de la droite $V=0$ avec l'axe des x, on a en général,

$$\text{Tang.}\,m=\frac{\left(\dfrac{dU}{d\alpha}\right)\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}+\left(\dfrac{dU}{d\alpha'}\right)\dfrac{d\beta}{d\alpha}}{\left(\dfrac{dU}{d\alpha}\right)+\left(\dfrac{dU}{d\alpha'}\right)}\ ;$$

on aura donc, dans le cas présent

$$\text{Tang.}\,m=\frac{\left[1+\left(\dfrac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right]\dfrac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}\cdot\dfrac{d\beta}{d\alpha}-\left[1+\left(\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2\right]\dfrac{d^2\beta}{d\alpha^2}\cdot\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}}{\left[1+\left(\dfrac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right]\dfrac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}-\left[1+\left(\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2\right]\dfrac{d^2\beta}{d\alpha^2}}=\frac{\dfrac{1+\left(\dfrac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}{\dfrac{d^2\beta}{d\alpha^2}}\dfrac{d\beta}{d\alpha}-\dfrac{1+\left(\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}{\dfrac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}}\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}}{\dfrac{1+\left(\dfrac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}{\dfrac{d^2\beta}{d\alpha^2}}-\dfrac{1+\left(\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}{\dfrac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}}}\ .$$

Cela posé, soient P, P′ les points (α,β), (α',β'); soient C, C′ les centres de courbure de ces deux points, dont nous supposerons les coordonnées respectives $(t\,,\,u)$, $(t'\,,\,u')$; soient enfin Q, Q′ les milieux des droites PC′ et P′C; les coordonnées de ces deux points seront respectivement

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+t')\,, \qquad \tfrac{1}{2}(\alpha'+t)\,,$$

$$\tfrac{1}{2}(\beta+u')\,; \qquad \tfrac{1}{2}(\beta'+u)\,.$$

En conséquence, la droite Q, Q′ fera avec l'axe des x un angle n dont la tangente tabulaire sera

$$\text{Tang.}n=\frac{(\beta'+u)-(\beta+u')}{(\alpha'+t)-(\alpha+t')}=\frac{(u-\beta)-(u'-\beta')}{(t-\alpha)-(t'-\alpha')}\,.$$

Or on a

$$t=\alpha-\frac{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}\frac{d\beta}{d\alpha}\,, \qquad u=\beta+\frac{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}\,,$$

$$t'=\alpha'-\frac{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}{\frac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}}\frac{d\beta'}{d\alpha'}\,, \qquad u'=\beta'+\frac{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}{\frac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}}\,;$$

valeurs qui, substituées dans celle de Tang.n, donnent

$$\text{Tang.}n=-\frac{\dfrac{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}-\dfrac{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}{\frac{d^2\beta'}{d\alpha'^2}}}{\dfrac{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}\dfrac{d\beta}{d\alpha}-\dfrac{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2}{\frac{d^2\beta'}{d\alpha^{2\prime}}}\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}}\,.$$

On trouve d'après cela

$$1+\text{Tang}\,m\,\text{Tang.}n=0\,;$$

d'où il suit que la droite QQ' est perpendiculaire à la droite $Y=0$; et qu'ainsi on a ce théorème :

Un angle mobile invariable étant constamment circonscrit à une courbe plane quelconque, le point de contact de l'enveloppe de toutes les cordes de contact avec l'une quelconque d'entre elles s'obtiendra en construisant d'abord sur cette corde, comme diagonale, un parallélogramme dont deux côtés soient les tangentes à ses extrémités; puis sur cette même corde, comme côté, un quadrilatère dont les centres de courbure qui répondent à ses deux extrémités soient deux sommets. Alors, si, par le sommet du parallélogramme opposé au sommet de l'angle circonscrit, on conduit une perpendiculaire à la direction de la droite qui contient les milieux des deux diagonales du quadrilatère, cette perpendiculaire coupera la corde de contact au point de contact cherché (*).

Berlin, le 19 mai 1825.

(*) On a proposé (tom. VIII, pag. 36) de trouver l'équation de l'enveloppe de la corde de contact d'un angle mobile et invariable constamment circonscrit à une section conique ; ce qui a donné à M. Poncelet (même volume, pag. 201) l'occasion de développer sa théorie des polaires réciproques.

Dans l'écrit qu'on vient de lire, l'auteur a exactement suivi la marche que nous avons si soigneusement recommandée ailleurs (tom. VIII, pag. 158), et dont nous nous sommes appliqués à donner des exemples en divers endroits de ce recueil ; et c'est sans doute pour cela qu'il a obtenu des résultats si élégans.

J. D. G.