ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Solution du problème de géométrie énoncé à la page 368 du XV. e volume du présent recueil

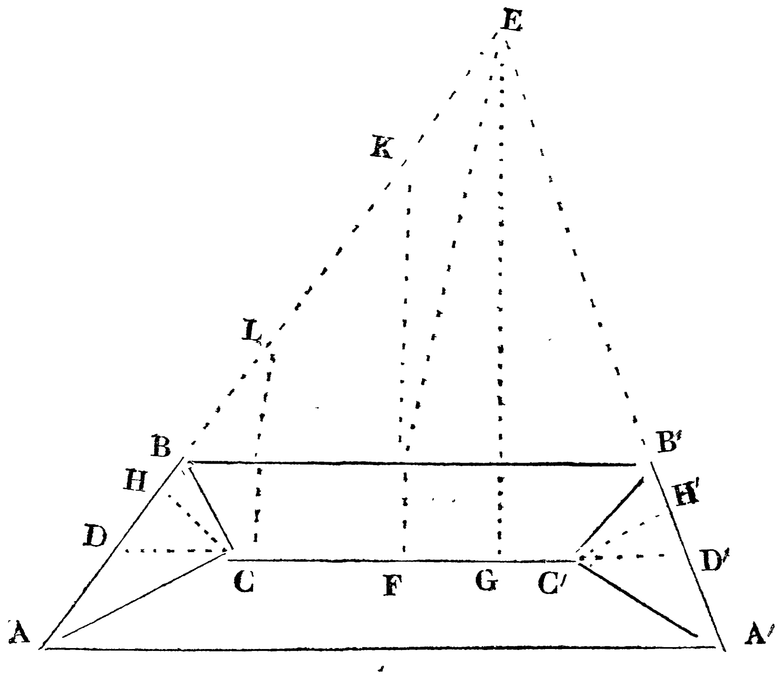
Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 117-132
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__117_1>

Solution du problème de géométrie énoncé à la page 368 du XV.ᵉ volume du présent recueil ;

Par un ABONNÉ.

PROBLÈME. On donne l'une des faces latérales d'un tronc de prisme triangulaire, la longueur de l'arête latérale opposée, la section du tronc par un plan perpendiculaire à ses arêtes latérales, et par suite le volume du tronc ; et l'on demande quelle doit être la situation de l'arête latérale donnée de longueur, par rapport à la face latérale opposée, pour que la somme des aires des deux bases du tronc soit un minimum ?

Solution. Soient $ABB'A'$ la face latérale donnée et CC' la projection orthogonale, sur le plan de cette face, de l'arête latérale opposée, dans la situation qui convient au *minimum* de la somme des aires des deux bases ; en menant CA, CB, C′A′, C′B′, les deux triangles ACB, A′C′B′ seront les projections des bases sur le même plan. Soient D, D′ les points où la direction CC′ rencontre les cotés AB, A′B′



de ces bases ; puisqu'on connaît la section perpendiculaire aux arètes latérales du tronc, il s'ensuit que, bien que les points C, C′ soient inconnus, on connaît néanmoins la droite DD′ ainsi que sa distance à l'arête latérale dont elle est la projection ; et, comme les longueurs CC′ et DD′ sont connues, il s'ensuit qu'on connaît aussi la somme $CD+C'D'=DD'-CC'$.

Prolongeons les côtés non parallèles AB, A′B′, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en E. De ce point E, abaissons une perpendiculaire EG sur DD′ ; divisons en outre l'angle DED′ en deux parties égales, par une droite qui rencontre DD′ en F ; imaginons enfin des points inconnus C, C′ des perpendiculaires CH, C′H′ sur AB, A′B′.

Cela posé, il a déjà été démontré (*Annales*, tom. XIII, pag. 137) que, pour que la somme des aires des bases du tronc fût un *minimum*, il fallait que l'arête dont la projection est CC′ fût tellement située, que les plans de ces bases fussent également inclinés sur le plan de la face latérale opposée ABB′A′; ce qui se réduit évidemment à faire en sorte que les perpendiculaires CH, C′H′ soient de même longueur. Il s'agit donc de savoir de quelle manière il faudra placer les points C, C′ ou seulement l'un d'eux sur DD′, pour que cette condition soit remplie.

Les triangles rectangles semblables DGE, DHC, d'une part, et les triangles rectangles semblables D′GE, D′H′C′, d'une autre, donnent

$$DE : CD :: EG : CH = \frac{CD \times EG}{DE},$$

$$D'E : C'D' :: EG : C'H' = \frac{C'D' \times EG}{D'E};$$

puis donc qu'on doit avoir CH = C′H′, on aura, en supprimant le facteur commun EG,

$$\frac{CD}{DE} = \frac{C'D'}{D'E},$$

c'est-à-dire,

$$CD : C'D' :: DE : D'E;$$

Mais, parce que la droite EF divise l'angle DED′ en deux parties égales, on a

$$DE : D'E :: DF : D'F;$$

donc, à cause du rapport commun,

$$DF : D'F :: CD : C'D'$$

d'où

$$DF + D'F : CD + C'D' :: DF : CD ;$$

c'est-à-dire,

$$DD' : DD' - CC' :: DF : CD ;$$

ce qui fournit la construction suivante :

Soient portés DD′ sur DE, de D en K, et CC′ sur KD de K en L ; soit menée KF, et, par le point L, soit menée une parallèle à cette droite ; cette parallèle rencontrera DD′ au point inconnu C ; de sorte qu'on aura alors tout ce qui est nécessaire pour construire le tronc de prisme.

Démonstration des deux théorèmes d'analise et de géometrie énoncés à la page 64 *du présent volume, et du théorème de géométrie énoncé à la page* 344 *du volume précédent ;*

Par M. Lenthéric, docteur ès sciences, professeur de mathématiques et de physique au collége royal de Montpellier.

A la page 373 du précédent volume, il a été démontré qu'en adoptant les notations abrégées

$$[\overset{n}{z}] = z(z+p)(z+2p) \dots (z+\overline{n-1}.p) ,$$

$$n!=1.2.3.4\,\ldots,n\,,$$

on avait

$$\frac{\overset{m}{[x+y]}}{m!}=\frac{\overset{m}{[x]}}{m!}+\frac{\overset{1}{[y]}}{1}\cdot\frac{\overset{m-1}{[x]}}{(m-1)!}+\frac{\overset{2}{[y]}}{2!}\cdot\frac{\overset{m-2}{[x]}}{(m-2)!}+\frac{\overset{3}{[y]}}{3!}\cdot\frac{\overset{m-3}{[x]}}{(m-3)!}+\ldots$$

Si, dans cette formule, on pose $m=x$, $p=-1$, et qu'on remette en place des divers symboles les développemens qu'ils représentent, en supprimant les facteurs communs aux deux termes des diverses fractions résultantes, il viendra

$$\frac{x+y}{1}\cdot\frac{x+y-1}{2}\cdot\frac{x+y-2}{3}\ldots\frac{y+1}{x}=\frac{x+y}{1}\cdot\frac{x+y-1}{2}\cdot\frac{x+y-2}{3}\ldots\frac{x+1}{y}$$

$$=1+\frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1}+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\cdot\frac{y-2}{3}+\ldots$$

qui est, aux notations près, le théorème d'analise énoncé à la page 64 du présent volume.

Avant de passer à la démonstration du théorème de géométrie, il nous faut d'abord construire quelques formules propres à nous conduire à notre but.

Soit x l'angle au centre d'un polygone régulier de n côtés, de telle sorte qu'on ait $nx=2\varpi$; en désignant par m un nombre entier positif, plus petit que n, on aura, comme nous l'avons démontré (pag. 41).

$$\text{Cos}.mx+\text{Cos}.2mx+\text{Cos}.3mx+\ldots\ldots+\text{Cos}.nmx=0\,,$$

$$\text{Sin}.mx+\text{Sin}.2mx+\text{Sin}.3mx+\ldots\ldots+\text{Sin}.nmx=0\,;$$

ou, parce que $\text{Cos}.nmx=\text{Cos}.2m\varpi=1$ et $\text{Sin}.nmx=\text{Sin}.2m\varpi=0$,

$$1+\text{Cos}.mx+\text{Cos}.2mx+\text{Cos}.3mx+\ .....\ +\text{Cos}.(n-1)mx=0\ , \quad (A)$$

$$\text{Sin}.mx+\text{Sin}\,2mx+\text{Sin}.3mx+\ .....\ +\text{Sin}.(n-1)mx=0, \quad (B)$$

Ces équations ont lieu également lorsque m est plus grand que n, pourvu qu'il n'en soit pas multiple. Si, en effet, on pose $m=qn+m'$, où on ait $m'<m$; en substituant dans les premiers membres des équations (A) et (B), et observant que généralement

$$\text{Cos}.\lambda(qn+m')x=\text{Cos}.(2\lambda q\varpi+\lambda m'x)=\text{Cos}.\lambda m'x\ ,$$

$$\text{Sin}.\lambda(qn+m')x=\text{Sin}.(2\lambda q\varpi+\lambda m'x)=\text{Sin}.\lambda m'x\ ;$$

ces premiers membres deviendront

$$1+\text{Cos}.m'x+\text{Cos}.2m'x+\text{Cos}.3m'x+\ .....\ +\text{Cos}.(n-1)m'x\ ,$$

$$\text{Sin}.m'x+\text{Sin}.2m'x+\text{Sin}.3m'x+\ .....\ +\text{Sin}.(n-1)m'x\ ;$$

et seront nuls, par ce qui précède.

En désignant toujours par x l'angle au centre d'un polygone régulier de n côtés et par a un angle quelconque ; m étant un nombre entier positif, non multiple de n, on trouvera en développant

$$\text{Cos}.ma+\text{Cos}\,m(a+x)+\text{Cos}.m(a+2x)+\ ....\ +\text{Cos}.m(a+\overline{n-1}.x)$$

$$=\{1+\text{Cos}.mx+\text{Cos}.2mx+\text{Cos}.3mx+....+\text{Cos}.(n-1)mx\}\text{Cos}\,ma$$

$$-\{\text{Sin}.mx+\text{Sin}.2mx+\text{Sin}.3mx+\ .....\ +\text{Sin}.(n-1)mx\}\text{Sin}.ma\ ;$$

c'est-à-dire en vertu des formules (A), (B)

$$\text{Cos}.ma+\text{Cos}.m(a+x)+\text{Cos}.m(a+2x)+...+\text{Cos}.m(a+\overline{n-1}.x)=0\ . \quad (C)$$

Cela posé, on sait, comme nous l'avons déjà observé (pag. 41), que z étant un angle quelconque et p un nombre entier positif quelconque, on a

$$\text{Cos.}^p z = \frac{1}{2^{p-1}}\left\{\text{Cos.}pz + \frac{p}{1}\text{Cos.}(p-2)z + \frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\text{Cos.}(p-4)z + \ldots\ldots\right\},$$

pourvu qu'on arrête le développement dès qu'on ne rencontrera plus d'arcs positifs, et que, lorsque p sera pair, on ne prenne que la moitié du terme qui contiendra l'arc nul.

Mettant successivement pour z, dans cette formule, les termes de la progression, a, $a+x$, $a+2x$, ... $a+\overline{n-1}.x$, on aura

$$\text{Cos.}^p a = \frac{1}{2^{p-1}}\left\{\text{Cos.}pa + \frac{p}{1}\text{Cos.}(p-2)a + \frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\text{Cos.}(p-4)a + \ldots\ldots\right\},$$

$$\text{Cos.}^p(a+x) = \frac{1}{2^{p-1}}\left\{\text{Cos}\,p(a+x) + \frac{p}{1}\text{Cos.}(p-2)(a+x) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\},$$

$$\text{Cos.}^p(a+2x) = \frac{1}{2^{p-1}}\left\{\text{Cos}\,p(a+2x) + \frac{p}{1}\text{Cos.}(p-2)(a+2x) + \ldots\ldots\ldots\right\};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\text{Cos.}^p(a+\overline{n-1}.x) = \frac{1}{2^{p-1}}\left\{\text{Cos.}p(a+\overline{n-1}\,x) + \frac{p}{1}\text{Cos.}(p-2)(a+\overline{n-1}.x) + \ldots\right\};$$

ce qui donnera, en ajoutant,

$$\text{Cos.}^p a + \text{Cos.}^p\text{Cos.}(a+x) + \text{Cos.}^p(a+2x) + \ldots\ldots + \text{Cos.}^p(a+\overline{n-1}\,x)$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}}\left\{\begin{array}{l}\quad\text{Cos.}pa + \text{Cos.}p(a+x) + \text{Cos.}p(a+2x) + \ldots\ldots\ \text{Cos.}p(x+\overline{n-1}.x)\\ + \frac{p}{1}\left\{\text{Cos.}(p-2)a + \text{Cos.}(p-2)(a+x) + \ldots\ldots + \text{Cos.}(p-2)(a+\overline{n-1}.x)\right\}\\ + \frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\left\{\text{Cos}\,(p-4)a + \text{Cos.}(p-4)(a+x) + \ldots + \text{Cos}\,(p-4)(a+\overline{n-1}.x)\right\}\\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

Si p est un nombre impair, non multiple de n, toutes les lignes du second membre de cette équation seront nulles, en vertu de la formule (C); de sorte qu'en remplaçant p par $2\lambda+1$, on a

$$[\mathrm{Cos}.a]^{2\lambda+1}+[\mathrm{Cos}.(a+x)]^{2\lambda+1}+[\mathrm{Cos}.(a+2x)]^{2\lambda+1}+\ldots+[\mathrm{Cos}.(a+\overline{n-1}.x)]^{2\lambda+1}=0\,,\quad \text{(D)}$$

Si, au contraire, p est un nombre pair, les cosinus de la dernière ligne seront tous égaux à l'unité, et au nombre de n, et leur coefficient commun sera

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\ldots\ldots\frac{p-\frac{p-2}{2}}{\frac{p}{2}}\,,$$

ou, en changeant p en 2λ

$$\frac{2\lambda}{1}\cdot\frac{2\lambda-1}{2}\cdot\frac{2\lambda-2}{3}\ldots\ldots\frac{\lambda+1}{\lambda}\,.$$

Il faudra donc prendre n fois la moitié de ce coefficient, et multiplier le résultat par $\frac{1}{2^{p-1}}$ ou par $\frac{1}{2^{2\lambda-1}}$; ce qui revient à multiplier de suite ce coefficient, tout entier par $\frac{n}{2^{2\lambda}}$. On a donc

$$[\mathrm{Cos}.a]^{2\lambda}+[\mathrm{Cos}(a+x)]^{2\lambda}+[\mathrm{Cos}.(a+2x)]^{2\lambda}+\ldots\ldots+[\mathrm{Cos}.(a+\overline{n-1}.x)]^{2\lambda}$$

$$=\frac{n}{2^{2\lambda}}\cdot\frac{2\lambda}{1}\cdot\frac{2\lambda-1}{2}\cdot\frac{2\lambda-2}{3}\ldots\ldots\frac{\lambda+1}{\lambda}\,.\qquad \text{(E)}$$

En conséquence, si l'on fait successivement λ égal à 0, 1, 2, 3, , ..., on tirera des formules (D) et (E)

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Cos}.a+\mathrm{Cos}.(a+x)+\mathrm{Cos}.(a+2x)+\ldots\ldots+\mathrm{Cos}.(a+\overline{n-1}.x)=0\ ,\\
&\mathrm{Cos}.^2a+\mathrm{Cos}.^2(a+x)+\mathrm{Cos}.^2(a+2x)+\ldots\ldots+\mathrm{Cos}.^2(a+\overline{n-1}.x)=\frac{2}{1}\cdot\frac{n}{2^2}\ ,\\
&\mathrm{Cos}.^3a+\mathrm{Cos}.^3(a+x)+\mathrm{Cos}.^3(a+2x)+\ldots\ldots+\mathrm{Cos}.^3(a+\overline{n-1}.x)=0\ ,\\
&\mathrm{Cos}.^4a+\mathrm{Cos}.^4(a+x)+\mathrm{Cos}.^4(a+2x)+\ldots\ldots+\mathrm{Cos}.^4(a+\overline{n-1}.x)=\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{2^4}\ ,\\
&\mathrm{Cos}.^5a+\mathrm{Cos}.^5(a+x)+\mathrm{Cos}.^5(a+2x)+\ldots\ldots+\mathrm{Cos}.^5(a+\overline{n-1}.x)=0\ ,\\
&\mathrm{Cos}.^6a+\mathrm{Cos}.^6(a+x)+\mathrm{Cos}.^6(a+2x)+\ldots\ldots+\mathrm{Cos}.^6(a+\overline{n-1}.x)=\frac{6}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{n}{2^6}\ ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\text{(F)}$$

Soit présentement une circonférence, dont C soit le centre et r le rayon, divisée en n parties égales aux points P_1, P_2, P_3, ... P_n; et soit O un point du plan de cette circonférence distant de son centre de la quantité k. Soient menées les droites OP_1, OP_2, OP_3, ... OP_n, et les rayons CP_1, CP_2, CP_3, ... CP_n; soit x l'angle de deux rayons consécutifs, et soit a l'angle que fait le premier CP_1 avec la droite CO. Les triangles OCP_1, OCP_2, OCP_3, ... OCP_n, qui ont tous le côté commun CO, donneront

$$\overline{OP_1}^2=k^2+r^2-2kr\mathrm{Cos}.a\ ,$$

$$\overline{OP_2}^2=k^2+r^2-2kr\mathrm{Cos}.(a+x)\ ,$$

$$\overline{OP_3}^2=k^2+r^2-2kr\mathrm{Cos}.(a+2x)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{OP_n}=k^2+r^2-2kr\mathrm{Cos}\,(a+\overline{n-1}.x)\ .$$

En désignant par m un nombre entier positif, plus petit que n, on conclura de là

$$\overline{OP_1}^{2m}+\overline{OP_2}^{2m}+\overline{OP_3}^{2m}+\ldots\ldots+\overline{OP_n}^{2m}$$

$$=\left\{\begin{array}{l} [(k^2+r^2)-2kr\,\mathrm{Cos}.a]^m \\ +[(k^2+r^2)-2kr\,\mathrm{Cos}.(a+x)]^m \\ +[(k^2+r^2)-2kr\,\mathrm{Cos}.(a+2x)]^m \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +[(k^2+r^2)-2kr\,\mathrm{Cos}.(a+\overline{n-1}.x)]^m \end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l} (k^2+r^2)^m-2\frac{m}{1}kr(k^2+r^2)^{m-1}\mathrm{Cos}.a \qquad +4\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}k^2r^2(k^2+r^2)^{m-2}\mathrm{Cos}.^2a \qquad +\ldots \\ +(k^2+r^2)^m-2\frac{m}{1}kr(k^2+r^2)^{m-1}\mathrm{Cos}.(a+x) \qquad +4\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}k^2r^2(k^2+r^2)^{m-2}\mathrm{Cos}.^2(a+x) \qquad +\ldots \\ +(k^2+r^2)^m-2\frac{m}{1}kr(k^2+r^2)^{m-1}\mathrm{Cos}.(a+2x) \qquad +4\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}k^2r^2(k^2+r^2)^{m-2}\mathrm{Cos}.^2(a+2x) \qquad +\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(k^2+r^2)^m-2\frac{m}{1}kr(k^2+r^2)^{m-1}\mathrm{Cos}.(a+\overline{n-1}.x)+4\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}k^2r^2(k^2+r^2)^{m-2}\mathrm{Cos}.^2(a+\overline{n-1}.x)+\ldots \end{array}\right\}$$

$$
=\left\{\begin{array}{l}
n(k^2+r^2)^m \\
-2\,\frac{m}{1}\,kr(k^2+r^2)^{m-1}\left[\text{Cos.}a+\text{Cos.}(a+x)+\text{Cos.}(a+2x)+\ldots\ldots+\text{Cos.}(a+\overline{n-1}.x)\right] \\
+4.\,\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,k^2r^2(k^2+r^2)^{m-2}\left[\text{Cos.}^2a+\text{Cos.}^2(a+x)+\text{Cos.}^2(a+2x)+\ldots\ldots\ldots+\text{Cos.}^2(a+\overline{n-1}.x)\right] \\
-8.\,\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\,k^3r^3(k^2+r^2)^{m-3}\left[\text{Cos.}^3+\text{Cos.}^3(a+x)+\text{Cos.}^3(a+2x)+\ldots+\text{Cos.}^3(a+\overline{n-1}.x)\right] \\
+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm 2^m k^m r^m\left[\text{Cos.}^m a+\text{Cos.}^m(a+x)+\text{Cos.}^m(a+2x)+\ldots\ldots+\text{Cos.}^m(a+\overline{n-1}.x)\right].
\end{array}\right\}
$$

En vertu des formules (F), cette équation devient

$$
\overline{\text{OP}_1}^{\,2m}+\overline{\text{OP}_2}^{\,2m}+\overline{\text{OP}_3}^{\,2m}+\ldots\ldots+\overline{\text{OP}_n}^{\,2m}
$$

$$
\begin{array}{l}
=n(k^2+r^2)^m \\
+\frac{2}{1}\cdot\frac{n}{2^2}.2^2.\,\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,k^2r^2(k^2+r^2)^{m-2} \\
+\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{2^4}.2^4.\,\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\,k^4r^4(k^2+r^2)^{m-4} \\
+\frac{6}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{n}{2^6}.2^6.\,\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-4}{5}\cdot\frac{m-5}{6}\,k^6r^6(k^2+r^2)^{m-6} \\
+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

ou bien, en réduisant

$$\overline{OP}_1^{\,2m}+\overline{OP}_2^{\,2m}+\overline{OP}_3^{\,2m}+\ldots\ldots+\overline{OP}_n^{\,2m}$$

$$=n\left\{(k^2+r^2)^m+\frac{2}{1}\,\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,k^2r^2(k^2+r^2)^{m-2}+\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\,k^4r^4(k^2+r^2)^{m-4}+\ldots\right\}.$$

En développant les diverses puissances de k^2+r^2, dans le second membre, et réunissant les termes affectés des mêmes puissances de k et de r dans le développement, le terme général de ce développement, c'est-à-dire, le terme affecté de $k^{2t}r^{2m-2t}$ sera

$$n\left\{\begin{array}{l}\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-t+1}{t}\\[2mm]+\frac{2}{1}\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\cdot\frac{m-4}{3}\cdots\cdots\frac{m-t}{t-1}\\[2mm]+\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdots\cdots\frac{m-t-1}{t-2}\\[2mm]+\frac{6}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-4}{5}\cdot\frac{m-5}{6}\times\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdots\cdots\frac{m-t-2}{t-3}\\[2mm]+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}k^{2t}r^{2m-2t}$$

On peut, en préparant convenablement les termes du coefficient, faire en sorte que le facteur

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-t+1}{t}$$

leur devienne commun, et alors, en mettant ce facteur en évidence, le terme général devient

$$n.\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-t+1}{t}\left\{1+\frac{m-t}{1}\cdot\frac{t}{1}+\frac{m-t}{1}\cdot\frac{m-t-1}{2}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{t-1}{2}+\frac{m-t}{1}\cdot\frac{m-t-1}{2}\cdot\frac{m-t-2}{3}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{t-1}{2}\cdot\frac{t-2}{3}+\ldots\right\}k^{2t}r^{2m-2t}$$

Mais si, dans la formule d'analise que nous avons démontrée au commencement de cet article, savoir :

$$1+\frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1}+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\cdot\frac{y-2}{3}+\ldots=\frac{x+y}{1}\cdot\frac{x+y-1}{2}\cdots\frac{x+1}{y},$$

on fait $x=m-t$ et $y=t$, elle deviendra

$$1+\frac{m-t}{1}\cdot\frac{t}{1}+\frac{m-t}{1}\cdot\frac{m-t-1}{2}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{t-1}{2}+\ldots=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-t+1}{t},$$

au moyen de quoi notre terme général se réduit à

$$n\left(\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-t+1}{t}k^t r^{m-t}\right)^2$$

de sorte qu'on a finalement

$$\overline{\mathrm{OP}}_1^{2m}+\overline{\mathrm{OP}}_2^{2m}+\overline{\mathrm{OP}}_3^{2m}+\ldots.+\overline{\mathrm{OP}}_n^{2m}$$

$$=n\left\{\left(r^m\right)^2+\left(\frac{m}{1}kr^{m-1}\right)^2+\left(\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}k^2r^{m-2}\right)^2+\left(\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}k^3r^{m-3}\right)^2+\ldots\right\}$$

qui est précisément le théorème énoncé à la page 344 du précédent volume, que nous nous étions proposés de démontrer.

En faisant $m=1$, on trouve

$$\overline{\mathrm{OP}}_1^2+\overline{\mathrm{OP}}_2^2\quad\overline{\mathrm{OP}}_3^2+\ldots\ldots.+\overline{\mathrm{OP}}_n^2=n(r^2+k^2),$$

ce qui donne une expression bien simple de la somme des quarrés des droites menées aux sommets d'un polygone régulier d'un point quelconque de son plan, et montre que cette somme est la même pour tous les points également distants du centre du polygone, comme M. Sturm l'avait déjà remarqué (tom. XV, pag. 256).

Si le point O coïncide avec l'un des sommets du polygone, deux des droites OP_1, OP_2, OP_3, ... OP_n en sont des côtés et les autres sont des diagonales; mais alors $k=r$; en désignant donc par c l'un des côtés du polygone et par d_1, d_2, d_3, ... d_{n-3} les diagonales menées d'un sommet à tous les autres, on aura

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2+ \ldots\ldots +d^2_{n-3}+2c^2=2nr^2 ;$$

d'où

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2+ \ldots\ldots +d^2_{n-3}=2(nr^2-c^2) .$$

Si, par exemple, il s'agit de l'hexagone régulier, ou $n=6$ et $c=r$, on aura

$$d_1^2+d_2^2+d_3^3=10r^2 ;$$

mais ici l'on a $d_2=2r$ et $d_3=d_1$; donc

$$2d_1^2+4r^2=10r^2 ,$$

ou $$d_1^2=3r^2 \qquad \text{et} \qquad d_1=r\sqrt{3} ,$$

comme on doit l'avoir en effet.

THÉORÈME. Un polygone quelconque étant circonscrit à un cercle, et un autre cercle étant concentrique à celui-là; la somme des produits des côtés du polygone par les quarrés des distances d'un point quelconque de la circonférence du second cercle aux points de contact de ces côtés avec le premier, est une quantité constante.

Démonstration. Soit O le centre commun des deux cercles; soit r le rayon de celui auquel le polygone est circonscrit, et soit R le rayon de l'autre. Représentons par a, b, c, ... les côtés consécutifs du polygone; et désignons leurs points de contact par A, B, C, ... Soit enfin P un point pris arbitrairement sur la circonférence dont le rayon est R; et représentons respectivement par α, β, γ, ... les angles POA, POB, POC, ... parce que les angles qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux, les angles α, β, γ, ... seront aussi ceux que feraient les côtés a, b, c, ... du polygone avec une perpendiculaire indéfinie menée à OP, par le point O, de sorte qu'on aura, par un théorème connu (*).

$$a\mathrm{Cos}.\alpha+b\mathrm{Cos}\,\beta+c\mathrm{Cos}\,\gamma+\ldots=0\,. \qquad (1)$$

Cela posé, les triangles POA, POB, POC, ... donnent

$$\overline{PA}^2=R^2+r^2-2rR\mathrm{Cos}.\alpha\,,$$

$$\overline{PB}^2=R^2+r^2-2rR\mathrm{Cos}\,\beta\,,$$

$$\overline{PC}^2=R^2+r^2-2rR\mathrm{Cos}.\gamma\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Prenant la somme des produits respectifs de ces équations par a, b, c, ... et ayant égard à la relation (1), il viendra

$$\overline{PA}^2.a+\overline{PB}^2.b+\overline{PC}^2.c+\ldots=(R^2+r^2)(a+b+c+\ldots)\,, \qquad (2)$$

équation dont le second membre est indépendant du point P, sur la circonférence dont le rayon est R, comme l'annonce le théorème qui se trouve ainsi démontré.

Si le polygone était régulier, en représentant par n le nombre de ses côtés, l'équation (2) deviendrait

---

(*) Voyez, entre autres, la pag. 310 du XV.e volume du présent recueil.
J. D. G.

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\ldots\ldots=n(R^2+r^2)\ .$$

Si le point P était pris sur la circonférence même du cercle inscrit, on aurait $R=r$, et conséquemment

$$\overline{PA}^2.a+\overline{PB}^2.b+\overline{PC}^2.c+\ldots\ldots=2r^2(a+b+c+\ldots.)$$

et si, en outre le polygone était régulier, on aurait

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\ldots.=2nr^2\ .$$