ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

VALLÈS

Questions résolues. Démonstration du théorème d'analise énoncé à la page 64 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 263-264
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__263_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème d'analise énoncé à la page 64 du présent volume ;

Par M. VALLÈS, élève à l'Ecole royale polytechnique (*).

SOIENT $p+q$ boules contenues dans une urne de laquelle il faille en extraire un nombre p ou un nombre q ; cette extraction pourra se faire d'un nombre de manières exprimé par

$$\frac{p+q}{1}\cdot\frac{p+q-1}{2}\cdot\frac{p+q-2}{3}\cdots\cdots\frac{p+1}{q}=\frac{p+q}{1}\cdot\frac{p+q-1}{2}\cdot\frac{p+q-2}{3}\cdots\cdots\frac{q+1}{p}\,.$$

---

dre par rapport à x l'une ou l'autre des équations $x^n=a^m$ et $x^{np}=a^{mp}$. Or la seconde peut être mise sous cette forme

$$(x^n-a^m)[x^{n(p-1)}+a^mx^{n(p-2)}+\ldots\ldots+a^{m(p-2)}x^n+a^{m(p-1)}]=0$$

et dès lors il paraît manifeste qu'elle donne d'abord les mêmes valeurs de x qu'on tire de la première et en outre toutes celles qu'on déduira de l'égalité du second facteur à zéro. La seconde est donc plus étendue que la première ; elles ne sont donc pas identiquement les mêmes ; elles ne sauraient donc impunément être substituées l'une à l'autre ; et il doit en être de même des expressions $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{mp}{np}}$. On ne saurait donc se permettre, sans dénaturer une quantité à exposant fractionnaire, de multiplier ou de diviser les deux termes de cet exposant par un même nombre entier.

J. D. G.

(*) A la page 120 du présent volume, M. Lenthéric a déduit très-simplement la démonstration de ce théorème d'un beau théorème de M. Ampère ; mais nous avons pensé que le lecteur ne serait pas fâché d'en avoir une démonstration directe ; et, parmi plusieurs qui nous sont parvenues, nous avons cru devoir distinguer celle-ci qui, en même temps qu'elle n'exige aucun calcul, ouvre une voie pour découvrir facilement beaucoup d'autres théorèmes du même genre.

J. D. G.

Supposons présentement que, sur ces $p+q$ boules, il s'en trouve p blanches et q noires, et que p soit le nombre qu'il en faut extraire, elles pourront être toutes blanches, ou bien il y en aura $p-1$ blanches et 1 noire, ou $p-2$ blanches et 2 noires ou $p-3$ blanches et 3 noires, et ainsi de suite, jusqu'à 3 blanches et $p-3$ noires, ou 2 blanches et $p-2$ noires, ou 1 blanche et $p-1$ noires, ou enfin elles pourront toutes être noires, si du moins q n'est pas moindre que p.

Or les divers nombres de manières dont ces divers genres d'extractions peuvent être faits sont tels qu'on le voit dans le tableau suivant :

p blanches et 0 noires, de 1 manière ;

$p-1$ blanches et 1 noire, de $\frac{p}{1}\,\frac{q}{1}$ manières ;

$p-2$ blanches et 2 noires, de $\frac{p}{1}\,\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q}{1}\cdot\frac{p-1}{2}$ manières ;

$p-3$ blanches et 3 noires, de $\frac{p}{1}\,\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\cdot\frac{q}{1}\cdot\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q-2}{3}$ manières ;

. . . .

d'où l'on voit que le nombre des manières différentes d'extraire p boules de l'urne pourra aussi être exprimé par

$$1+\frac{p}{1}\cdot\frac{q}{1}+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q}{1}\cdot\frac{q-1}{2}+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\cdot\frac{q}{1}\cdot\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q-2}{3}+\ldots$$

Il sera donc permis d'égaler cette expression à l'une ou à l'autre des deux expressions ci-dessus, et de cette égalité résultera le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

Si, en particulier, on suppose $q=p$, on obtiendra ce résultat remarquable

$$1+\left(\frac{p}{1}\right)^2+\left(\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\right)^2+\ldots=\frac{2p}{1}\cdot\frac{2p-1}{2}\cdot\frac{2p-2}{3}\cdot\frac{2p-3}{4}\ldots$$