ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Optique. Recherches d'Analise sur les surfaces caustiques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__1_0>

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

OPTIQUE.

Recherches d'Analise sur les surfaces caustiques ;

Par M. GERGONNE.

DANS un article inséré à la page 354 du précédent volume, nous avons démontré, d'après les idées que nous avait suggéré un travail de M. Quetelet, quelques propriétés générales des caustiques planes ; et nous avons promis de montrer, dans un autre article, par des applications variées, combien la connaissance de ces propriétés pouvait faciliter la recherche de ces sortes de courbes. Mais il nous a paru qu'avant de remplir cet engagement, il convenait d'abord de compléter la théorie, en démontrant, pour les surfaces caustiques, des théorèmes analogues à ceux qu'offrent les caustiques planes ; et tel est l'objet unique de l'article que l'on va lire.

Mais, auparavant nous rappellerons brièvement quelques principes déjà connus, mais qu'on ne trouve développés que dans quelques ouvrages que le lecteur pourrait n'avoir pas sous la main.

Soit l'équation

$$\mathrm{F}(x, y, z, a)=V=0 ,$$

dans laquelle a représente un paramètre indéterminé. A raison de la variabilité de ce paramètre, cette équation exprime une infinité de surfaces courbes, se succédant sans interruption dans l'espace, et pouvant conséquemment être touchées toutes par une même surface, lieu de leurs intersections consécutives, lesquelles sont en même temps leur lignes de contact avec cette surface qui en est dite l'*enveloppe*. On sait (*) que, pour obtenir l'équation de cette enveloppe, il n'est question que d'éliminer a entre les deux équations

$$V=0 , \quad \left(\frac{dV}{da}\right)=0 .$$

Si au lieu d'un paramètre unique, on en avait plusieurs a, b, c, ... au nombre de n, liés entre eux par $n-1$ équations de relation; on considérerait tous ces paramètres, excepté a, comme des fonctions de celui-ci, données par ces équations. En y joignant l'équation $V=0$, on se trouverait avoir n équations; en les différentiant toutes par rapport à a et à ses fonctions, on obtiendrait n nouvelles équations; et tout se réduirait à éliminer, entre les $2n$ équations, les n paramètres a, b, c, d, ... et les $n-1$ rapports $\frac{db}{da}$, $\frac{dc}{da}$, $\frac{dd}{da}$, ...

Si, par exemple l'équation était

$$\mathrm{F}(x, y, z, a, b)=V=0 ,$$

et qu'on eut

(*) Voyez tom. III, pag. 361.

$$\varphi(a\,,\,b)=R=0\;,$$

on aurait à éliminer a, b et $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}$, entre les quatre équations

$$V=0\;,\qquad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}b}\right)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}=0\;,$$

$$R=0\;,\qquad \left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}a}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}b}\right)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}=0\;.$$

Supposons présentement que, dans l'équation

$$\mathrm{F}(x\,,\,y\,,\,z\,,\,a\,,\,b)=V=0\;,$$

les deux paramètres a, b soient indépendans. En faisant varier a seul, on obtiendra une infinité de surfaces dont l'enveloppe aura pour équation le résultat de l'élimination de ce paramètre entre les deux équations

$$V=0\;,\qquad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}\right)=0\,.$$

Mais si, dans l'équation résultante on fait varier b, à son tour, on obtiendra une infinité d'enveloppes se succédant sans interruption dans l'espace, et ayant conséquemment elles-mêmes une enveloppe commune. Voyons comment on pourra obtenir l'équation de cette dernière enveloppe.

Au lieu de faire d'abord l'élimination de a entre les deux équations, ce qui n'est praticable que dans des cas particuliers, nous pouvons, dans l'équation $\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}\right)=0$, considérer a comme une fonction de b, donnée par l'équation $V=0$; nous retombons donc ainsi dans le cas que nous venons de traiter tout à l'heure ; et tout se réduit à éliminer a, b et $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b}$ entre les quatre équations

$$\left(\frac{dV}{da}\right)=0\ , \qquad \left(\frac{d^2V}{da\,db}\right)+\left(\frac{d^2V}{da^2}\right)\frac{da}{db}=0\ ,$$

$$V=0\ , \qquad \left(\frac{dV}{db}\right)+\left(\frac{dV}{da}\right)\frac{da}{db}=0\ .$$

Mais, en vertu de la première, la dernière se réduit à $\left(\frac{dV}{db}\right)=0$; donc tout se réduit finalement à éliminer a et b, entre les trois équations

$$V=0\ , \qquad \left(\frac{dV}{da}\right)=0\ , \qquad \left(\frac{dV}{db}\right)=0\ .$$

Si l'on considère présentement que, dans ces trois équations, a et b se trouvent exactement traités de la même manière, on en conclura que, soit que n'ayant d'abord égard qu'à la variabilité de a, puis ensuite à celle de b, ou que n'ayant d'abord égard qu'à la variabilité de b, puis ensuite à celle de a, on cherche l'enveloppe des enveloppes, on n'obtiendra jamais qu'une seule et même surface courbe, laquelle touchera conséquemment toutes les surfaces qu'on déduirait de l'équation $V=0$, en y faisant varier simultanément, d'une manière quelconque, les deux paramètres a et b. Les enveloppes primitives, comme nous l'avons dit plus haut, ont des lignes de contact avec les enveloppés, et il en est de même des enveloppes d'enveloppes, par rapport à ces enveloppes primitives ; mais il est visible que généralement les enveloppes d'enveloppes n'ont que des points de contact avec ces mêmes enveloppées.

Si l'équation $V=0$, contenait des paramètres a, b, c, d, …, au nombre de n, liées entre eux par $n-2$ équations de relation, la question rentrerait exactement dans la précédente. On pourrait, en effet, considérer tous les paramètres autre que a et b comme des fonctions de ces deux là, données par les $n-2$ équations de relation. En y joignant donc l'équation $V=0$, et prenant tour à tour les différentielles partielles de toutes, par rapport aux paramètres indépendans a et b et à leurs fonctions c, d, e, ... on se trouvera avoir $3n-3$ équations, entre lesquelles on n'aura à éliminer que $3n-4$ quantités, savoir, les n paramètres et les $2n-4$ rapports $\frac{dc}{da}$, $\frac{dc}{db}$, $\frac{dd}{da}$, $\frac{dd}{db}$, $\frac{de}{da}$, $\frac{de}{db}$, ...

Que par exemple l'équation proposée soit

$$F(x, y, z, a, b, c, a', b', c') = V = 0,$$

es six paramètres étant liés par les quatre relations

$$f(a, b, c) = S = 0, \qquad f'(a', b', c') = S' = 0,$$

$$\varphi(a, b, c, a', b', c') = P = 0, \quad \psi(a, b, c, a', b', c') = Q = 0;$$

en considérant a, b, c, c' comme des fonctions des deux paramètres indépendans a', b', il faudra éliminer ces six paramètres et les huit rapports

$$\frac{da}{da'}, \quad \frac{db}{da'}, \quad \frac{dc}{da'}, \quad \frac{dc'}{da'},$$

$$\frac{da}{db'}, \quad \frac{db}{db'}, \quad \frac{dc}{db'}, \quad \frac{dc'}{db'},$$

entre les quinze équations

$$V = 0, \quad S = 0, \quad S' = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0;$$

$$\left(\frac{dV}{da}\right)\frac{da}{da'} + \left(\frac{dV}{db}\right)\frac{db}{da'} + \left(\frac{dV}{dc}\right)\frac{dc}{da'} + \left(\frac{dV}{da'}\right) + \left(\frac{dV}{dc'}\right)\frac{dc'}{da'} = 0,$$

$$\left(\frac{dV}{da}\right)\frac{da}{db'} + \left(\frac{dV}{db}\right)\frac{db}{db'} + \left(\frac{dV}{dc}\right)\frac{dc}{db'} + \left(\frac{dV}{db'}\right) + \left(\frac{dV}{dc'}\right)\frac{dc'}{db'} = 0;$$

$$\left(\frac{dS}{da}\right)\frac{da}{da'}+\left(\frac{dS}{db}\right)\frac{db}{da'}+\left(\frac{dS}{dc}\right)\frac{dc}{da'}=0,\quad \left(\frac{dS'}{da'}\right)+\left(\frac{dS'}{dc'}\right)\frac{dc'}{da'}=0,$$

$$\left(\frac{dS}{da}\right)\frac{da}{db'}+\left(\frac{dS}{bb'}\right)\frac{db}{db'}+\left(\frac{dS}{dc}\right)\frac{dc}{db'}=0,\quad \left(\frac{dS'}{db'}\right)+\left(\frac{dS'}{dc'}\right)\frac{dc'}{db'}=0,$$

$$\left(\frac{dP}{da}\right)\frac{da}{da'}+\left(\frac{dP}{db}\right)\frac{db}{da'}+\left(\frac{dP}{dc}\right)\frac{dc}{da'}+\left(\frac{dP}{da'}\right)+\left(\frac{dP}{dc'}\right)\frac{dc'}{da'}=0,$$

$$\left(\frac{dP}{da}\right)\frac{da}{db'}+\left(\frac{dP}{db}\right)\frac{db}{db'}+\left(\frac{dP}{dc}\right)\frac{dc}{db'}+\left(\frac{dP}{db'}\right)+\left(\frac{dP}{dc'}\right)\frac{dc'}{db'}=0,$$

$$\left(\frac{dQ}{da}\right)\frac{da}{da'}+\left(\frac{dQ}{db}\right)\frac{db}{da'}+\left(\frac{dQ}{dc}\right)\frac{dc}{da'}+\left(\frac{dQ}{da'}\right)+\left(\frac{dQ}{dc'}\right)\frac{dc'}{da'}=0,$$

$$\left(\frac{dQ}{da}\right)\frac{da}{db'}+\left(\frac{dQ}{db}\right)\frac{db}{db'}+\left(\frac{dQ}{dc}\right)\frac{dc}{db'}+\left(\frac{dQ}{dl'}\right)+\left(\frac{dQ}{dc'}\right)\frac{dc'}{db'}=0.$$

Ce cas est précisément celui que nous allons rencontrer dans ce qui va suivre.

Soit S une surface quelconque, séparant deux milieux homogènes, d'un pouvoir réfringent inégal. Soit une autre surface S', située dans l'un de ces milieux, et de chacun des points de laquelle émanent des rayons incidens, dans des directions qui lui sont respectivement normales en ces points. Considérons, en particulier, le rayon incident qui émane du point (a', b', c') de cette surface rayonnante ; et soit (a, b, c) son point d'incidence sur la surface séparatrice. Soit enfin (x, y, z) un quelconque des points du rayon réfracté.

Les trois coordonnées a, b, c, ainsi que les trois coordonnées a', b', c', doivent être liées entre elles par des équations de relation que nous représenterons respectivement par

$$\mathrm{f}(a,b,c)=\mathrm{S}=0\ ,\quad \mathrm{f}'(a'b'c')=\mathrm{S}'=0.$$

Soient faits, pour abréger

$$\mathrm{d}c=p\mathrm{d}a+q\mathrm{d}b\ ,\quad \mathrm{d}c'=p'\mathrm{d}a'+q'\mathrm{d}b'.$$

En représentant par X , Y , Z les coordonnées courantes, nous aurons pour les équations

1.° du rayon incident . . . . $\left\{\begin{aligned} X-a&=\frac{a-a'}{c-c'}(Z-c)\ ;\\ Y-b&=\frac{b-b'}{c-c'}(Z-c)\ ,\end{aligned}\right.$

2.° de la normale au point d'incidence $\left\{\begin{aligned} X-a&=-p\,(Z-c)\ ,\\ Y-b&=-q\,(Z-c)\ ;\end{aligned}\right.$

3.° du rayon réfracté . . . . $\left\{\begin{aligned} X-a&=\frac{x-a}{z-c}(Z-c)\ ;\\ Y-b&=\frac{y-b}{z-c}(Z-c)\ ;\end{aligned}\right.$

Il faudra d'abord exprimer que ces trois droites sont dans un même plan passant par le point (a, b, c) ce qui donnera

$$\{(b-b')+q(c-c')\}\{(x-a)+p(z-c)\}=\{(a-a')+p(c-c')\}\{(y-b)+q(z-c)\}\quad (1).$$

Les cosinus des angles d'incidence et de réfraction seront respectivement

$$\frac{p(a-a')+q(b-b')-(c-c')}{\sqrt{(1+p^2+q^2)\{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2\}}}\ ,$$

$$\frac{p(x-a)+q(y-b)-(z-c)}{\sqrt{(1+p^2+q^2)\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}}}\;;$$

d'où on conclura, pour les sinus de ces mêmes angles,

$$\sqrt{\frac{\{(a-a')+p(c-c')\}^2+\{p(b-b')-q(a-a')\}^2+\{(b-b')+q(c-c')\}^2}{(1+p^2+q^2)\{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2\}}}\;,$$

$$\sqrt{\frac{\{(x-a)+p(z-c)\}^2+\{p(y-b)-q(x-a)\}^2+\{(y-b)+q(z-c)\}^2}{(1+p^2+q^2)\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}}}\;.$$

Si donc le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction est celui de m à n, en divisant ces deux formules l'une par l'autre, on aura, en quarrant,

$$\frac{\{(a-a')+p(c-c')\}^2+\{p(b-b')-q(a-a')\}^2+\{(b-b')+q(c-c')\}^2}{\{(x-a)+p(z-c)\}^2+\{p(y-b)-q(x-a)\}^2+\{(y-b)+q(z-c)\}^2}\cdot\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2}=\frac{m^2}{n^2}.\quad(2)$$

Remarquons présentement que les équations de la normale à la surface S′ au point $(a',\, b',\, c')$ sont

$$X-a'=-p'(Z-c')\quad,\qquad Y-b'=-q'(Z-c')\;;$$

mais les équations du rayon incident peuvent être écrites ainsi

$$X-a'=\frac{a-a'}{c-c'}(Z-c')\quad,\qquad Y-b'=\frac{b-b'}{c-c'}(Z-c')\;;$$

puis donc que cette normale et ce rayon doivent se confondre en une seule et même droite, on doit avoir

$$\frac{a-a'}{c-c'}=-p'\quad,\qquad \frac{b-b'}{c-c'}=-q'\;;$$

c'est-à-dire,

$$(a-a')+p'(c-c')=0\ ,\quad (P')\ ,\quad (b-b')+q'(c-c')=0\ .\quad (Q')$$

Cela posé ; soient prises arbitrairement des valeurs de a' et b', on en conclura celles de c', p', q', au moyen de l'équation $S'=0$. Ces valeurs étant substituées dans les équations (P'), (Q'), combinées avec l'équation $S=0$, on en tirera les valeurs correspondantes de a, b, c, p, q ; en substituant les unes et les autres dans les équations (1) et (2), les équations résultantes, en x, y, z, seront indistinctement satisfaites par tous les points de la direction du rayon réfracté répondant aux valeurs particulières attribuées à a', b'.

Puis donc que ces équations laissent x, y, z indéterminées et, n'établissent entre elles que deux relations seulement, il doit nous être permis d'établir, entre ces trois coordonnées, une relation tout-à-fait arbitraire ; au quel cas elles deviendront alors les coordonnées d'un point déterminé du rayon réfracté. Cherchons seulement à choisir cette relation de manière à rendre les calculs nécessaires pour la recherche du point (x, y, z) de la direction du rayon réfracté aussi simple et symétrique qu'il se pourra.

Or, si nous posons

$$(x-a)+p(z-c)=-\frac{n^2}{m^2}\{(a-a')+p(c-c')\}\ ,\quad (P)$$

l'équation (1) deviendra

$$(y-b)+q(z-c)=-\frac{n^2}{m^2}\{(b-b')+q(c-c')\}\ ;\quad (Q)$$

on tirera de l'élimination de $z-c$ entre elles

$$p(y-b)-q(x-a)=-\frac{n^2}{m^2}\{p(b-b')-q(a-a')\}\ .$$

Ajoutant membre à membre les quarrés de ces équations, on trouvera

$$\frac{\{(a-a')+p(c-c')\}^2+\{p(b-b')-q(a-a')\}^2+\{(b-b')+q(c-c')\}^2}{\{(x-a)+p(z-c)\}^2+\{p(y-b)-q(x-a)\}^2+\{(y-b)+q(z-c)\}^2}=\frac{m^4}{n^4};$$

au moyen de quoi l'équation (2) se réduira simplement à

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\frac{n^2}{m^2}\{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2\}. \quad (V)$$

Ainsi les coordonnées du point (x, y, z) de la direction du rayon réfracté, qui répond à des valeurs quelconques de a' et b', se déduiront finalement de sept équations

$$S=0, \quad (S) \qquad S'=0, \quad (S')$$

$$(a-a')+p'(c-c')=0, \quad (P') \quad (b-b')+q'(c-c'=0, \quad (Q')$$

$$(x-a)+p(z-c)=-\frac{n^2}{m^2}\{(a-a')+p(c-c')\}, \quad (P)$$

$$(y-b)+q(z-c)=-\frac{n^2}{m^2}\{(b-b')+q(c-c')\}, \quad (Q)$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\frac{n^2}{m^2}\{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2\}; \quad (V)$$

de sorte qu'en éliminant des trois dernières a, b, c, c', au moyen des quatre premières, on pourra en tirer les valeurs de x, y, z, en fonction des variables indépendantes a', b'.

On remarquera que l'équation (V) est celle d'une sphère qui a son centre au point d'incidence (a, b, c), et dont le rayon $\frac{n}{m}\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2}$ est à la distance $\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2}$ de son centre à la surface rayonnante dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence. Quant aux équations

(P) et (Q), on voit que ce sont celles d'une parrallèle à la normale à (S) au point d'incidence (a, b, c) ; de sorte que le point (x, y, z) est un de ceux où cette parallèle perce la sphère.

Si l'on voulait obtenir l'équation de la surface lieu de tous les points (x, y, z), il ne s'agirait évidemment que d'éliminer les six paramètres a, b, c, a', b', c' entre les sept équations ci-dessus. Cherchons plus particulièrement quelle est cette surface.

A raison de la variabilité et de l'indépendance de a' et b', l'équation (V) appartient proprement à une infinité de sphères. Ces sphères ont toutes leurs centres sur la surface séparatrice (S) ; et le rayon de chacune d'elles est à la plus courte distance de son centre à la surface rayonnante (S′) dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence. Cherchons la surface qui les enveloppe toutes.

D'après ce que nous avons dit au commencement de cet article, on voit que, pour parvenir à l'équation de cette surface, il ne s'agit que d'éliminer les six paramètres a, b, c, a', b', c' et les huit rapports

$$\frac{da}{da'}, \quad \frac{db}{da'}, \quad \frac{dc}{da'}, \quad \frac{dc}{da'}$$

$$\frac{da}{db'}, \quad \frac{db}{db'}, \quad \frac{dc}{db'}, \quad \frac{dc'}{db'}$$

entre les cinq équations (S), (S′), (P′), (Q′), (V) et leurs différentielles partielles prises tour à tour par rapport à a', b' et à leurs fonctions a, b, c, c'.

Or en différentiant d'abord l'équation (V) sous ce point de vue, et observant que

$$\frac{dc}{da'} = \frac{dc}{da}\frac{da}{da'} + \frac{dc}{db}\frac{db}{da'} = p\frac{da}{da'} + q\frac{db}{da'}, \quad \frac{dc'}{da'} = p',$$

$$\frac{dc}{db'} = \frac{dc}{da}\frac{da}{db'} + \frac{dc}{db}\frac{db}{db'} = p\frac{da}{db'} + q\frac{db}{db'}, \quad \frac{dc'}{db'} = q',$$

on trouvera

$$\left.\begin{aligned}&\left\{[(x-a)+p(z-c)]+\frac{n^2}{m^2}[(a-a')+p(c-c')]\right\}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}a'}\\+&\left\{[(y-b)+q(z-c)+\frac{n^2}{m^2}[(b-b')+q(c-c')]\right\}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a'}\end{aligned}\right\}=\frac{n^2}{m^2}\{(a-a')+p'(c-c')\}\,,$$

$$\left.\begin{aligned}&\left\{[(x-a)+p(z-c)]+\frac{n^2}{m^2}[(a-a')+p(c-c')]\right\}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b'}\\+&\left\{[(y-b)+q(z-c)]+\frac{n^2}{m^2}[(b-b')+q(c-c')]\right\}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}b'}\end{aligned}\right\}=\frac{n^2}{m^2}\{(b-b')+p'(c-c')\}\,;$$

ou simplement, en vertu des relations (P′), (Q′)

$$\left.\begin{aligned}&\left\{[(x-a)+p(z-c)]+\frac{n^2}{m^2}[(a-a')+p(c-c')]\right\}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}a'}\\+&\left\{[(y-b)+q(z-c)]+\frac{n^2}{m^2}[(b-b')+q(c-c')]\right\}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a'}\end{aligned}\right\}=0\,,$$

$$\left.\begin{aligned}&\left\{[(x-a)+p(z-c)]+\frac{n^2}{m^2}[(a-a')+p(c-c')]\right\}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b'}\\+&\left\{[(y-b)+q(z-c)]+\frac{n^2}{m^2}[(b-b')+q(c-c')]\right\}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}b'}\end{aligned}\right\}=0\,:$$

or, les surfaces (S), (S′) pouvant toutes deux être prises arbitrairement, il s'ensuit que a', b', c' doivent être tout-à-fait indépendans de a, b, c et conséquemment ces deux dernières équations ne doivent établir aucune relation entre les quatre rapports $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}a'}$, $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a'}$, $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b'}$, $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}b'}$; ce qui exige qu'on ait à la fois

$$(x-a)+p(z-c)=-\frac{n^2}{m^2}\{(a-a')+p(c-c')\}\;;$$

$$(y-b)+q(z-c)=-\frac{n^2}{m^2}\{(b-b')+q(c-c')\}\;;$$

ces deux équations doivent donc, dans la recherche qui nous occupe, remplacer les deux qui les précèdent; mais ces équations ne sont autre chose que les équations (P), (Q); donc la recherche de l'équation de l'enveloppe de toutes les sphères (V), tout comme la recherche du lieu de tous les points (x, y, z) se réduit à l'élimination de a, b, c, a', b', c' entre les sept équations (S), (S'), (P'), (Q'), (P), (Q), (V); donc cette enveloppe n'est autre chose que le lieu même des points (x, y, z); or chacun de ces points, étant celui où l'une des sphères est percée par le rayon réfracté qui émane de son centre, doit être normal à sa surface; il le sera donc aussi à l'enveloppe qui la touche en ce point; on a donc finalement cet élégant théorème :

THÉORÈME I. Deux milieux homogènes, d'un pouvoir réfringent inégal, étant séparés par une surface quelconques, et des rayons incidens, situés dans l'un d'eux, étant traversés orthogonalement par une même surface; si des différens points de la surface séparatrice des deux milieux, pris successivement pour centres, on décrit des sphères, dont les rayons soient aux distances de leurs centres à la surface trajectoire orthogonale des rayons incidens dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence, l'enveloppe de toutes ces sphères sera une des surfaces trajectoires orthogonales des rayons réfractés (*).

Si l'on suppose les rayons incidens parallèles à une droite fixe, tout plan perpendiculaire à cette droite pourra être pris pour surface trajectoire orthogonale de ces rayons, et on obtiendra le théorème suivant :

THÉORÈME II. Deux milieux homogènes d'un pouvoir réfringent inégal étant séparés par une surface quelconque, et des rayons incidens parallèles étant dirigés d'une manière quelconque dans l'un de ces milieux; Si, des différens points de la surface séparatrice, pris successivement pour centres, on décrit des sphères, dont les rayons soient aux distances de leurs centres à un plan

(*) M. Sarrus nous a adressé postérieurement une démonstration de ce théorème.

fixe conduit arbitrairement, dans une direction perpendiculaire à celle des rayons incidens, dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence, l'enveloppe de toutes ces sphères sera une des surfaces trajectoires orthogonales des rayons réfractés.

Si l'on suppose que les rayons incidens émanent d'un même point, toute sphère décrite de ce point comme centre pourra être prise pour surface trajectoire orthogonale de ces rayons. En choisissant donc pour cette surface une sphère du rayon nul, on obtiendra le théorème suivant :

THORÈME III. Deux milieux homogènes d'un pouvoir réfringent inégal étant séparés par une surface quelconque, et un point rayonnant étant situé d'une manière quelconque dans l'un d'eux, si, des différens points de la surface séparatrice des deux milieux, pris successivement pour centres, on décrit des sphères dont les rayons soient aux distances de leurs centres au point radieux dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence, l'enveloppe de toutes ces sphères sera une des surfaces trajectoires orthogonales des rayons réfractés.

Si l'on suppose que les sinus d'incidence et de réfraction ne diffèrent l'un de l'autre que par le signe, la réfraction se changera en réflexion, et on obtiendra ces trois autres théorèmes.

THÉORÈME IV. Des rayons de lumière normaux à tous les points d'une surface quelconque se réfléchissant à la rencontre d'une autre surface également quelconque ; si, des différens points de la surface réfléchissante, pris successivement pour centres, on décrit des sphères tangentes à la surface trajectoire orthogonale des rayons incidens ; l'enveloppe de toutes ces sphères sera une des surfaces trajectoires orthogonales des rayons réfléchis (*).

(*) M. Dupin a donné une démonstration géométrique fort élégante de ce théorème, à la page 195 de ses *Applications de géométrie*. Nous accueillerions avec empressement une démonstration analogue de notre *Théorème I*, si elle nous était adressée.

THÉORÈME V. Des rayons de lumière parallèles entre eux se réfléchissant à la rencontre d'une surface quelconque; si, des différens points de cette surface, pris successivement pour centres, on décrit des sphères tangentes à un même plan, perpendiculaire à la direction commune des rayons incidens; l'enveloppe de toutes ces sphères sera une des surfaces trajectoires orthogonales des rayons réfléchis.

THÉORÈME VI. Des rayons de lumière, issus d'un même point de l'espace, se réfléchissant à la rencontre d'une surface quelconque; si, des différens points de cette surface, pris successivement pour centres, on décrit des sphères qui passent par le point rayonnant; l'enveloppe de toutes ces sphères sera une des trajectoires orthogonales des rayons réfléchis.

Si l'on suppose que la surface trajectoire orthogonale des rayons incidens, ainsi que la surface séparatrice ou réfléchissante, sont deux surfaces de révolution ayant même axe; auquel cas l'enveloppe de sphères sera aussi une surface de révolution, ayant même axe que les deux premières; en considérant ce qui se passe dans un plan quelconque, passant par cet axe, on retombera sur les six théorèmes relatifs aux caustiques planes que nous avons démontrés dans le mémoire rappelé au commencement de celui-ci qui, de cette sorte, peut le suppléer complètement.

On voit, par ce qui précède, que si des rayons incidens peuvent être traversés orthogonalement par une même surface, ou, ce qui revient au même, si ces rayons forment deux séries de surfaces développables, telles que chacune des surfaces de l'une des séries soit coupée orthogonalement par toutes les surfaces de l'autre série; ce qui comprend, comme cas particuliers, les cas où ces rayons seraient issus d'un même point ou parallèles entre eux; tant de réfraction et de réflexion qu'on voudra leur faire subir successivement à la rencontre de surfaces quelconques, ne pourront leur faire perdre ce caractère, c'est-à-dire, qu'après les avoir subies, ils pourront encore être traversés orthogonalement par une même surface, et seront conséquemment distribués en deux séries de surfaces développables, telles que chacune des surfaces de l'une des séries sera traversée orthogonalement par toutes les surfaces de l'autre série. C'est en cela que consiste la belle extension donnée par M. Dupin aux théorèmes de Malus, qui ne croyait la proposition vraie que pour une première réfraction ou une première réflexion seulement. Ce qui précède présente même un moyen facile et uniforme d'obtenir une trajectoire orthogonale des derniers rayons réfractés ou réfléchis, lorsqu'on connaît une trajectoire orthogonale des premiers rayons incidens, les diverses surfaces séparatrices ou réfléchissantes, et les pouvoirs réfringens des divers milieux homogènes séparés par ces surfaces.

Dans le cas d'une réfraction ou d'une réflexion unique, lorsque le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction est donné, de ces trois choses, la surface séparatrice ou réfléchissante, la surface trajectoire orthogonale des rayons incidens et la surface trajectoire orthogonale des rayons réfractés ou réfléchis, deux quelconques étant données, on peut toujours déterminer la troisième.

En effet 1.° nous avons déjà vu qu'en représentant par a', b', c' les coordonnées de la trajectoire orthogonale des rayons incidens, par a, b, c les coordonnées de la surface séparatrice ou réfléchissante, par $S=0$, $S'=0$, les équations respectives de ces deux surfaces, par $\frac{n}{m}$ le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, posant pour abréger

$$\frac{dc}{da}=p, \quad \frac{dc}{db}=q, \quad \frac{dc'}{da'}=p', \quad \frac{dc'}{db'}=q',$$

et désignant enfin par x, y, z les coordonnées de la trajectoire orthogonale des rayons réfractés ou réfléchis, l'équation de cette dernière surface était le résultat de l'élimination de a, b, c, a', b', c' entre les sept équations

$$S=0 \quad , \qquad S'=0 \; ,$$

$$(a-a')+p'(c-c')=0 \quad , \qquad (b-b')+q'(c-c')=0 \; ,$$

$$m^2\{(x-a)+p(z-c)\}+n^2\{(a-a')+p(c-c')\}=0 \; ,$$

$$m^2\{(y-b)+q(z-c)\}+n^2\{(b-b')+q(c-c')\}=0 \; ,$$

$$m^2\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}=n^2\{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2\} \; .$$

2.° Si l'on demandait à quelle surface des rayons incidens doivent être normaux pour qu'après s'être réfractés ou réfléchis à la rencontre d'une surface donnée, ils devinssent normaux à une autre surface donnée ; on éliminerait d'abord x, y, z entre les trois dernières équations et l'équation donnée de la trajectoire orthogonale des rayons réfractés ou réfléchis ; éliminant ensuite a, b, c entre l'équation résultante, l'équation $S=0$ et les deux équations

$$(a-a')+p'(c-c')=0 \; , \quad (b-b')+q'(c-c')=0 \; ,$$

l'équation qu'on obtiendrait en a', b', c', p', q' serait l'équation différentielle de la trajectoire orthogonale des rayons incidens.

3.° Si enfin on demandait à la rencontre de quelle surface des rayons de lumière normaux à une surface donnée doivent se réfracter ou se réfléchir, pour devenir, après leur réfraction ou leur réflexion, normaux à une autre surface donnée ; on éliminerait d'abord, comme ci-dessus, x, y, z entre l'équation donnée de la trajectoire orthogonale des rayons réfractés ou réfléchis. Eliminant ensuite a', b', c' entre l'équation résultante, l'équation $S'=0$ et les deux équations

$$(a-a')+p'(c-c')=0 \; , \quad (b-b')+q'(c-c')=0 \; ,$$

l'équation résultante en a, b, c, p, q serait l'équation différentielle de la surface séparatrice ou réfléchissante cherchée.

Soient des rayons incidens normaux à une surface quelconque. Après avoir subi tant de réfractions et de réflexions consécutives qu'on voudra, à la rencontre d'autres surfaces séparant des milieux homogènes quelconques, ils deviendront normaux à une autre surface; et l'on pourra, comme dans la dernière question que nous venons de traiter, déterminer l'équation différentielle de la surface unique à la rencontre de laquelle les rayons incidens devraient se réfracter ou se réfléchir, pour devenir immédiatement normaux à la dernière des deux surfaces, et, parce que l'équation sera différentielle, le problème aura une infinité de solutions, même dans le cas de la réflexion, pour lequel $\frac{m}{n}=-1$.

Donc, *pour des rayons de lumières normaux à une même surface, l'effet de tant de réfractions et de réflexions consécutives qu'on voudra, à la rencontre de surfaces quelconques, séparant des milieux homogènes également quelconques, peut toujours être remplacé, et même d'une infinité de manières différentes, soit par une réfraction soit par une réflexion unique.* Nous revenons donc ici, par une route beaucoup plus briève, à la proposition que nous nous étions proposés d'établir dans la troisième partie du mémoire de la page 129 de notre XIV.e volume.

Le peu qui précède peut donc remplacer, à la rigueur, et le grand travail de Malus, et l'extension remarquable qu'il a reçue entre les mains de M. Dupin, et le long article que nous venons de rappeler, et enfin celui que nous avons récemment publié sur les caustiques planes; de sorte qu'il ne nous restera plus maintenant qu'à offrir des applications variées de nos formules.

A mesure qu'une science s'étend et s'enrichit de nouveaux faits, a dit un grand géomètre, elle en devient aussi plus compliquée; et on ne saurait la simplifier qu'en généralisant et réduisant, à la fois, les méthodes qui peuvent être susceptibles de ces avantages.

C'est là aussi le but que nous nous sommes efforcés d'atteindre dans l'essai qu'on vient de lire.