
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Trigonométrie. Note sur l'analyse des sections angulaires

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 254-257

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__254_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1825-1826, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRIGONOMÉTRIE.

Note sur l'analyse des sections angulaires ;

Par un A B O N N É.



SOIT posé , avec M. Poisson (*Bulletin universel* 1825 , n.° 9 ,
pag. 142) ,

$$X = \text{Cos}.mx + \frac{m}{1} \text{Cos}.(m-2)x + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \text{Cos}.(m-4)x + \dots ,$$

$$X' = \text{Sin}.mx + \frac{m}{1} \text{Sin}.(m-2)x + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \text{Sin}.(m-4)x + \dots ;$$

on aura comme l'on sait

$$(2\text{Cos}.x)^m = X + X'\sqrt{-1}, \text{ ou bien } (2\text{Cos}.x)^m = X - X'\sqrt{-1};$$

d'où il suit que le second membre de la première équation, en y changeant x en $x + 2i\omega$, devra être supposé identique avec le second membre de la seconde où on aurait changé x en $x + 2i'\omega$; i et i' étant deux nombres entiers, compris entre 0 et n , dénominateur de $m = \frac{p}{n}$, et ces nombres entiers étant accouplés d'une manière convenable. On voit en effet que, par l'effet de cette substitution, les premiers membres n'éprouvent aucun changement.

Mais alors

$$X + X'\sqrt{-1} \text{ se change en } (X + X'\sqrt{-1})(\text{Cos}.2mi\omega + \sqrt{-1}\text{Sin}.2mi\omega),$$

$$X - X'\sqrt{-1} \text{ se change en } (X - X'\sqrt{-1})(\text{Cos}.2mi'\omega - \sqrt{-1}\text{Sin}.2mi'\omega),$$

donc, par un choix convenable des nombres i et i' , on doit avoir

$$(X + X'\sqrt{-1})(\text{Cos}.2mi\omega + \sqrt{-1}\text{Sin}.2mi\omega) = (X - X'\sqrt{-1})(\text{Cos}.2mi'\omega - \sqrt{-1}\text{Sin}.2mi'\omega)$$

qui se réduit à

$$(X + X'\sqrt{-1})\{\text{Cos}.2m(i+i')\omega + \sqrt{-1}\text{Sin}.2m(i+i')\omega\} = X - X'\sqrt{-1}.$$

En désignant par k soit la somme $i+i'$, si elle est moindre que n , soit le reste de la division de cette somme par n , si elle est plus grande; il viendra

$$(X + X'\sqrt{-1})(\text{Cos}.2mk\omega + \sqrt{-1}\text{Sin}.2mk\omega) = X - X'\sqrt{-1};$$

ou, en développant et égalant séparément entre elles les parties réelles et les parties imaginaires

$$X(1 - \text{Cos}.2mk\omega) + X'\text{Sin}.2mk\omega = 0,$$

$$X \sin. 2mk\omega + X'(1 + \cos. 2mk\omega) = 0,$$

ou encore

$$2X \sin.^2 mk\omega + 2X' \sin. mk\omega \cos. mk\omega = 0,$$

$$2X \sin. mk\omega \cos. mk\omega + 2X' \cos.^2 mk\omega = 0;$$

équations qui donnent également, en réduisant,

$$X \sin. mk\omega + X' \cos. mk\omega = 0.$$

Cette relation très-simple permet d'éliminer, à volonté, de la valeur de $(2 \cos. x)^m$ l'une quelconque des deux fonctions X et X' . Si, par exemple, on en veut éliminer la dernière, on aura

$$(2 \cos. x)^m = X - X' \sqrt{-1} = X + X \frac{\sin. mk\omega}{\cos. mk\omega} \sqrt{-1},$$

c'est-à-dire,

$$(2 \cos. x)^m = X \frac{\cos. mk\omega + \sqrt{-1} \sin. mk\omega}{\cos. mk\omega} = X \frac{(\cos. k\omega + \sqrt{-1} \sin. k\omega)^m}{\cos. mk\omega};$$

et on trouve aussi, d'après cela,

$$(2 \cos. x)^m = -X' \frac{(\cos. k\omega + \sqrt{-1} \sin. k\omega)^m}{\sin. mk\omega}.$$

Ces deux formules, qu'on peut regarder comme fondamentales, s'accordent avec celles de M. Poinsot, et se prêtent à tous les développemens qu'il a donnés à l'article de l'examen de l'analyse d'Euler (*Recherches sur l'analyse des sections angulaires*, pag. 68).

Les géomètres qui se sont occupés de ce sujet dans les *Annales* (*) se sont principalement attachés, pour la plupart, à produire

(*) M. Pagani Michel, tom. XIII, pag. 94, M. Crelle, même volume, pag. 213, et M. Stein, tom. XV, pag. 150.

au jour les n valeurs de la formule $X+X'\sqrt{-1}$; mais la transformation qui réduit l'expression à ne contenir que l'une ou l'autre des deux fonctions X et X' entrainait bien aussi un peu dans la question, et pourtant aucun d'eux ne s'en est occupé. On peut être surpris qu'elle soit échappée, en particulier à M. Crelle, qui a traité ce sujet avec le plus de profondeur et de développement, et qui paraissait destiner ce qu'il avait écrit sur ce sujet à servir de commentaire à une traduction allemande du *Calcul des fonctions* qu'il préparait.

Ceci explique, entr'autres, pourquoi l'équation différentielle de Lagrange admet les deux solutions qui étaient pour M. Lacroix une source d'embarras (*Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, tom. III, pag. 616).

Du reste cette relation entre X et X' se trouve aux notations près, dans le mémoire de M. Poinsot ; mais la manière dont elle s'y trouve amenée et les nombreux détails au milieu desquels elle se trouve absorbée permettent à peine de l'apercevoir.
