ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

POISSON

Analise appliquée. Mémoire sur l'avantage du banquier au jeu de trente et quarante

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 173-208
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__173_0>

ANALISE APPLIQUÉE.

Mémoire sur l'avantage du banquier au jeu de trente et quarante ;

Par M. le B.on Poisson, de l'académie royale des Sciences, Conseiller au Conseil royal de l'instruction publique.

(*Lu à l'Académie des Sciences le* 13 *mars* 1820.)

L'ÉVALUATION des chances, dans les jeux de hasard, a été l'origine du calcul des probabilités, et l'objet des problèmes résolus d'abord par Pascal, Fermat, Huyghens et les autres géomètres qui se sont les premiers occupés de ce calcul. Ceux qui les ont suivis dans cette carrière, et particulièrement M. Laplace, ne se sont pas bornés à résoudre des problèmes de cette nature ; ils ont étendu les applications de ce calcul à des questions d'un plus grand intérêt ; et la théorie des probabilités est devenue une des branches les plus importantes des sciences mathématiques. Mais, parmi les nombreuses questions, d'espèces si différentes, qui dépendent de cette théorie, il en existe une qui n'a point encore fixé l'attention des géomètres, ou, du moins, je n'ai vu nulle part qu'ils se soient occupés du calcul des chances, dans le jeu connu indifféremment sous le nom de *trente et quarante* ou sous celui de *trente et un.* A la vérité, on trouve dans l'Encyclopédie, par ordre de matières, à la suite de la description de ce jeu, une évaluation numérique des chances qu'il présente, mais, avec un peu de réflexion, on s'assure aisément de l'inexactitude du principe sur lequel ce calcul est fondé. Cependant, le *trente et un* étant le jeu auquel on expose annuellement le plus d'argent, dans les jeux publics, il serait utile de reconnaître *à priori* l'avantage des personnes auxquelles la ville de Paris concède le privilége exclusif de ces jeux. Cette question d'ailleurs, par la complication des conditions du jeu, est un des problèmes de probabilité les plus curieux qu'on puisse se proposer. La plupart de ces problèmes se résolvent, comme on sait, par des méthodes uniformes, fondées sur l'intégration des équations aux différences finies et partielles; mais, dans la question dont il s'agit ici, on ne tarde pas à reconnaître que l'usage de ces équations ne pourrait être d'aucun secours, et l'on est obligé, pour la résoudre, de recourir à de nouveaux moyens. Ceux que j'ai employés, dans ce mémoire, m'ont conduit à des formules dont le développement, suivant les puissances d'une ou de plusieurs variables, fera connaître toutes les chances du *trente et quarante* que l'on voudra déterminer; de la même manière que, dans des questions moins compliquées, le développement de la puissance d'un binome, ou d'un polynome composé de plus de deux termes, sert à trouver la probabilité des événemens composés, d'après celle des événemens simples. La conséquence principale que j'en ai déduite est qu'au jeu du *trente et quarante*, l'avantage du banquier est à très-peu près égal aux *onze millièmes* de la somme des mises, ou, autrement dit, que, dans une très-longue suite de coups, celui que l'on nomme *refait de trente et un*, et pour lequel le banquier prend la demi-somme des mises, doit revenir, à très-peu près, *vingt-deux fois* pour *un millier* de coups; la probabilité de cette proportion pouvant approcher de la certitude d'aussi près qu'on voudra, en prolongeant le jeu convenablement.

1. Le jeu de *trente et quarante* se joue avec six jeux de cartes complets, formant en tout 312 cartes. Les figures comptent pour

dix, les as pour un, et chacune des autres cartes pour le nombre de ses points. Toutes les cartes étant mêlées, on tire successivement une, deux, trois, ... cartes, jusqu'à ce que la somme des points des cartes tirées ait passé trente; et l'on s'arrête aussitôt qu'elle a dépassé cette limite. On fait ensuite un second tirage, semblable au premier, c'est-à-dire, que l'on tire de même, sur les cartes restantes, une, deux, trois, ... cartes, jusqu'à ce que la somme de leurs points ait surpassé trente. L'ensemble de ces deux tirages forme ce qu'on appelle un *coup*. Après le premier coup, on en joue un second, de la même manière, avec les cartes restantes; après celui-ci un troisième; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé la totalité des cartes que l'on avait d'abord. Quand ces 312 cartes sont tirées, ou bien, quand il n'en reste plus assez pour faire un coup complet, on a achevé ce qu'on appele une *taille;* et le jeu peut ensuite recommencer, suivant les mêmes règles, avec les mêmes ou d'autres cartes.

Puisque l'on s'arrête, dans chaque tirage, dès qu'on a dépassé trente, et puisque 10 est le plus haut point qu'une carte puisse amener, il s'ensuit que chaque tirage ne peut présenter que 10 points différens, dont le plus petit sera 31 et le plus grand 40. En ajoutant les points de toutes les cartes qui composent six jeux complets, la somme est égale à 2040. Chaque coup emploîra au plus 80 et au moins 62 de ces points; le nombre des coups qui composeront une taille entière sera donc toujours compris entre $\frac{2040}{80}$ et $\frac{2040}{62}$, ou entre 25 et 32.

Avant qu'un coup soit commencé, chaque joueur parie contre le *banquier*, pour l'un ou l'autre des deux tirages dont ce coup sera composé. Le tirage qui amène le plus petit point, ou le moins éloigné de trente, est celui qui gagne. Le banquier paye aux joueurs qui ont parié pour ce tirage une somme égale à celle qu'ils ont jouée, et il prend les mises des joueurs qui ont parié pour l'autre tirage (*). Si les deux tirages amènent des points égaux, et supérieurs à 31, comme 32 et 32, 33 et 33, ... 40 et 40, le coup est nul : le banquier ne paye ni ne reçoit rien pour ces sortes de coups; de sorte que s'il en était de même pour le coup 31 et 31, le banquier n'aurait évidemment aucun avantage, et le jeu serait parfaitement égal entre les joueurs et lui. Mais, lorsqu'il arrive ce qu'on appelle un *refait* de 31, ou autrement dit, si les deux tirages d'un même coup amènent ce nombre, le coup n'est pas réputé nul, et le banquier prend la moitié des mises de tous les joueurs. L'avantage du banquier, au jeu de *trente et quarante*, est donc égal, pour chaque coup, à la demi-somme de toutes les mises, multipliée par la probabilité du refait de 31, relative à ce coup. Ainsi, l'objet principal de ce mémoire consiste à déterminer cette probabilité. Mais nous allons, auparavant, résoudre plusieurs problèmes de hasard qui n'avaient point encore été traités jusqu'ici, et dont cette détermination ne sera plus qu'une application particulière.

2. Une urne renferme x_1 boules portant le numéro 1, x_2 boules portant le numéro 2, x_3 boules portant le numéro 3, ..., enfin x_i boules portant le numéro i, le plus haut de tous ceux dont les boules sont marquées; on tire successivement une, deux, trois, ... boules, sans les remettre dans l'urne, après qu'elles

(*) Communément, pour plus de commodité, les joueurs, qu'on appelle aussi les *pontes*, placent leurs mises sur le bord de deux cartons circulaires, l'un noir, répondant au premier tirage de chaque coup, et l'autre rouge, répondant au second; et de là vient que, dans quelques localités, le *trente et quarante* est aussi appelé la *rouge et noire*, et qu'on dit parier pour la couleur noire ou pour la rouge, suivant qu'on parie pour le premier ou pour le second tirage.

J. D. G.

en sont sorties ; cette suite de tirages se continue, jusqu'à ce que la somme des numéros amenés par les boules ait atteint ou surpassé un nombre donné x : on demande la probabilité que cette somme sera égale au nombre x ?

Soit s le nombre total des boules contenues dans l'urne ; en sorte qu'on ait

$$x_1+x_2+x_3+\dots\dots+x_i=s.$$

Désignons par a_1, a_2, a_3, ... a_i, des nombres entiers ou nuls, respectivement moindres que x_1, x_2, x_3, ... x_i, ou qui leur soient tout au plus égaux : et faisons aussi

$$a_1+a_2+a_3+\dots\dots+a_i=n.$$

Par les premières règles du calcul des probabilités, si l'on fait un nombre n de tirages successifs, sans remettre les boules dans l'urne, la probabilité d'amener d'abord a_1 boule n.° 1, ensuite a_2 boules n.° 2, puis a_3 boules n.° 3 ....., enfin a_i boules n.° i, sera exprimée par

$$\frac{(s-n)!}{s!}\cdot\frac{x_1!}{(x_1-a_1-1)!}\cdot\frac{x_2!}{(x_2-a_2-1)!}\cdot\frac{x_3!}{(x_3-a_3-1)!}\cdots\frac{x_i!}{(x_i-a_i-1)!};$$

en adoptant, en général, avec quelques géomètres, pour la commodité typographique, l'expression $k!$, comme le symbole de 1.2.3 .... k. Pour en déduire la probabilité d'amener, dans un ordre quelconque, en n tirages, a_1 boules n.° 1, a_2 boules n.° 2, a_3 boules n.° 3, ... a_i boules n.° i, il faudrait multiplier cette quantité par le nombre 1.2 3.... n de permutations dont sont susceptibles les n numéros amenés, si tous ces numéros étaient différens; mais, à cause que les numéros égaux ne doivent pas être permutés entre eux, il faudra multiplier la probabilité précédemment obtenue seulement par

$$\frac{n!}{a_1!a_2!a_3!\ldots\ldots a_i!};$$

ce qui donnera un produit qui pourra s'écrire ainsi

$$\frac{n!(s-n)!}{s!}\cdot\frac{x_1!}{a_1!(x_1-a_1-1)!}\cdot\frac{x_2!}{a_2!(x_2-a_2-1)!}\cdots\frac{x_i!}{a_i!(x_i-a_i-1)!}.$$

Or, en intégrant, depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$, on a

$$\frac{n!(s-n)!}{s!}=(s+1)\int(1-y)^{s-n}y^n\,\mathrm{d}y\ ;$$

en faisant donc, pour abréger

$$\frac{x_1!y^{a_1}}{a_1!(x_1-a_1)!(1-y)^{a_1}}\cdot\frac{x_2!y^{a_2}}{a_2!(x_2-a_2)!(1-y)^{a_2}}\cdots\cdots\frac{x_i!y^{a_i}}{a_i!(x_i-a_i)!(1-y)^{a_i}}=Y,$$

et observant que la somme des exposans a_1, a_2, a_3, ... a_i est égale à n, ce produit deviendra donc

$$(s+1)\int(1-y)^s Y\mathrm{d}y.$$

La somme des numéros amenés par cette suite de tirages sera $a_1+2a_2+3a_3+\ldots\ldots+ia$; or, d'après l'énoncé du problème, cette somme doit être égale à x ; la probabilité demandée par cet énoncé sera donc égale à la somme des valeurs que l'on déduira de l'expression $(s+1)\int(1-y)^s Y\mathrm{d}y$, en y donnant aux nombres a_1, a_2, a_3, ... a_i, toutes les valeurs, y compris zéro, qui satisfont à l'équation

$$a_1+2a_2+3a_3+\ldots\ldots+ia_i=x.$$

Donc, si nous désignons par Y_1 la somme de toutes les valeurs de Y qui répondent à ces valeurs de a_1, a_2, a_3, ... a_i, et par X la probabilité demandée, nous aurons

$$X=(s+1)\int(1-y)^s Y_1 dy \;.$$

Maintenant, prenons une indéterminée t, et supposons qu'on fasse le produit des séries suivantes :

$$1+\frac{x_1}{1}\cdot\frac{yt}{1-y}+\frac{x_1}{1}\cdot\frac{x_1-1}{2}\cdot\frac{y^2t^2}{(1-y)^2}+\frac{x_1}{1}\cdot\frac{x_1-1}{2}\cdot\frac{x_i-2}{3}\cdot\frac{y^3t^3}{(1-y)^3}+\ldots..,$$

$$1+\frac{x_2}{1}\cdot\frac{yt^2}{1-y}+\frac{x_2}{1}\cdot\frac{x_2-1}{2}\cdot\frac{y^2t^4}{(1-y)^2}+\frac{x_2}{1}\cdot\frac{x_2-1}{2}\cdot\frac{x_2-2}{3}\cdot\frac{y^3t^6}{(1-y)^3}+\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$1+\frac{x_i}{1}\cdot\frac{yt^i}{1-y}+\frac{x_i}{1}\cdot\frac{x_i-1}{2}\cdot\frac{y^2t^{2i}}{(1-y)^2}+\frac{x_i}{1}\cdot\frac{x_i-1}{2}\cdot\frac{x_i-2}{3}\cdot\frac{y^3t^{3i}}{(1-y)^3}+\ldots;$$

si l'on ordonne ce produit par rapport aux puissances de t, il est évident, d'après la forme de Y, que la somme Y_1 des valeurs de cette quantité ne sera autre chose que le coefficient de t^x dans la série qu'on obtiendra ; d'ailleurs, les i facteurs du produit sont les développemens des puissances

$$\left(1+\frac{yt}{1-y}\right)^{x_1},\ \left(1+\frac{yt^2}{1-y}\right)^{x_2},\ \ldots..\ \left(1+\frac{yt^i}{1-y}\right)^{x_i};$$

donc, à cause de $x_1+x_2+x_3+\ldots..+x_i=s$, Y_1 sera le coefficient de t^x, dans le développement du produit

$$(1-y)^s(1-y+yt)^{x_1}(1-y+yt^2)^{x_2}\ldots..(1-y+yt^i)^{x_i},$$

et par conséquent, la probabilité X sera aussi le coefficient de t^x dans le développement de

$$(s+1)\int(1-y+yt)^{x_1}(1-y+yt^2)^{x_2}(1-y+yt^3)^{x_3}\ldots.(1-y+yt^i)^{x_i}dy\ ;$$

l'intégrale étant prise, comme précédemment, depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$.

3. Pour résoudre le même problème par le moyen des équations aux différences finies, j'observe que la probabilité demandée est une fonction du nombre x et des nombres x_1, x_2, x_3, ... x_i, et je la désigne par $Z_{x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots..\ x_i}$. Après le premier tirage, cette fonction deviendra l'une des quantités

$$Z_{x-1,\ x_1-1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots..\ x_i}\ ,$$

$$Z_{x-2,\ x_1,\ x_2-1,\ x_3,\ \ldots..\ x_i}\ ,$$

$$Z_{x-3,\ x_1,\ x_2,\ x_3-1,\ \ldots...\ x_i}\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

$$Z_{x-i,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots...\ x_i-1}\ ,$$

suivant que la boule sortie portera quelqu'un des numéros 1, 2, 3, ... i, respectivement. Les probabilités de ces événemens sont d'ailleurs respectivement

$$\frac{x_1}{s}\ ,\ \frac{x_2}{s}\ ,\ \frac{x_3}{s}\ ,\ \ldots...\ \frac{x_i}{s}\ ;$$

or, il est évident que la probabilité avant le premier tirage est égale à la somme des probabilités qui auront lieu après, multipliées chacune par la probabilité de l'évènement auquel elle répond : c'est ce principe qui sert à mettre en équation la plupart des problèmes de probabilité ; et, dans la question présente, il en résulte que nous aurons

$$Z_{x, x_1, x_2, x_3, \ldots x_i} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{s} Z_{x-1,\ x_1-1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots x_i} \\ + \frac{x_2}{s} Z_{x-2,\ x_1,\ x_2-1,\ x_3,\ \ldots x_i} \\ + \frac{x_3}{s} Z_{x-3,\ x_1,\ x_2,\ x_3-1,\ \ldots x_i} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{x_i}{s} Z_{x-i,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots x_i-1} \end{array} \right\} \quad (1)$$

Le même raisonnement montre que, si l'on a $x=a$, a étant plus petit que i, on aura

$$Z_{a, x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_i} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{s} Z_{a-1,\ x_1-1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots x_i} \\ + \frac{x_2}{s} Z_{a-2,\ x_1,\ x_2-1,\ x_3,\ \ldots\ldots x_i} \\ + \frac{x_3}{s} Z_{a-3,\ x_1,\ x_2,\ x_3-1,\ \ldots x_i} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{x_{a-1}}{s} Z_{1, x_1, x_2, x_3 \ldots x_{a-1}-1 \ldots x_i} \\ + \frac{x_a}{s}\,. \end{array} \right\}$$

En comparant cette équation à la précédente, on voit que, pour qu'elle y soit comprise, et pour que l'équation (1) subsiste, pour toutes les valeurs de $x<i$, il est nécessaire de supposer la fonction Z égale à l'unité, quand $x=0$, et nulle, pour toutes les valeurs négatives de x plus petites que i, abstraction faite du signe, quelles que soient d'ailleurs les autres variables x_1, x_2, x_3, ... x_i. Cela étant, en faisant successivement $x=1$, $x=2$, $x=3$, ..., dans l'équation (1), on en déduira

$$Z_{1,\, x_1,\, x_2,\, \ldots\, x_i} = \frac{x_1}{s},$$

$$Z_{2,\, x_1,\, x_2,\, \ldots\, x_i} = \frac{x_1}{s} Z_{1,\, x_1-1,\, x_2\, \ldots\, x_i} + \frac{x_2}{s},$$

$$Z_{3,\, x_1,\, x_2,\, \ldots\, x_i} = \frac{x_1}{s} Z_{2,\, x_1-1,\, x_2\, \ldots\, x_i} + \frac{x_2}{s} Z_{3,\, x_1,\, x_2-1,\, \ldots\, x_i} + \frac{x_3}{s},$$

. . . .

mettant aussi successivement x_1-1, x_2-1, x_3-1, ..., à la place de x_1, x_2, x_3, ..., dans la première de ces équations, on pourra ensuite éliminer les quantités

$$Z_{1,\, x_1-1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\, x_i},$$

$$Z_{1,\, x_1,\, x_2-1,\, x_3,\, \ldots\, x_i},$$

$$Z_{1,\, x_1,\, x_2,\, x_3-1,\, \ldots\, x_i},$$

. . . .,

contenues dans les autres, et l'on aura

$$Z_{2,\, x_1,\, x_2,\, \ldots\, x_i} = \frac{x_1}{s} \cdot \frac{x_1-1}{s-1} + \frac{x_2}{s},$$

$$Z_{3,\, x_1,\, x_2,\, \ldots\, x_i} = \frac{x_1}{s} Z_{2,\, x_1-1,\, x_2,\, \ldots\, x_i} + \frac{x_2}{s} \cdot \frac{x_1}{s-1} + \frac{x_3}{s},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

et de même, au moyen de celles-ci, on obtiendrait

$$Z_{3,\, x_1,\, x_2,\, \ldots\, x_i} = \frac{x_1}{s} \cdot \frac{x_1-1}{s-1} \cdot \frac{x_1-2}{s-2} + 2\,\frac{x_2}{s} \cdot \frac{x_1}{s-1} + \frac{x_3}{s},$$

et ainsi de suite,

De cette manière, on calculera aisément la probabilité demandée, lorsque x sera un petit nombre ; mais le calcul deviendra impraticable, dès que ce nombre sera un peu considérable ; et il faudra alors recourir à l'intégrale générale de l'équation (1). Cette équation linéaire a ses coefficiens variables ; néanmoins, si l'on multiplie tous ses termes par s, ses coefficiens ne renfermeront les variables qu'au premier degré ; circonstance d'après laquelle il sera possible d'intégrer l'équation (1) par le moyen des intégrales définies. Mais cette méthode ne conduirait que très-difficilement à la solution du problème que nous nous sommes proposé ; c'est pouquoi nous nous bornerons à vérifier que la solution que nous avons trouvée satisfait à l'équation (1)

4 Soit, pour y parvenir,

$$\Sigma t^x Z_{x,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\, x_i} = T_{x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\, x_i};$$

Σ indiquant une somme qui s'étend à toutes les valeurs entières et positives de x, y compris $x=0$, et jusqu'à $x=\infty$. Les valeurs de la fonction Z qui répondent à des x négatives étant nulles, d'après ce qu'on a dit plus haut, on aura

$$\Sigma t^{x} Z_{x-i', x_1, x_2 \ldots x_i} = t^{i'} T_{x_1, x_2, \ldots x_i},$$

i' étant un nombre entier et positif; et, à cause que cette fonction i' est égale à l'unité quand $x=0$, le premier terme de la fonction T sera aussi égal à un. Si donc nous multiplions l'équation (1) par tx, que nous donnions ensuite à x toutes les valeurs comprises depuis $x=1$ jusqu'à $x=\infty$, et que nous fassions la somme de toutes les équations qui répondent à ces valeurs, nous aurons pour résultat

$$T_{x_1, x_2, \ldots x_i} - 1 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{tx_1}{s} T_{x_1-1, x_2, x_3, \ldots x_i} \\ + \frac{t^2 x_2}{s} T_{x_1, x_2-1, x_3, \ldots x_i} \\ + \frac{t^3 x_3}{s} T_{x_1, x_2, x_3-1, \ldots x_i} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \quad T_{x_1, x_2, x_3 \ldots x_i - 1} \end{array} \right\} (2)$$

D'ailleurs, en ayant égard à l'expression de X, trouvée à la fin du n.° 1, et qui doit aussi être la valeur de la fonction Z, on voit qu'on doit avoir

$$T_{x_1, x_2, x_3, \ldots x_i} = (s+1) \int (1-y+yt)^{x_1} (1-y+yt^2)^{x_2} \ldots (1-y+yt^i)^{x_i} dy;$$

l'intégrale étant prise depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$; la question consiste donc à vérifier que cette valeur de la fonction T satisfait à l'équation (2), quelle que soit la variable t.

Or, je fais

$$\frac{y}{1-y}=u, \quad \text{ou } y=\frac{u}{1+u}, \quad \text{et } dy=\frac{du}{(1+u)^2};$$

et, pour abréger,

$$(1+ut)^{x_1}.(1+ut^2)^{x_2}.(1+ut^3)^{x_3}\ldots\ldots(1+ut^i)^{x_i}=U;$$

l'équation précédente devient

$$T_{x_1, x_2, x_3, \ldots x_i}=(s+1)\int\frac{U du}{(1+u)^{s+2}};$$

et l'intégrale devra être prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=\infty$. En mettant successivement, dans cette équation précédente x_1-1, x_2-1, x_3-1, ... x_i-1 à la place de x_1, x_2, x_3, ... x_i, et, en même temps, $s-1$ à la place de s, on aura

$$T_{x_1-1, x_2, \ldots x_i}=s\int(1-y+yt)^{x_1-1}(1-y+yt^2)^{x_2}\ldots(1-y+yt^i)^{x_i}dy,$$

$$T_{x_1, x_2-1, \ldots x_i}=s\int(1-y+yt)^{x_1}.(1-y+yt^2)^{x_2-1}\ldots(1-y+yt^i)^{x_i}dy,$$

. . . . ,

$$T_{x_1, x_2, \ldots x_i-1}=s\int(1-y+yt)^{x_1}.(1-y+yt^2)^{x_2}\ldots\ldots(1-y+yt^i)^{x_i-1}dy;$$

mais, en différentiant U par rapport à u, on a

$$\frac{dU}{du}=\left\{\begin{array}{l} tx_1(1+ut)^{x_1-1}.(1+ut^2)^{x_2}\ldots\ldots(1+ut^i)^{x_i} \\ +t^2x_2(1+ut)^{x_1}.(1+ut^2)^{x_2-1}\ldots\ldots(1+ut^i)^{x_i} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +t^ix_i(1+ut)^{x_1}.(1+ut^2)^{x_2}\ldots\ldots(1+ut^i)^{x_i-1} \end{array}\right\};$$

et, si l'on compare cette équation aux précédentes, on en conclut facilement

$$s\int\frac{dU}{(1+u)^{s+1}}=\left\{\begin{array}{l} tx_1T_{x_1-1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_i} \\ +t^2x_2T_{x_1,\ x_2-1,\ x_3,\ \ldots\ x_i} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +t^ix_iT_{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots\ x_i-1} \end{array}\right\}.$$

Au moyen de ces résultats, l'équation (2) devient

$$(s+1)\int\frac{Udu}{(1+u)^{s+2}}-1=\int\frac{dU}{(1+u)^{s+1}}\ ; \qquad (3)$$

mais, en intégrant par parties, il vient

$$\int\frac{dU}{(1+u)^{s+1}}=\frac{U}{(1+u)^{s+1}}+(s+1)\int\frac{Udu}{(1+u)^{s+2}}\ ;$$

à la limite $u=0$, on a $U=1$; à la limite $u=\infty$, on a

$$\frac{U}{(1+u)^{s+1}}=0,$$

parce que U est le produit de s facteurs du premier degré par rapport à u ; on aura donc

$$\int\frac{dU}{(1+u)^{s+1}}=-1+(s+1)\int\frac{Udu}{(1+u)^{s+2}};$$

ce qui rend identique l'équation (3) qu'il s'agissait de vérifier.

5. Maintenant, proposons-nous ce second problème : les mêmes choses étant posées que dans le premier, on fait une première suite de tirages que l'on continue jusqu'à ce que la somme des numéros amenés ait atteint ou surpassé le nombre x ; ensuite, sans remettre les numéros sortis, on fait une seconde suite de tirages, que l'on prolonge jusqu'à ce que la somme des numéros amenés ait de même atteint ou surpassé un nombre aussi donné x', on demande la probabilité qu'on obtiendra, à la fois, la somme x, dans la première opération, et la somme x', dans la seconde ?

Comme dans le premier problème, la probabilité d'amener, dans la première suite de tirages et dans un ordre quelconque, a_1 boules n.° 1, a_2 boules n.° 2, a_3 boules n.° 3, ... a_i boules n.° i, sera exprimée par

$$\frac{n!(s-n)!}{s!}\cdot\frac{x_1!}{a_1!(x_1-a_1)!}\cdot\frac{x_2!}{a_2!(x_2-a_2)!}\cdots\frac{x_i!}{a_i!(x_i-a_i)!};$$

cet événement ayant eu lieu, la probabilité d'amener à la seconde suite de tirages, aussi dans un ordre quelconque, b_1 boules n.° 1, b_2 boules n.° 2, b_3 n.° 3, ... b_i boules n.° i, sera

$$\frac{n'!(s-n-n')!}{(s-n)!}\cdot\frac{(x_1-a_1)!}{b_1!(x_1-a_1-b_1)!}\cdot\frac{(x_2-a_2)!}{b_2!(x_2-a_2-b_2)!}\cdots\frac{(x_i-a_i)!}{b_i!(x_i-a_i-b_i)!}\ ;$$

en désignant respectivement par n et n' les nombres de numéros qui composent le premier et le second tirages, c'est-à-dire, en faisant

$$a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_i=n\ ,$$

$$b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots+b\ =n'\ .$$

La probabilité de la succession de ces deux événemens l'un à l'autre sera le produit des deux probabilités qui leur correspondent, lequel produit pourra s'écrire ainsi

$$\frac{(n+n')!(s-n-n')!}{s!}\cdot\frac{n!n'!}{(n+n')!}\cdot\frac{x_1!}{a_1!b_1!(x_1-a_1-b_1)!}\cdot\frac{x_2!}{a_2!b_2!(x_2-a_2-b_2)!}\cdots\frac{x_i!}{a_i!b_i!(x_i-a_i-b_i)!}\ ;$$

or, en intégrant depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$, et depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$, nous avons

$$\frac{(n+n')!(s-n-n')!}{s!}(s+1)=\int(1-y)^{s-n-n'}y^{n+n'}dy\ ,$$

$$\frac{n!n'!}{(n+n')!}=(n+n'+1)\int(1-z)^{n'}z^{n}dz\ ;$$

de plus en faisant $\alpha=1$, après la différentiation, nous avons aussi

$$n+n'+1=\frac{d.\alpha^{n+n'+1}}{d\alpha}\ ;$$

ce qui change la dernière équation en celle-ci

$$\frac{n!n'!}{(n+n')!}=\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}\alpha}\int(1-z)^{n'}z^{n}.\alpha^{n+n'+1}\mathrm{d}z\ ,$$

et, au moyen de ces valeurs et de celles de n et n', le précédent produit sera égal à

$$(s+1)\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}\alpha}\iint P(1-y)^{s}\alpha\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ ;$$

en faisant, pour abréger

$$X_1.X_2.X_3\ .....\ X_i=P$$

où l'on désigne par X_m, en général, le produit

$$\frac{x_m!y^{a_m+b_m}(1-z)^{b_m}z^{a_m}\alpha^{a_m+b_m}}{a_m!b!(x_m-a_m-b_m)!(1-y)^{a_m+b_m}}\ ;$$

l'indice m étant un des nombres compris depuis 1 jusqu'à i.

L'énoncé du problème exige que l'on ait

$$a_1+2a_2+3a_3+\ ....\ +ia_i=x\ ,$$

$$b_1+2b_2+3b_3+\ ....\ +ib_i=x'\ ;$$

donc, si l'on donne aux nombres entiers positifs a_1, a_2, a_3, ... a_i, b_1, b_2, b_3, ... b_i, toutes les valeurs possibles qui satisfont à ces conditions, qu'on appelle P_1 la somme des valeurs correspondantes de P, et p la probabilité demandée par ce même énoncé, on aura

$$p=(s+1)\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}\alpha}\iint(1-y)^{s}P_1\alpha\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Mais, t et θ étant deux indéterminées différentes, on peut regarder X_m comme le coefficient du produit $t^{m a_m} . \theta^{m b_m}$, dans le développement de la puissance

$$\left\{ 1 + \frac{y\alpha}{1-y} \left[z t^m + (1-z)\theta^m \right] \right\}^{x_m} ;$$

d'où l'on conclut que P_1 sera le coefficient de $t^s \theta^{x'}$, dans le développement du produit

$$\left\{ 1 + \frac{y\alpha}{1-y}[zt+(1-z)\theta] \right\}^{x_1} . \left\{ 1 + \frac{y\alpha}{1-y}[zt^2+(1-z)\theta^2] \right\}^{x_2} \ldots \left\{ 1 + \frac{y\alpha}{1-y}[zt^i+(1-z)\theta^i] \right\}^{x_i},$$

ordonné suivant les puissances et produits de puissances de t et θ; donc enfin, à cause de $s = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_i$, la probabilité p, qu'il s'agit de déterminer sera le coefficient de $t^s \theta^{x'}$, dans le développement de cette quantité

$$(s+1)\frac{d.}{d\alpha} \iint \{1-y+y\alpha[zt+(1-z)\theta]\}^{x_1} . \{1-y+y\alpha[zt^2+(1-z)\theta^2]\}^{x_2} \ldots$$

$$\{1-y+y\alpha[zt^i+(1-z)\theta^i]\}^{x_i} \alpha\, dy\, dz ;$$

en se souvenant qu'on doit faire $\alpha = 1$, après la différentiation indiquée, et prendre les intégrales depuis $y = 0$ et $z = 0$, jusqu'à $y = 1$ et $z = 1$.

Si, au lieu d'une ou de deux suites de tirages, comme dans le premier ou le second problème que nous venons de résoudre, il y en avait trois ou un plus grand nombre, l'analise précédente conduirait à la solution de la question; mais il suffit à l'objet principal de ce mémoire d'avoir considéré le cas de deux suites de tirages, qui est en effet celui que présente le *trente et quarante*, d'après les règles de ce jeu, énoncées plus haut.

6. Pour appliquer la solution du second problème au calcul des différentes chances du *trente et quarante*, il suffit de remplacer les boules numérotées que nous avons considérées par des cartes qui porteront les numéros marqués par leur nombre de points, lesquels s'étendront, par conséquent, depuis 1 jusqu'à 10; les figures comptant pour ce dernier nombre. On aura, par exemple, la probabilité du *refait* de 31, à un coup quelconque de ce qu'on appelle une taille, en faisant $x = x' = 31$, et prenant pour x_1, x_2, x_3, ... x_i, les nombres de cartes de chaque espèce qui ne sont pas sorties aux coups précédens; en sorte que cette probabilité, et l'avantage du banquier qui en dépend, varieront d'un coup à un autre d'une même taille, à raison des cartes déjà sorties. Mais il est important d'observer que, pour déterminer l'avantage du banquier, avant que le jeu commence, c'est-à-dire, la fraction de chaque mise qu'on devrait lui abandonner pour qu'il renonçât à cet avantage pendant toute la durée du jeu, il suffit de calculer la probabilité du *refait* de 31, au premier coup seulement, ou quand les six jeux de cartes avec lesquels on joue sont encore complets. En effet, lorsque ces cartes ont été mêlées, s'il existe une chance quelconque pour qu'un événement A arrive au premier coup et un événement B à un autre coup, au dixième, par exemple; il y a exactement la même chance pour que l'événement B arrive au premier coup et l'événement A au dixième; car on peut former un autre arrangement de toutes les cartes, qui ne diffère de celui que le hasard a donné qu'en ce que les cartes qui sortent au premier coup sont remplacées par celles qui sortent au dixième, et *vice versâ*; et, comme ces deux arrangemens sont également possibles, il en résulte qu'avant que le jeu commence la probabilité d'un *refait* de 31 est la même pour le premier coup, pour le dixième, ou pour tout autre coup. Elle ne varie, pendant la durée du jeu, que pour les joueurs qui ont la connaissance des cartes sorties; mais un joueur qui ne ne les connaîtrait pas devrait parier la même somme à tous les coups, pour l'arrivée d'un *refait* de 31.

Cette considération fort simple rend possible la détermination de l'avantage du banquier, en la réduisant au calcul de la seule chance qui a eu lieu au premier coup. Observons aussi qu'on pourrait déterminer cet avantage, en calculant la probabilité du *refait* de 31, à un autre coup choisi à volonté; mais il faudrait faire une hypothèse sur les cartes sorties aux coups précédens, et multiplier la probabilité qu'on trouverait par celle de cette hypothèse, ce qui rendrait le calcul extrêmement compliqué.

7. Au premier coup, que nous nous bornons à considérer, les cartes sont au nombre de 312; les neuf premiers nombres x_1, x_2, x_3, ... x_9, sont tous égaux à 24; le dixième seul x_{10} est différent, et quadruple de chacun des premiers. Ainsi, il faudra faire

$$s=312, \qquad x_1=x_2=x_3=\ldots\ldots=x_8=x_9=24, \qquad x_{10}=96.$$

Soient de plus, pour abréger,

$$1-\alpha[zt+(1-z)\theta]=z_1,$$

$$1-\alpha[zt^2+(1-z)\theta^2]=z_2,$$

$$1-\alpha[zt^3+(1-z)\theta^3]=z_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$1-\alpha[zt^{10}+(1-z)\theta^{10}]=z_{10};$$

ensuite

$$(1-yz_1)^{x_1}.(1-yz_2)^{x_2}.(1-yz_3)^{x_3}\ldots\ldots(1-yz_{10})^{x_{10}}=Y;$$

et, enfin,

$$U=(s+1)\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}\alpha}\iint Yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ ,$$

où l'on fera $\alpha=1$, après la différentiation, en intégrant ensuite depuis $y=0$ et $z=0$, jusqu'à $y=1$ et $z=1$. La question se réduira à calculer le coefficient de $t^{31}\theta^{31}$, dans le développement de cette quantité U, suivant les puissances et produits de puissances de t et θ. Le nombre des facteurs de Y, et la grandeur de leurs exposans, rendraient impraticable le calcul rigoureux de ce coefficient; mais on peut réduire l'intégrale $\int Y\mathrm{d}y$ en une série convergente, au moyen de laquelle on obtiendra, à tel degré d'approximation qu'on voudra, la valeur du coefficient demandé.

Pour cela, soit

$$V=-\frac{Y\mathrm{d}y}{\mathrm{d}Y}\ ;$$

nous aurons

$$\int Y\mathrm{d}y=-\int V\mathrm{d}Y\ ;$$

et, par une suite d'intégrations par parties, nous en conclurons

$$Y\mathrm{d}y=\left\{\begin{array}{l} Y_0\left[V_0+V_0\dfrac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}y}+V_0\dfrac{\mathrm{d}\left(V_0\dfrac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}+V_0\dfrac{\mathrm{d}\left(V_0\dfrac{\mathrm{d}\left(V_0\dfrac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}+\ldots\ldots\right] \\ -Y_1\left[V_1+V_1\dfrac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y}+V_1\dfrac{\mathrm{d}\left(V_1\dfrac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}+V_1\dfrac{\mathrm{d}\left(V_1\dfrac{\mathrm{d}\left(V_1\dfrac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}+\ldots\ldots\right] \end{array}\right\};$$

les indices 0 et 1 indiquant respectivement qu'il faut faire $y=0$ et $y=1$, après différentions. Cette série est une de celles que M. Laplace a donné, pour calculer par approximation, les intégrales des fonctions de grands nombres. Il est aisé de s'assurer que la seconde partie, qui répond à $y=1$, ne donnerait en la développant suivant les puissances et produits de puissances de t et θ, que des termes dans lesquels la somme des exposans de ces variables surpasseraient $x_1+2x_2+3x_3+\dots\dots+10x_{10}$; en sorte que nous devons en faire abstraction dans la question présente; donc, à cause de $Y_0=1$, nous aurons simplement

$$\int Y\mathrm{d}y=V_0\left\{1+\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}\left(V_0\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}\left(V_0\frac{\mathrm{d}\left(V_0\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}+\dots\dots\right\}.$$

Nous aurons aussi

$$V=\frac{1}{\frac{x_1z_1}{1-yz_1}+\frac{x_2z_2}{1-yz_2}+\frac{x_3z_3}{1-yz_3}+\dots.+\frac{x_{10}z_{10}}{1-yz_{10}}};$$

Si donc nous développons le dénominateur de cette expression suivant les puissances de y, et que, m étant un nombre quelconque, nous fassions

$$x_1z_1{}^m+x_2z_2{}^m+x_3z_3{}^m+\dots\dots+x_{10}z_{10}=Z_m,$$

il en résultera

$$V=\frac{1}{Z_1+Z_2y+Z_3y^2+Z_4y^3+\dots\dots\dots};$$

et, en substituant cette valeur dans celle de $\int Y\mathrm{d}y$, on trouvera

$$\int Y\mathrm{d}y=\frac{1}{Z_1}-\frac{Z_2}{Z_1{}^3}+\frac{3Z_2{}^2-2Z_1Z_3}{Z_1{}^5}-\frac{15Z_2{}^3-20Z_1Z_2Z_3+6Z_1{}^2Z_4}{Z_1{}^7}+\dots\dots.$$

A cause du nombre et de la grandeur des quantités x_1, x_2,

x_3, ... x_{10}, qu'elles renferment, les expressions Z_1, Z_2, Z_3, ... ont de grandes valeurs, et toutes du même ordre de grandeur, d'où il résulte que cette série est très-convergente, du moins dans ses premiers termes; car les coefficiens numériques qui se trouvent à leurs numérateurs croissent indéfiniment, et finissent par rendre cette série divergente. Mais, en s'en tenant à la partie dans laquelle elle est convergente, on aura une expression très-approchée de $\int Y\text{d}y$; et, si nous nous bornons d'abord à son premier terme, nous aurons

$$U=(s+1)\,\frac{\text{d.}}{\text{d}\alpha}\int\frac{\alpha\text{d}Z}{Z_1}\ ,$$

pour la valeur correspondante de U.

La valeur de Z_1 est la même chose que

$$Z_1=s-\alpha T-\alpha(1-z)\Theta\ ,$$

en faisant, pour abréger,

$$T=x_1t+x_2t^2+x_3t^3+\ .....\ +x_{10}t^{10}\ ,$$

$$\Theta=x_1\theta+x_2\theta^2+x_3\theta^3+\ .....\ +x_{10}\theta^{10}\ ,$$

Si on la substitue dans U, et que l'on y fasse $\alpha=1$, après avoir effectué la différentiation indiquée, on aura

$$U=\int\frac{(1+s)s\text{d}z}{[s-zT-(1-z)\Theta]^2}\ ;$$

et, en intégrant, depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$, il vient

$$U=\frac{(s+1)s}{T-\Theta}\left(\frac{1}{s-T}-\frac{1}{s-\Theta}\right)=\frac{s+1}{s}\left(1-\frac{T}{s}\right)^{-1}\cdot\left(1-\frac{\Theta}{s}\right)^{-1}.$$

Or, les deux symboles T et Θ représentant des fonctions semblables de t et θ, les coefficiens des mêmes puissances de leurs variables respectives seront les mêmes dans les développemens des deux puissances

$$\left(1-\frac{T}{s}\right)^{-1}; \quad \left(1-\frac{\Theta}{s}\right)^{-1};$$

désignant donc par k le coefficient de t^{31}, dans le premier des deux développemens, et appelant p la probabilité du refait de 31, ou le coefficient de $t^{31}\theta^{31}$, dans le développement de U, nous aurons

$$p=\frac{s+1}{s}k^2;$$

de sorte qu'il ne reste plus qu'à calculer la valeur numérique de ce coefficient k.

8. Avant d'effectuer ce calcul, nous observerons que la quantité k serait la probabilité de 31 simple, et, par conséquent, k^2 celle du refait de 31, si l'on remettait les cartes dans le jeu, à mesure qu'elles sortent. En effet, dans cette hypothèse, il est aisé de voir, d'après la théorie des combinaisons, que la probabilité d'amener une somme donnée x, dans un nombre déterminé m de tirages successifs, n'est autre chose que le coefficient de t^x, dans le développement de la puissance

$$\left(\frac{x_1}{s}t+\frac{x_2}{s}t^2+\frac{x_3}{s}t^3+\ldots\ldots+\frac{x_{10}}{s}t^{10}\right)^m,$$

ou de $\frac{T^m}{s^m}$; par conséquent, la probabilité d'amener cette même somme en un nombre quelconque de tirages sera le coefficient de t^n dans le développement de la série

$$\frac{T}{s}+\frac{T^2}{s^2}+\frac{T^3}{s^3}+\frac{T^4}{s^4}+\ldots\ldots,$$

qu'on peut à volonté arrêter au x.^{me} terme ou prolonger à l'infini ; on y peut aussi ajouter l'unité ; et alors elle devient égale à $\dfrac{1}{1-\dfrac{T}{s}}$, ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte de cette remarque qu'à raison du grand nombre de cartes que l'on emploie au *trente et quarante*, la probabilité du 31 au premier coup est peu différente de ce qu'elle serait, si l'on s'assujétissait à remettre les cartes dans le *talon*, à mesure qu'elles sont sorties. Ce résultat qui aurait aussi lieu au premier coup, pour toutes les autres chances du jeu, est évident en lui-même ; et on peut le considérer comme une vérification de la méthode d'approximation employée dans le numéro précédent.

9. Faisons usage présentement des valeurs numériques de s, x_1, x_2, x_3, ... x_{10}. Nous aurons

$$\frac{T}{s}=a(t+t^2+t^3+\ldots+t^9+4t^{10})=a.\frac{t-t^{11}}{1-t}+3at^{10} ;$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{24}{s}=\frac{24}{213}=\frac{1}{13}=a.$$

On conclut de là

$$\frac{1}{1-\dfrac{T}{s}}=\frac{1-t}{1-(1+a)t-a(3-4t)t^{10}} ;$$

et, en développant d'abord suivant les puissances de t^{10}, il vient

$$\frac{1}{1-\frac{T}{s}}$$

$$=\frac{1-t}{1-(1+a)t}+\frac{a(1-t)(3-4t)t^{10}}{[1-(1+a)t]^2}+\frac{a^2(1-t)(3-4t)^2t^{20}}{[1-(1+a)t]^3}+\frac{a^3(1-t)(3-4t)^3t^{30}}{[1-(1+a)t]^4}.$$

On rejette les termes suivans de cette série, qui contiendraient la puissance t^{40} et des puissances supérieures de t. Il est aisé de prendre le coefficient de t^{31}, dans chacun des quatre termes que l'on conserve; et, en faisant la somme de ces quatre coefficiens, on aura la valeur exacte de k; savoir :

$$k=a(1+a)^{30}+\frac{a}{1}\cdot\frac{d[(1+a)^{20}(3a-1)a]}{da}+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{d^2[(1+a)^{10}(3a-1)^2a]}{da^2}$$

$$+\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3[(3a-1)^3a]}{da^3}.$$

J'effectue les différentiations indiquées; puis au moyen de $a=\frac{1}{13}$, je réduis cette formule en nombres; et, en poussant l'approximation jusqu'aux décimales du sixième ordre, je trouve

$$k=0,148062;$$

d'où il résulte

$$p=\frac{313}{312}k^2=0,021993.$$

Le calcul deviendrait très-pénible, si l'on voulait avoir égard au second terme, et aux termes suivans du développement de $\int Y dy$, que nous avons négligés. En tenant compte du second terme, j'ai trouvé que la première valeur approchée de p doit être diminuée de 0,000026 ; les termes suivans ne changeraient pas cette valeur dans les six premières décimales ; ainsi, l'on peut prendre

$$p=0{,}021967,$$

pour la probabilité du refait de 31, au commencement du jeu.

D'après ce qu'on a dit plus haut, on aura l'avantage du banquier, en multipliant cette valeur de p par la demi-somme de toutes les mises ; en sorte que, pour racheter cet avantage, avant que le jeu commence, chaque joueur devrait convenir de donner au banquier, à tous les coups, y compris les coups nuls, les *onze millièmes*, à très-peu près, de l'argent qu'il voudra exposer.

10. Les problèmes des numéros 2 et 5 comprennent aussi les autres chances du *trente et quarante.* Si l'on veut, par exemple, calculer la probabilité d'amener le nombre 32, on supposera d'abord, dans le problème du numéro 2, que l'on continue la suite des tirages, jusqu'à ce qu'on ait atteint ou dépassé 32 ; ainsi, on fera la limite $x=32$, et on déterminera, par l'analise de ce numéro, la probabilité d'amener cette limite ; mais, cette probabilité ne sera pas encore celle qu'il faut connaître ; car, d'après les conditions du jeu, on doit amener le nombre 32, sans avoir passé par le nombre 31. Or, la probabilité de cet événement est évidemment égale à celle qu'on aura calculée, comme on vient de le dire, moins la probabilité d'amener d'abord 31 et ensuite 1, laquelle probabilité se calculera par l'analise du numéro 5, en prenant $x=31$ et $x'=1$. Ces calculs, déjà très-longs par rapport au nombre 32, le seraient encore bien plus pour les nombres supérieurs 33, 34, 35, ... Mais, si l'on veut connaître les probabilités d'amener ces différens nombres, seulement au premier coup, on pourra supposer qu'on remet les cartes dans le jeu, à mesure qu'elles sont sorties (n.° 8) ; les calculs seront alors faciles à

exécuter, et l'erreur que l'on commettra sera peu considérable, ainsi qu'on l'a vu par l'exemple du calcul relatif au 31.

Adoptons donc cette hypothèse approximative, et désignons généralement par k_n le coefficient de t^{30+n}, dans le développement de $\frac{1}{1-\frac{T}{s}}$, n étant un des nombres 1, 2, 3, ... 10. Ce coefficient exprimera la probabilité d'amener $30+n$, en continuant les tirages, jusqu'à ce qu'on ait atteint ou dépassé ce nombre. Soit, en même temps, p_n la probabilité d'amener ce même nombre, sans passer par l'un des nombres inférieurs 31, 32, ... $30+n-1$; lorsque la quantité k_n aura été calculée pour les 10 valeurs de n comprises depuis $n=1$ jusqu'à $n=10$, il sera aisé d'en conclure les 10 valeurs correspondantes de p_n, qui sont celles qu'il s'agit de déterminer.

En effet, puisqu'on remet les cartes dans le talon, à mesure qu'elles sortent, la probabilité d'amener un *as*, après avoir amené 31, sera égale à $\frac{1}{13}k_1$, par la règle ordinaire des événemens composés; par conséquent, on aura $p_2=k_2-\frac{1}{13}k_1$. De même, la probabilité d'amener un *as*, après avoir amené 32, d'une manière quelconque, et celle d'amener un *deux*, après avoir amené 31, seront $\frac{1}{13}k_1$ et $\frac{1}{13}k_2$; or, en soustrayant ces deux probabilités de celle qui est représentée par k_3, on aura la probabilité d'amener 33, sans avoir passé ni par 31 ni par 32; nous aurons donc $p_3=k_3-\frac{1}{13}k_2-\frac{1}{13}k_1$. En continuant ce raisonnement, on formera cette suite d'équations

$$p_1=k_1,$$

$$p_2=k_2-\frac{1}{13}(k_1+k_2),$$

$$p_3 = k_3 - \frac{1}{13}(k_1 + k_2 + k_3) ;$$

. . . .

$$p_{10} = k_{10} - \frac{1}{13}(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots\ldots + k_9) ,$$

au moyen desquelles tout le calcul est réduit à déterminer les valeurs numériques des 10 quantités k_1, k_2, k_3, ... k_{10}, dont la première est déjà connue.

11. Pour les obtenir, développons, comme dans le n.° 9 la fonction $\frac{1}{1-\frac{T}{s}}$, suivant les puissances de t^{10}, et continuons le développement, jusqu'à la puissance t^{40} inclusivement ; nous aurons

$$\frac{1}{1-\frac{T}{s}} = \frac{1-t}{1-(1+a)t} + \frac{a(1-t)(3-4t)t^{10}}{[1-(1+a)t]^2} + \frac{a^2(1-t)(3-4t)^2t^{20}}{[1-(1+a)t]^3}$$

$$+ \frac{a^3(1-t)(3-4t)^3t^{30}}{[1-(1+a)t]^4} + \frac{a^4(1-t)(3-4t)^4t^{40}}{[1-(1+a)t]^5} ,$$

en faisant comme plus haut, $a = \frac{24}{s} = \frac{1}{13}$. Développons ensuite chaque terme, suivant les puissances de t, et prenons la somme des coefficiens de t^{30+n}, il vient

$$k_n = a(1+a)^{30+n-1} + \frac{a}{1}\,\frac{d[(1+a)^{20+n-1}(3a-1)a]}{da}$$

$$+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{d^2[(1+a)^{10+n-1}(3a-1)^2a]}{da^2}+\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3[(1+a)^{n-1}(3a-1)^3a]}{da^3},$$

si n est un des nombres $1, 2, 3, \ldots 9$; mais, dans le cas de $n=10$, il faudra ajouter à cette valeur de k_n la quantité $81a^4$, égale 0,002836, à un millionième près, laquelle provient du cinquième terme de l'expression précédente, qui a $81a^4t^{40}$ pour premier terme de son développement suivant les puissances de t.

Au moyen de cette formule, on trouvera, en s'arrêtant aux décimales du 5.e ordre

$$k_1=0{,}14806,$$

$$k_2=0{,}14930,$$

$$k_3=0{,}15039,$$

$$k_4=0{,}15133,$$

$$k_5=0{,}15213,$$

$$k_6=0{,}15278,$$

$$k_7=0{,}15329,$$

$$k_8=0{,}15365,$$

$$k_9=0{,}15386,$$

$$k_{10}=0{,}15392+0{,}00284=0{,}15676;$$

d'où l'on conclut

$$\left.\begin{array}{l} p_1=0{,}14806\ , \\ p_2=0{,}13791\ , \\ p_3=0{,}12751\ , \\ p_4=0{,}11689\ , \\ p_5=0{,}10605\ , \\ p_6=0{,}09500\ , \\ p_7=0{,}08375\ , \\ p_8=0{,}07232\ , \\ p_9=0{,}06072\ , \\ p_{10}=0{,}05178\ , \end{array}\right\} \text{Somme } =0{,}99999\ (*).$$

(*) Dans l'article de l'Encyclopédie cité au commencement de ce mémoire, on a aussi déterminé ces mêmes probabilités, en supposant qu'elles sont entre elles comme les nombres de cartes différentes qui peuvent terminer les points auxquels elles répondent. Ainsi, par exemple, 31 peut être terminé par toutes les cartes du jeu, depuis l'*as* jusqu'au *dix*, tandis que le point 40 ne peut finir que par un *dix*; et, comme au commencement du jeu, il y a 13 cartes de numéros différens, dont quatre *dix* seulement, il en résulterait, suivant l'article cité, que la probabilité du 31 devrait être égale à trois fois et un quart celle du point 40; ce qui ne s'accorde pas avec les résultats que nous trouvons; et il en serait de même des probabilités des autres points. Mais il est facile de voir que ce raisonnement est inexact. En effet, ils est bien vrai que le 31 peut venir d'un tirage qui aurait amené d'abord 30 et ensuite 1, ou bien 29 et ensuite 2, ou bien 28 et ensuite 3, ... ou bien enfin 21 et ensuite 10. Il est également vrai que le point 40 ne peut venir que par un tirage qui amenerait d'abord 30 et ensuite 10; mais, pour que les probabilités de ces évènemens composées

Comme un des dix événemens auxquels se rapportent ces probabilités doit nécessairement arriver, la somme de leurs valeurs doit être égale à l'unité, ce qui a effectivement lieu, à un cent millième près.

Ces valeurs de $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_{10}$, serviront à régler le sort ou le *parti* des joueurs, après le premier des deux tirages dont un coup est composé. Supposons, par exemple, que ce tirage ait amené le point 34, et soit a la mise d'un joueur qui a parié pour le second tirage; s'il arrive le point 34 au second tirage, le coup est nul, ce qui vaut a pour le joueur; s'il arrive un point moindre que le point 34, le joueur aura gagné, et il recevra $2a$; enfin, s'il arrive un point supérieur à 34, il aura perdu et ne recevra rien. Ce qu'il faudrait lui donner, si l'on renonçait à jouer le second coup, calculé d'après la règle de l'*espérance mathématique*, est donc égal à $(p_4+2p_3+2p_2+2p_1)a$, on a $(0{,}94387)\,a$, ainsi, il aura déjà perdu $(0{,}05613)a$, ou à peu près *cinquante-six millièmes* de sa mise. Quand le premier tirage a amené 35, le coup est à l'avantage des joueurs qui ont parié pour le second tirage, et leur *parti* est égal à $(1{,}16681)a$; la mise étant toujours représentée par a.

Les carrés $p_2^2, p_3^2, p_4^2, \ldots\ldots p_{10}^2$, seront les probabilités des coups nuls 32 et 32, 33 et 33, 34 et 34, ... 40 et 40, calculées toujours dans l'hypothèse où l'on remet les cartes dans le jeu à mesure qu'elles sont sorties; mais il sera plus exact de multiplier ces carrés par le rapport $\frac{s+1}{s}=\frac{313}{312}$, comme nous l'avons fait pré-

---

fussent entre elles comme leurs nombres respectifs 13 et 4, il faudrait que les probabilités d'amener les nombres 21, 22, 23, ... 30, par la première partie du tirage fussent égales, ce qui n'a pas lieu, comme on peut s'en assurer

(*Note de* M. Poisson).

cédemment (n.° 7), en calculant la probabilité du 31 de refait. En appelant donc q la probabilité d'un coup nul quelconque, nous aurons

$$q = \left(p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + \ldots + p_{10}^2\right)^{\frac{s+1}{s}};$$

ce qui donne, en effectuant le calcul numérique,

$$q = 0{,}08810.$$

12. Dans une longue suite de coups, les événemens arrivent, à très-peu près, proportionnellement à leurs probabilités respectives. Ainsi, le rapport du nombre des coups nuls au nombre total des coups s'écartera peu d'être celui de 881 à 10000; et d'après la probabilité d'un refait de 31, que nous avons trouvée (n.° 7), le rapport du nombre des refaits au nombre des coups joués, y compris les coups nuls, sera, à très-peu près, égal à celui de 21967 à 1000000. Mais ces proportions sont des limites dont les résultats du hasard devront s'approcher indéfiniment, à mesure que le nombre des coups deviendra plus grand; et l'on peut déterminer, pour chaque nombre de coups, la probabilité que ces résultats ne s'écarteront pas de leurs limites au-delà d'une quantité donnée.

En désignant par n le nombre total des coups, par m celui des refaits de 31, par p la probabilité d'un refait, par r la probabilité que la différence $\frac{m}{n} - p$ sera comprise entre deux limites données et représentées par

$$-\frac{t\sqrt{2p(1-p)}}{\sqrt{n}}, \qquad \text{et} \qquad +\frac{t\sqrt{2p(1-p)}}{\sqrt{n}},$$

on trouvera

$$r = \frac{2}{\sqrt{\varpi}} \int e^{-t^2} dt + \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2p(1-p)n\varpi}} ; \qquad (*)$$

l'intégrale commençant avec t, e étant la base des logarithmes népériens, et ϖ le rapport de la circonférence au diamètre. Quand la variable t augmentera, la probabilité r approchera davantage de l'unité ou de la certitude ; mais, en même temps, les limites de la différence $\frac{m}{n} - p$ seront plus étendues. Au contraire, lorsque t diminuera, ces limites seront plus étroites ; mais la probabilité r qui leur correspond s'affaiblira et finira par devenir très-petite et peu différente de

$$\frac{1}{\sqrt{2p(1-p)n\varpi}} .$$

Quand elle sera égale à $\frac{1}{2}$, on pourra indifféremment espérer que cette différence $\frac{m}{n} - p$, tombera en dedans ou en dehors de ces limites. La variable t restant la même, si le nombre n augmente indéfiniment, la probabilité r variera très-peu, et les limites de la différence $\frac{m}{n} - p$ décroîtront de plus en plus ; de manière qu'on pourra toujours prendre n assez grand pour que ces limites tombent au-dessous de toute quantité donnée. Si l'on considérait la différence $m - np$, entre le nombre m des refaits observés, et le nombre np des refaits calculés d'après leur probabilité p, les limites de cette différence seraient

$$\pm t\sqrt{2p(1-p)n} ;$$

la probabilité r étant la même que précédemment. Ces limites

(*) Théorie analitique des probabilités, pag. 280.

s'étendront de plus en plus, à mesure que le nombre n augmentera, mais elles croîtront moins rapidement que ce nombre, et seulement dans le rapport de sa racine carrée.

En mettant pour p la valeur 0,021967, les limites de la différence $m-np$ deviendront

$$\pm(0,2674)t\sqrt{n}.$$

Si l'on a, par exemple, $n=1000000$, et qu'on prenne $t=3$, il y aura la probabilité r que le nombre m des refaits observés sera compris entre

$$21967-622 \quad \text{et} \quad 21967+622.$$

Pour calculer la valeur de r, on prendra d'abord l'intégrale que son expression renferme, depuis $t=0$ jusqu'à $t=\infty$; ce qui donne

$$\int e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ ;$$

puis on retranchera de cette intégrale sa valeur prise depuis $t=3$ jusqu'à $t=\infty$, valeur qui sera donnée par la série

$$\int e^{-t^2}dt = e^{-t^2}\left(\frac{1}{2t} - \frac{1.3}{2^2.t^3} + \frac{1.3.5}{2^3.t^5} - \frac{1.3.5.7}{2^4.t^7} + \ldots\ldots\right),$$

dans laquelle on fera $t=3$. On trouve, de cette manière,

$$r=0,9998\ ;$$

de sorte qu'il y a près de 5000 à parier contre 1 que, sur un million de coups, le nombre des refaits ne sera pas moindre que 21345, et n'excèdera pas 22589. Si le nombre observé sortait de ces limites, il serait très-probable qu'il y a eu erreur involontaire, ou que quelqu'un a trompé au jeu.

On peut se demander quelle doit être la valeur de t pour laquelle on aurait $r=\frac{1}{2}$: cette valeur sera donnée par l'équation

$$t - \frac{t^3}{1.3} + \frac{t^5}{1.2.5} - \frac{t^7}{1.2.3.7} + \frac{t^9}{1.2.3.4.9} - \ldots = \frac{\sqrt{\pi}}{4} - \frac{e^{-t^2}}{2(0{,}2074)\sqrt{n}}\,:$$

En négligeant d'abord le second terme de son second membre, on trouve que la valeur de t est à très-peu près égale à 0,45. Si l'on fait ensuite $t = 0{,}45 + x$, et que l'on détermine x, en négligeant son carré et ses puissances supérieures, on trouve

$$t = 0{,}4460 - \frac{1}{2(0{,}2074)\sqrt{n}}\,;$$

d'où il résulte qu'il y a un contre un à parier que sur un grand nombre n de coups, le nombre m des refaits sera compris entre les deux limites

$$(0{,}021967)n \pm \left[(0{,}0924)\sqrt{n} - \tfrac{1}{2}\right].$$

Ainsi, sur un million de coups, par exemple, il sera indifférent de parier que le nombre de refaits différera de 21967, en plus ou en moins, d'un nombre plus grand ou d'un nombre plus petit que 92.

En général, lorsque deux joueurs jouent l'un contre l'autre, à jeu égal, il y a la probabilité r que le nombre des parties que l'un des deux, sans désigner lequel, gagnera de plus que l'autre, sur un très-grand nombre de coups, n'excèdera pas le double de $t\sqrt{2p(1-p)n}$, en faisant dans ce double $p = \frac{1}{2}$; ce qui donne $t\sqrt{2n}$. Si donc on prend pour t la valeur qui répond à $r = \frac{1}{2}$, il y aura un contre un à parier que la différence entre les nombres de parties gagnées par les deux joueurs n'excèdera pas

$$(0{,}6307)\sqrt{n} - 1\,;$$

ce qui fait 630, par chaque million de parties. Il y aurait donc du désavantage à parier, par exemple, que l'un des joueurs gagnerait moins de 600 parties de plus que l'autre, et de l'avantage à parier que la différence des parties gagnées n'excéderait pas 650 parties.