ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

L. F. MAGNUS

Géométrie des surfaces courbes. Théorèmes sur l'hyperboloïde à une nappe et sur la surface conique du second ordre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 33-39
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__33_0>

GÉOMÉTRIE DES SURFACES COURBES.

Théorèmes sur l'hyperboloïde à une nappe et sur la surface conique du second ordre ;

Par M. L. F. MAGNUS.

§. I.

SOIT une hyperboloïde à une nappe rapportée à ses axes et donnée par l'équation

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2. \qquad (1)$$

On sait que cette surface peut, tout aussi bien que le cône, être engendré par le mouvement d'une droite. Prenant donc pour les équations d'une génératrice quelconque

$$x=mz+g\ , \qquad y=nz+h\ ; \qquad (K)$$

nous exprimerons que cette génératrice est sur l'hyperboloïde en exprimant que l'équation en z résultant de la substitution des valeurs (K) de x et y dans (1), laissent cette coordonnée indéterminée. Or, cette équation est

$$b^2c^2(mz+g)^2+a^2c^2(nz+h)^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2=0\ ,$$

ou bien

$$(b^2c^2m^2+a^2c^2n^2-a^2b^2)z^2+2c^2(b^2mg+a^2nh)z+c^2(b^2g^2+a^2h^2-a^2b^2)=0\ ;$$

de sorte qu'on doit avoir, à la fois,

$$\left.\begin{array}{ll} b^2c^2m^2+a^2c^2n^2=a^2b^2 & , \\ b^2mg+a^2nh=0 & , \\ b^2g^2+a^2h^2=a^2b^2 & . \end{array}\right\} \quad (2)$$

Si l'hyperboloïde n'est pas de révolution, ses deux demi-axes transverses a et b sont inégaux. Soit a le plus grand des deux; et considérons, dans le plan des xz, les deux droites données par l'équation $y=0$ combinée avec la double équation

$$x\sqrt{b^2+c^2}\mp z\sqrt{a^2-b^2}=0\;; \qquad \binom{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'}$$

droites que nous nommerons *lignes focales*, à raison des propriétés que nous allons démontrer leur appartenir, et qui se confondraient toutes deux avec l'axe des z, si l'hyperboloïde était de révolution. Si nous désignons par p et p' les angles que fait la génératrice (K) avec les deux droites (F,F'), et par q,q' les supplémens de ces angles, nous aurons

$$\mathrm{Cos}.p=-\mathrm{Cos}.q=\pm\frac{\sqrt{b^2+c^2}+m\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(1+m^2+n^2)(a^2+c^2)}}\;,$$

$$\mathrm{Cos}.p'=-\mathrm{Cos}.q'=\pm\frac{\sqrt{b^2+c^2}-m\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(1+m^2+n^2)(a^2+c^2)}}\;.$$

En chassant n^2 de ces formules, au moyen de la première des équations (2) elles deviendront

$$\mathrm{Cos}.p=-\mathrm{Cos}.q=\pm ac.\frac{\sqrt{b^2+c^2}+m\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)[a^2(b^2+c^2)+m^2c^2(a^2-b^2)]}}\;,$$

$$\mathrm{Cos}.p'=-\mathrm{Cos}.q'=\pm ac.\frac{\sqrt{b^2+c^2}-m\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)[a^2(b^2+c^2)+m^2c^2(a^2-b^2)]}}\;.$$

De là on conclura

$$\operatorname{Sin}.p=\operatorname{Sin}.q=\frac{a^2\sqrt{b^2+c^2}-mc^2\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)[a^2(b^2+c^2)+m^2c^2(a^2-b^2)]}}\ ,$$

$$\operatorname{Sin}.p'=\operatorname{Sin}\ q'=\frac{a^2\sqrt{b^2+c^2}+mc^2\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)[a^2(b^2+c^2)+m^2c^2(a^2-b^2)]}}\ ;$$

et par suite

$$\operatorname{Cos}.(p+p')=\operatorname{Cos}.(q+q')=+\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}\ ,$$

$$\operatorname{Cos}.(q-p')=\operatorname{Cos}.(p-q')=-\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}\ ;$$

quantité constante, puisque m n'y entre plus. En outre, la tangente de l'angle des asymptotes de la section de l'hyperboloïde qui contient les lignes focales étant $\pm\frac{2ca}{c^2-a^2}$, son cosinus sera $\pm\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}$; de sorte qu'on a ce théorème :

La somme ou la différence des deux angles que fait la droite génératrice de l'hyperboloïde à une nappe dans toutes ses positions, avec les deux lignes focales de cette surface est constante, et égale à l'angle des asymptotes de la section faite dans l'hyperboloïde par le plan qui contient ces lignes focales.

Si, au lieu de considérer l'hyperboloïde, nous eussions considéré la surface conique du second ordre donnée par l'équation.

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=0\ ,$$

dont les lignes focales auraient toujours été déterminées par la double équation

$$x\sqrt{b^2+c^2}\pm z\sqrt{a^2-b^2}=0\ ,$$

le calcul aurait été exactement le même ; de sorte qu'on a aussi le théorème suivant :

La somme ou la différence des angles que fait la droite génératrice de la surface conique du second ordre, dans chacune de ses situations, avec les deux lignes focales de cette surface est constante et égale à l'angle des deux droites qui résultent de la section de cette surface par le plan des lignes focales.

Si l'on conçoit une sphère, de rayon quelconque, ayant son centre au sommet ou centre de la surface conique, les deux nappes de cette surface détermineront sur la sphère deux courbes fermées, égales et opposées, et les deux lignes focales perceront cette sphère en quatre points, situés sur la circonférence du grand cercle qui coupera les deux courbes en deux parties égales. Ces points diviseront cette circonférence en quatre arcs dont les opposés seront égaux, et les milieux de ces arcs seront symétriquement situés par rapport aux deux courbes, dont ils pourront être considérés comme les centres sphériques. En ne considérant que l'une des courbes et les points de son intérieur par où passent les lignes focales de la surface conique, on pourra appeler cette courbe une *ellipse sphérique*, dont ces deux mêmes points seront les *foyers*. On pourra, au contraire, ne considérer que les parties des deux courbes les plus voisines l'une de l'autre, et appeler l'ensemble de ces deux parties une *hyperbole sphérique*, laquelle aura pour *foyers* les foyers des deux courbes les plus voisins de leurs sommets. En appelant en outre, *rayons vecteurs* les arcs de grands cercles qui joignent les différens points de l'une ou l'autre courbe à l'un des quatre foyers, on aura les deux théorèmes suivans :

La somme des deux rayons vecteurs des différens points d'une ellipse sphérique est constante et égale à la longueur du diamètre de cette courbe qui contient ses deux foyers.

La différence des deux rayons vecteurs des différens points d'une hyperbole sphérique est constante et égale à la longueur du diamètre de cette courbe qui contient ses deux foyers.

Si, le centre de l'ellipse ou de l'hyperbole sphérique restant fixe, on conçoit que le centre de la sphère s'en éloigne continuellement, en suivant constamment la direction du rayon qui passe par ce point, la surface de cette sphère tendra sans cesse à devenir plane, et le deviendra en effet, lorsque son rayon sera devenu infini ; mais alors les rayons vecteurs des deux courbes deviendront des lignes droites, de sorte qu'on parviendra ainsi aux propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole ordinaires, lesquelles ne sont ainsi, comme on le voit, qu'un cas particulier des propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole sphériques.

§. II.

Soit (x',y',z') un des points de la surface conique donnée par l'équation

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=0\ ;$$

le plan tangent (T) à cette surface en ce point aura pour équation

$$b^2c^2x'x+a^2c^2y'y-a^2b^2z'z=0\ ; \qquad \text{(T)}$$

il touchera dailleurs la surface conique suivant une génératrice (G).

Conduisons présentement, par cette génératrice et par les deux lignes focales (F, F'), deux plans (V, V') que nous appellerons *plans vecteurs* ; l'équation commune à ces deux plans sera

$$y'x\sqrt{b^2+c^2}-\left[x'\sqrt{b^2+c^2}\mp z'\sqrt{a^2-b^2}\right]y\mp y'z\sqrt{a^2-b^2}=0\ ; \qquad \begin{pmatrix}\mathrm{V}\\ \mathrm{V'}\end{pmatrix}$$

en désignant par θ, θ' les angles dièdres que forment ces deux plans avec le plan tangent, on trouvera

$$\mathrm{Cos.}\theta=\pm\frac{y'\left[a^2z'\sqrt{b^2+c^2}-c^2x'\sqrt{a^2-b^2}\right]\sqrt{(a^2-b^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{(b^4c^4x'^2+a^4c^4y'^2+a^4b^4z'^2)\left[(b^2+c^2)x'^2+(a^2+c^2)y'^2+(a^2-b^2)z'^2-2x'z'\sqrt{(a^2-b^2)(b^2+c^2)}\right]}},$$

$$\mathrm{Cos.}\theta'=\mp\frac{y'\left[a^2z'\sqrt{b^2+c^2}+c^2x'\sqrt{a^2-b^2}\right]\sqrt{(a^2-b^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{(b^4c^4x'^2+a^4c^4y'^2+a^4b^4z'^2)\left[(b^2+c^2)x'^2+(a^2+c^2)y'^2+(a^2-b^2)z'^2+2x'z'\sqrt{(a^2-b^2)(b^2+c^2)}\right]}}.$$

Or, le point (x', y', z') étant sur la surface conique, on doit avoir

$$b^2c^2x'^2 + a^2c^2y'^2 - a^2b^2z'^2 = 0 .$$

Substituant, dans les dénominateurs de $\mathrm{Cos}\,\theta$ et $\mathrm{Cos}.\theta'$, la valeur de y'^2 tirée de cette dernière équation, on trouvera, en réduisant,

$$\pm\mathrm{Cos}.\theta = \mp\mathrm{Cos}.\theta' = \frac{acy'}{b}\sqrt{\frac{(b^2+c^2)(a^2-b^2)}{a^4(b^2+c^2)z'^2 - c^4(a^2-b^2)x'^2}} ;$$

les cosinus de ces deux angles ne différant ainsi que par le signe, il en faut conclure qu'ils sont supplément l'un de l'autre, de sorte qu'on a ce théorème :

Le plan tangent à une surface conique du second ordre divise en deux parties égales deux des quatre angles dièdres formés par les deux plans vecteurs de la ligne de contact ; d'où il suit que les deux angles dièdres restants sont partagés en deux parties égales par le plan normal conduit suivant la même droite.

Donc aussi : *L'arc de grand cercle normal en l'un des points d'une ellipse sphérique et l'arc de grand cercle tangent en l'un des points d'une hyperbole sphérique partage en deux parties égales l'angle formé par les deux rayons vecteurs de ce point.*

Après être parvenus aux théorèmes que nous venons de démontrer, nous avons cherché si déjà ils n'auraient pas été publiés par d'autres ; et nous avons rencontré (*Nova acta Petropolitana*, tom. III) un mémoire de Fuss où il est question de la courbe qui est le lieu des sommets des triangles sphériques ayant base commune et la somme de leurs deux autres côtés constante. Il suit immédiatement de nos théorèmes que cette courbe n'est autre chose que l'intersection de la sphère avec une surface conique *du second ordre* ayant même centre qu'elle ; et que cette courbe est aussi le lieu des sommets des triangles sphériques, ayant base commune, dans lesquels la différence des deux autres côtés est constante, ce que Fuss n'a point remarqué. Il est en outre aisé de voir que cette courbe est une des lignes de courbure de la surface conique, l'autre étant la droite génératrice (*).

Berlin, le 19 mai 1825.

(*) Suivant la remarque qui a été faite (tom. XV, pag. 302), au problème dont il vient d'être question, répond nécessairement à cet autre problème : *Quelle est l'enveloppe des bases de tous les triangles sphériques qui ont l'angle au sommet commun, et dans lesquels la somme ou la différence des deux autres angles est constante.* Sa résolution se réduit à ce qui suit : cherchez le lieu des sommets des triangles sphériques ayant base commune se terminant aux pôles des deux côtés de l'angle au sommet dont il s'agit, et dans lesquels la somme des deux autres côtés soit égale à une circonférence moins la somme constante des deux angles dont il s'agit, ou bien dans lesquels la différence des deux autres côtés soit égale à la différence de ces deux mêmes angles ; et ce lieu sera l'enveloppe demandée.

J. D. G.