ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

AMPÈRE

Analise transcendante. Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel, du calcul aux différences et de l'interpolation des suites, considérées comme dérivant d'une source commune

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 329-349

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__329_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel, du calcul aux différences et de l'interpolation des suites, considérées comme dérivant d'une source commune;

Par M. AMPÈRE, de l'Académie royale des sciences de Paris, de celles d'Edimbourg, de Cambridge, de Genève, etc., Professeur de physique au Collége de France.

1. LE calcul différentiel, le calcul aux différences et les diverses méthodes d'interpolation reposent également sur un petit nombre de formules générales, applicables à toutes les fonctions, et qu'on n'a démontrées jusqu'ici que par des considérations souvent compliquées, presque toujours déduites de principes éloignés, ou d'inductions de nature à laisser des doutes sur leur généralité. On remarque surtout, dans l'exposition de ces diverses branches d'analise, une variété de procédé et de raisonnemens qui ne laisse que difficilement apercevoir leur liaison réciproque, et l'identité des principes dont elles ne sont pourtant, en quelque sorte, que des traductions variées.

Frappés de ces considérations, nous avons pensé faire une chose qui pourrait intéresser les géomètres, en déduisant toutes ces diverses formules de quelques théorèmes nouveaux ou peu connus, que nous démontrerons d'abord, et dont il nous suffira ensuite de traduire les énoncés dans l'algorithme reçu, relatif aux divers cas particuliers, pour en voir éclore, d'une manière tout-à-fait naturelle, les formules connues qui répondent à chacun d'eux.

2. Soit $\mathrm{f}x$ une fonction de x de forme quelconque, de manière que $\mathrm{f}a$, $\mathrm{f}b$, $\mathrm{f}c$, ... soient respectivement ce que devient cette fonction, lorsqu'on y fait, tour-à-tour, $x=a$, $x=b$, $x=c$, ... Soient posés successivement

$$\frac{\mathrm{f}b-\mathrm{f}a}{b-a}=\mathrm{f}_1(a,b),\quad \frac{\mathrm{f}c-\mathrm{f}a}{c-a}=\mathrm{f}_1(a,c),\quad \frac{\mathrm{f}d-\mathrm{f}a}{d-a}=\mathrm{f}_1(a,d),\ \ldots\ldots$$

$$\frac{\mathrm{f}_1(a,c)-\mathrm{f}_1(a,b)}{c-b}=\mathrm{f}_2(a,b,c),\quad \frac{\mathrm{f}_1(a,d)-\mathrm{f}_1(a,b)}{d-b}=\mathrm{f}_2(a,b,d),\ \ldots.$$

$$\frac{\mathrm{f}_2(a,b,d)-\mathrm{f}_2(a,b,c)}{d-c}=\mathrm{f}_3(a,b,c,d),\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les fonctions f_1, f_2, f_3, ... sont ce que nous appellerons à l'avenir les *fonctions interpolaires* des différens ordres des quantités a, b, c, d, ...

3. La première remarque que nous ferons au sujet de ces sortes de fonctions, c'est qu'elles sont toujours symétriques, de telle sorte qu'on y peut intervertir, comme on voudra, l'ordre des élémens a, b, c, d, ... qui concourent à leur formation, sans qu'elles en éprouvent aucun changement. En effet, on a, en premier lieu,

$$\mathrm{f}_1(a,b)=\frac{\mathrm{f}b-\mathrm{f}a}{b-a}=\frac{\mathrm{f}a}{a-b}+\frac{\mathrm{f}b}{b-a},$$

fonction évidemment symétrique en a et b, et on pourrait en dire autant de toutes les fonctions interpolaires à deux lettres ou du premier ordre.

On aura donc, semblablement,

$$\mathrm{f}_1(a,c)=\frac{\mathrm{f}a}{a-c}+\frac{\mathrm{f}c}{c-a}\ ;$$

mais,

$$\mathrm{f}_2(a,b,c)=\frac{\mathrm{f}_1(a,c)-\mathrm{f}_1(a,b)}{c-b}=\frac{\mathrm{f}_1(a,b)}{b-c}+\frac{\mathrm{f}_1(a,c)}{c-b}\ ;$$

mettant donc pour $\mathrm{f}_1(a,b)$ et $\mathrm{f}_1(a,c)$ les valeurs ci-dessus, il viendra

$$\mathrm{f}_2(a,b,c)=\frac{\mathrm{f}a}{(a-b)(b-c)}+\frac{\mathrm{f}b}{(b-a)(b-c)}+\frac{\mathrm{f}a}{(a-c)(c-b)}+\frac{\mathrm{f}c}{(c-a)(c-b)}\ ;$$

ou, en réduisant à une seule les deux fractions de même numérateur,

$$\mathrm{f}_2(a,b,c)=\frac{\mathrm{f}a}{(a-b)(a-c)}+\frac{\mathrm{f}b}{(b-a)(b-c)}+\frac{\mathrm{f}c}{(c-a)(c-b)}\ ;$$

fonction également symétrique, et on démontrerait la même chose de toutes les fonctions interpolaires à trois lettres, ou du second ordre.

On pourrait, par des transformations analogues, étendre progressivement le même principe aux fonctions interpolaires des ordres supérieurs ; mais, afin de ne pas nous borner à une simple induction, à l'égard d'un principe qui est fondamental, dans la théorie qui nous occupe, prouvons que, si la symétrique se soutient jusqu'aux fonctions du $(n-1)^{\text{ieme}}$ ordre, inclusivement, elle aura lieu également pour celles du $n.^{\text{ième}}$

Supposons donc que, pour les n lettres $a, b, c, \ldots. p, q, r$, on ait trouvé

$$f_{n-1}(a, b, c, \ldots. p, q, r) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{fa}{(a-b)(a-c)\ldots\ldots(a-q)(a-r)} \\ + \dfrac{fb}{(b-a)(b-c)\ldots\ldots(b-q)(b-r)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \dfrac{fq}{(q-a)(q-b)\ldots\ldots(q-p)(q-r)} \\ + \dfrac{fr}{(r-a)(r-b)\ldots\ldots(r-p)(r-q)} \end{array} \right\};$$

nous aurons semblablement, pour les n lettres $a, b, c, \ldots. p, q, s, \ldots$

$$f_{n-1}(, b, c, \ldots. p, q, s) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{fa}{(a-b)(a-c)\ldots\ldots(a-q)(a-s)} \\ + \dfrac{fb}{(b-a)(b-c)\ldots\ldots(b-q)(b-s)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \dfrac{fq}{(q-a)(q-b)\ldots\ldots(q-p)(q-s)} \\ + \dfrac{fs}{(s-a)(s-b)\ldots\ldots(s-p)(s-q)} \end{array} \right\};$$

fonctions qui sont symétriques l'une et l'autre. Mais, en vertu de la définition des fonctions interpolaires, on a, pour les $n+1$ lettres $a, b, c, \ldots\ldots q, r, s$,

$$\mathrm{f}_n(a,b,c,\ldots p,r,s)=\frac{\mathrm{f}_{n-1}(a,b,c,\ldots.p,q,s)-\mathrm{f}_{n-1}(a,b,c,\ldots.p,q,r)}{s-r},$$

$$=\frac{\mathrm{f}_{n-1}(a,b,c,\ldots p,q,r)}{r-s}+\frac{\mathrm{f}_{n-1}(a,b,c,\ldots.p,q,s)}{s-r};$$

il viendra donc, en substituant,

$$\mathrm{f}_n(a,b,c,\ldots.q,r,s)$$

$$=\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\mathrm{f}a}{(a-b)(a-c)\ldots.(a-q)(a-r)}+\dfrac{\mathrm{f}a}{(a-b)(a-c)\ldots.(a-q)(a-s)}\\[2ex]
+\dfrac{\mathrm{f}b}{(b-a)(b-c)\ldots.(b-q)(b-r)}+\dfrac{\mathrm{f}b}{(b-a)(b-c)\ldots.(b-q)(b-s)}\\[2ex]
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[2ex]
+\dfrac{\mathrm{f}q}{(q-a)(q-b)\ldots.(q-p)(q-r)}+\dfrac{\mathrm{f}q}{(q-a)(q-b)\ldots.(q-p)(q-s)}\\[2ex]
+\dfrac{\mathrm{f}r}{(r-a)(r-b)\ldots.(r-p)(r-q)}+\dfrac{\mathrm{f}s}{(s-a)(s-b)\ldots.(s-p)(s-q)}
\end{array}\right\};$$

où, en réduisant à une seule les fractions de même numérateur,

$$\mathrm{f}_n(a,b,c,\ldots.p,q,s)=\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\mathrm{f}a}{(a-b)(a-c)\ldots.(a-r)(a-s)}\\[2ex]
+\dfrac{\mathrm{f}b}{(b-a)(b-c)\ldots.(b-r)(b-s)}\\[2ex]
+\ldots\ldots\ldots\ldots\\[2ex]
+\dfrac{\mathrm{f}r}{(r-a)(r-b)\ldots.(r-q)(r-s)}\\[2ex]
+\dfrac{\mathrm{f}r}{(s-a)(s-b)\ldots.(s-q)(s-r)}
\end{array}\right\};$$

fonction également symétrique. Il demeure donc établi par là que, si la symétrie se soutient jusqu'à l'emploi de la $n.^{\text{ième}}$ lettre, inclusivement, elle aura lieu encore après l'introduction de la $(n+1)^{\text{ième}}$, quel que soit n ; puis donc que cette symétrique a lieu en effet pour des fonctions interpolaires formées de deux et de trois lettres, il s'ensuit qu'elle doit être regardée comme un fait analitique généralement démontré.

4. D'après le mode de génération des fonctions interpolaires, il existe une relation fort simple entre deux d'entre elles de même ordre, ne différant l'une de l'autre que par un seul des élémens qui les composent. Puisqu'en effet on a

$$\mathrm{f}_{n+1}(a,b,c,d,\ldots)=\frac{\mathrm{f}_n(b,c,d,\ldots)-\mathrm{f}_n(a,c,d,\ldots)}{b-a},$$

on en conclura

$$\mathrm{f}_n(a,c,d,\ldots)-\mathrm{f}_n(b,c,d,\ldots)=(a-b)\mathrm{f}_{n+1}(a,b,c,d,\ldots). \qquad (1)$$

On peut également obtenir une relation très-remarquable entre trois de ces fonctions interpolaires de même ordre, ne différant que par l'exclusion donnée tour-à-tour à une lettre, sur trois d'entre elles. On a en effet, par la formule (1)

$$\mathrm{f}_n(a,c,d,\ldots)-\mathrm{f}_n(b,c,d,\ldots)=(a-b)\mathrm{f}_{n+1}(a,b,c,d,\ldots),$$

$$\mathrm{f}_n(a,b,d,\ldots)-\mathrm{f}_n(a,c,d,\ldots)=(b-c)\mathrm{f}_{n+1}(a,b,c,d,\ldots);$$

d'où, en retranchant du produit de la première par $b-c$ le produit de la seconde par $a-b$ et réduisant,

$$(a-b)\mathrm{f}_n(a,b,d,\ldots)+(b-c)\mathrm{f}_n(b,c,d,\ldots)+(c-a)\mathrm{f}_n(a,c,d,\ldots)=0; \qquad (2)$$

formule que l'on retiendra facilement dans sa mémoire, en remarquant 1.° que la somme des trois coefficiens binomes est nulle; 2.° que la lettre qui manque dans chacun de ces coefficiens est aussi celle qui manque dans la fonction qu'il multiplie. Remarquons, au surplus, que, bien que nous ayons supposé qu'il s'agissait des trois premières lettres, le théorème n'en demeure pas moins établi généralement pour trois lettres quelconques; puisqu'à cause de la symétrie des fonctions interpolaires, on peut toujours amener ces trois lettres à être les trois premières.

5. Les fonctions interpolaires des différens ordres sont, comme l'on voit, complètement déterminées, tant que les élémens $a,b,c,d,\ldots$ dont elles se composent sont tous différens les uns des autres; mais, si tous ou partie d'entre eux sont égaux, il arrive que toutes ou partie des fonctions $f_1, f_2, f_3, \ldots$, qu'il faut successivement calculer, pour parvenir à la valeur de $f_n(a,b,c,d,\ldots)$ se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Or, on sait que, lorsqu'une fonction quelconque, qui n'est susceptible que d'une valeur unique, se présente sous cette forme, en vertu de l'égalité de deux des élémens p et q dont elle se compose, trois cas seulement peuvent se présenter. 1.° Il peut arriver que la différence $p-q$ décroissant indéfiniment, la fonction décroisse aussi indéfiniment, de manière à pouvoir devenir moindre que toute grandeur donnée; ce qu'on exprime en disant qu'elle devient *nulle* quand $p=q$; 2.° il peut arriver, au contraire, que la différence $p-q$ décroissant indéfiniment, la fonction croisse indéfiniment, de manière à pouvoir surpasser toute grandeur donnée; ce qu'on exprime en disant qu'elle devient *infinie*, quand $p=q$; 3.° enfin il peut se faire que $p-q$ décroissant indéfiniment, la fonction ne décroisse ni ne croisse indéfiniment, mais seulement de manière à tendre sans cesse vers une grandeur constante, vers une limite finie, dont elle pourra différer de moins de toute grandeur donnée, en prenant $p-q$

d'une petitesse suffisante; et alors cette *limite* fixe sera dite la valeur de la fonction qui répond $p=q$.

Or, nous allons voir qu'à l'égard des fonctions interpolaires, ce troisième cas est, généralement parlant, le seul qui puisse avoir lieu, ou, en d'autres termes, qu'en général ces sortes de fonctions ne sauraient jamais devenir nulles, par l'effet de l'égalité de tous ou partie des élémens dont elles se composent.

Pour le prouver, imaginons qu'on partage l'intervalle $b-a$ en un nombre arbitraire m de parties égales; posons, pour abréger, $b-a=k$, et soient

$$a_1=a+\frac{k}{m}\,,\quad a_2=a_1+\frac{k}{m}\,,\quad a_3=a_2+\frac{k}{m}\,,\quad \ldots\ldots\quad b=a_{m-1}+\frac{k}{m}\,;$$

nous aurons (1)

$$\mathrm{f}_{n-1}(a_1,c,d,\ldots.)-\mathrm{f}_{n-1}(a,c,d,\ldots..)=\frac{k}{m}\,\mathrm{f}_n(a_1,a,c,d,\ldots.)\,,$$

$$\mathrm{f}_{n-1}(a_2,c,d,\ldots.)-\mathrm{f}_{n-1}(a_1,c,d,\ldots.)=\frac{k}{m}\,\mathrm{f}_n(a_1,a_2,c,d,\ldots)\,,$$

$$\mathrm{f}_{n-1}(a_3,c,d,\ldots.)-\mathrm{f}_{n-1}(a_2,c,d,\ldots.)=\frac{k}{m}\,\mathrm{f}_n(a_2,a_3,c,d,\ldots.)\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,$$

$$\mathrm{f}_{n-1}(b,c,d,\ldots)-\mathrm{f}_{n-1}(a_{m-1},c,d,\ldots.)=\frac{k}{m}\,\mathrm{f}_n(a_{m-1},b,c,d,\ldots)\,;$$

en ajoutant, réduisant et se rappelant que (1)

$$\mathrm{f}_{n-1}(b,c,d,\ldots.)-\mathrm{f}_{n-1}(a,c,d,\ldots..)=k\mathrm{f}_n(a,b,c,d,\ldots..)\,,$$

il viendra, en divisant par k,

$$\mathrm{f}_n(a,b,c,d,\ldots)=\frac{1}{m}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{f}_n(a,a_1,c,d,\ldots\ldots)\\+\mathrm{f}_n(a_1,a_2,c,d,\ldots\ldots)\\+\mathrm{f}_n(a_2,a_3,c,d,\ldots\ldots)\\+\ldots\ldots\ldots\\+\mathrm{f}_n(a_{m-1},b,c,d,\ldots\ldots)\end{array}\right\};\qquad(3)$$

c'est-à-dire que $\mathrm{f}_n(a,b,c,d,\ldots.)$ est la moyenne arithmétique entre toutes les autres fonctions interpolaires du même ordre déduites de celle-là, en y mettant successivement a et a_1, a_1 et a_2, a_2 et a_3, ..., a_{m-1} et b, en place de a et b.

Il suit de là qu'excepté le cas où toutes les fonctions dont la somme divisée par m compose le second membre de l'équation (3) seraient égales entre elles, auquel cas chacune d'elles serait égale à celle qui forme le premier membre, il y en aura toujours de plus grandes et de plus petites que celle-là. Or, on peut toujours prendre le nombre m assez grand pour rendre $\frac{k}{m}$ et conséquemment les différences consécutives a_1-a, a_2-a_1, a_3-a_2, ... $b-a_{m-1}$ d'une petitesse indéfinie ; donc, si une fonction interpolaire telle que $\mathrm{f}_n(a,b,c,d,\ldots.)$ pouvait devenir nulle ou infinie, lorsqu'on y fait $a=b$, on pourrait toujours prendre pour m un assez grand nombre pour rendre toutes les fonctions qui composent le second membre de l'équation (3) moindres ou plus grandes qu'une grandeur donnée quelconque, et, en particulier, moindres ou plus grandes que celle qui forme son premier membre, ce qui rendrait cette équation absurde.

On voit donc que la fonction $\mathrm{f}_n(a,b,c,d,\ldots)$ continue à avoir une valeur déterminée, qui n'est ni nulle ni infinie, lorsqu'on suppose les deux premiers élémens a et b égaux entre eux ; et il en sera de même encore, dans le cas de l'égalité entre deux autres quelconques de ses élémens ; puisqu'en vertu de la symétrie de la fonction, on pourra toujours amener ces deux élémens à être les premiers. Il en serait encore évidemment de même dans le cas de l'égalité de plus de deux élémens entre eux, ou de l'égalité entre plusieurs groupes d'élémens ; et, bien qu'alors le procédé que nous avons indiqué pour parvenir à ces sortes de fonctions n'en assigne plus la valeur, on pourra néanmoins les représenter et les employer dans les calculs, comme si cette valeur était connue. Observons d'ailleurs que rien n'empêche que les fonctions interpolaires, comme toutes les autres fonctions, ne deviennent nulles ou infinies, pour certaines valeurs particulières des élémens qui les composent ; mais cela n'arrivera jamais, tant que ces élémens conserveront leur indétermination.

6. De la formule (1) on peut conclure

$$\mathrm{f}x=\mathrm{f}a+(x-a)\mathrm{f}_1(a,x)\ ,$$

$$\mathrm{f}_1(a,x)=\mathrm{f}_1(a,b)+(x-b)\mathrm{f}_2(a,b,x)\ ,$$

$$\mathrm{f}_2(a,b,x)=\mathrm{f}_2(a,b,c)+(x-c)\mathrm{f}_3(a,b,c,x)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\mathrm{f}_{n-1}(a,b,c,\ldots p,x)=\mathrm{f}_{n-1}(a,b,c,\ldots p,q)+(x-q)\mathrm{f}_n(a,b,c,\ldots p,q,x)\ ;$$

ce qui donne, par des substitutions successives,

$$\mathrm{f}x=\left\{\begin{array}{l}\mathrm{f}a\\+(x-a)\mathrm{f}_1(a,b)\\+(x-a)(x-b)\mathrm{f}_2(a,b,c)\\+(x-a)(x-b)(x-c)\mathrm{f}_3(a,b,c,d)\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)\mathrm{f}_{n-1}(a,b,c,\ldots p,q)\\+(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)(x-q)\mathrm{f}_n(a,b,c,\ldots p,q,x)\ .\end{array}\right.$$

Cette valeur de $\mathrm{f}x$ contient une fonction interpolaire de x, à son dernier terme; mais, si les élémens $a,b,c,\ldots p,q$, ont des valeurs comprises entre des limites peu étendues, et que x soit lui-même compris entre eux, la série sera assez convergente pour qu'on puisse se permettre d'en négliger le dernier terme, et on aura alors sensiblement

$$\mathrm{f}x=\left\{\begin{array}{l} \mathrm{f}a \\ +(x-a)\mathrm{f}_1(a,b) \\ +(x-a)(x-b)\mathrm{f}_2(a,b,c) \\ +(x-a)(x-b)(x-c)\mathrm{f}_3(a,b,c,d) \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)\mathrm{f}_{n-1}(a,b,c,\ldots p,q) \end{array}\right\}. \quad (4)$$

On reconnaît ici la formule ordinaire d'interpolation; ce qui justifie la dénomination d'*interpolaires* que nous avons donnée aux fonctions dont elle se compose.

7. Posons $y=\mathrm{f}x$, et désignons

par Δy la quantité dont y augmente, lorsque x devient $x+\Delta x$;

par $\Delta^2 y$ la quantité dont Δy augmente, lorsque x devient $x+\Delta x$;

par $\Delta^3 y$ la quantité dont $\Delta^2 y$ augmente, lorsque x devient $x+\Delta x$,

. . . .

par $\Delta^n y$ la quantité dont $\Delta^{n-1} y$ augmente, lorsque x devient $x+\Delta x$;

nous aurons, par la définition des fonctions interpolaires,

$y = \mathrm{f}x$,

$\Delta y = \mathrm{f}(x+\Delta x) - \mathrm{f}x = \Delta x.\mathrm{f}_1(x, x+\Delta x)$,

$\Delta^2 y = \Delta x\{\mathrm{f}_1(x+\Delta x, x+2\Delta x) - \mathrm{f}_1(x, x+\Delta x)\} = 2\Delta x^2.\mathrm{f}_2(x, x+\Delta x, x+2\Delta x)$.

L'analogie conduit à soupçonner qu'en général

$$\Delta^n y = n!\Delta x^n \mathrm{f}_n(x, x+\Delta x, x+2\Delta x, \ldots\ldots x+n\Delta x) \;.$$

Pour changer ce soupçon en certitude, il suffit de prouver qu'il devra en être ainsi, si l'on a

$$\Delta^{n-1} y = (n-1)!\Delta x^{n-1} \mathrm{f}_{n-1}(x, x+\Delta x, x+2\Delta x, \ldots x+(n-1)\Delta x) \;;$$

or, en adoptant cette hypothèse, on aura

$$\Delta^n y = (n-1)!\Delta x^{n-1}\{\mathrm{f}_{n-1}(x+\Delta x, x+2\Delta x, \ldots x+n\Delta x) - \mathrm{f}_{n-1}(x, x+\Delta x, \ldots x+(n-1)\Delta x)\} \;;$$

c'est-à-dire,

$$\Delta^n y = n!\Delta x^n \mathrm{f}_n(x, x+\Delta x, x+2\Delta x, \ldots\ldots x+n\Delta x) \;; \quad (5)$$

comme nous l'avions annoncé.

8. Reprenons la formule (4)

$$\mathrm{f}x = \mathrm{f}a + (x-a)\mathrm{f}_1(a,b) + (x-a)(x-b)\mathrm{f}_2(a,b,c) + (x-a)(x-b)(x-c)\mathrm{f}_3(a,b,c,d) + \ldots$$

supposons les élémens $a, b, c, \ldots$ équidifférens, et soient posés

$$b-a = c-b = d-c = \ldots = k \;;$$

soient faits, de plus

$$y_p = \mathrm{f}a \;, \quad y_{p+1}\mathrm{f}b \;, \quad y_{p+2}\mathrm{f}c \;, \;\ldots\ldots\;; \quad y_{p+n} = \mathrm{f}x \;;$$

nous aurons

$$\frac{\Delta y_p}{k}=\frac{fb-fa}{b-a}=f_1(a,b)\,,\quad \frac{\Delta^2 y_p}{k^2}=2\,\frac{f_1(b,c)-f_1(a,b)}{c-a}=2f_2(a,b,c)\,,\quad \frac{\Delta^3 y_p}{k^3}=\ldots$$

$$\frac{\Delta y_{p+1}}{k}=\frac{fc-fb}{c-b}=f_1(b,c)\,,\quad \frac{\Delta^2 y_{p+1}}{k^2}=2\,\frac{f_1(c,d)-f_1(b,c)}{d-b}=2f_2(b,c,d)\,,\ \ldots\ldots$$

$$\frac{\Delta y_{p+3}}{k}=\frac{fd-fc}{d-c}=f_1(c,d)\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

d'où, en substituant dans la formule (4),

$$y_{p+n}=y_p+\frac{x-a}{1}\cdot\frac{\Delta y_p}{k}+\frac{x-a}{1}\cdot\frac{x-b}{2}\cdot\frac{\Delta^2 y_p}{k^2}+\frac{x-a}{1}\cdot\frac{x-b}{2}\cdot\frac{x-c}{3}\cdot\frac{\Delta^3 y_p}{k^3}+\ldots\quad(6)$$

Si nous posons $x-a=nk$, nous aurons

$$x-b=(x-a)-(b-a)=nk-k=(n-1)k\,,$$

$$x-c=(x-a)-(c-a)=nk-2k=(n-2)k\,,$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$,

de sorte qu'alors cette formule deviendra

$$y_{p+n}=y_p+\frac{n}{1}\Delta y_p+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\Delta^2 y_p+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\Delta^3 y_p+\ldots\quad(7)$$

et, par suite, en supposant p nul,

$$y_n=y+\frac{n}{1}\Delta y+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\Delta^2 y+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}+\ldots\quad(8)$$

ce sont les formules connues d'interpolation, pour le cas de l'équidifférence des valeurs de la variable indépendante.

9. D'après ce qui a été démontré ci-dessus (5), on a

$$f_n(a,b,c,\ldots r,s)=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{fa}{(a-b)(a-c)\ldots(a-r)(a-s)} \\ +\dfrac{fb}{(b-a)(b-c)\ldots(b-r)(b-s)} \\ +\dfrac{fc}{(c-a)(c-b)\ldots(c-r)(c-s)} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\dfrac{fs}{(s-a)(s-b)\ldots(s-q)(s-r)} \end{array}\right\};$$

supposant alors, comme ci-dessus,

$$b-a=c-b=d-c=\ldots=s-r=k\ ,$$

et posant en outre

$$y_p=fa\ ,\quad y_{p+1}=fb\ ,\quad y_{p+2}=fc\ ,\ \ldots\ y_{p+n-1}=fr\ ,\quad y_{p+n}=fs\ ,$$

on trouvera, en substituant et renversant l'ordre des termes du second membre,

$$f_n(a,a+k,a+2k,a+3k,\ldots a+nk)$$

$$=\frac{y_{p+n}}{n!k^n}-\frac{y_{p+n-1}}{(n-1)!1!k^n}+\frac{y_{p+n-2}}{(n-2)!2!k^n}-\frac{y_{p+n-3}}{(n-3)!3!k^n}+\ldots\pm\frac{y_{p+1}}{1!(n-1)!k^n}\mp\frac{y_p}{n!k^n}\ ;$$

mais si, dans la formule (5), on change y en y_p, x en a et qu'on y fasse, en outre, $\Delta a=k$, elle donnera

$$f_n(a,a+k,a+2k,a+3k,\ldots a+nk)=\frac{\Delta^n y_p}{n!k^n}\ ;$$

donc, en égalant ces deux valeurs et multipliant par $n!$,

$$\Delta^n y_p = y_{p+n} - \frac{n}{1} y_{p+n-1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} y_{p+n-2} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} y_{p+n-3} + \ldots ; \quad (9)$$

d'où, en supposant p nul

$$\Delta^n y = y_n - \frac{n}{1} y_{n-1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} y_{n-2} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} y_{n-3} + \ldots ; \quad (10)$$

formules inverses des formules (7) et (8).

10. Revenons au cas où plusieurs des élémens de la fonction f_n sont égaux entre eux. Nous avons observé (5) que, bien qu'alors cette fonction se présentât sous la forme $\frac{0}{0}$, elle n'en avait pas moins une valeur déterminée qui, en général, n'était ni nulle ni infinie, et que, bien qu'alors notre procédé ne fût plus propre à en assigner la valeur, les mêmes notations n'en étaient pas moins propres à la représenter; en continuant donc à les employer, nous aurons d'abord (1)

$$f_1(b,b) - f_1(a,b) = (b-a) f_2(a,b,b) \; ,$$

$$f_1(a,b) - f_1(a,a) = (b-a) f_2(a,a,b) \; ,$$

d'où, en ajoutant et réduisant,

$$f_1(b,b) - f_1(a,a) = (b-a)\{f_2(a,b,b) + f_2(a,a,b)\} \; ;$$

Nous aurons aussi

$$f_2(b,b,b) - f_2(a,b,b) = (b-a) f_3(a,b,b,b) \; ,$$

$$f_2(a,b,b) - f_2(a,a,b) = (b-a) f_3(a,a,b,b) \; ,$$

$$f_2(a,a,b) - f_2(a,a,a) = (b-a) f_3(a,a,a,b) \; ,$$

d'où en ajoutant encore et réduisant

$$\mathrm{f}_2(b,b,b)-\mathrm{f}_2(a,a,a)=(b-a)\{\mathrm{f}_3(a,b,b,b)+\mathrm{f}_3(a,ab,b)+\mathrm{f}_3(a,a,a,b)\}\ .$$

En continuant de la même manière, on aura en général

$$\mathrm{f}_{n-1}(b,b,b,\ldots\ldots b)-\mathrm{f}_{n-1}(a,a,a,\ldots a)=(b-a)\left\{\begin{array}{l}\quad\mathrm{f}_n(a,b,b,\ldots\ldots b,b,b)\\+\mathrm{f}_n(a,a,b,\ldots\ldots b,b,b)\\+\mathrm{f}_n(a,a,a,\ldots\ldots b,b,b)\\+\ \ldots\ldots\ldots\\+\mathrm{f}_n(a,a,a,\ldots\ldots a,a,b)\\+\mathrm{f}_n(a,a,a,\ldots\ldots a,a,b)\end{array}\right\};$$

si, dans cette formule, on fait $b=a+k$, d'où $b-a=k$, et qu'on change ensuite a en x, elle deviendra

$$\mathrm{f}_{n-1}(x+k,x+k,x+k,\ldots\ldots x+k,x+k)-\mathrm{f}_n(x,x,x,\ldots\ldots x,x)$$

$$=k\left\{\begin{array}{l}\quad\mathrm{f}_n(x,x+k,x+k,\ldots\ldots x+k,x+k,x+k)\\+\mathrm{f}_n(x,x,x+k,\ldots\ldots x+k,x+k,x+k)\\+\mathrm{f}_n(x,x,x,\ldots\ldots x+k,x+k,x+k)\\+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+\mathrm{f}_n(x,x,x,\ldots\ldots\ldots\ldots x,x+k,x+k)\\+\mathrm{f}_n(x,x,x,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x,x+k)\end{array}\right\};\quad (11)$$

formule qui va nous servir tout-à-l'heure.

11. En conservant toujours les mêmes notations, on a, par la formule fondamentale,

$$\mathrm{f}(x+k)=\mathrm{f}x+k\mathrm{f}_1(x,x+k)\ ,$$

$$\mathrm{f}_1(x,x+k)=\mathrm{f}_1(x,x)+k\mathrm{f}_2(x,x,x+k)\ ;$$

$$\mathrm{f}_2(x,x,x+k)=\mathrm{f}_2(x,x,x)+k\mathrm{f}_3(x,x,x,x+k)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\mathrm{f}_{n-1}(x,x,x,\ldots x,x+k)=\mathrm{f}_{n-1}(x,x,x,\ldots x,x)+k\mathrm{f}_n(x,x,x,\ldots x,x,x+k)\ ;$$

prenant la somme des produits respectifs de ces équations par $1,k$, $k^2,k^3,\ldots k^{n-1}$, et réduisant, on trouvera

$$\mathrm{f}(x+k)=\left\{\begin{array}{l}\mathrm{f}x\\ +k\mathrm{f}_1(x,x)\\ +k^2\mathrm{f}_2(x,x,x)\\ +k^3\mathrm{f}_3(x,x,x,x)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +k^{n-1}\mathrm{f}_{n-1}(x,x,x,\ldots x,x)\\ +k^n\mathrm{f}_n(x,x,x,\ldots x,x,x+k)\end{array}\right\}; \quad (12)$$

développement de $\mathrm{f}(x+k)$ en série où on pourra toujours prendre k assez petit, sans être nul, pour que la série soit convergente, puisque les fonctions qui multiplient les diverses puissances de k ont toujours des valeurs finies. En outre, si l'on parvient à assigner deux limites entre lesquelles se trouve compris le dernier terme du développement, le seul qui renferme k sous le signe de fonction, on connaîtra aussi par là les limites de l'erreur commise en bornant la série aux seuls termes qui précèdent celui-là.

Examinons présentement, d'une manière plus particulière, la nature des multiplicateurs des diverses puissances de k, dans la formule (12). Soit, en général, désigné par $f^{(p)}x$, la limite vers laquelle tend sans cesse le rapport

$$\frac{f^{(p-1)}(x+k)-f^{(p-1)}x}{k},$$

lorsque k tend vers zéro ; où, en d'autres termes, ce que devient ce rapport, lorsque k devient infiniment petit ou nul. Alors $f'x$, $f''x$, $f'''x$, ..., seront ce qu'on appelle les *dérivées* successives de la fonction fx. On aura d'abord

$$f_1(x,x)=f'x \;;$$

car on a

$$f_1(x,x+k)=\frac{f(x+k)-fx}{k} \;;$$

et les deux quantités $f_1(x,x)$ et $f'x$ sont respectivement ce que deviennent les deux membres de cette équation, lorsqu'on suppose $k=0$.

On aura en conséquence,

$$\frac{f'(x+k)-f'x}{k}=\frac{f_1(x+k,x+k)-f_1(x,x)}{k} \;;$$

mais, en vertu de la formule (11)

$$f_1(x+k;x+k)-f_1(x,x)=k\{f_2(x,x+k,x+k)+f_2(x,x,x+k)\}$$

donc

$$\frac{f'(x+k)-f'x}{k}=f_2(x,x+k,x+k)+f_2(x,x,x+k) \;;$$

donc aussi $f''x=2f_2(x,x,x)$; car ce sont là les limites respectives vers lesquelles tendent les deux membres de cette équation, à mesure que k tend vers zéro.

On aura, en conséquence,

$$\frac{\mathrm{f}''(x+k)-\mathrm{f}''x}{k}=2.\frac{\mathrm{f}_2(x+k,x+k.x+k)-\mathrm{f}_2(x,x,x)}{k}\;;$$

mais, en vertu de la formule (11)

$$\mathrm{f}_2(x+k,x+k,x+k)-\mathrm{f}_2(x,x,x)=k\left\{\begin{array}{l}\quad\mathrm{f}_3(x,x+k,x+k,x+k)\\+\mathrm{f}_3(x,x,x+k,x+k)\\+\mathrm{f}_3(x,x,x,x+k)\end{array}\right\}\;;$$

donc

$$\frac{\mathrm{f}''(x+k)-\mathrm{f}''x}{k}=2\{\mathrm{f}_3(x,x+k,x+k,x+k)+\mathrm{f}_3(x,x,x+k,x+k)+\mathrm{f}_3(x,x,x,x+k)\}\;;$$

donc aussi $\mathrm{f}'''x=1.2.3.\mathrm{f}_3(x,x,x,x)$; car ce sont là les limites respectives vers lesquelles tendent les deux membres de cette équation à mesure que k tend vers zéro.

Comme rien n'empêche de poursuivre ce raisonnement aussi loin qu'on voudra, il s'ensuit qu'on a

$$\mathrm{f}_1(x,x)=\frac{\mathrm{f}'x}{1}\,,\quad \mathrm{f}_2(x,x,x)=\frac{\mathrm{f}''x}{1.2}\,,\quad \mathrm{f}_3(x,x,x,x)=\frac{\mathrm{f}'''x}{1.2.3}\,,\;\ldots\ldots$$

et, en général,

$$\mathrm{f}_n(x,x,x,\ldots.x,x)=\frac{\mathrm{f}^{(n)}x}{n!}\;;$$

valeurs qui, substituées dans la formule (12), donneront

$$\mathrm{f}(x+k)=\mathrm{f}x+\frac{k}{1}\mathrm{f}'x+\frac{k^2}{1.2}\mathrm{f}''x+\frac{k^3}{1.2.3}\mathrm{f}'''x+\ldots+\frac{k^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{f}^{(n-1)}x$$

$$+k^n\mathrm{f}_n(x,x,x,\ldots\ldots x,x,x+k)\ . \qquad (13)$$

On reconnaît ici la série de Taylor, qui se trouve ainsi démontrée.

12. On a cette suite d'équations (1)

$$\mathrm{f}_1(x,x)=\mathrm{f}_1(x,x+k)-k\mathrm{f}_2(x,x,x+k)\ ,$$

$$\mathrm{f}_2(x,x,x+k)=\mathrm{f}_2(x,x+k,x+2k)-2k\mathrm{f}_3(x,x,x+k,x+2k)\ ,$$

$$\mathrm{f}_3(x,x,x+k,x+2k)=\mathrm{f}_3(x,x+k,x+2k,x+3k)-3k\mathrm{f}_4(x,x,x+k,x+2k,x+3k)\ ,$$

. . . .

En prenant la somme des produits respectifs de ces équations par $+1$, $-k$, $+2k^2$, $-3k^3$, $+\ldots$, et réduisant, il viendra

$$\mathrm{f}_1(x,x)=\mathrm{f}_1(x,x+k)-k\mathrm{f}_2(x,x+k,x+2k)+1.2k^2\mathrm{f}_3(x,x+k,x+2k,x+3k)-\ldots\ldots$$

$$\pm(n-1)k^{n-1}\mathrm{f}_n(x,x+k,x+2k,\ldots x+nk)\pm n!k^n\mathrm{f}_{n+1}(x,x,x+k,x+2k,\ldots x+nk)\ ;$$

mais on a par la formule (5), en posant $y=\mathrm{f}x$, d'où $\mathrm{f}_1(x,x)=\mathrm{f}'x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,

$$\mathrm{f}_1(x,x+k)=\frac{\Delta y}{k}\ ,$$

$$\mathrm{f}_2(x,x+k,x+2k)=\frac{\Delta^2 y}{1.2k^2}\ ,$$

$$\mathrm{f}_3(x,x+k,x+2k,x+3k)=\frac{\Delta^3 y}{1.2.3.k^3}\ ,$$

. . . . ;

il viendra donc, en substituant et multipliant par k

$$k\frac{dy}{dx}=\frac{\Delta y}{1}-\frac{\Delta^2 y}{2}+\frac{\Delta^3 y}{3}-\ldots\pm\frac{\Delta^n y}{n}\mp n!k^{n+1}f_{n+1}(x,x,x+k,x+2k,\ldots x+nk)\,.$$

On pourrait étendre indéfiniment ces recherches ; mais ce qui précède suffit pour atteindre le but que nous nous étions proposé (*).

(*) Ce mémoire n'ayant point été rédigé par l'auteur, mais seulement d'après des notes très-sommaires qu'il avait fournies, le lecteur voudra bien ne point lui attribuer les négligences de rédaction ou même les erreurs qui pourraient s'y être glissées.

J. D. G.